ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ROLAND GRUNIG

Probabilités conditionnelles régulières sur des tribus de type non dénombrable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 2, nº 3 (1965-1966), p. 227-229

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1966__2_3_227_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. II, n° 3, 1966, p. 227-229. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Probabilités conditionnelles régulières sur des tribus de type non dénombrable

par

Roland GRUNIG

I. — INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. Pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ le théorème de Radon-Nicodym permet d'affirmer l'existence d'une application de $\mathcal{A} \times \Omega$ dans $[0, 1]$ que nous noterons $\mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, \omega)$ $(\mathrm{A} \in \mathcal{A}, \omega \in \Omega)$ telle que $\mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, .)$ est $\mathcal{B}$-mesurable et telle que l'on ait

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{B}} \mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\mathrm{A}, \omega) d\mathrm{P}_{\mathcal{B}}(\omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

pour tout A dans $\mathcal{A}$ et tout B dans $\mathcal{B}$, $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}$ étant la restriction de P à $\mathcal{B}$.

$$(2) \qquad \mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\Omega, \omega) = 1 \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout}$$

$$(3) \qquad \mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\Phi, \omega) = 0 \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout}$$

$$(4) \qquad \mathrm{P}^{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i, \omega\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}^{\mathcal{B}}(\mathrm{A}_i, \omega) \qquad \mathcal{B} \text{ presque partout}$$

pour toute suite $\{ \mathrm{A}_i \}$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{A}$.

Il est bien évident que les ensembles $\mathcal{B}$-négligeables sur lesquels les égalités (2) (3) (4) ne sont pas vérifiées dépendent respectivement de Ω, Φ et des suites $\{ \mathrm{A}_i \}$.

On dit que P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$

s'il est possible de trouver dans la classe d'équivalence de la variable aléatoire $P^{\mathcal{B}}(A, .)$ un représentant que nous noterons $\widehat{P}^{\mathcal{B}}(A, \omega)$ vérifiant les conditions (2) (3) (4) pour tout ω.

Les principaux résultats affirmant l'existence de probabilités conditionnelles régulières sont dus à Jirina dans [*1*] et [*2*]. Les hypothèses essentielles utilisées dans ces articles sont la compacité de P et le fait que $\mathcal{A}$, dans [*1*], et $\mathcal{B}$, dans [*2*], sont des tribus de type dénombrable. Si l'on associe les résultats de Ionescu Tulcea dans [*3*] et la méthode et les résultats de Jirina dans [*2*], il apparaît que l'on peut remplacer l'hypothèse de dénombrabilité sur $\mathcal{B}$ par l'hypothèse de complétion de l'espace mesurable $(\mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, $P_{\mathcal{B}}$ étant la restriction de P à la tribu $\mathcal{B}$. Mais ceci présente un certain nombre d'inconvénients pour les applications. Plus récemment Métivier dans [*4*] en étudiant la désintégration des mesures boréliennes dans des espaces topologiques a pu éviter toute hypothèse de dénombrabilité et de complétion mais ceci au prix d'une hypothèse de nature topologique très stricte sur P : la régularité par rapport aux compacts métrisables.

II. — PROBABILITÉ CONDITIONNELLE RÉGULIÈRE DANS UN ESPACE IMAGE

Nous allons ici déduire de remarques extrêmement simples des exemples d'existence de probabilités conditionnelles régulières dans des cas où les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas de type dénombrable.

LEMME. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $\mathcal{A}_1$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}_1$. Si P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$, la restriction pour tout $\omega \in \Omega$ de $\widehat{P}^{\mathcal{B}}(., \omega)$ à $\mathcal{A}_1$ est, pour la restriction de P à $\mathcal{A}_1$ une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}_1$.

La démonstration est évidente.

On peut exprimer ce lemme sous une forme un peu plus générale et plus utile pour les applications.

Proposition. — Soit f une application bijective mesurable d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans un autre espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', P')$, P' étant la probabilité image de la probabilité P par l'application f, et soit $\mathcal{B}'$ une sous-tribu de $\mathcal{A}'$. Si P admet une probabilité $f^{-1}(\mathcal{B}')$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$, P' admet une probabilité $\mathcal{B}'$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}'$. La démonstration est encore évidente puisqu'on est ramené au lemme précédent, à un isomorphisme près, en posant $\mathcal{A}_1 = f^{-1}(\mathcal{A}')$.

Cas particuliers. — Si pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, P admet une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$ toute probabilité P′ sur $\mathcal{A}'$ image de P par une application bijective mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ sur $(\Omega', \mathcal{A}')$ admet pour toute sous-tribu $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{A}'$ une probabilité $\mathcal{B}'$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}'$.

III. — APPLICATION

Les résultats précédents permettent, dès que l'on connaît l'existence de probabilités conditionnelles régulières, d'en obtenir d'autres sur des espaces un peu plus généraux :

Jirina a montré dans [*1*] que si la tribu $\mathcal{A}$ est de type dénombrable et la probabilité P compacte, P admet pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ une probabilité $\mathcal{B}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{A}$. Nous avons vu d'autre part dans [*5*] que les espaces mesurables $(\Omega, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ étant engendrée par une suite $\{ A_i \}$ $i = 1, 2, \ldots$ telle que toute probabilité sur $\mathcal{A}$ est compacte, sont caractérisés par le fait que l'image de Ω par la fonction caractéristique de la suite $\{ A_i \}$ (définie dans [*6*]) est universellement mesurable. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un tel espace de probabilité. Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et $P_{\mathcal{B}}$ la restriction de P à $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}}$ admet pour toute sous-tribu $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$ une probabilité $\mathcal{D}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{B}$. Mais dans ce cas $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas forcément de type dénombrable et $P_{\mathcal{B}}$ n'est *a priori* qu'une probabilité parfaite.

Considérons par exemple sur [0, 1] la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les points et soit $P_{\mathcal{B}}$ la restriction à $\mathcal{B}$ d'une probabilité borélienne sur [0, 1]. Pour toute sous-tribu $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}}$ admet une probabilité $\mathcal{D}$-conditionnelle régulière sur $\mathcal{B}$.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] Jirina M., Conditional probabilities on σ algebras with countable basis. *Cz. Math. J.*, 1954, p. 372-380.

[*2*] Jirina M., On regular conditional probabilities. *Cz. Math. J.*, 1959, p. 445-450.

[*3*] Ionescu Tulcea A. et C., On the lifting property (2). *J. of Math. and Mech.*, Vol. II, septembre 1962, p. 773 à 795.

[*4*] Métivier M., Limites projectives de mesures. Martingales. Application. *Ann. di Mat. Pura ed App.* (4), Vol. 63, 1963, p. 225-352.

[*5*] Grunig R., *Mesures compactes, mesures parfaites* (Thèse de docteur de 3e cycle en calcul des probabilités), Université de Paris, 1965.

[*6*] Szpilrajn E., The characteristic function of a sequence of sets and some of its application. *Fund. Mat.*, t. 31, 1938, p. 207-229.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1965).