ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MOUEZ DIMASSI

Développements asymptotiques pour des perturbations fortes de l'opérateur de Schrödinger périodique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 61, n° 2 (1994), p. 189-204
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1994__61_2_189_0>

© Gauthier-Villars, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 61, n° 2, 1994, p. 189-204. *Physique théorique*

Développements asymptotiques pour des perturbations fortes de l'opérateur de Schrödinger périodique

par

Mouez DIMASSI

Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques, Bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex, France.

ABSTRACT. – In the large-coupling constant limit ($\lambda \to +\infty$) we study the eigenvalues of the operators $P_{\lambda g(x)} = -\Delta + V(x) + \lambda g(x)$, where $g(x)$ is positive and $g(x) \sim c\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}$ as $|x| \to +\infty$ for some $\delta > 0$, $c(x) \in C^\infty(S^{n-1})$. $V(x)$ is periodic with respect to a lattice Γ. We obtain an assymptotic expansion in powers of $\lambda^{-1/\delta}$ of $\operatorname{tr} f(H_{\lambda g(x)})$ for $f \in C_0^\infty(I)$ where I is an open interval disjoint from the essential spectrum.

RÉSUMÉ. – Dans le cas des grandes constantes de couplage ($\lambda \to +\infty$) nous étudions les valeurs propres de l'opérateur $P_{\lambda g(x)} = -\Delta + V(x) + \lambda g(x)$, où $g(x)$ est positif et $g(x) \sim c\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta}$ à l'infini avec $\delta > 0$, $c(x) \in C^\infty(S^{n-1})$. $V(x)$ est périodique relativement à un réseau Γ. On obtient un développement asymptotique en puissances de $\lambda^{-1/\delta}$ de $\operatorname{tr} f(H_{\lambda g(x)})$ si $f \in C_0^\infty(I)$ et I est un intervalle ouvert qui ne rencontre pas le spectre essentiel.

Mots clés: Opérateurs de Schrödinger, limite semi-classique, grandes constantes de couplage, développements asymptotiques, potentiels périodiques, densité d'éclats.

1991 Mathematics Subjects Classifications: 35 J 10, 35 S 05, 35 C 20, 35 Q 40.

0. INTRODUCTION

Nous allons ici étudier le spectre d'opérateurs du type suivant:

$$P_{\lambda g(x)} = -\Delta + V(x) + \lambda g(x) \quad (\lambda \to +\infty) \tag{0.1}$$

où $V(x)$, $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, V est Γ-périodique, Γ étant un réseau de $\mathbb{R}^n \cdot g(x)$ est strictement positif en dehors d'un ensemble fini de points. On suppose qu'il existe $(\phi_j)_{0 \le j < \infty}$ de classe C^∞ tels que, pour tout entier $N \ge 0$ il existe $r_N(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tels que:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{N} \phi_j\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + r_N(x) \qquad \text{pour} \quad |x| \ge 1,$$

où

$$|\partial_x^\beta r_N(x)| \le C_\beta (1 + |x|)^{-|\beta|-\delta-N-1} \; \forall \beta.$$

Ici δ est une constante strictement positive et $\phi_0 > 0$.

On définit,

$$P = -\Delta + V(x).$$

P. A. Deift et R. Hempel [D-H] ont montré que pour presque toute énergie E dans un gap de H, il existe des valeurs du paramètre de perturbation λ tel que E soit valeur propre de $P_{\lambda g(x)}$. Ce résultat est retrouvé par F. Gesztesy et B. Simon [G-S]. Alama-Deift-Hempel [A-D-H], M. S. Birman $[B]_1$, $[B]_3$, M. S. Birman-M. Z. Solomyak $[B\text{-}S]_{1\text{-}5}$, R. Hempel [H] et Sobolev [So] ont étudié aussi la question du nombre des valeurs propres de $P_{\lambda g(x)}$ dans un gap de P.

Dans le régime semi-classique $(h \to 0)$, on a obtenu dans [Di] un développement asymptotique en puissances de h de $\operatorname{tr} f(P_{\psi(hy)})$ où $f \in C_0^\infty(I)$ et I un intervalle ouvert qui ne rencontre pas le spectre essentiel de $P_{\psi(hy)}$. Ici nous avons posé

$$P_{\psi(hy)} = -\Delta + V(y) + \psi(hy), \tag{0.2}$$

et nous supposons que $\psi(y)$ est une fonction de classe C^∞ qui est bornée ainsi que toutes ces dérivées.

Dans le présent travail nous allons montrer que l'étude de $\operatorname{tr} f(P_{\lambda g(x)})$ se ramène à un problème semi-classique via la formule

$$\operatorname{tr} f(P_{\lambda g(x)}) = \operatorname{tr} f(P_{\varphi(\lambda^{-1/\delta} x, \lambda^{-1/\delta})}) + O(\lambda^{-\infty}) \quad (\lambda \to +\infty) \tag{0.3}$$

où $\varphi(x, \lambda^{-1/\delta})$, admet un développement asymptotique en puissances de $\lambda^{-1/\delta}$, dont les coefficients sont des fonctions uniformément bornées en x

et de même pour leurs dérivées en x. De plus $\varphi(\lambda^{-1/\delta}x, \lambda^{-1/\delta})$ coïncide avec $\lambda g(x)$ en dehors de $\Omega_M(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n / \lambda g(x) \geq M\}$ pour M assez grand.

