

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PATRICK FOULON

Géométrie des équations différentielles du second ordre

Annales de l'I. H. P., section A, tome 45, n° 1 (1986), p. 1-28

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__45_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Géométrie des équations différentielles du second ordre

par

Patrick FOULON

Centre de Physique Théorique (*), École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex France

RÉSUMÉ. — Nous montrons que pour les systèmes dynamiques généraux du second ordre, même dissipatifs, on peut définir des notions analogues à celles de la géométrie riemannienne telles que dérivation covariante et courbure. Cet article contient les fondements de ce nouveau formalisme ; l'application à la théorie ergodique se trouvera dans des articles à paraître.

ABSTRACT. — In this article, we show that in a kinematic approach to second order dynamical systems, including dissipative ones, one can define notions analogous to covariant derivatives and curvature, which are so powerful in the study of ergodic properties of geodesic flows on Riemannian manifolds. This paper presents the foundations of this new formalism, leaving applications to subsequent articles.

TABLE DES MATIÈRES

I. Fibré homogène et équations différentielles du second ordre	6
II. Le théorème de verticalité et ses conséquences	8
III. Endomorphisme vertical associé à une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène	10
IV. La distribution horizontale définie par une équation différentielle du second ordre	12

(*) « Groupe de Recherche du C. N. R. S. n° 48 ».

V. L'endomorphisme de Jacobi	15
VI. Dérivation dynamique associée à une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène	17
VII. Quelques exemples	20
VIII. Applications : étude du centralisateur de X et problème inverse.	25

INTRODUCTION

L'espace des mouvements d'un système physique est un objet fondamental d'étude en mécanique. Comme un système peut avoir une grande variété de comportements et même suivant le choix des conditions initiales passer de régulier à chaotique, la résolution de ce problème est forcément délicate. De nombreuses approches ont été proposées (lagrangienne, hamiltonienne) avec des succès tout à fait remarquables. Cependant bien des questions restent ouvertes. Ainsi, pour un système donné, il est difficile avec les méthodes actuelles d'écrire toutes ses intégrales premières.

Dans cet article, nous nous proposons d'aborder l'étude de l'espace des mouvements par un cheminement géométrique qui n'exclut pas les systèmes dissipatifs.

Notre but est de dégager les structures mathématiques qui résultent de la donnée d'une dynamique du second ordre. En ce sens, notre approche peut s'interpréter comme l'introduction d'un point de vue Newtonien dans l'étude de la dynamique. En utilisant les outils modernes de la géométrie différentielle, en particulier le calcul différentiel extérieur et les idées de la géométrie riemannienne, nous pouvons mettre clairement en lumière les propriétés de la dynamique qui ne dépendent pas du fait que le système est lagrangien.

Comme notre attention est concentrée sur les trajectoires du système en tant qu'objets géométriques, il est naturel que le temps soit inclus parmi les coordonnées de notre variété de base. Grâce à la notion de « vitesse intrinsèque » (en chaque point d'une courbe, il s'agit de la demi-droite tangente à la courbe en ce point), on voit que l'information tangentielle pertinente sur une trajectoire est contenue dans un fibré sur la variété de base M dont la fibre en chaque point n'est rien d'autre que la sphère des demi-droites tangentes au point. Ce fibré $\sigma_M : HM \rightarrow M$ que nous appelons *le fibré homogène*, est le cadre de notre travail. Chaque mouvement s'y relève de façon unique.

Pour étudier l'espace des mouvements, nous nous donnons sur HM un *champ de vecteurs* X dont les orbites sont précisément ces relèvements.

Comme nous souhaitons rester dans le cadre des mouvements d'un

système mécanique, nous ne considérons que ces champs de vecteurs spéciaux et nous les appelons *équations différentielles du second ordre sur le fibré homogène*.

Cet article doit donc être considéré comme un article de fondements. Un certain nombre de notions classiques de la géométrie riemannienne existent déjà dans la « géométrie newtonienne » que nous développons et surtout elles donnent des informations tout à fait pertinentes sur le système.

Pour motiver l'approche de ces éléments techniques, permettez-nous de citer quelques résultats nouveaux qu'on peut obtenir en utilisant à fond ce formalisme. Les plus directement perceptibles sont ceux qui ont trait à une extension de résultats déjà connus dans le cadre de la géométrie riemannienne. Il en va ainsi du Théorème de Osserman et Sarnak, 1984 [Os, Sk] qui fournit à ce jour la plus fine minoration de l'entropie métrique du flot géodésique d'une variété riemannienne compacte à courbure négative. En ce qui nous concerne, nous obtenons l'extension suivante [F. 4].

THÉORÈME. — Sur une variété compacte M , soit L un lagrangien convexe dont l'équation d'Euler-Lagrange X est à endomorphisme de Jacobi θ_X négatif. Pour l'entropie métrique $h_{\mu_L}(\varphi)$ du flot $(\varphi)_{t \in \mathbb{R}}$ de X on a la minoration

$$h_{\mu_L}(\varphi) \geq \int_{HM} \text{Tr}((- \theta_X)^{1/2}) d\mu_L$$

avec égalité si et seulement si θ_X est invariant par le flot.

D'autre part, l'endomorphisme de Jacobi θ_X que nous savons associer à toute équation différentielle du second ordre, et dont la définition apparaîtra au travers des lignes de ce texte, joue un rôle fondamental notamment dans la généralisation de l'équation de Jacobi. Bien que nous ne puissions ici pour des raisons évidentes de notation écrire proprement les choses, disons qu'on obtient aussi une extension du théorème de A. Freire et R. Mané [Fe, Ma] au cas des lagrangiens convexes sans points conjugués, sur une variété compacte.

Le théorème obtenu fournit dans ce cadre une formule exacte de l'entropie métrique à l'aide de grandeurs locales déduites de l'équation de Jacobi (Cette équation apparaît dans un cas particulier à la fin de l'article). Enfin les problèmes du calcul inverse des variations et notamment le problème de l'équivalence des Lagrangiens nécessitent cet appareillage. Les grandeurs associées à une équation différentielle du second ordre permettent de trouver [F. 3] les contraintes locales que doit satisfaire une équation d'Euler-Lagrange X pour qu'elle admette plusieurs lagrangiens équivalents mais non triviaux.

Que le lecteur nous pardonne; il ne trouvera pas ces théorèmes dans ce document restreint. Cependant, à notre avis, il était nécessaire de fournir

un texte contenant les fondements d'un formalisme qui, nous l'espérons, permettra de développer d'autres idées que celles déjà citées.

Nous rentrons maintenant dans une description des principales notions et des principaux résultats contenus dans l'article.

1. De l'étude de la structure du fibré homogène on tire une définition précise des équations différentielles du second ordre. Toutes les équations différentielles du second ordre qui sont colinéaires admettent les mêmes orbites. On appelle le 1-champ (champ de droites) qu'elles engendrent *système dynamique*. Par caractéristiques d'un système dynamique, on entend ici les grandeurs qui ne dépendent que des orbites et non de leur paramétrage. L'étude de ces objets a un sens naturel puisque toutes les variables intéressantes y compris le temps sont déjà incluses dans la variété de base et donc le paramétrage ne doit pas avoir de signification du moins pour la physique.

2. L'intérêt des équations différentielles du second ordre sur le fibré homogène provient essentiellement de leur comportement particulier vis-à-vis des champs de vecteurs verticaux. Ceci s'exprime dans le *théorème de verticalité*.

THÉORÈME II.1. — *Soit X une équation différentielle du second ordre sur HM et deux champs de vecteurs verticaux Y_1 et Y_2 . Si en un point z du fibré homogène, il existe une relation de dépendance de la forme*

$$aX(z) + Y_1(z) + b[X, Y_2](z) = 0,$$

où a et b sont des réels alors nécessairement

$$bY_2(z) = 0 \quad \text{et} \quad a = 0.$$

De plus, si $Y_2(z) \neq 0$, alors $b = 0$ mais on a aussi $Y_1(z) = 0$.

