

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

H. BACRY

## **Le spin et la relativité restreinte**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 56, n° 4 (1992), p. 345-356

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1992\\_\\_56\\_4\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1992__56_4_345_0)

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Le spin et la relativité restreinte**

par

**H. BACRY**

Centre de Physique Théorique, C.N.R.S. et Faculté des Sciences de Marseille-Luminy,  
Case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France

---

**RÉSUMÉ.** — Le remplacement de l'opérateur de position de Schrödinger par un opérateur impliquant les variables de spin nous conduit à modifier légèrement les formules de transformation de Lorentz. Nous donnons une dérivation de la façon dont l'énergie, l'impulsion, les coordonnées d'espace et de temps se transforment sous un boost.

**ABSTRACT.** — The replacement of the Schrödinger position operator by a new one involving the spin variables obliges us to modify slightly the formulas of Lorentz transformations. Here we give a classical description of the way energy, momentum, space and time coordinates transform under a boost.

---

Un examen approfondi des fondements de la relativité restreinte classique et de ses prolongements quantiques m'a conduit à envisager une reformulation de cette théorie afin de résoudre les difficultés de principe qui lui sont attachées. La présente note vise à publier les premiers résultats de cette investigation.

Il me faut tout d'abord rappeler le plus brièvement possible les raisons qui m'ont conduit aux modifications proposées, raisons dont on trouvera par ailleurs une description détaillée ([1]-[5]) et qu'il me faut relier entre elles.

Le plus grand succès de la relativité restreinte est, sans conteste, celui de la conservation de l'énergie-impulsion relativiste avec, en particulier, la fameuse formule d'Einstein  $E=mc^2$ . La validité de cette loi de conservation dans le domaine quantique oblige toute nouvelle théorie à la reprendre en compte d'une manière ou d'une autre. Insistons en passant sur le rôle essentiel que joue cette loi en électrodynamique dans le calcul des diagrammes de Feynman.

A l'opposé, la validité de l'espace-temps de Minkowski est loin d'être aussi bien assurée. Elle peut être contestée à plusieurs niveaux.

1. Dans sa tentative de description concrète de mesure des longueurs et du temps à l'aide d'horloges et de signaux *lumineux*, Einstein fait implicitement une approximation qui, si elle était comprise de façon stricte, contredirait la théorie de Maxwell. En effet, un signal *lumineux* ne peut être capté que par un récepteur dont les dimensions sont de l'ordre de quelques longueurs d'onde. Cela oblige à prendre en considération des distances entre des « points » dont l'étendue est de l'ordre de quelques microns. La théorie est donc essentiellement une théorie macroscopique. Le remplacement des signaux lumineux par des signaux de longueur d'onde plus courte ne résout pas cette difficulté car la longueur d'onde d'une onde électromagnétique n'est pas un invariant relativiste : il existera toujours un observateur pour dire que la longueur d'onde est supérieure à toute longueur donnée à l'avance. En conséquence, une fois que l'on a convenu de l'ordre de grandeur de l'étendue des « points » matériels, on se trouve nécessairement limité quant aux transformations de Lorentz autorisées. Un corollaire est qu'on ne saurait considérer l'espace de la relativité restreinte comme composé de points au sens euclidien du terme [4].

2. A cette difficulté propre à la relativité restreinte classique, considérée comme une théorie *per se*, vient se greffer celle due au spin du photon [2]. On pourra s'étonner de me voir évoquer le spin à propos de la relativité classique. En effet, pour la plupart des physiciens, le spin est une observable essentiellement quantique. Il existe cependant un équivalent classique de cette notion tout à fait acceptable, sauf pour des particules de masse nulle comme le photon. Chacun sait que le spin du photon a pour origine la transversalité des ondes de Maxwell. Bien que ce soit justement la confrontation de la mécanique avec la théorie de Maxwell qui soit à l'origine de la relativité restreinte, cette propriété de transversalité est délibérément ignorée dans l'analyse einsteinienne par signaux lumineux. Pour expliquer en quoi l'espace de Minkowski est incompatible avec la transversalité des ondes de Maxwell, il nous faut examiner certains résultats des travaux de Wigner en physique quantique. Nous soulignerons auparavant le succès incontestable du travail de Wigner sur les représentations irréductibles du groupe de Poincaré [6] qui met en évidence le rôle privilégié de l'espace des énergie-impulsions et celui du moment angulaire de spin.