Le fait que les résultats dans [Di] restent valables pour des fonctions du type $\varphi(x, \lambda^{-1/\delta})$, $h = \lambda^{-1/\delta}$, nous ramène à un problème identique à (0.2). On obtient:

$$\operatorname{tr} f(P_{\lambda g(x)}) \sim \lambda^{n/\delta} \sum_{k\geq 0} a_k \lambda^{-k/\delta} \qquad (\lambda \to +\infty)$$

avec

$$a_0 = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{E^*} \sum_k f\left(\phi_0\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + \lambda_k(\xi)\right) d\xi\, dx.$$

(On désigne par $(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$ les valeurs propres de Floquet associées à H et E^* est une cellule de périodicité pour le réseau dual de Γ.)

1. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

Soit $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, Γ-périodique où $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \mathbb{Z}$ et les $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$: $V(x+\gamma) = V(x)$ quels que soient $\gamma \in \Gamma$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que:

$$g(x) \text{ est strictement positif.} \tag{H.1}$$

(Voir remarque 4.2 pour un affaiblissement de cette hypothèse.)

Il existe $\phi_j \in C^\infty(S^{n-1})$ $0 \leq j \leq \infty$ tel que

pour tout entier $N \geq 0$, il existe $r_N(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$g(x) = \sum_{j=0}^{N} \phi_j\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta-j} + r_N(x), \qquad |x| \geq 1, \tag{H.2}$$

où

$$|\partial_x^\beta r_N(x)| \leq C_\beta (1 + |x|)^{-|\beta|-N-\delta-1}, \quad \forall \beta.$$

Ici δ est une constante strictement positive et $\phi_0 > 0$. On définit:

$$P = -\Delta + V(x)$$
$$P_{h^{-\delta} g(x)} = P + h^{-\delta} g(x) \qquad (h \to 0).$$

$$\Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbb{R}^n / e^{i\langle \gamma \cdot \gamma^* \rangle} = 1, \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$$

E resp. E^*, un domaine fondamental borné du réseau Γ resp. Γ^*.

Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, soit $H_\xi = (D_y + \xi)^2 + V(y)$ l'opérateur auto-adjoint non borné sur $K_0 = L^2(\mathbb{R}^n/\Gamma)$ et soient $\lambda_k(\xi)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ les valeurs propres de H_ξ comptées avec leurs multiplicités que l'on range par ordre croissant. D'après la théorie de Floquet le spectre $\sigma(P)$ de P est la réunion de bandes J_k

$$\sigma(P) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k \qquad \text{avec} \quad J_k = \lambda_k(\mathbb{R}^n/\Gamma^*).$$

Il est bien connu que (cf. [Re-Si], [Sj]) le spectre de P est purement absolument continu.

D'après l'hypothèse (H.2) et la théorie des perturbations (plus précisément le théorème de Weyl) on a:

$$\sigma_{\text{ess}}(P_{\lambda g(x)}) = \sigma_{\text{ess}}(P) = \sigma(P).$$

(On rappelle que $\sigma_{\text{ess}}(A)$, le spectre essentiel de A, est donné par

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma(A) \backslash \sigma_{\text{disc}}(A)$$

où σ_{disc} est l'ensemble des valeurs propres de A isolées et de multiplicité finie.)

Fixons un intervalle fermé $K = [\alpha, \beta]$ tel que:

$$K \cap \sigma(P) = \phi.$$

Donc pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp}\, f \subset K$, $f(P_{\lambda g(x)})$ est un opérateur à trace.

Notre résultat principal est:

THÉORÈME 1.1. – *Soient $k = [\alpha, \beta]$ un intervalle fermé disjoint du spectre $\sigma(P)$ de P et f une fonction de classe C^∞ à valeurs réelles et à support dans K.*

On suppose que $g(x)$ vérifie (H.1) *et* (H.2). *Alors,*

$$\text{tr}\, f(P_{\lambda g(x)}) \sim \lambda^{n/\delta} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^{-k/\delta} \quad (\lambda \to +\infty)$$

avec

$$a_0 = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{E^*} \sum_{k \geq 1} f\left(\phi_0\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{-\delta} + \lambda_k(\xi)\right) d\xi\, dx.$$

($(\lambda_k(\xi))_{k \geq 1}$, désignent les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur $P = -\Delta + V(x)$.)

2. DÉBUT DE LA PREUVE DE (0.3)

On pose $\lambda = h^{-\delta}$ où δ est la constante introduite dans (H.2). Pour $M > 0$ fixé, on note:

$$\Omega_M(h) = \{x \in \mathbb{R}^n / h^{-\delta} g(x) \geq M\}.$$

D'après (H.1) et (H.2) il existe C_1, $C_2 > 0$ tel que

$$B(C_2 M^{-1/\delta} h^{-1}) \subset \Omega_M(h) \subset B(C_1 M^{-1/\delta} h^{-1})$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq C_1 M^{-1/\delta} h^{-1}\}$$

quand $M^{1/\delta} h > 0$ assez petit.

En utilisant (H.1), et (H.2) on peut construire deux fonctions $\varphi(x, h)$, $W_h(x)$ (h_0 dépend de M) tels que:

i) $\psi(x, h)$, $W_h(x)$ sont C^∞ en x pour $h \in]0, h_0]$.

ii) $h^{-\delta} g(x) = \varphi(hx, h) + W_h(x)$ avec $\operatorname{supp} W_h \subset \Omega_M(h)$.

iii) $\varphi(hx, h) \geq \dfrac{M}{2}$ pour $x \in \Omega_{M/2}(h)$.

iv) $|\partial_x^\beta \varphi(x, h)| \leq C_\beta \, \forall \beta$ (C_β est indépendant de h dans $]0, h_0]$).