Ce théorème a pour conséquence que chaque fois qu'on veut étudier un opérateur différentiel sur l'espace des sections τHM on peut se contenter de l'évaluer sur X , sur les champs de vecteurs verticaux Y et sur les crochets de Lie $[X, Y]$.

3. Dans III.1, on montre qu'à toute équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène est associé un *endomorphisme vertical* v_X . De plus si X et mX sont deux équations différentielles du second ordre colinéaires alors $v_{mX} = \frac{1}{m} v_X$.

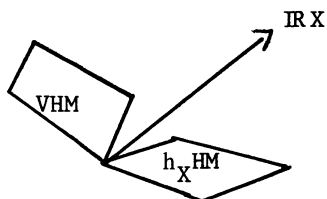
Grâce à v_X on construit une dérivation verticale

$$d_{v_X} = i_{v_X}d - di_{v_X}.$$

4. Toujours à l'aide de v_X on peut construire un nouvel opérateur K_X dont le noyau est un sous-fibré vectoriel $h_X\text{HM}$, dit *sous-fibré horizontal*.

En présence d'une équation différentielle du second ordre il apparaît donc une décomposition de THM, le fibré tangent au fibré homogène, en trois sous-fibrés supplémentaires

$$\text{THM} = \mathbb{R}X \oplus \text{VHM} \oplus h_X \text{HM}.$$



5. Cette construction nous permet de généraliser à toute équation différentielle X du second ordre sur HM une notion qui joue un rôle important dans l'étude des géodésiques en géométrie riemannienne celle d'endomorphisme de Jacobi θ_X .

Pour la recherche des invariants d'un système dynamique V.1 nous fournit le résultat important suivant

V.1 *Les sous-espaces propres verticaux de θ_X sont des caractéristiques du système dynamique.*

6. On introduit ensuite la dérivation dynamique γ_X qui est un opérateur différentiel d'ordre 1 qui préserve la décomposition

$$\text{THM} = \text{VHM} \oplus h_X \text{HM} \oplus \mathbb{R}X.$$

Parmi les opérateurs différentiels qu'on peut construire avec θ_X et γ_X , le champ d'endomorphisme de THM, $[\theta_X, L_X \theta_X]$ a une loi de transformation particulièrement simple puisque pour une équation différentielle du second ordre mX , $[\theta_{mX}, L_{mX} \theta_{mX}] = m^5 [\theta_X, L_X \theta_X]$. Il joue d'ailleurs un rôle fondamental dans les applications.

7. Pour éclairer la signification physique de θ_X et γ_X , on donne leur expression dans des exemples tirés de la mécanique classique : système classique dans un potentiel, chaîne linéaire d'atomes dans l'approximation harmonique, particule dans un champ magnétique uniforme. On trouvera dans cette partie une écriture en coordonnées locales.

8. Applications.

On présente un premier résultat qui montre le lien de θ_X avec l'existence d'intégrales premières. Il généralise un fait bien connu sur le flot géodésique des variétés riemanniennes compactes à courbure sectionnelle négative.

PROPOSITION VIII.1. — *Soit M une variété compacte de dimension 2 et X une équation différentielle du second ordre sur HM .*

On suppose que

i) l'endomorphisme de Jacobi θ_X est strictement négatif,

ii) il existe un champ de vecteurs vertical Y sans singularité tel que $\gamma_X(Y) \equiv 0$ dans THM.

Alors ce centralisateur de X dans $\mathcal{C}HM$ est trivial. (i. e. si $\zeta \in \mathcal{C}HM$ et $\mathcal{L}_X \zeta \equiv 0$, alors $\zeta \equiv aX$, $a \in \mathbb{R}$).

I. FIBRÉ HOMOGENÈME ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

Considérons une variété M de dimension n et notons \mathring{TM} son espace tangent privé de la section nulle. Le *fibré homogène* HM de M est le fibré en sphères S^{n-1} des demi-droites tangentes à M ; autrement dit, HM s'obtient en identifiant deux vecteurs tangents à M au-dessus d'un point x qui se déduisent par une homothétie de rapport positif.

Si on désigne par $r_{HM} : \mathring{TM} \rightarrow HM$ l'application qui à tout y de \mathring{TM} associe la demi-droite qu'il engendre, on peut former le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathring{TM} & \xrightarrow{r_{HM}} & HM \\ & \searrow p_M & \downarrow \sigma_M \\ & & M \end{array}$$

où p_M et σ_M sont les projections sur la base.

Le fibré homogène HM est naturellement une variété différentielle.

Le fibré tangent (THM, p_{HM}, HM) au fibré homogène est un fibré vectoriel de rang $2n - 1$ sur HM pour lequel nous avons

$$\begin{array}{ccc} THM & \xrightarrow{T\sigma_M} & TM \\ p_{HM} \downarrow & & \downarrow p_M \\ HM & \xrightarrow{\sigma_M} & M \end{array}$$

Le noyau de $T\sigma_M$ est constitué des vecteurs tangents aux fibres de HM . C'est un sous-fibré vectoriel de rang $n - 1$, dit *sous-fibré vertical* et noté VHM .

Équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène.

La mécanique et de nombreux autres problèmes font constamment intervenir des équations différentielles du second ordre. Convenablement adaptée au fibré homogène, cette notion est particulièrement riche de conséquences géométriques.

DÉFINITION I.1. — Un champ de vecteurs sur HM est une *équation*

différentielle du second ordre sur le fibré homogène si X est aussi une section pour $r_{HM} \circ T\sigma_M$, i. e. si on a la relation $r_{HM} \circ T\sigma_M \circ X = p_{HM} \circ X = Id_{HM}$.

Remarques. — i) L'application $r \circ T\sigma_M$ n'est définie qu'en dehors de VHM.

ii) Par définition, une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène est *sans singularité*.

On peut représenter assez simplement l'ensemble des équations différentielles du second ordre sur HM. Pour cela, considérons-en deux X et X' . Pour chacune on peut écrire

$$r_{HM} \circ T\sigma_M \circ X' = Id_{HM} = r_{HM} \circ T\sigma_M \circ X.$$

Il existe donc une fonction réelle m sur HM jamais nulle et telle que $T\sigma_M(X') = mT\sigma_M(X)$. Ainsi $X' - mX = Y_{XX'}$ est un champ de vecteurs vertical. Toute équation différentielle du second ordre sur HM est donc de la forme $X' = mX + Y_{XX'}$.

Dans toute la suite m désignera une fonction réelle sur HM jamais nulle.

Si nous voulons nous intéresser seulement aux propriétés des orbites d'une équation différentielle nous devons remarquer que deux équations différentielles du second ordre X et mX admettent les mêmes orbites.

PROPOSITION I.2. — Si la variété M est paracompacte, il existe sur le fibré homogène au moins une équation différentielle du second ordre.

Preuve. — Pour cela rappelons (cf. (G1)) que si une variété M est paracompacte, il existe une structure riemannienne M . On peut alors considérer sur TM le Lagrangien positivement homogène de degré $+1$ défini par l'élément de longueur. On sait alors d'après (F.1) qu'il s'agit d'un problème régulier du calcul des variations et que le champ géodésique est une équation différentielle du second ordre. ■

Nous appellerons *système dynamique* $[X]$ associé à une équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène le champ de directions dont X est un représentant. De cette manière X et mX définissent le même système dynamique. On dira que $X' = mX$ et X ont même dynamique. Nous appellerons *caractéristiques dynamiques* des grandeurs qui ne dépendent que du système dynamique considéré et non de ses représentants.

Expressions locales.