Cette investigation situe dans un seul et même cadre le photon et les autres particules, une situation que j'ai désignée ailleurs sous le nom de *symétrie de de Broglie* [5]. Il est remarquable que dans son étude sur le groupe de Poincaré, Wigner ne fait aucune référence à l'espace-temps de Minkowski car, à aucun moment, celui-ci ne semble nécessaire. C'est plus tard que Wigner s'intéressera avec Newton [7] au problème de l'opérateur position pour chaque type de particule, probablement avec l'espoir de découvrir quelque information sur l'espace-temps. Ce problème sera placé dans un contexte plus rigoureux par Wightman [8] et, indépendamment, par Mackey [9], toujours dans le cadre même des représentations du groupe de Poincaré, en faisant usage de la notion de système d'imprimitivité de Mackey [10]. Ces travaux remarquables sur les états localisés des systèmes aboutissent à des résultats décevants du point de vue de la physique; parmi ceux-ci nous retiendrons le suivant : *le photon ne possède pas d'états localisés*, ce qui signifie, pour être plus précis, que *dans l'espace de Hilbert des états à un photon* <sup>(1)</sup>, *aucun vecteur ne peut être interprété comme décrivant un photon localisé dans une région donnée de l'espace*. Soulignons que cette difficulté est propre aux particules sans masse et d'hélicité non nulle. La transversalité des ondes de Maxwell brise la symétrie de de Broglie !

On pourrait croire que cet état des choses est inhérent à la mécanique quantique. Il n'en est rien. Lorsque je me suis aperçu ([11], [12]) que l'on pouvait définir un espace des phases pour les particules massives, avec ou sans spin, à partir du seul groupe de Poincaré, je me suis heurté à une impossibilité d'une telle approche pour le photon. Les résultats insatisfaisants des travaux de Newton-Wigner-Wightman-Mackey avaient leur contrepartie dans cette tentative. Malgré les travaux remarquables que cette tentative a suscités chez Souriau et son école sur les orbites symplectiques du groupe de Poincaré ([13], [14]) [orbites classées par Arens ([15]-[17])], je restais convaincu que ce groupe devait être remis en cause pour des raisons physiques. Vingt ans plus tard, je comprenais mon erreur : en réalité, les succès du groupe de Poincaré concernant l'espace des énergie-impulsions nous forcent à conserver ce groupe en physique microscopique. Pour rétablir la symétrie de de Broglie et résoudre les difficultés du photon il suffit de réviser notre conception de l'espace-temps, *et seulement de l'espace-temps*. Après tout, l'électrodynamique quantique ignore l'espace-temps *en tant que tel*. Malgré leur origine, les paramètres  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  de l'électrodynamique quantique jouent un rôle qui n'a rien à voir avec les horloges et les signaux d'Einstein : (a) ce sont des indices muets lorsqu'il

---

(1) Mentionnons ici, à ce propos, l'une des contradictions actuelles des traités de physique quantique. La plupart des traités font comme si cet espace de Hilbert n'existait pas puisqu'ils affirment qu'un photon est toujours dans un état propre des opérateurs énergie et impulsion.

s'agit d'intégrer une densité lagrangienne, (b) ils permettent d'écrire la localité des interactions (théories de jauge incluses) mais cette localité est brouillée par la renormalisation. Ne pourrait-on pas espérer que l'intervention du spin (qui se mesure en unités  $\hbar/2$ ) dans la structure de l'espace-temps vienne apporter quelque amélioration à l'électrodynamique quantique? En d'autres termes, ne faudrait-il pas introduire la constante de Planck dans l'espace-temps *avant* de construire une théorie des champs?