On peut prendre

$$\varphi(x, h) = (1 - \chi(x)) h^{-\delta} g\left(\frac{x}{h}\right) + \mu\chi(x)$$

avec $\chi(x)$ de classe C^∞, égale à un voisinage de zéro et à support assez petit et μ assez grand.

Soit $b(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ supérieure à $M/3$, égale à t pour $t \geq \dfrac{M}{2}$. On pose

$$F_1(x, h) = b(\varphi(hx, h))$$
$$F_2(x, h) = b(h^{-\delta} g(x)).$$

Soit $\tilde{f}$ une extension de f (la fonction introduite dans le théorème) telle que

(a) $\tilde{f}(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$, $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \Omega$ (Ω: voisinage complexe de $\operatorname{supp} f$).

(b) $\tilde{f}(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

(c) $\bar{\partial}\tilde{f}(z) = O(|\operatorname{Im} z|^N)$ pour tous $N \in \mathbb{N}$, z dans Π où $\Pi = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

Alors on a

$$f(P_{h^{-\delta} g(x)}) = -\frac{1}{\Pi} \int \bar{\partial}\tilde{f}(z) (z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} (L\, dz). \tag{2.1}$$

Ici $(L\, dz)$ est la mesure de Lebesgue sur le plan complexe $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$. Pour plus de détails sur la formule (2.1) on renvoie à [He-Sj] voir aussi [Di].

Remarque 2.1.

1. Comme f est à support compact, alors pour M très grand $(z - P_{F_i})^{-1}$ $i = 1, 2$ est analytique dans un voisinage complexe de $\operatorname{supp} \tilde{f}$. Ici $P_{F_i} = -\Delta + V(x) + F_i(x, h)$.

2. Par construction de F_1 et F_2 on a:

$$\partial_x^\alpha F_i(x, h) = O(h^{-\delta}) \ \forall \alpha.$$

$$d(\operatorname{supp} W_h, \operatorname{supp}(h^{-\delta} g(x) - F_2(x, h))),$$
$$d(\operatorname{supp} W_h, \operatorname{supp}(\varphi(xh, h) - F_1(x, h)))$$
$$\geq d(\Omega_M(h), \Omega^c_{M/2}(h)) \geq \frac{a(M)}{h}. \tag{2.2}$$

($a(M)$ est une constante qui ne dépend que de M). □

Comme $h^{-\delta} g(x) = W_h(x) + \varphi(hx, h)$ on trouve

$$(z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} - (z - P_{\varphi(hx, h)})^{-1}$$
$$= (z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} W_h (z - P_\varphi)^{-1} \tag{2.3}$$

où $P_\varphi = P_{\varphi(hx, h)} = -\Delta + V(x) + \varphi(hx, h)$.

Une substitution de

$$(z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} = (z - P_{F_2})^{-1}$$
$$+ (z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} (h^{-\delta} g(x) - F_2(x, h)) (z - P_{F_2})^{-1} \tag{2.4}$$

et

$$(z - P_\varphi)^{-1} = (z - P_{F_1})^{-1}$$
$$- (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi(hx, h) - F_1(x, h))^{-1} (z - P_\varphi)^{-1} \tag{2.5}$$

à droite dans (2.3) donne

$$(z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} - (z - P_\varphi)^{-1} = (z - P_{F_2})^{-1} W_h (z - P_{F_1})^{-1}$$
$$- (z - P_{F_2})^{-1} W_h (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1) (z - P_\varphi)^{-1}$$
$$+ (z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} (h^{-\delta} g(x) - F_2(x, h))$$
$$\times (z - P_{F_2})^{-1} W_h (z - P_{F_1})^{-1}$$
$$- (z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1} (h^{-\delta} g(x) - F_2(x, h)) (z - P_{F_2})^{-1}$$
$$W_h (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1) (z - P_\varphi)^{-1}$$
$$= (1) + (2) + (3) + (4). \tag{2.6}$$

D'après la remarque 2.1 le premier terme du second membre de l'égalité (2.6) est analytique dans un voisinage de $\operatorname{supp} \tilde{f}$. Donc (2.1) entraîne

LEMME 2.2.

$$\operatorname{tr} f(P_{h^{-\delta} g(x)}) - \operatorname{tr} f(P_\varphi) = -\frac{1}{\Pi} \operatorname{tr}\left(\int \bar{\partial} \tilde{f}(z)(2)(Ld z)\right)$$
$$- \frac{1}{\Pi} \operatorname{tr}\left(\int \bar{\partial} \tilde{f}(z)(3)(Ld z)\right) - \frac{1}{\Pi} \operatorname{tr}\left(\int \bar{\partial} \tilde{f}(z)(4)(Ld z)\right).$$

Nous avons préparé la preuve du résultat suivant qui équivaut à (0.3).

PROPOSITION 2.3.. – *Sous les hypothèses* (H.1) *et* (H.2)

$$\operatorname{tr} f(P_{h^{-\delta} g(x)}) = \operatorname{tr} f(P_{\varphi(hx, h)}) + O(h^\infty), \qquad (h \to 0).$$

(On désigne par $O(h^\infty)$ une quantité qui est $O(h^N)$ pour tout $N \geq 0$.)

3. FIN DE LA PREUVE DE (0.3)

La preuve repose sur quelques lemmes. On rappelle que Ω est un voisinage complexe borné de $\operatorname{supp} f$, h_0 est la constante introduite pour la construction de $\varphi(x, h)$, $W_h(x)$.