Considérons dans le voisinage d'un point x de M des coordonnées adaptées $(x^v)_{1 \leq v \leq n}$ et, pour un point (x, u) de HM, des coordonnées adaptées $(x^v, u^\alpha)_{1 \leq v \leq n, 1 \leq \alpha \leq n-1}$.

Pour un vecteur z de $T_{(x,u)}HM$ qui s'écrit $z = z^v \frac{\partial}{\partial x^v} + \bar{z}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ on a dans $T_x M$

$$T\sigma_M(z) = z^v \frac{\partial}{\partial x^v}$$

et donc tout vecteur vertical Y s'écrit localement

$$Y = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Quant à une équation différentielle du second ordre elle est de la forme

$$(I.3) \quad X(x, u) = X^v(x, u) \frac{\partial}{\partial x^v} + \bar{X}^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

avec

$$r_{HM} \left(X^v(x, u) \frac{\partial}{\partial x^v} \right) = (x, u).$$

II. LE THÉORÈME DE VERTICALITÉ ET SES CONSÉQUENCES

Sur le fibré homogène, toutes les équations différentielles du second ordre ont un comportement particulier vis-à-vis des champs de vecteurs verticaux.

THÉORÈME II.1. — *Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène et deux champs de vecteurs verticaux Y_1 et Y_2 différentiables. Si en un point z du fibré homogène il existe une relation de dépendance de la forme*

$$aX(z) + Y_1(z) + b[X, Y_2](z) = 0,$$

où a et b sont des réels alors nécessairement

$$bY_2(z) = 0 \quad \text{et} \quad a = 0.$$

De plus si $Y_2(z) \neq 0$, alors $b = 0$ mais on a aussi $Y_1(z) = 0$.

COROLLAIRE II.2. — *Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène. Supposons que l'on se donne dans le voisinage d'un point z de HM une famille libre de $n - 1$ champs de vecteurs verticaux Y_p , ($1 \leq p \leq n - 1$) différentiables. Dans ce voisinage, la famille constituée par*

- i) l'équation différentielle du second ordre X ;
 - ii) les $n - 1$ champs de vecteurs verticaux Y_p , ($1 \leq p \leq n - 1$);
 - iii) les $n - 1$ champs de vecteurs $[X, Y_q]$, ($1 \leq q \leq n - 1$),
- est libre et maximale.

Preuve. — Pour prouver ce théorème à caractère local, on va considérer une carte adaptée utilisant les coordonnées homogènes. Rappelons que les coordonnées homogènes sont obtenues à partir d'une carte locale (x^v, ξ^ρ) ,

$0 \leq \nu, \rho \leq n - 1$ de \bar{M} . Localement on peut toujours numérotter les ξ^ρ de telle manière que $\xi^0 \neq 0$. On pose alors, pour $1 \leq \alpha \leq n - 1$,

$$u^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{\xi^0}.$$

Suivant la méthode habituelle, nous avons, si $z = (x, u)$

$$X(x, u) = X^\nu(x, u) \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \bar{X}^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad 0 \leq \nu \leq n - 1, \quad 1 \leq \alpha \leq n - 1$$

$$Y_1(x, u) = Y_1^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad \text{et} \quad Y_2(x, u) = Y_2^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Le fait que X soit une équation différentielle du second ordre sur HM s'écrit localement

$$X^j(x, u) = u^j X^0(x, u), \quad 1 \leq j \leq n - 1.$$

D'où

$$X(x, u) = X^0(x, u) \frac{\partial}{\partial x^0} + X^0(x, u) u^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \bar{X}^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

avec X^0 non nul.

Pour $[X, Y_2]$, il vient

$$\begin{aligned} [X, Y_2] = & - Y_2^\beta \left(\frac{\partial X^0}{\partial u^\beta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ & - X^0 Y_2^j \frac{\partial}{\partial x^j} + L_X Y_2^\beta \cdot \frac{\partial}{\partial u^\beta} - Y_2^\beta \frac{\partial \bar{X}^\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe deux nombres réels a, b tels qu'au point (x, u)

$$aX(x, u) + Y_1(x, u) + b[X, Y_2](x, u) = 0.$$

En utilisant l'expression précédente pour les termes en $\frac{\partial}{\partial x^0}$ et en $\frac{\partial}{\partial x^j}$ on obtient

$$(II.3a) \quad aX^0 - bY_2^\beta \left(\frac{\partial X^0}{\partial u^\beta} \right) = 0,$$

$$(II.3b) \quad \left\{ aX^0 - bY_2^\beta \left(\frac{\partial X^0}{\partial u^\beta} \right) \right\} u^j - bX^0 Y_2^j = 0$$

d'où $bY_2^j(x, u) = 0$ et $a = 0$. Si maintenant on suppose que Y_2 est non singulier en ce point, alors bien sûr $b = 0$ et il ne reste que $Y_1(z) = 0$. ■

Preuve du corollaire. — Il suffit de supposer qu'en un point z de HM on a une relation

$$aX(z) + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p Y_p(z) + \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q [X, Y_q](z) = 0$$

où les a, α_p, β_q avec $1 \leq q, p \leq n-1$ sont des nombres réels. Un calcul tout à fait semblable à celui de la preuve du théorème nous conduit aux

relations $a=0, \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q Y_q^j(z)=0$ pour tout j et donc $\sum_{q=1}^{n-1} \beta_q Y_q(z) = 0$. D'où

$\beta_q=0$. Il ne reste alors que $\sum_{q=1}^{n-1} \alpha_p Y_p(z)=0$. Les α_p sont donc nuls eux aussi. ■

III. ENDOMORPHISME VERTICAL ASSOCIÉ A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE SUR LE FIBRÉ HOMOGÈNE

Sur le deuxième fibré tangent à une variété, il existe comme J. Klein l'a montré un endomorphisme vertical canonique. Sur le fibré homogène les fibres sont homéomorphes à S^{n-1} et il n'y a pas *a priori* sur THM d'objet aussi canonique.

Cependant, en présence d'une équation différentielle du second ordre X , une telle construction redevient possible (Pour une construction plus intrinsèque voir F. 1).

PROPOSITION III. 1. — *Soit X une équation différentielle du second ordre sur HM. Il existe alors sur THM un endomorphisme vertical v_X associé à X tel que pour tout champ de vecteurs vertical Y sur HM, on ait*

- i) $v_X(X) = 0$,
- ii) $v_X([X, Y]) = -Y$,
- iii) $v_X(Y) = 0$.

Preuve. — Considérons au-dessus d'un point z de HM un vecteur ξ . D'après le corollaire (II. 2) on peut choisir localement une famille libre de champs verticaux (Y_p) telle que

$$\xi = aX(z) + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p Y_p(z) + \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q [X, Y_q](z).$$

D'après la définition de v_X , on doit avoir

$$v_X(\xi) = - \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q Y_q(z).$$

Pour montrer qu'on définit bien ainsi une opération linéaire sur $T_z\text{HM}$

qui est à valeurs dans $V_2\text{HM}$, il suffit de prouver que le résultat ne dépend pas du choix de la famille.

Prenons-en une autre. On a

$$\begin{aligned}\xi &= aX(z) + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p Y_p(z) + \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q [X, Y_q](z) \\ &= a'X(z) + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha'_p Y'_p(z) + \sum_{q=1}^{n-1} \beta'_q [X, Y'_q](z).\end{aligned}$$

Soustrayons les deux derniers termes et prenons les coordonnées homogènes. On n'a plus qu'à calquer la démonstration du théorème de verticalité et on obtient

$$a' - a = 0, \quad \sum_{q=1}^{n-1} \beta_q Y_q(z) = \sum_{q=1}^{n-1} \beta'_q Y'_q(z).$$

Mais la deuxième égalité nous dit justement que $v_X(\xi)$ ne dépend pas du choix de la famille. ■

Remarque. — Des démonstrations précédentes, il résulte que nous pourrions toujours vérifier les propriétés d'un opérateur différentiel sur X sur les sections verticales et sur leurs crochets de Lie avec X .