Une piste dans cette voie fut fournie par la découverte fortuite d'un candidat pour l'opérateur position du photon [18]. Les composantes X, Y, Z de cet opérateur ne commutent pas, cela revenait à admettre qu'il était impossible de mesurer simultanément les trois coordonnées de la position du photon. Malgré le caractère révolutionnaire et séduisant de cet opérateur, ce n'est que plus tard, en 1986, après des conversations encourageantes avec Alain Connes, que je m'attaquais véritablement à l'exploration de ce problème. Il allait de soi qu'on ne pouvait accepter, pour l'opérateur position du photon, des règles distinctes de celles qui étaient appliquées aux autres particules. Cela entraînait inévitablement le rejet de l'opérateur de Newton-Wigner et, par conséquent, le rejet des axiomes de Wightman. C'est ce qui me conduisit à la proposition faite dans la référence [1] et discutée dans [2], [3] et [5]. Je me contenterai ici de rappeler cette proposition et d'énumérer les principaux arguments qui viennent militer en sa faveur.

Soient  $M_{\mu\nu}$  et  $P_\mu$  les opérateurs moments d'une représentation du groupe de Poincaré associée à une particule de type donné. Le tenseur antisymétrique  $M_{\mu\nu}$  a une partie « magnétique »  $\mathbf{J}$  et une partie « électrique »  $\mathbf{K}$ . C'est le vecteur

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{H} \mathbf{K} + \mathbf{K} \frac{1}{H} \right) \quad (1)$$

qui sert de définition au nouvel opérateur position (H est mis à la place de  $P_0$ ). Plus précisément (puisque toute observable quantique a un pendant classique) cet opérateur est l'équivalent quantique de la *position d'une droite d'univers* dans l'espace-temps (c'est-à-dire une infinité d'événements) et n'importe quel opérateur  $\mathbf{R}(t)$  obtenu en remplaçant dans la formule de définition (1) le vecteur  $\mathbf{K}$  par  $\mathbf{K} + t\mathbf{P}$  joue le même rôle que  $\mathbf{R}$ . Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque.

Avant de passer en revue les arguments en faveur du nouvel opérateur, je me dois de souligner, au risque de surprendre, qu'il intervient *explicitement* dans l'électromagnétisme *classique* de Maxwell [il est désigné par  $iD$  dans l'ouvrage [19] <sup>(2)</sup>] et que si l'on applique la définition (1) à l'électron

---

<sup>(2)</sup> C'est à ma connaissance le seul endroit où il apparaît. Bien entendu, puisqu'il s'agit d'un cadre classique, il n'est pas interprétable comme observable.

de Dirac (représentation *réductible* du groupe de Poincaré), on obtient l'opérateur position  $X_s$  proposé par Schrödinger [20] pour résoudre les difficultés d'interprétation de l'équation de Dirac (à savoir l'intervention des états à énergie négative, le paradoxe de la vitesse et le paradoxe de Klein). La postérité n'a retenu de cette proposition de Schrödinger que le fameux *zitterbewegung* décrit par la différence entre le vecteur  $X_s$  et l'opérateur usuel de position  $X$ . Il serait injuste de ne pas mentionner également les tentatives de nombreux auteurs pour pallier l'absence d'opérateur position pour le photon. Force est de constater cependant qu'aucune d'elles n'a été exploitée avec conviction par ces auteurs <sup>(3)</sup>.

Venons-en à l'énumération des arguments en faveur de l'adoption de l'opérateur position dont nous venons de rappeler la définition.

1. La symétrie de de Broglie est rétablie. Les particules sont placées dans un même cadre théorique vis-à-vis de la relativité.