LEMME 3.1. – *Fixons m dans $\mathbb{Z}$ et posons*

$$N(m) = \begin{cases} \left[\frac{m}{2}\right] + 1, & m \geq 0 \\ \left[-\frac{m}{2}\right], & m \leq -2 \\ 1, & m = -1. \end{cases}$$

Il existe $C = C(m)$, assez grand, tel que pour tous $z \in \Omega$, $h \in]0, h_0]$ et tout $(\psi_i)_{i=1,2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|\partial^\alpha \psi_i\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{C(m)}$ pour $1 \leq |\alpha| \leq |m| + 2$ et $\psi_1 = \psi_2$ sur $\operatorname{supp} W_h$ on a:

$$\|W_h \exp \psi_1(x)(z - P_{F_i})^{-1} \exp -\psi_2(x)\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+2}} \leq C(m) h^{-(N(m)+2)\delta} \tag{3.1}$$

$[x]$ est le plus grand entier $\leq x$.

Preuve. – On choisit M tel que

$$V(x) + F_i(x, h) - \operatorname{Re} z \geq \frac{M}{3} \qquad \forall z \in \Omega. \tag{3.2}$$

(On rappelle que $V(x)$, Ω sont bornées et $F_i(x, h) \geq \frac{M}{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $h \in]0, h_0]$.)

Pour $\|\nabla \psi_2\|_{L^\infty}$ assez petit, la formule

$$\begin{aligned} &\exp(\psi_2(x))\,(P_{F_i} - z)\,\exp -\psi_2(x) \\ &\quad = P_{F_i} - z - |\nabla \psi_2|^2 + \nabla \psi_2 \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla \psi_2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

et le fait que $\nabla \psi_2 \cdot \nabla + \nabla \cdot \nabla \psi_2$ est antisymétrique entraînent:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(\exp \psi_2(x)\,(P_{F_i} - z)\,\exp -\psi_2(x)\,u/u) \\ &\quad = ((P_{F_i} - \operatorname{Re} z\,|\nabla \psi_2|^2)\,u\,|\,u) \geq \frac{M}{4}\,\|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En utilisant (3.2), on obtient

$$\|\exp(\psi_2(x))\,u\|_{L^2} \leq \frac{4}{M}\|\exp(\psi_2(x))\,(P_{F_i} - z)\,u\|_{L^2}. \tag{3.4}$$

Par les inégalités elliptiques on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe a_m (constante qui ne dépend que de m) tel que pour tout $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leq a_m\,\|(-\Delta + 1)\,u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.5}$$

(3.5) combiné avec la formule

$$\begin{aligned} \exp \psi_2(x)\,(-\Delta + 1)\,\exp(-\psi_2(x)) = (-\Delta + 1) - |\nabla \psi_2|^2 \\ + \Delta \psi_2 + \nabla \psi_2 \cdot \nabla \end{aligned}$$

entraîne qu'il existe b_m tel que pour tout $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq a_m\,[&\|\exp(\psi_2(x))\,(-\Delta + 1)\,\exp(-\psi_2(x))\,u\|_{H^m} \\ &+ b_m \sup_{1 \leq |\alpha| \leq m+2} \|\partial^\alpha \varphi_2\|_{L^\infty}\,\|u\|_{H^{m+2}}]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc pour $a_m\,b_m \sup_{1 \leq |\alpha| \leq m+2} \|\partial^\alpha \psi_2\|_{L^\infty}$ assez petit (3.6) implique: il existe $C = C(m)$ tel que

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C(m)\,\|\exp(\psi_2(x))\,(-\Delta + 1)\,\exp(-\psi_2(x))\,u\|_{H^m}. \tag{3.7}$$

Comme $\partial_x^\alpha F_i(x, h) = O(h^{-\delta})\,\forall \alpha$, alors à partir de (3.7) on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{m+2}} \leq C(m)\,[&\|\exp(\psi_2(x))\,(P_{F_i} - z)\,\exp(-\psi_2(x))\,u\|_{H^m} \\ &+ O(h^{-\delta})\,\|u\|_{H^m}] \end{aligned} \tag{3.8}$$

et par induction par rapport à m on trouve que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\tilde{C} = \tilde{C}(m)$ tel que

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq \tilde{C}(m)\, h^{-(\left[\frac{M}{2}\right]+1)\delta} \left[\| \exp(\psi_2(x))\,(P_{F_i} - z) \times \exp(-\psi_2(x)) \|_{H^m} + \|u\|_{L^2} \right]. \tag{3.9}$$

Comme $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ sur $\operatorname{supp} W_h$ et $\partial_x^\alpha W_h(x) = O(h^{-\delta})\ \forall \alpha$ alors

$$\| \exp(\psi_1(x))\, W_h\, u\|_{H^{m+2}} = O(h^{-\delta}) \| \exp(\psi_2(x))\, u\|_{H^{m+2}}. \tag{3.10}$$

Maintenant pour $m \in \mathbb{N}$, (3.1) découle de (3.4), (3.9) et (3.10). Par dualité on obtient le cas $m \leq -2$ et par interpolation $m = -1$.

LEMME 3.2. – *Sous les conditions du lemme* 3.1 *et pour tous* k, $L \in \mathbb{N}$ *il existe* $\tilde{C} = \tilde{C}(m, k, L)$ *tel que*

$$\left\| \exp(\psi_1(x))\, W_h(x)\, (z - P_{F_i})^{-1} \begin{cases} \varphi - F_1 & i = 1 \\ h^{-\delta} g(x) - F_2 & i = 2 \end{cases} \right\|$$

$$\exp(-\psi_2(x)) \Big\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+k})} \leq \tilde{C} h^L, \tag{3.11}$$

quels que soient $z \in \Omega$, $b \in]0, h_0]$.

