ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROLAND GRUNIG

Probabilités conditionnelles régulières sur des tribus de type non dénombrable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, n° 3 (1965-1966), p. 227-229

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_3_227_0>

© Gauthier-Villars, 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 3, 1966, p. 227-229.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Probabilités conditionnelles régulières sur des tribus de type non dénombrable

par

Roland GRUNIG

I. — INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ le théorème de Radon-Nicodym permet d'affirmer l'existence d'une application de $\mathcal{A} \times \Omega$ dans $[0, 1]$ que nous noterons $P^{\mathcal{B}}(A, \omega)$ $(A \in \mathcal{A}, \omega \in \Omega)$ telle que $P^{\mathcal{B}}(A, .)$ est $\mathcal{B}$-mesurable et telle que l'on ait

$$\int_B P^{\mathcal{B}}(A, \omega) dP_{\mathcal{B}}(\omega) = P(A \cap B) \tag{1}$$

pour tout A dans $\mathcal{A}$ et tout B dans $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}}$ étant la restriction de P à $\mathcal{B}$.

$$P^{\mathcal{B}}(\Omega, \omega) = 1 \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout} \tag{2}$$

$$P^{\mathcal{B}}(\Phi, \omega) = 0 \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout} \tag{3}$$

$$P^{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i, \omega\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P^{\mathcal{B}}(A_i, \omega) \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout} \tag{4}$$

pour toute suite $\{A_i\}$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{A}$.

Il est bien évident que les ensembles $\mathcal{B}$-négligeables sur lesquels les égalités (2) (3) (4) ne sont pas vérifiées dépendent respectivement de Ω, Φ et des suites $\{A_i\}$.

On dit que P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$

s'il est possible de trouver dans la classe d'équivalence de la variable aléatoire $P^{\mathcal{B}}(A, .)$ un représentant que nous noterons $\widehat{P}^{\mathcal{B}}(A, \omega)$ vérifiant les conditions (2) (3) (4) pour tout ω.

Les principaux résultats affirmant l'existence de probabilités conditionnelles régulières sont dus à Jirina dans [*1*] et [*2*]. Les hypothèses essentielles utilisées dans ces articles sont la compacité de P et le fait que $\mathcal{A}$, dans [*1*], et $\mathcal{B}$, dans [*2*], sont des tribus de type dénombrable. Si l'on associe les résultats de Ionescu Tulcea dans [*3*] et la méthode et les résultats de Jirina dans [*2*], il apparaît que l'on peut remplacer l'hypothèse de dénombrabilité sur $\mathcal{B}$ par l'hypothèse de complétion de l'espace mesurable $(\mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, $P_{\mathcal{B}}$ étant la restriction de P à la tribu $\mathcal{B}$. Mais ceci présente un certain nombre d'inconvénients pour les applications. Plus récemment Métivier dans [*4*] en étudiant la désintégration des mesures boréliennes dans des espaces topologiques a pu éviter toute hypothèse de dénombrabilité et de complétion mais ceci au prix d'une hypothèse de nature topologique très stricte sur P : la régularité par rapport aux compacts métrisables.

II. — PROBABILITÉ CONDITIONNELLE RÉGULIÈRE DANS UN ESPACE IMAGE

Nous allons ici déduire de remarques extrêmement simples des exemples d'existence de probabilités conditionnelles régulières dans des cas où les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas de type dénombrable.

LEMME. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}_1$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}_1$. Si P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$, la restriction pour tout $\omega \in \Omega$ de $\widehat{P}^{\mathcal{B}}(., \omega)$ à $\mathcal{A}_1$ est, pour la restriction de P à $\mathcal{A}_1$ une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}_1$.

La démonstration est évidente.

On peut exprimer ce lemme sous une forme un peu plus générale et plus utile pour les applications.

Proposition. — Soit f une application bijective mesurable d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans un autre espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', P')$, P' étant la probabilité image de la probabilité P par l'application f, et soit $\mathcal{B}'$ une sous-tribu de $\mathcal{A}'$. Si P admet une probabilité $f^{-1}(\mathcal{B}')$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$, P' admet une probabilité $\mathcal{B}'$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}'$. La démonstration est encore évidente puisqu'on est ramené au lemme précédent, à un isomorphisme près, en posant $\mathcal{A}_1 = f^{-1}(\mathcal{A}')$.

Cas particuliers. — Si pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$ toute probabilité P' sur $\mathcal{A}'$ image de P par une application bijective mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ sur $(\Omega', \mathcal{A}')$ admet pour toute sous-tribu $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{A}'$ une probabilité $\mathcal{B}'$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}'$.

III. — APPLICATION

Les résultats précédents permettent, dès que l'on connaît l'existence de probabilités conditionnelles régulières, d'en obtenir d'autres sur des espaces un peu plus généraux :

Jirina a montré dans [*1*] que si la tribu $\mathcal{A}$ est de type dénombrable et la probabilité P compacte, P admet pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$. Nous avons vu d'autre part dans [*5*] que les espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ étant engendrée par une suite $\{ A_i \}$ $i = 1, 2, \ldots$ telle que toute probabilité sur $\mathcal{A}$ est compacte, sont caractérisés par le fait que l'image de Ω par la fonction caractéristique de la suite $\{ A_i \}$ (définie dans [*6*]) est universellement mesurable. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un tel espace de probabilité. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $P_{\mathcal{B}}$ la restriction de P à $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}}$ admet pour toute sous-tribu $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ une probabilité $\mathcal{D}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{B}$. Mais dans ce cas $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas forcément de type dénombrable et $P_{\mathcal{B}}$ n'est *a priori* qu'une probabilité parfaite.

Considérons par exemple sur [0, 1] la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les points et soit $P_{\mathcal{B}}$ la restriction à $\mathcal{B}$ d'une probabilité borélienne sur [0, 1]. Pour toute sous-tribu $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}}$ admet une probabilité $\mathcal{D}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{B}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] JIRINA M., Conditional probabilities on σ algebras with countable basis. *Cz. Math. J.*, 1954, p. 372-380.

[*2*] JIRINA M., On regular conditional probabilities. *Cz. Math. J.*, 1959, p. 445-450.

[*3*] IONESCU TULCEA A. et C., On the lifting property (2). *J. of Math. and Mech.*, Vol. II, septembre 1962, p. 773 à 795.

[*4*] MÉTIVIER M., Limites projectives de mesures. Martingales. Application. *Ann. di Mat. Pura ed App.* (4), Vol. 63, 1963, p. 225-352.

[*5*] GRUNIG R., *Mesures compactes, mesures parfaites* (Thèse de docteur de 3e cycle en calcul des probabilités), Université de Paris, 1965.

[*6*] SZPILRAJN E., The characteristic function of a sequence of sets and some of its application. *Fund. Mat.*, t. 31, 1938, p. 207-229.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1965).