2. L'idée qu'un photon est d'autant mieux localisable que son énergie (ou son impulsion) est plus grande est établie avec rigueur. Rappelons que, jusqu'ici, les relations d'incertitude de Heisenberg n'étaient pas applicables au photon.

3. Le phénomène des interférences lumineuses se voit muni d'une interprétation corpusculaire de principe, le passage par des fentes pouvant s'interpréter comme une mesure de position. On se passe ainsi du principe de complémentarité de Bohr <sup>(4)</sup>.

4. Pour expliquer la disparition *progressive* de la figure d'interférences électroniques obtenues à l'aide de fentes, lorsqu'on éclaire ces électrons par une source de lumière, on présente usuellement deux explications distinctes, suivant la nature de la source employée : une explication corpusculaire si l'on fait croître progressivement le flux de photons émis par la source, une explication ondulatoire si l'on fait croître la fréquence de la source [22]. Pour une situation intermédiaire où l'on ferait varier simultanément ces deux facteurs, le principe de complémentarité de Bohr se montre impuissant à fournir une interprétation. Avec le nouvel opérateur, l'interprétation corpusculaire est suffisante car la non-commutativité des coordonnées induit une relation de Heisenberg qui équivaut à l'incertitude donnée par la tache de diffraction (ondulatoire) sur la position de l'électron que l'on essaie de cerner en l'éclairant.

---

<sup>(3)</sup> Citons cependant l'article [21] dans lequel les auteurs introduisent un opérateur position pour les particules de spin un. Il s'agit d'un cas particulier de l'opérateur dont il est question ici.

<sup>(4)</sup> Il est bon de noter, à ce propos, que la plupart des physiciens réagissent de façon polie à l'énoncé du principe de complémentarité de Bohr. On soulignait ses difficultés d'application quand on n'allait pas jusqu'à affirmer qu'il était pratiquement incompréhensible.

5. A l'approximation galiléenne, ce nouvel opérateur position redonne l'opérateur de position habituel de Schrödinger de la mécanique quantique non relativiste.

6. A l'approximation non relativiste (des faibles impulsions <sup>(5)</sup>), le remplacement de l'opérateur habituel de Schrödinger par le nouvel opérateur dans l'expression du potentiel fournit, comme terme correctif au premier ordre, le traditionnel couplage spin-orbite.

7. Un travail récent de Grigore tend à formuler la contrepartie des axiomes de Wightman en physique symplectique [23]. Les conclusions auxquelles il aboutit confirment que les difficultés sur la position sont indépendantes du caractère quantique. Les crochets de Poisson qu'il propose pour le photon constituent une confirmation de ma proposition. Un article indépendant [24] vient également l'appuyer.

On se demandera, à juste raison, si le remplacement de l'opérateur de position de Newton-Wigner par celui de l'équation (1) constitue un bouleversement important. En ce qui concerne les particules massives sans spin, les deux opérateurs coïncident et conduisent, à l'approximation non relativiste, à l'opérateur de Schrödinger de la mécanique quantique. Pour les particules massives à spin, l'écart entre les deux opérateurs est insignifiant même aux énergies relativistes; cet écart est maximal pour une énergie égale à  $\varphi mc^2$ , où  $\varphi$  est le nombre d'or. Cela représente, pour un électron, une correction au plus égale à  $\sqrt{\sqrt{5}-2}=0,243$  fois la longueur d'onde Compton. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce terme correctif est responsable du couplage spin-orbite.

Le grand bouleversement intervient pour les particules de masse nulle à spin (neutrinos et photon). La localisabilité croît avec l'énergie de la particule. On *peut* parler de photons de longueur d'onde kilométrique. Ils sont *mal localisés*. Pour pouvoir l'affirmer, il fallait définir un opérateur position.

Examinons maintenant ce que la relation (1) implique comme limite classique ou, pour s'exprimer autrement, cherchons comment devrait être modifié l'espace de Minkowski lorsqu'on introduit la notion de spin. Il est clair que la nécessité de lier le spin au problème de la localisation entraîne la disparition de la ressemblance formelle entre espace de Minkowski et espace d'énergie-impulsion.