Preuve. – On démontre (3.11) explicitement dans le cas $i = 1$ et la même démonstration donne le cas $i = 2$. On rappelle que $\operatorname{supp} W_h$ est contenu dans la boule de centre zéro et de rayon $(C_1 h^{-1} M^{-1/\delta})$ et $d(\operatorname{supp}(\varphi - F_1), -\operatorname{supp} W_h) \geq \dfrac{a(M)}{h}$.

Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ des fonctions de classe C^∞, bornées tel que:

$$W_h \chi_1 = W_h$$
$$\chi_\nu \chi_{\nu-1} = \chi_{\nu-1} \quad 2 \leq \nu \leq k$$
$$(\varphi - F_1)\chi_k = 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned} & W_h (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1) \\ &= W_h \chi_1 \cdots \chi_k (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1) \\ &= W_h \chi_1 \cdots \chi_{k-1} [\chi_k, (z - P_{F_1})^{-1}] (\varphi - F_1) \\ &= W_h \chi_1 \cdots \chi_{k-1} [P_{F_1}, \chi_k] (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1) \\ &= W_h (z - P_{F_1})^{-1} [P_{F_1}, \chi_k] \cdots (z - P_{F_1})^{-1} \\ &\quad [P_{F_1}, \chi_\nu] (z - P_{F_1})^{-1} (\varphi - F_1). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ici, [,] est le commutateur de deux opérateurs: $[A, B] = AB - BA$. D'après (3.1)

$$\exp(\psi_1(x))\,[P_{F_1}, \chi_\nu]\,(z - P_{F_1})^{-1}\exp(-\psi_2(x)) = O(h^{-(N(m)+2)\delta})$$

dans $\mathcal{L}(H^m, H^{m+1})$.

En utilisant (3.12), (3.13) on obtient:

$$\|\exp(\psi_1(x))\,W_h(x)\,(z - P_{F_1})^{-1}\exp(-\psi_2(x))\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+k})} = O(h^{-\tilde{N}(m,k)}). \tag{3.14}$$

Soient $0 < a_1 < a_2$ tels que

$$\operatorname{supp} W_h \subset B\left(0, \frac{a_1}{h}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi - F_1 = 0 \quad \text{sur } B\left(0, \frac{a_2}{h}\right).$$

On considère une fonction positive $\chi(t)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ tel que:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a_1 \\ \tau & si \quad t > a_2 \end{cases}.\text{Ici } \tau \text{ est une constante } > 0.$$

On suppose que les dérivées d'ordre non nuls de χ sont assez petits en norme $L^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Pour $h \in]0, h_0]$, on pose:

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{h}\chi(hx).$$

D'après la construction de $\psi_h(x)$, (3.11) reste vrai si on remplace $\psi_2(x)$ par $\varphi_2(x) - \psi_h(x)$.

Comme $\exp -\psi_h(x) = \exp -\dfrac{\tau}{h}$ sur $\operatorname{supp}(\varphi - F_1)$, on trouve

$$\|\exp(\psi_1(x))\,W_h(x)\,(z - P_{F_1})^{-1}\exp -(\psi_2(x) - \psi_h(x))\,(\varphi - F_1)\exp - \psi_h(x)\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+k})} = O\left(h^{-\tilde{N}(m,k)}\exp -\frac{\tau}{h}\right)$$

ce qui achève la démonstration de (3.11). □

Pour $h > 0$, $z \in \Omega$, on note $K_i(x, y, z, h)$, $i = 1, 2$ le noyau de l'opérateur A_i

$$A_i = W_h(x)\,(z - P_{F_i})^{-1}\begin{cases} \varphi - F_1 & i = 1 \\ h^{-\delta}\,g(x) - F_2 & i = 2 \end{cases}.$$

PROPOSITION 3.3. – *Fixons N dans $\mathbb{N}$.*

Il existe $C = C(N)$ *tel que pour tous* $z \in \Omega$, $h \in]0, h_0]$ $|\alpha| \leq N$, $|\beta| \leq N$

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_i(x, y, z, h) = O\left(h^\infty \exp -\frac{1}{C}\right)[d(x, \operatorname{supp} W_h) + d(y, \operatorname{supp} W_h)]). \quad (3.15)$$

Preuve. – On prend $\psi_1(x) = \psi_2(x) \pm \omega \cdot x/C$ (C à choisir très grand pour que ψ_1, ψ_2 satisfassent aux conditions du lemme 3.2), $\omega \in S^{n-1}$. Pour $s > \frac{n}{2}$ le noyau $K(x, y)$ d'un opérateur A de $\mathcal{L}(H^{-s}, H^s)$ est donné par la formule

$$K(x, y) = \int K(x, t)\,\delta(t - y)\,dt = [A \cdot \delta(\bullet - y)](x) \quad (3.16)$$

(δ est la distribution de Dirac).