On peut caractériser assez simplement tous les endomorphismes verticaux sur HM .

PROPOSITION III.2. — Soient X et X' deux équations différentielles du second ordre sur HM , v_X et $v_{X'}$ les endomorphismes verticaux associés. Si $X' = mX + Y_{XX'}$, alors

$$mv_{X'} = v_X.$$

Remarque. — Il résulte de cette proposition que HHM le fibré homogène de HM est muni d'une application verticale canonique \bar{v} dont v_X est un relèvement.

Preuve. — Nous avons déjà observé qu'il existe une fonction $m \neq 0$ et un champ de vecteurs vertical $Y_{XX'}$ tel que $X' = mX + Y_{XX'}$.

Bien sûr v_X et $v_{X'}$ coïncident sur les sections verticales puisque

$$v_X(Y) = v_{X'}(Y) = 0.$$

Mais on doit avoir $v_X(X) = 0$ et $v_{X'}(mX + Y_{XX'}) = 0$ d'où $v_{X'}(X) = 0$ et donc $v_{X'}$ et v_X coïncident aussi sur X .

Il ne nous reste plus qu'à évaluer $v_{X'}$ sur $[X, Y]$. On a

$$v_{X'}[X, Y] = -Y = v_{X'}[mX + Y_{XX'}, Y],$$

soit encore

$$v_{X'}[X', Y] = - (L_Y m)v_{X'}(X) + mv_{X'}[X, Y] + v_{X'}[Y_{XX'}, Y].$$

Il ne reste que

$$v_{X'}[X', Y] = mv_{X'}[X, Y] = - Y = v_X[X, Y],$$

d'où $mv_{X'} = v_X$ puisqu'ils ont même noyau. ■

Différentiation verticale sur HM en présence d'une équation différentielle du second ordre.

On suppose donnée une équation différentielle du second ordre X sur HM . On peut définir une dérivation de degré 0 sur l'ensemble des formes différentielles définies sur HM en posant pour $\omega \in \Lambda^k THM, Z_1, \dots, Z_k$ dans THM

$$i_{v_X}\omega(Z_1, \dots, Z_k) = \sum_{i=1}^k \omega(Z_1, \dots, v_X(Z_i), \dots, Z_k).$$

DÉFINITION III.3. — L'opérateur défini par

$$d_{v_X} = [i_{v_X}, d]$$

est une antiderivation de degré 1 de l'algèbre ΩHM des formes différentielles sur HM . On l'appelle *différentiation verticale associée à l'équation différentielle du second ordre X*.

IV. LA DISTRIBUTION HORIZONTALE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

La donnée d'une équation différentielle du second ordre nous permet de définir canoniquement un endomorphisme de THM que nous notons K_X dont le noyau sera appelé *le sous-fibré horizontal*. L'opérateur qui intervient pour la mise en place de ce formalisme est l'opérateur dérivée de Lie de l'endomorphisme vertical par l'équation différentielle du second ordre.

Commençons par étudier les propriétés de l'endomorphisme $L_X v_X : THM \rightarrow THM$. On vérifie immédiatement les relations suivantes

- (IV.1) i) $L_X v_X(X) = 0$;
 ii) pour toute section verticale Y de HM , $L_X v_X(Y) = Y$;
 iii) $L_X v_X([X, Y]) = - [X, Y] - v_X([X, Y])$.

Montrons par exemple la dernière relation. A partir de $v_X([X, Y]) = -Y$, on utilise la formule de Leibnitz

$$L_X(v_X([X, Y])) = L_X v_X([X, Y]) + v_X([X, [X, Y]]) = L_X(-Y).$$

On peut maintenant introduire un champ d'endomorphismes K_X de THM en posant

$$(IV.2) \quad K_X = \frac{1}{2} [L_X v_X + Id_{THM}].$$

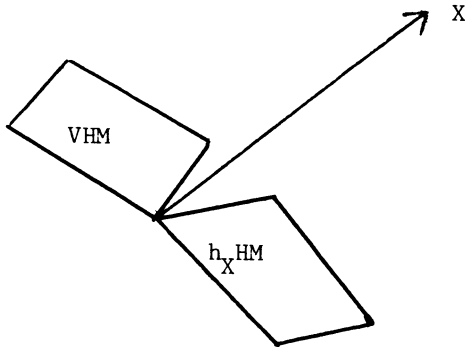
Toujours par un calcul élémentaire, on vérifie aisément pour K_X les relations suivantes

$$(IV.3) \quad \begin{aligned} i) & \quad K_X(X) = X/2; \\ ii) & \quad K_X(Y) = Y \text{ pour toute section verticale de HM,} \\ iii) & \quad K_X([X, Y]) = -\frac{1}{2} v_X([X, [X, Y]]). \end{aligned}$$

L'endomorphisme K_X a pour image $VHM \oplus \mathbb{R}X$. Son noyau est donc en chaque point un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

DÉFINITION IV.4. — Le sous-fibré $\text{Ker } K_X$ associé à une équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène est un fibré vectoriel de rang $n - 1$. On l'appelle *le sous-fibré horizontal associé à X* et on le note $h_X \text{HM}$. Bien évidemment au-dessus de chaque point (x, u) de HM, les sous-espaces vectoriels $h_{X(x,u)} \text{HM}$, $V_{(x,u)} \text{HM}$ et $\mathbb{R}X(x, u)$ sont supplémentaires.

Nous pouvons donc représenter la structure de l'espace tangent au fibré homogène en présence d'une équation différentielle du second ordre X de la manière suivante



Remarques. — Cette structure géométrique va être très pratique pour définir de nouveaux opérateurs.

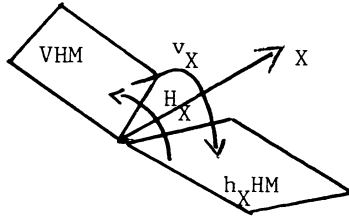
Si au lieu de considérer X , on prend une équation différentielle de même dynamique mX , le sous-fibré horizontal associé est comme nous allons le voir différent en général.

Construction explicite.

A l'aide de l'endomorphisme vertical v_X nous sommes en mesure d'associer à tout vecteur un vecteur vertical. On peut inverser la démarche et construire un *isomorphisme* H_X de VHM sur $h_X\text{HM}$, en posant pour toute section verticale \tilde{Y} telle que $\tilde{Y}(x, u) = Y$

$$(IV.5) \quad H_X(Y) = - [X, \tilde{Y}]_{(x,u)} - \frac{1}{2} v_X([X, [X, \tilde{Y}]]_{(x,u)}).$$

Considérons l'extension $H_X(\tilde{Y})$.



Par construction, $H_X(\tilde{Y})$ est dans le noyau de K_X . C'est donc un champ de vecteur horizontal. Il s'agit bien d'un opérateur différentiel d'ordre 0 puisque si λ est une fonction de classe C^2

$$H_X(\lambda\tilde{Y}) = -\lambda[X, \tilde{Y}] - L_X\lambda\tilde{Y} - \frac{1}{2} v_X(L_X^2\lambda \cdot \tilde{Y} + 2L_X\lambda[X, \tilde{Y}] + \lambda[X, [X, \tilde{Y}]]) .$$

Soit d'après les propriétés de v_X (III.1)

$$H_X(\lambda\tilde{Y}) = \lambda H_X(\tilde{Y})$$

et d'après le théorème de verticalité le noyau de H_X est réduit à la section nulle.