On sait qu'en mécanique quantique, la décomposition barycentrique habituelle du moment cinétique en moment orbital et moment de spin n'est valable que pour des particules massives; il est naturel de modifier la formule correspondante de telle sorte que les observables soient les mêmes pour *toutes* les espèces de particules. Cette exigence nous amène à

---

(<sup>5</sup>) Qu'il faut distinguer de l'approximation galiléenne où  $c$  tend vers l'infini.

définir de nouvelles variables. Précisons : l'opérateur position de Newton-Wigner  $\mathbf{Q}$  fournit, pour les particules massives, la décomposition suivante du moment angulaire :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

où  $\mathbf{L} = \mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  (moment orbital) et  $\mathbf{S}$  (moment de spin) vérifient séparément les relations de commutation des moments angulaires. Avec le nouvel opérateur position  $\mathbf{R}$ , on est amené à introduire une décomposition analogue :

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}.$$

Bien entendu, on perd les relations de commutation du groupe des rotations pour le pseudomoment orbital  $\mathbf{\Lambda}$ . On a cependant l'avantage (indispensable, si l'on veut progresser) d'avoir une décomposition universelle valable à la fois pour les particules massives et les particules de masse nulle. Dans le cas d'une particule de masse  $m$ , on a ( $c=1$ )

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{S} + \frac{\mathbf{P} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{S})}{H(H+m)} = \frac{m}{H} \mathbf{S} + \frac{\eta}{H+m} \mathbf{P}$$

où l'opérateur

$$\eta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}}{H} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}}{H}$$

est relié simplement à l'opérateur hélicité.

Lorsque  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , on voit que  $\mathbf{\Sigma}$  coïncide avec le moment angulaire de spin. Mais on voit *aussi*, sur la dernière formule que, pour  $m=0$ , on a  $\mathbf{\Sigma} = \eta \frac{\mathbf{P}}{H}$ , ce qui permet d'affirmer que ce vecteur conserve un sens pour les particules de masse nulle. Le pseudo-moment de spin  $\mathbf{\Sigma}$  semble donc la variable universelle *obligée*.

On a les relations de commutation :

$$\begin{aligned} [\Lambda_i, \Lambda_j] &= i \varepsilon_{ijk} (\Lambda_k - \zeta_k) \\ [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i \varepsilon_{ijk} (\Sigma_k - \zeta_k) \\ [\Lambda_i, \Sigma_j] &= i \varepsilon_{ijk} \zeta_k \\ [\Sigma_i, P_j] &= 0 \end{aligned}$$

avec  $\zeta_k = \eta \frac{P_k}{H}$ .

On a alors comme invariant du groupe de Poincaré la quantité

$$H^2 \|\mathbf{\Sigma}\|^2 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{\Sigma})^2 = H^2 (\|\mathbf{\Sigma}\|^2 - \eta^2)$$

qui vaut, pour une représentation irréductible de masse  $m$  et de spin  $s$  :  $m^2 s(s+1)$ , et zéro pour une particule de masse nulle.



Cette forme quadratique en les  $\Sigma_i$  est diagonalisée par le vecteur  $\mathbf{P}$  et deux vecteurs quelconques orthogonaux à  $\mathbf{P}$ . Posons  $\mathbf{P} = (0, 0, p)$ . On obtient :

Si

$$m \neq 0: \quad \Sigma_1 = \frac{m}{H} S_1, \quad \Sigma_2 = \frac{m}{H} S_1, \quad \Sigma_2 = \frac{m}{H} S_2, \quad \Sigma_3 = S_3.$$