D'après les inégalités de Sobolev, en considérant y comme paramètre, il existe une constante C_s (qui ne dépend que de s) tel que:

$$|K(x, y)| \leq C_s \|A\|_{\mathcal{L}(H^{-s}, H^s)} \|\delta(\bullet - y)\|_{H^{-s}}.$$

Comme $\|\delta(\bullet - y)\|_{H^{-s}}$ est indépendant de y alors (quitte à remplacer C_s par $\tilde{C}_s$) on obtient:

$$|K(x, y)| \leq C_s \|A\|_{\mathcal{L}(H^{-s}, H^s)} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (3.17)$$

En appliquant (3.17) à l'opérateur $\exp\left(\pm \frac{\omega \cdot x}{C}\right) A_i \exp\left(\mp \frac{\omega \cdot x}{C}\right)$ et en tenant compte du lemme 3.2 on trouve que pour tout $s > \frac{n}{2}$ et tout entier $L \geq 0$, il existe $C(s, L)$ tel que

$$\left|\exp \pm\left(\frac{\omega \cdot (x - y)}{C}\right) K_i(x, y, z, h)\right| \leq C(s, L)\, h^L. \quad (3.18)$$

Du fait que $C(s, L)$ est indépendant de ω dans S^{n-1}, on peut remplacer dans le membre à gauche de l'inégalité (3.18) $\exp \pm \frac{\omega \cdot (x - y)}{C}$ par $\exp \frac{|x - y|}{2C}$. D'autre part sur $\Pi_x(\operatorname{supp} K_i(x, y, z, h)) \subset \operatorname{supp} W_h$ on a $|x - y| \geq d(y \operatorname{supp} W_h)$. Donc on aura

$$|K_i(x, y, z, h)| \leq C(s, L)\, h^L\, W_h(x) \exp -\frac{1}{2C}\, d(y, \operatorname{supp} W_h).$$

Ce qui donne (3.15) pour $|\alpha| = |\beta| = N = 0$.

(On rappelle que $W_h(x) = O(h^{-\delta})$ et $W_h(x)$ est à support compact.)

Pour N quelconque on utilise l'opérateur

$$T_i^{\alpha,\beta} = (\partial_x - \omega)^\alpha \exp(\omega \cdot x) A_i \exp(-\omega \cdot x)(-\partial_x + \omega)^\beta.$$

$T_i^{\alpha,\beta}$ vérifie (3.11). Car $(\partial_x - \omega)^\alpha = O(1)$ dans $\mathcal{L}(H^s, H^{s-|\alpha|})$.

Maintenant, il suffit de remarquer que le noyau associé à $T_i^{\alpha,\beta}$ est égal à $\exp(\omega \cdot (x-y)) \partial_x^\alpha \partial_y^\beta K_i(x, y, z, h)$. □

Comme conséquence de la proposition 3.3:

COROLLAIRE 3.4. – *Pour (h, z) dans $]0, h_0] \times \Omega$ $K_i(x, y, z, h)$ est C^∞ en (x, y) dans $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$.*

PROPOSITION 3.5. – *Soit A un opérateur dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$. On note $K(x, y)$ le noyau associé à A.*

Supposons que $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et pour tous multi-indices α, β tel que $|\alpha| + |\beta| \leq 2n+1$ on ait $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y) \in L'(\mathbb{R}^{2n})$. Alors A est un opérateur à trace et

$$\|A\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}(A, A^*)^{1/2} \leq C_n \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq 2n+1} \|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}.$$

(C_n est une constante qui ne dépend que de n.)

Preuve. – Considérons d'abord un autre opérateur $A \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}_n)$ avec noyau $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{T}_n \times \mathbb{T}_n)$ avec $\mathbb{T}_n = \mathbb{R}^n/(2\Pi\mathbb{Z})^n$.

Soit $e_\alpha = (\mathrm{vol}(\mathbb{T}_n))^{-1/2} \exp i(\alpha \cdot x)$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{K}(\alpha, \beta) = (A e_\alpha \cdot e_\beta) = \int_{\mathbb{T}_n \times \mathbb{T}_n} e^{i(\alpha y - \beta x)} K(x, y) \frac{dy\, dx}{\mathrm{vol}(\mathbb{T}_n)}$$

le coefficient de la matrice, dans la base (e_α) $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, associé à A.

Par intégration par parties, on a:

$$(1 + |\alpha| + |\beta|)^{2n+1} |\hat{K}(\alpha, \beta)| \leq \tilde{C}_n \sum_{|\mu|+|\gamma| \leq 2n+1} \|\partial_x^\mu \partial_y^\gamma K\|_{L^1(\mathbb{T}_n \mathbb{T}_n)}.$$

Donc

$$\|A\|_{\mathrm{tr}} \leq \sum_{\alpha,\beta} |\hat{K}(\alpha, \beta)| \leq C_n \times \sum_{|\mu|+|\gamma| \leq 2n+1} \|\partial_x^\mu \partial_y^\gamma K\|_{L^1(\mathbb{T}_n, \mathbb{T}_n)}. \tag{3.19}$$

(3.19) reste vraie si $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$
avec $\operatorname{supp} K \subset (]-\Pi, \Pi[)^{2n}$. (*)

Pour $K(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ on introduit la fonction $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp}\chi \subset (]-\Pi, \Pi[)^n$ et $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \chi(x-\alpha) = 1$.

$$K(x, y) = \sum_\alpha \sum_\beta \chi(x-\alpha) K(x, y) \chi(y-\beta) = \sum_\alpha \sum_\beta K_{\alpha,\beta}(x, y).$$