Remarques. — i) Le sous-fibré horizontal $h_{mX}\text{HM}$ associé à l'équation mX est lié à $h_X\text{HM}$ par la relation

$$(IV.6) \quad H_{mX}(Y) = mH_X(Y) + (L_Y m)X + \frac{1}{2} (L_X m)Y .$$

Pour le voir, il suffit de développer l'expression

$$H_{mX}(Y) = - [mX, Y] - \frac{1}{2} v_{mX}([mX, [mX, Y]])$$

et d'utiliser les propriétés de v_X .

ii) On vérifie aisément que

$$H_X \circ v_{X/h_X\text{HM}} = Id_{h_X\text{HM}}, \quad v_X \circ H_X = Id_{\text{VHM}}$$

et que par conséquent $h_X \text{HM} \oplus \text{VHM}$ est muni d'une structure complexe I^X donnée par

$$\begin{aligned} I^X(Y) &= -H_X(Y), & Y \in \text{VHM} \\ I^X(h) &= v_X(h), & h \in h_X \text{HM}. \end{aligned}$$

V. L'ENDOMORPHISME DE JACOBI

Nous noterons $Id_{\text{THM}} = \Lambda_X + \underset{\times}{\succ} + p_X$ la décomposition de l'identité associée à la décomposition de l'espace $\text{THM} = \text{VHM} \oplus h_X \text{HM} \oplus \mathbb{R}X$. Le crochet de Lie d'un champ de vecteurs horizontal h avec l'équation différentielle du second ordre X n'est pas en général un champ de vecteur horizontal. Sa composante verticale va nous permettre d'associer à h un champ de vecteurs vertical. Combinant ceci avec l'opérateur H_X nous sommes en possession d'un opérateur différentiel d'ordre 0 sur $h_X \text{HM}$. Cet opérateur peut être étendu à tout THM et nous obtenons ainsi ce que nous appelons l'endomorphisme de Jacobi (la terminologie sera justifiée plus tard).

DÉFINITION V.1. — *L'endomorphisme de Jacobi θ_X associé à une équation différentielle du second ordre X sur le fibré homogène est l'opérateur différentiel d'ordre 0 défini par*

- i) $\theta_X(X) = 0$;
- ii) $\theta_X(Y) = \Lambda_X[X, H_X(Y)]$, pour Y vertical;
- iii) $\theta_X(h) = H_X \Lambda_X[X, h]$ pour h horizontal.

Par construction, les sous-fibrés horizontaux et verticaux sont stables par θ_X . Pour s'assurer qu'il s'agit bien d'un opérateur différentiel d'ordre 0 il suffit par exemple de calculer $\theta_X(\lambda h)$ où λ est une fonction C^1 sur HM . Il vient

$$\theta_X(\lambda h) = H_X \Lambda_X[X, \lambda h] = H_X \Lambda_X \{ (L_X \lambda)h + \lambda[X, h] \},$$

mais H_X et Λ_X sont différentiels d'ordre 0 et $\Lambda_X h = 0$, d'où $\theta_X(\lambda h) = \lambda \theta_X(h)$.

Il est immédiat de vérifier les deux propriétés suivantes qui résultent de la stabilité de VHM et $h_X \text{HM}$

$$(V.1.1) \quad [\theta_X, v_X] = 0, \quad [\theta_X, H_X] = 0.$$

Dans un autre texte (F. 1) nous montrons que dans le cas où X est le flot géodésique d'une métrique riemannienne donnée sur la base, l'endomorphisme de Jacobi coïncide après projection avec l'endomorphisme de Jacobi $v \rightarrow R(\dot{\gamma}, v) \dot{\gamma}$ habituel de la géométrie riemannienne le long d'une géodésique γ ce qui justifie notre terminologie.

Cette notion permet donc de généraliser à toute équation différentielle

du second ordre sur le fibré homogène une partie de la courbure riemannienne classique.

Nous allons maintenant mettre en évidence un fait intéressant. Que se passe-t-il si, au lieu de prendre X , nous prenons mX une autre équation différentielle du second ordre ayant mêmes courbes intégrales que X ? Nous avons la proposition suivante

PROPOSITION V.2. — *Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène HM et mX une équation de même dynamique. Alors sur VHM*

$$\theta_{mX} = m^2\theta_X + \left[\frac{1}{2} mL_X^2 m - \frac{1}{4} (L_X m)^2 \right] \text{Id}_{VHM}.$$

COROLLAIRE V.4. — *Les sous-espaces propres verticaux de l'endomorphisme de Jacobi associé à une équation différentielle du second ordre sont des caractéristiques du système dynamique $[X]$, c'est-à-dire si Y vérifie $\theta_X(Y) = \alpha Y$ alors $\theta_{mX}(Y) = \alpha' Y$ pour toute fonction m de classe C^2 partout non nulle.*

Cette proposition confère aux directions propres de θ_X , lorsqu'il est simple, un sens géométrique intrinsèque puisque celles-ci ne dépendent pas du choix du paramétrage des courbes intégrales.

Ainsi si on avait pris pour X par exemple le flot géodésique d'une métrique riemannienne, on aurait pu montrer (voir F. 1) que θ_X est diagonalisable et évaluer ses directions propres. Si maintenant on change de paramétrage avec une fonction m , alors le champ mX n'est pas en général le flot géodésique d'une métrique. Cependant, bien que les valeurs propres changent, les directions propres sont toujours les mêmes. D'ailleurs les valeurs propres d'un endomorphisme de Jacobi ne se transforment pas d'une manière quelconque. La transformation très simple pour θ_X permet en dimension supérieure ou égale à quatre d'associer à X des fonctions et on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE V.5. — *Soient $\{\theta_X^i\}$ les valeurs propres d'un endomorphisme de Jacobi. Alors, lorsqu'elle est définie, une expression de la forme*

$$\frac{\theta_X^i - \theta_X^j}{\theta_X^k - \theta_X^l} = \alpha_{kj}^{il}$$

est une caractéristique du système dynamique $[X]$, c. à. d. ne dépend que des propriétés géométriques des courbes intégrales de X .

Remarque. — Cette invariance par rapport au changement de paramétrage permet en outre des calculs simples.

Preuve de la Proposition V.3. — Soit Y un vecteur vertical. Notons de

la même manière une extension verticale C^1 . Ce qui change notablement quand on considère mX au lieu de X , c'est la distribution horizontale.

On veut évaluer $\theta_{mX}(Y) = \Lambda_{mX}[mX, H_{mX}(Y)]$.

Rappelons que

$$H_{mX}(Y) = mH_X(Y) + L_Y mX + \frac{1}{2} L_X mY.$$

Si nous développons l'expression pour θ_{mX} , nous obtenons

$$(V.3.1) \quad \theta_{mX}(Y) = \Lambda_{mX}[mX, mH_X(Y)] + \Lambda_{mX}\left[mX, \frac{1}{2} L_X mY\right]$$

Il faut maintenant contrôler l'opérateur Λ_{mX} . Il est défini par $\Lambda_{mX}(Y) = Y$, $\Lambda_{mX}(X) = 0$, $\Lambda_{mX}(H_{mX}(Y)) = 0$, d'où $m\Lambda_{mX}(H_X(Y)) + \frac{1}{2} L_X mY = 0$, soit par définition de $H_X(Y)$

$$m\Lambda_{mX}([X, Y]) = -\frac{m}{2} v_X[X, [X, Y]] + \frac{1}{2} L_X mY.$$

L'évaluation de chacun des termes de droite de (V.3.1) n'est plus qu'un calcul élémentaire. ■

VI. DÉRIVATION DYNAMIQUE ASSOCIÉE A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE SUR LE FIBRÉ HOMOGENÈME

DÉFINITION VI.1. — Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène. On peut lui associer un opérateur γ_X , différentiel du premier ordre agissant sur $\mathcal{C}HM$ en posant

- i) $\gamma_X(\alpha X) = (L_X \alpha)X$ pour toute fonction α de classe C^1 ;
- ii) $\gamma_X(Y) = -\frac{1}{2} v_X[X, [X, Y]]$ pour tout champ de vecteurs vertical ;
- iii) $\gamma_X(h) = \underset{>}{\gamma} [X, h]$, pour tout champ de vecteurs horizontal.