On voit nettement sur ces formules comment on passe à la limite de la masse nulle. En effet lorsque  $m=0$ ,

$$\Sigma_1 = 0, \quad \Sigma_2 = 0, \quad \Sigma_3 = \eta \text{ (hélicité)}.$$

Nous avons finalement substitué aux 10 moments de Poincaré les 10 variables suivantes

$$X, Y, Z, P_x, P_y, P_z, H, \Sigma_x, \Sigma_y, \Sigma_z.$$

Ces nouvelles variables ont trois avantages : (1) leur variance concernant les rotations est évidente (un scalaire et trois vecteurs), (2) on met en évidence les coordonnées canoniques de l'espace des phases habituel (avec leurs relations de commutation habituelles, si l'on excepte la non-commutativité de  $X, Y, Z$ ), (3) elles ont une signification pour toutes les espèces physiques de particules.

Notre propos est de traiter maintenant ces variables comme des variables classiques, dans le seul but d'aboutir à leur interprétation. Pour une particule massive, on aura deux contraintes, à savoir celle de masse :  $H^2 - \mathbf{P}^2 = Cte \text{ positive}$  et celle de spin :  $H^2 \|\Sigma\|^2 - (\mathbf{P} \cdot \Sigma)^2 = Cte \geq 0$  qui correspondent à des variétés symplectiques de dimension 8 (ou 6, si la deuxième constante est nulle). Pour une particule sans masse, on a  $\Sigma_{\text{colinéaire}}$  à  $\mathbf{P} \left( \Sigma = \eta \frac{\mathbf{P}}{H} \right)$  avec  $\eta$  invariant de Poincaré.

Si l'on veut voir comment l'espace de Minkowski est modifié par cette façon de considérer l'espace, il est nécessaire tout d'abord de rappeler que ce qui nous intéresse ce sont les *événements* et non les positions. Il s'agit donc, comme nous l'avons remarqué plus haut, des couples

$$(t, \mathbf{R}(t)) = \left( t, \frac{\mathbf{K} + t\mathbf{P}}{H} \right).$$

Les rotations agissent de façon évidente sur les nouvelles variables. On sait comment agit un boost de vitesse  $v$  sur les parties  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  du tenseur  $M_{\mu\nu}$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \mathbf{J} + \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{K} - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{J}) \\ \mathbf{K}' &= \mathbf{K} - \gamma \mathbf{v} \times \mathbf{J} - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{K}). \end{aligned}$$

Supposons, pour simplifier, que  $\mathbf{v}=(0, 0, v)$ . On en déduit pour le transformé de l'opérateur position les formules

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{t' - \gamma t + \gamma v Z}{\gamma(H - v P_z)} P_x + \frac{v \Sigma_y}{H - v P_z} \\ Y' &= Y + \frac{t' - \gamma t + \gamma v Z}{\gamma(H - v P_z)} P_y - \frac{v \Sigma_x}{H - v P_z} \\ Z' &= \frac{HZ + (\gamma t' - t) P_z - \gamma t' H v}{\gamma(H - v P_z)} \end{aligned}$$

et pour le transformé du pseudo-spin

$$\begin{aligned} \Sigma'_x &= \frac{H \Sigma_x}{\gamma(H - v P_z)} \\ \Sigma'_y &= \frac{H \Sigma_y}{\gamma(H - v P_z)} \\ \Sigma'_z &= \Sigma_z - \frac{v}{H - v P_z} (\Sigma_x P_x + \Sigma_y P_y) \end{aligned}$$

avec  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ .

On vérifiera aisément que pour  $\Sigma = 0$  et  $t' = \gamma(t - vZ)$ , on obtient les formules de Lorentz habituelles. Il est facile de vérifier que la relation  $t' = \gamma(t - vZ)$  est justement la condition pour que l'inverse du boost de vitesse  $\mathbf{v}$  soit le boost  $-\mathbf{v}$ . On en déduit le groupe suivant de formules :