Comme la norme trace est invariante par translation, alors d'après (*)

$$\|K\|_{\mathrm{tr}} \leq \sum_\alpha \sum_\beta \|K_{\alpha,\beta}\|_{\mathrm{tr}} = \sum_\alpha \sum_\beta \|\chi(x) K(x+\alpha, y+\beta) \chi(y)\|_{\mathrm{tr}}$$

$$\leq C_n \sum_{|\gamma|+|\mu|\leq 2n+1} \|\partial_x^\gamma \partial_y^\mu K(x, y)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Preuve de la proposition 2.3. – On rappelle que:

$$\bar\partial \tilde f(z) = O(|\operatorname{Im} z|^N) \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

D'après les propositions 3.3, 3.5

$$\left\| W_h(z) (z - P_{F_i})^{-1} \begin{cases} \varphi - F_1 & i=1 \\ h^{-\delta} g(x) - F_2(x, h) & i=2 \end{cases} \right\|_{\mathrm{tr}} = O(h^\infty). \tag{3.21}$$

Comme $\|(z - P_\varphi)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$, $\|(z - P_{h^{-\delta} g(x)})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ sont $O(|\operatorname{Im} z|^{-1})$ alors en utilisant (2.6) et (3.21) on a

$$\|(2)\|_{\mathrm{tr}}, \qquad \|(3)\|_{\mathrm{tr}}, \qquad \|(4)\|_{\mathrm{tr}}, \text{ sont } O(h^\infty |\operatorname{Im} z|^{-2}). \tag{3.22}$$

Maintenant le lemme découle de (2.7), (3.20) et (3.22). □

4. PREUVE DU THÉORÈME 1.1

Dans [Di] on a montré que pour toute fonction $\psi(y)$, bornée ainsi que toutes ces dérivées,

$$\operatorname{tr} f(P_{\psi(hy)}) \sim h^{-n} \sum_{k\geq 0} a_k h^k, \quad h \to 0,$$

$$P_{\psi(hy)} = -\Delta + V(y) + \psi(hy) \tag{4.1}$$

si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \cap \sigma_{\mathrm{ess}}(P_{\psi(hy)}) = \phi$.

$$\text{Avec } a_0 = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{E^*} \sum_{k\geq 1} f(\psi(x) + \lambda_k(\xi))\, d\xi\, dx.$$

($(\lambda_k(\xi))_{k\geq 1}$, désignent les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur $P = -\Delta + V(y)$.)

Ce résultat reste vrai pour des fonctions $\psi = \psi(y, h)$ telles que

i) $\psi(y, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y)$ pour $h \in]0, h_0]$.

ii) Il existe $(\psi_j)_{0\leq j<\infty}$ de classe C^∞, bornées ainsi que toutes leurs dérivées uniformément en h dans $]0, h_0]$, tel que pour tout entier $N \geq 0$ il existe $R_N(y, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_y)$ tel que:

$$\psi(y, h) = \sum_0^N h^j \psi_j(y) + h^{N+1} R_N(y, h)$$

avec $|\partial_y^\alpha R_N(y, h)| \leq C_\alpha$, $\forall \alpha$, (C_α indépendant de h dans $]0, h_0]$).

Bien entendu il faut maintenant prendre f avec

$$\operatorname{supp} f \cap \sigma_{\text{ess}}(P_{\psi_0(hy)}) = \phi$$

et remplacer ψ par ψ_0 dans la formule (4.2) pour obtenir

$$a_0 = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n_x} \int_{E^*} \sum_{k\geq 1} f(\psi_0(x) + \lambda_k(\xi))\, d\xi\, dx. \tag{4.3}$$

Comme la fonction $\varphi(x, h)$ vérifie les propriétés i) et ii) alors le théorème résulte de (4.1), (4.3) et du lemme 2.3.

Remarque 4.2.

1) Le théorème 1.1 reste encore vrai si on remplace (H.1) par

$$(\tilde{H}.1): \quad g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \qquad g(x) \geq 0$$
$$\text{et} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n_x / g(x) = 0\} \text{ est fini.}$$

En effet dans la démonstration on a utilisé le fait que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour tout } C > 0, \text{ il existe } \varepsilon,\ h_0 > 0 \text{ tel que :} \\ \qquad \inf_{\varphi \in C_0^\infty(B(\varepsilon/h))} \left(\int (-\Delta_{B(\varepsilon/h)} + V(x) \right. \\ \qquad \left. + h^{-\delta} g(x)) \varphi(x) \cdot \bar{\varphi}(x)\, dx \right) \geq C, \\ \text{quel que soit } h \in]0, h_0], \quad \text{où } -\Delta_{B(\varepsilon/h)} + V(x) + h^{-\delta} g(x) \\ \text{est l'opérateur de Dirichlet sur la boule} \\ \qquad B(\varepsilon/h) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / |x| < \frac{\varepsilon}{h} \right\}. \end{array}\right\} \text{(R)}$$

Or (R) reste vraie sous (H̃.1) et (H.2).

2) Comme $V(x)$ est périodique alors on peut définir la densité intégrée d'états (associée à l'opérateur $P = -\Delta + V(x)$)

$$\rho(t) = \rho(]-\infty, t]) \overset{\text{def}}{=} \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{\operatorname{vol} B(0, R)} \dim 1_{]-\infty, t]} P_{B(0, R)}.$$

Ici $1_{]-\infty, t]} P_{B(0, R)}$ est le projecteur spectral de $P_{B(0, R)}$ sur $]-\infty, t]$.

Il est bien connu (cf. M. A. Shubin [Sh], W. Kirsh, F. Martinelli [K-M] que

i) $\rho(t)$ est indépendant des conditions aux bords sur $B(0, R)$.

ii) $\rho(t)$ est croissante et est une fonction absolument continue.

iii) $\rho(t) = \int_{E^*} \Big(\sum_{\lambda_j(\xi) \leq t} 1 \Big) d\xi$ ($(\lambda_j(\xi))_{j \geq 1}$ désignent les valeurs propres de Floquet associées à P.)