On l'appelle *la dérivation dynamique associée à l'équation différentielle du second ordre X*.

Remarques. — i) Par construction la décomposition

$$THM = \mathbb{R}X \oplus h_X HM \oplus VHM$$

est stable par γ_X .

ii) Avec ces notations, on peut réécrire que $H_X(Y) = -[X, Y] + \gamma_X(Y)$ ce qui souligne l'analogie avec le calcul riemannien de la dérivation covariante de Lévi-Civita.

iii) Il faut vérifier que γ_X est différentiel d'ordre un. Considérons Y un champ de vecteurs vertical et λ une fonction C^2 sur HM . On a

$$\gamma_X(\lambda Y) = -\frac{1}{2} v_X[X, [X, \lambda Y]] = \lambda \gamma_X(Y) - \frac{1}{2} v_X \{ (L_X^2 \lambda) Y + 2(L_X \lambda)[X, Y] \}.$$

Puisque $v_X(Y) = 0$ et $v_X([X, Y]) = -Y$, on obtient

$$\gamma_X(\dot{\lambda} Y) = \dot{\lambda} \gamma_X(Y) + (L_X \dot{\lambda}) Y.$$

Pour un champ de vecteurs horizontal h et une fonction de classe C^1 sur HM , il vient de même

$$\gamma_X(\lambda h) = \underset{X}{\succ} ((L_X \lambda) h + \lambda [X, h]) = \lambda \underset{X}{\succ} [X, h] + (L_X \lambda) h.$$

Nous pouvons dès maintenant réunir quelques propriétés immédiates de γ_X .

PROPOSITION VI.2. — *Soit X une équation différentielle du second ordre et γ_X sa dérivation dynamique. Alors*

- i) $[\gamma_X, v_X] = 0$ où $[\]$ désigne le commutateur des opérateurs,
- ii) $\gamma_X(H_X(Y)) = H_X(\gamma_X(Y))$ pour tout champ de vecteurs vertical.

Preuve. — i) Sur X , c'est évident. Pour un champ Y de vecteurs vertical, on a d'après la stabilité $v_X \gamma_X(Y) = 0$ et $\gamma_X(v_X(Y)) = 0$.

Sur un champ de vecteurs horizontal h , il vient

$$v_X \gamma_X(h) = v_X(\underset{X}{\succ} [X, h]) = v_X[X, h].$$

Mais tout h s'écrit $h = -[X, Y] + \gamma_X(Y)$ avec $Y = v_X(h)$. Par suite

$$[X, h] = [X, [X, Y]] - \frac{1}{2} [X, v_X[X, [X, Y]]].$$

En utilisant les propriétés de v_X , il vient

$$\begin{aligned} v_X([X, h]) &= -v_X([X, [X, Y]]) + \frac{1}{2} v_X([X, [X, Y]]) \\ &= \gamma_X(Y) = \gamma_X(v_X(h)). \end{aligned}$$

- ii) Puisque $v_X \gamma_X(H_X(Y)) = \gamma_X(v_X(H_X(Y)))$, on peut écrire

$$H_X \circ v_X \circ \gamma_X(H_X(Y)) = H_X \circ \gamma_X(Y).$$

Il n'y a plus qu'à tenir compte du fait que $H_X \circ v_X = Id_{h_{XHM}}$. ■

Pour l'étude des caractéristiques du système dynamique, on a l'importante proposition suivante.

PROPOSITION VI.3. — *La dérivation dynamique associée à une équation*

différentielle de second ordre mX de même dynamique que X vérifie sur les champs de vecteurs verticaux

$$\gamma_{mX} = m\gamma_X + \frac{1}{2} L_X m \text{Id}_{\text{VHM}}.$$

Preuve. — Si on considère Y un champ de vecteurs vertical nous savons que

$$\gamma_{mX}(Y) = -\frac{1}{2} v_{mX} [mX, [mX, Y]]$$

et que $v_{mX} = \frac{1}{m} v_X$. Il n'y a plus qu'à développer ce double crochet. ■

Conséquences.

Si un sous-fibré vectoriel vertical de rang p est invariant par γ_X , il l'est aussi par γ_{mX} .

S'il existe un champ de vecteurs sur HM tel que $\gamma_X(Y) \equiv 0$ alors $\gamma_{mX}(m^{-1/2}Y) \equiv 0$.

A l'aide de l'endomorphisme de Jacobi et de la dérivation dynamique on peut construire d'autres opérateurs. Au niveau des applications ceux qui interviennent le plus sont $L_X \theta_X$ et $[\theta_X, L_X \theta_X]$.

LEMME VI.4. — Pour $L_X \theta_X$ on a l'identité suivante.

$$(\text{Id} - p_X) L_X \theta_X = [\gamma_X, \theta_X].$$

Montrons par exemple ceci pour les champs de vecteurs verticaux. On utilise la formule de Leibnitz

$$[X, \theta_X(Y)] = L_X \theta_X(Y) + \theta_X([X, Y]).$$

Mais le premier terme se réécrit

$$[X, \theta_X(Y)] = -H_X(\theta_X(Y)) + \gamma_X \circ \theta_X(Y) = -\theta_X(H_X(Y)) + \gamma_X \circ \theta_X(Y).$$

Pour le second il vient

$$L_X \theta_X(Y) + \theta_X([X, Y]) = L_X \theta_X(Y) + \theta_X(-H_X(Y)) + \theta_X \circ \gamma_X(Y).$$

Le cas des champs de vecteurs horizontaux est tout à fait semblable. Et pour X , cette relation est évidente. ■

Le plus intéressant est l'opérateur $[\theta_X, L_X \theta_X]$ parce que sa loi de transformation à l'intérieur d'une dynamique est très simple.

PROPOSITION VI.5. — Soient X et mX deux équations différentielles du second ordre sur le fibré homogène de même dynamique.

Le champ d'endomorphismes de THM $[L_{mX} \theta_{mX}, \theta_{mX}]$ associé à l'équation différentielle du second ordre mX est tel que sur VHM

$$[L_{mX} \theta_{mX}, \theta_{mX}] = m^5 [L_X \theta_X, \theta_X].$$

Remarque. — A ma connaissance, c'est l'opérateur différentiel d'ordre 0 se transformant le plus simplement lors du changement de représentant dans un système dynamique.

Preuve. — D'après (VI.4), $L_{mX}\theta_{mX} = [\theta_{mX}, \gamma_{mX}]$. En utilisant (V.3) et (VI.3), il vient

$$L_{mX}\theta_{mX} = \left[m^2\theta_X + \left\{ \frac{1}{2} m(L_X^2 m) - \frac{1}{4} (L_X m)^2 \right\} Id_{VHM}, m\gamma_X + \frac{1}{2} L_X m Id_{VHM} \right]$$

$$L_{mX}\theta_{mX} = m^3 [\theta_X, \gamma_X] - 2m^2(L_X m) \cdot \theta_X + mL_X \left(\frac{1}{2} mL_X^2 m - \frac{1}{4} (L_X m)^2 \right) Id_{VHM}.$$

Appelons φId le dernier terme de droite. On obtient

$$[L_{mX}\theta_{mX}, \theta_{mX}] = [m^3 L_X \theta_X - 2m^2(L_X m) \cdot \theta_X + \varphi Id_{VHM}, m^2 \theta_X + \left(\frac{1}{2} m(L_X^2 m) - \frac{1}{4} (L_X m)^2 \right) Id_{VHM}]$$

d'où le résultat. ■

Non intégrabilité de la distribution horizontale $h_X HM$ Courbure horizontale.