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{v \Sigma_y}{H - v P_z} \\ Y' &= Y - \frac{v \Sigma_x}{H - v P_z} \\ Z' &= \gamma(Z - v t) \\ t' &= \gamma(t - v Z) \\ P'_x &= P_x \\ P'_y &= P_y \\ P'_z &= \gamma(P_z - v H) \\ H' &= \gamma(H - v P_z) \\ \Sigma'_x &= \frac{H \Sigma_x}{\gamma(H - v P_z)} \\ \Sigma'_y &= \frac{H \Sigma_y}{\gamma(H - v P_z)} \\ \Sigma'_z &= \Sigma_z - \frac{v}{H - v P_z} (\Sigma_x P_x + \Sigma_y P_y) \end{aligned}$$

Ce sont les 11 formules de transformation impliquées par le nouvel opérateur position. Comme il fallait s'y attendre, il n'y a plus similitude

entre les formules d'espace-temps et celles d'énergie-impulsion. Les premières prennent en compte le pseudo-spin alors que les secondes l'ignorent. On vérifiera sans peine que ces lois de transformation sont compatibles

avec la relation habituelle (toujours valide) :  $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\mathbf{P}}{H}$ .

Il est intéressant de considérer les cas particuliers suivants :

(a) *particule massive au repos* ( $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ). Ces formules donnent

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{v \Sigma_y}{H}, & Y' &= Y - \frac{v \Sigma_w}{H}, & Z' &= \gamma(Z - vt) \\ \Sigma'_x &= \frac{\Sigma_x}{\gamma}, & \Sigma'_y &= \frac{\Sigma_y}{\gamma}, & \Sigma'_z &= \Sigma_z. \end{aligned}$$

On trouve la contraction des longueurs classique dans la direction  $\mathbf{P}$ , accompagnée d'un léger effet de spin transversalement.

(b) *Particule de masse nulle; boost dans la direction de  $\mathbf{P}$* .

On a  $H = p$  et  $\Sigma_x = \Sigma_y = 0$ .

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = \gamma(Z - vt).$$

(c) *Particule de masse nulle; boost dans une direction orthogonale à  $\mathbf{P}$* .

$$\mathbf{P} = (0, p, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 0, v)$$

$$\begin{aligned} X' &= X + \frac{v}{p} \eta, & Y' &= Y + vZ, & Z' &= \gamma(Z - vt) \\ \Sigma'_x &= \frac{\Sigma_x}{\gamma}, & \Sigma'_y &= \frac{\Sigma_y}{\gamma}, & \Sigma'_z &= \Sigma_z - v \Sigma_y \end{aligned}$$

où  $\eta$  désigne l'hélicité qui, dans cette théorie « classique » est nécessairement un nombre.

Ces formules paraissent satisfaisantes pour le photon. En effet, si  $p$  est grand (courte longueur d'onde), les effets correctifs sont faibles.

Je terminerai par une remarque importante concernant la comparaison des formules obtenues pour les coordonnées d'espace-temps avec les formules de Lorentz. Les premières mettent en jeu non seulement le spin (ou l'hélicité) mais également l'énergie et l'impulsion. Elles surprendront plus d'un physicien. Mais ne faudrait-il pas plutôt nous étonner de ce que ces grandeurs soient justement absentes des formules habituelles? En effet, un atome qui émet un signal lumineux est en général polarisé, tout comme l'est le signal émis. Il est donc naturel *a priori* <sup>(6)</sup> que les lois de transformation du type  $z' = \gamma(z - vt)$  fassent intervenir également l'énergie, l'impulsion et la polarisation de l'émetteur. De toutes façons, on voit mal comment

<sup>(6)</sup> Comme toutes les remarques que l'on peut faire *a priori*, celle-ci est déduite *a posteriori*. Ma première réaction était une réaction de gêne. C'est seulement après réflexion que je me suis aperçu que c'était la relativité d'Einstein qui était trop simple.

une intervention du spin dans le concept d'espace aurait pu laisser de côté l'énergie-impulsion. On se bornera à constater que dans cette nouvelle description de l'espace-temps, la notion d'événement (point) ne peut être qu'une notion dérivée.