Soit $d\rho(t)$ la mesure de Stieljes associée à $\rho(t)$. Comme $\rho(t)$ est absolument continu alors $\dfrac{d\rho(t)}{dt} \in L'_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, et donc

$$d\rho(t) = \frac{d\rho(t)}{dt}\, dt. \tag{4.4}$$

Pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} \int f(t)\, d\rho(t) &= \int f(t) \frac{d\rho(t)}{dt}\, dt = -\int f'(t)\, \rho(t)\, dt \\ &= -\int f'(t) \left(\int_{E^*} \sum_{\lambda_j(\xi) \leq t} 1\, d\xi \right) dt \\ &= \int_{E^*} \sum_j f(\lambda_j(\xi))\, d\xi. \end{aligned} \tag{4.5}$$

En utilisant (4.5) on peut écrire a_0 sous la forme

$$a_0 = (2\Pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{\mathbf{R}_t} f\left(t + \phi_0\left(\frac{x}{|x|} \right) |x|^{-\delta} \right) d\rho(t)\, dx. \tag{4.6}$$

Le coefficient a_0, sous la forme (4.6), est trouvé par Alama-Deift-Hempel [A-D-H] et Sobolev [So], dans le cas où f est égale à $\chi_{[E_1, E_2]}(x)$.

(Ici $\chi_{[E_1, E_2]}(x)$ est la fonction indicatrice sur un trou $[E_1, E_2]$ dans le gap de P.)

RÉFÉRENCES

[A-D-H] S. ALAMA, P. DEIFT, R. HEMPEL, Eigenvalue branches of the Schrödinger operators $H - \lambda\omega$ in a gap of $\sigma(H)$, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 121, 1989, pp. 291-321.

[Bi] M. SH. BIRMAN: [1] Discret spectrum in the gap of the continuous one in the large coupling limit, *Oper. Theory: Adv. Appl.*, Vol. 46, 1990, pp. 17-25. [2] The discret spectrum in a gap of the perturbed periodic operator at large coupling constants, *Proc. Conf. Rigorous Results in Quantum Dynamics*, Liblice Castle, June 11-15, 1990 (to appear). [3] On discret spectrum in gaps of a perturbed periodic second order operator, *Funktional Anal i Prilozken* (to appear).

[B-S] M. S. BIRMAN and M. Z. SOLOMYAK: [1] Estimates for the singular numbers of integral operators, *Uspekhi Mat. Nank.*, Vol. 32, 1977, pp. 17-84, English trans. in Russian Math. Surveys, Vol. 32, 1977, pp. 15-89. [2] Asymptotic behaviour of the spectrum of pseudo-differential operators with anisotropically homogeneous symbols, I, *Vestnik Leningrad Uni. Math. Mekh. Astronom.*, 1977, n° **13**, pp. 3-21; II, 1989, n° **3**, 5, 10; English trans. in *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, Vol. 10, 1982; Vol. 12, 1980. [3] Negative discret spectrum of the Schrödinger operator with large coupling constant: a qualitative discussion, *Ope. Theory: Adv. App.*, Vol. **46**, 1990, pp. 3-16. [4] Schrödinger operator. Estimates for the number of the bound states as a function-theoretic problem, *Lectures of the XIV School on operator theory and Funciton Spaces*, I, Novgorod, 1990; English trans., Amer. Math. Soc., Providence RI (to appear). [5] Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalizations, *Advances in Soviet Mathematics*, Vol. **7**, 1991.

[D-H] P. A. DEIFT and R. HEMPEL, On the existence of eigenvalue of the Schrödinger operator $(H - \lambda W)$ in a spectral gap of, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 103, 1986, pp. 461-490.

[Di] M. DIMASSI, Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique, à paraître dans *Comm. in P.D.E.*, 1993.

[G-S] F. GESZTESY, B. SIMON, On a theorem of Deift and Hempel, *Comm. Math. Phys.*, Vol. 118, 1988, pp. 597-634.

[He-Sj] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, Équation de Schrödinger avec champ magnétique fort et équation de Harper, Preprint Juin 1988.

[H] R. HEMPEL, On the asymptotic distribution of the eigenvalue branches of a Schrödinger operator $(H - \lambda W)$ in a spectral gap of H, *J. Reine Angew. Math.*, Vol. **399**, 1989, pp. 38-59.

[K-M] W. KIRSH, F. MARTINELLI, On the density of states of Schrödinger operators with a random potential, *J. Phys. A. Math. Gen.*, Vol. **15**, 1982, pp. 2139-2156.

[Re-Si] M. REED, B. SIMON, Methods of modern mathematical physics, I-IV, Academic Press, pp. 1974-1979.

[Sh] M. A. SHUBIN, The spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic-coefficients, *Russian Math. Surveys*, Vol. **34**, 1979, pp. 109-157.

[Sj] J. SJÖSTRAND, Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions, *Lectures Notes in Mathematics*, Vol. **1495**, 1989, pp. 237-332.

[So] A. V. SOBOLEV, Weyl asymptotics for the discret spectrum of the perturbed Hill operator, *Advances in Soviet Mathematics*, Vol. **7**, 1991, pp. 159-178.

(Manuscrit reçu le 25 juin 1993;
version révisée reçue le 22 novembre 1993.)