Nous avons pu jusqu'à maintenant observer une grande ressemblance entre les sous-fibrés vertical et horizontal. Cependant, alors que VHM est intégrable, $h_X HM$ ne l'est en général pas. Cette non-intégrabilité dépend bien naturellement de l'équation différentielle du second ordre X que l'on considère. Sa mesure nous fournit un moyen simple pour construire un opérateur différentiel d'ordre 0 qui l'évalue. Considérons deux champs de vecteurs horizontaux h_1 et h_2 et formons le crochet $[h_1, h_2]$. Sa composante verticale $\Lambda_X[h_1, h_2]$ est bien sûr une opération bilinéaire antisymétrique mais en plus elle ne dépend que des valeurs au point considéré des champs h_1 et h_2 . Comme toujours on peut considérer deux champs de vecteurs verticaux Y_1 et Y_2 dont les images par H_X sont h_1 et h_2 .

On définit ainsi la *courbure horizontale* associée à l'équation différentielle du second ordre X par

$$(VI.6) \quad N_X(Y_1, Y_2) = \Lambda_X[H_X(Y_1), H_X(Y_2)].$$

C'est un opérateur différentiel d'ordre zéro antisymétrique qui laisse VHM stable. On peut étendre sa définition aux champs de vecteurs horizontaux

$$N_X(h_1, h_2) = H_X \circ \Lambda_X[h_1, h_2].$$

VII. QUELQUES EXEMPLES

Pour faire le lien avec la géométrie riemannienne, rappelons sans démonstration un théorème qui se trouve dans (F. 1).

THÉOREME VII.1. — Soit X une équation différentielle du second ordre sur le fibré homogène et θ_X son endomorphisme de Jacobi. Si X est la dynamique déterminée par l'élément de longueur d'une métrique riemannienne g^* donnée sur M , alors

$$T\sigma(\theta_X(Z)) = + R^*(T\sigma(X), T\sigma(Z))T\sigma(X)$$

pour tout champ de vecteurs Z semi-basique pour X .

Après ce premier exemple, passons à la représentation newtonnienne.

La représentation newtonnienne.

Cette représentation locale est bien adaptée aux exemples tirés de la mécanique classique. Elle permet d'écrire les équations du mouvement sous forme newtonnienne.

Considérons la forme locale (I.2) d'une équation différentielle du second ordre X sur HM . Il est toujours possible par changement de représentant de supposer que X^0 est égal à 1. Dans ces conditions, X s'écrit localement

$$(VII.1.1) \quad X = \frac{\partial}{\partial x^0} + u^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \bar{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Nous disons que nous utilisons alors une *représentation newtonnienne* du système dynamique $[X]$.

Quelques formules.

Si nous considérons le champ de vecteurs vertical qui s'écrit localement $\frac{\partial}{\partial u^\beta}$ et que nous formons le crochet $\left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right]$ il vient

$$(VII.1.2) \quad \left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] = - \frac{\partial}{\partial x^\beta} - \left(\frac{\partial \bar{X}^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1 \leq \alpha \leq n-1).$$

Nous pouvons en déduire l'action de v_X qui vérifie

$$v_X \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = 0, \quad v_X \left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] = - \frac{\partial}{\partial u^\beta} \quad \text{et} \quad v_X(X) = 0.$$

On obtient

$$v_X \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta}, \quad v_X \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \right) = - u^j \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

Pour calculer $\gamma_X \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = - \frac{1}{2} v_X \left(\left[X, \left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] \right] \right)$, on commence par

$$\left[X, \left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x^0} + u^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \bar{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, - \frac{\partial}{\partial x^\beta} - \left(\frac{\partial \bar{X}^k}{\partial u^\beta} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} \right]$$

et on obtient

$$(VII. 1. 3) \quad \gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}^k}{\partial u^\beta} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

On peut ainsi donner l'expression locale de $H_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right)$

$$H_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = - \left[X, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right] + \gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right),$$

soit

$$(VII. 1. 4) \quad H_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{X}^k}{\partial u^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial u^k}.$$

Plutôt que de donner une formule générale pour l'endomorphisme de Jacobi nous allons passer à quelques exemples.

VII. 2. Système classique dans un potentiel.

Sur une variété $M \times \mathbb{R}$, si nous considérons un système ayant un lagrangien de la forme $L = \frac{1}{2} m u^2 - V(x^\alpha, x^0)$, où x^α, x^0 désignent respectivement les coordonnées spatiales et temporelles, alors dans la représentation newtonnienne nous savons que localement les composantes de l'accélération vérifient

$$\bar{X}^\alpha = - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq n - 1.$$

Nous sommes dans le cas particulier où celles-ci ne dépendent pas des vitesses, ce qui a pour conséquence d'après (VII. 3) l'annulation des $\gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right)$.

Dès lors

$$H_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad \text{et donc} \quad \Lambda_x \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = 0,$$

autrement dit la distribution horizontale est intégrable.

Pour évaluer $\theta_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \Lambda_x \left[X, H_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) \right]$, il n'y a qu'à développer

$$\theta_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \Lambda_x \left[\frac{\partial}{\partial x^0} + u^j \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right]$$

et on obtient

$$(VII. 2) \quad \theta_x \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Dans cette base la matrice de l'endomorphisme de Jacobi coïncide donc avec la matrice des dérivées secondes du potentiel.

Pour obtenir les directions invariantes de θ_x , il n'y a qu'à diagonaliser cette matrice. Donnons dans ce cas particulier l'expression de $[L_x\theta_x, \theta_x]$ qu'on obtient par un court calcul

$$[L_x\theta_x, \theta_x]\left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\right) = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{n-1} u^k \left(\sum_{j,\alpha=1}^{n-1} (V_{\beta j} V_{k j \alpha} - V_{\beta k j} V_{j \alpha}) \frac{\partial}{\partial u^j} \right) + \frac{1}{m^2} \sum_{j,\alpha=1}^{n-1} \left(V_{\beta j} \frac{\partial V_{j \alpha}}{\partial t} - \frac{\partial V_{\beta j}}{\partial t} \cdot V_{j \alpha} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}$$

où
$$V_{k j \alpha} = \frac{\partial^3 V}{\partial x^k \partial x^j \partial x^\alpha}.$$

VII.3. Chaîne linéaire d'atomes dans l'approximation harmonique.

Pour mieux comprendre la signification des directions propres de θ_x on pourrait considérer une chaîne linéaire d'atomes identiques de masse m reliés dans l'approximation harmonique par des ressorts tous identiques de constante de raideur k . On travaille alors dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ et on a un lagrangien qui s'écrit

$$L = \sum_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2} m u_p^2 - \frac{1}{2} k (x_{p+1} - x_p)^2 \right).$$

D'après la formule précédente, on est conduit à

$$\theta_x \left(\frac{\partial}{\partial u^p} \right) = \frac{k}{m} \left(2 \frac{\partial}{\partial u^p} - \frac{\partial}{\partial u^{p+1}} - \frac{\partial}{\partial u^{p-1}} \right).$$

On sait que les directions propres et les valeurs propres de cette matrice conduisent aux modes propres du système.

VII.4. Champ magnétique.