*En conclusion*, on se contentera de fournir le résumé suivant sous forme de syllogismes. Ce qui empêche le photon d'être localisable, c'est son hélicité. Par suite, l'hélicité (et, par conséquent, également le spin) interfère avec la notion d'espace. Comme l'hélicité fait intervenir l'impulsion, espace-temps et espace des énergie-impulsions sont nécessairement liés. L'unité d'hélicité étant égale à la demi-constante de Planck réduite, cette constante établit un deuxième lien entre les deux espaces fondamentaux de la relativité restreinte. Il reste à quantifier ce résultat. Peut-être avons-nous là la clef du lien entre mécanique quantique et relativité générale...

#### REMERCIEMENTS

L'auteur est reconnaissant à Amithaba Chakrabarti pour une lecture critique du manuscrit ayant conduit à quelques corrections et améliorations du texte.

#### RÉFÉRENCES

- [1] H. BACRY, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. **49**, 1988, p. 245.
- [2] H. BACRY, Localizability and Space in Quantum Physics, *Lecture Notes in Physics*, vol. **108**, Springer-Verlag, 1988.
- [3] H. BACRY, *Nucl. Phys. B* (Proc. Suppl.), vol. **6**, 1989, p. 222.
- [4] H. BACRY, *On a contradiction in special relativity*, préirage CPT-90/P.2356, Centre de physique théorique, Marseille.
- [5] H. BACRY, *The resurrection of a forgotten symmetry: De Broglie's symmetry*, Contribution to the XVIIIth Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Moscow, 1990. *Lecture Notes in Physics*, vol. **382**, Springer-Verlag, 1991, p. 331.
- [6] E. P. WIGNER, *Ann. Math.*, vol. **40**, 1939, p. 149.
- [7] T. D. NEWTON and E. P. WIGNER, *Rev. Mod. Phys.*, vol. **21**, 1949, p. 400.
- [8] A. S. WIGHTMAN, *Rev. Mod. Phys.*, vol. **34**, 1962, p. 845.
- [9] G. W. MACKEY, *Colloquium Lectures to the American Mathematical Society*, Stillwater, Oklahoma Aug. 29-Sept. 1, 1961.
- [10] G. W. MACKEY, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. **35**, 1949, p. 537.
- [11] H. BACRY, *Classical Hamiltonian for spin*, préirage, Institute for Advanced Study, 1966.
- [12] H. BACRY, *Comm. Math. Phys.*, vol. **5**, 1967, p. 97.
- [13] J.-M. SOURIAU, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **263**, série B, 1966, p. 1191.
- [14] J.-M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1970.
- [15] R. ARENS, *Comm. Math. Phys.*, vol. **21**, 1971, p. 125.
- [16] R. ARENS, *Comm. Math. Phys.*, vol. **21**, 1971, p. 139.
- [17] R. ARENS, *J. Math. Phys.*, vol. **12**, 1971, p. 2415.
- [18] H. BACRY, *J. Phys.*, vol. **A14**, L73, 1981.

- [19] I. BIALYNICKY-BIRULA et Z. BIALYNICKA-BIRULA, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press, 1975.
- [20] E. SCHRÖDINGER, *Collected Papers*, vol. 3, Austrian Academy of Science, Vienne, 1984.
- [21] A. Z. JADCZYK et B. JANCEWICZ, *Bull. Acad. Pol. Sc.*, vol. **21**, 1973, p. 447.
- [22] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON et M. SANDS, *The Feynman Lectures in Physics*, vol. 3, Chapter 1, Addison-Wesley, 1965.
- [23] D. R. GRIGORE, *J. Math. Phys.*, vol. **30**, 1989, p. 2646.
- [24] C. DUVAL, J. ELHADAD et G. M. TUYNMAN, *Pukanszky's condition and symplectic induction*, à paraître dans *J. Diff. Geom.*

(Manuscrit reçu le 4 décembre 1990.)