Toujours dans le cas de la représentation newtonnienne, on peut considérer l'exemple d'une particule de charge q placée dans un champ magnétique B si on considère $M = \mathbb{R}^4$ avec des coordonnées locales (t, x, y, z) et pour $HM(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ et $B = (B_x, B_y, B_z)$.

$$X = \partial_0 + v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{q}{m} \left\{ (v_y B_z - v_z B_y) \frac{\partial}{\partial v_x} + (v_z B_x - v_x B_z) \frac{\partial}{\partial v_y} + (v_x B_y - v_y B_x) \frac{\partial}{\partial v_z} \right\},$$

soit d'après (VII.1.3)

$$\gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) = -\frac{q}{2m} \left(-B_z \frac{\partial}{\partial v_y} + B_y \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$$

$$\gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_y} \right) = -\frac{q}{2m} \left(B_z \frac{\partial}{\partial v_x} - B_x \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$$

$$\gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_z} \right) = -\frac{q}{2m} \left(-B_y \frac{\partial}{\partial v_x} + B_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right)$$

ce qu'on peut écrire formellement en posant $\vec{\nabla}_v = \left(\frac{\partial}{\partial r_x}, \frac{\partial}{\partial r_y}, \frac{\partial}{\partial r_z} \right)$

$$\gamma_x(\vec{\nabla}_v) = \frac{q\vec{B}}{2m} \wedge \vec{\nabla}_v.$$

De ceci on déduit par exemple

$$H_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) = \partial_x + \frac{q}{2m} \left(B_y \frac{\partial}{\partial v_z} - B_z \frac{\partial}{\partial v_y} \right).$$

On est alors en mesure de calculer

$$\theta_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) = \Lambda_x \left[X, H_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) \right]$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \theta_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) &= \left(\frac{q}{2m} \right)^2 \left[(B_y^2 + B_z^2) \frac{\partial}{\partial v_x} - B_z B_x \frac{\partial}{\partial v_z} - B_y B_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right] \\ &\quad - \frac{q}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left((\vec{v} \vee \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v \right) - \left(\partial_0 + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{q}{2m} \left(B_z \frac{\partial}{\partial v_y} - B_y \frac{\partial}{\partial v_z} \right). \end{aligned}$$

Ceci conduit par exemple à

$$\text{Trace } \theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{q\mathbf{B}}{m} \right)^2 + \frac{q}{m} \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{B}.$$

Cas particulier.

Supposons que \vec{B} est uniforme et que $\vec{B} = (0, 0, B)$. Alors

$$\gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) = \frac{q}{2m} \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial v_y}, \quad \gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_y} \right) = \frac{-q}{2m} \mathbf{B} \frac{\partial}{\partial v_x}, \quad \gamma_x \left(\frac{\partial}{\partial v_z} \right) = 0.$$

Si nous posons $\varphi = \frac{q\mathbf{B}t}{2m}$ et nous effectuons un changement de repère en posant

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_x} \\ \frac{\partial}{\partial v_y} \end{pmatrix}, \text{ alors on obtient } \gamma_x(Y_1) = \gamma_x(Y_2) = 0.$$

Vérifions-le pour Y_1 . D'après les propriétés de γ_X , on a

$$\gamma_X(Y_1) = L_X \varphi \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial v_x} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial v_y} \right) + \cos \varphi \frac{q}{2m} B \frac{\partial}{\partial v_y} + \sin \varphi \cdot \frac{qB}{2M} \frac{\partial}{\partial v_x}$$

et
$$L_X \varphi = \frac{q}{2m}.$$

Il y a donc dans cet exemple encore un champ de repères où γ_X s'annule. Pour θ_X un calcul élémentaire conduit à

$$\theta_X \left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) = \left(\frac{qB}{2m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v_x}, \quad \theta_X \left(\frac{\partial}{\partial v_y} \right) = \left(\frac{qB}{2m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v_y}, \quad \theta_X \left(\frac{\partial}{\partial v_z} \right) = 0$$

et donc aussi à

$$\theta_X(Y_1) = \left(\frac{qB}{2m} \right)^2 Y_1, \quad \theta_X(Y_2) = \left(\frac{qB}{2m} \right)^2 Y_2, \quad \theta_X \left(\frac{\partial}{\partial v_z} \right) = 0.$$

Nous sommes dans un cas où

$$L_X \theta_X = [\gamma_X, \theta_X] = 0, \quad \text{d'où} \quad [\theta_X, L_X \theta_X] = 0.$$

Cette dernière relation est comme on le sait (voir VI.5) invariante par un changement de paramétrage $X \mapsto mX$.

VIII. APPLICATIONS : ÉTUDE DU CENTRALISATEUR DE X ET PROBLÈME INVERSE

On va étudier l'existence de champs de vecteurs ξ commutant avec une équation différentielle du second ordre X.

Pour présenter nos premiers résultats, nous allons nous placer dans le cas particulier d'une variété M compacte de dimension deux

PROPOSITION VIII.1. — Soit M une variété compacte de dimension 2 et X une équation différentielle du second ordre sur HM. On suppose

- i) l'endomorphisme de Jacobi strictement négatif
- ii) l'existence d'un champ de vecteurs vertical Y sans singularité tel que $\gamma_X(Y) \equiv 0$.

Alors le centralisateur de X est trivial (i. e. si $\xi \in \text{THM}$ et $L_X \xi \equiv 0$, alors $\xi \equiv aX$, $a \in \mathbb{R}$).

Remarque. — L'hypothèse ii) qui porte sur γ_X est vérifiée pour une très large classe de systèmes dynamiques notamment tous les cas lagrangiens.

Cette proposition admet dans le cas lagrangien convexe une généralisation naturelle en dimension quelconque. On obtient ainsi une *extension*

d'un résultat connu pour les variétés riemanniennes compactes à courbure négative.

Preuve. — Tout champ de vecteurs ξ sur HM se décompose naturellement sur $\text{VHM} \oplus h_X \text{HM} \oplus \mathbb{R}X$ en $\xi = aX + h + v$.

La relation $[X, \xi] = 0$ conduit à

$$0 = (L_X a)X + p_X[X, h] + \theta_X(v_X(h) + \gamma_X(h) + -H_X(v) + \gamma_X(v))$$

où l'on a utilisé les définitions de γ_X et θ_X .

Il en résulte après projection les trois équations

$$i) \quad 0 = (L_X a)X + p_X[X, h],$$

$$ii) \quad 0 = \theta_X(v_X(h)) + \gamma_X(v),$$

$$iii) \quad 0 = \gamma_X(h) - H_X(v).$$

Puisque $[\gamma_X, v_X] = 0$, on obtient pour *iii)*

$$0 = \gamma_X(v_X(h)) - v,$$

soit en reportant dans *ii)*, on obtient l'équation de « Jacobi ».

$$0 = (\theta_X + \gamma_X \circ \gamma_X)(v_X(h)).$$

Nous allons nous concentrer sur cette équation qui tient une place importante dans toutes les applications. Ici nous sommes en dimension deux, donc le fibré VHM est de rang 1 et il existe une fonction C^1 , $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$v_X(h) = \alpha Y.$$

On obtient dès lors puisque $\gamma_X(Y) = 0$

$$0 = \theta\alpha + L_X^2\alpha.$$

où θ désigne l'unique valeur propre de θ_X .

Ceci nous permet aussi d'écrire que

$$\theta\alpha^2 + \alpha L_X^2\alpha = 0.$$

On développe

$$\theta\alpha^2 + \frac{1}{2} L_X^2\alpha^2 - (L_X\alpha)^2 = 0$$

puisque nous sommes sur une variété compacte α^2 atteint son maximum en au moins un point. En un de ces points, $\theta\alpha^2 = -\frac{1}{2} L_X^2\alpha^2$. Comme $\theta < 0$ et $-\frac{1}{2} L_X^2\alpha^2 \geq 0$, α^2 est nul en ce point et donc est nul partout. ■

Pour montrer l'importance de la deuxième condition dans VIII.1, citons une proposition qui a un lien avec le problème inverse du calcul des variations.

PROPOSITION VIII.2. — Soit M une variété de dimension 2 et une équation différentielle du second ordre X telle qu'il existe un champ de vecteurs vertical Y sans singularité vérifiant $\gamma_X(Y) \equiv 0$.

Alors il existe sur HM une 2-forme fermée W invariante par X i. e.,

$$i) \quad dW = 0,$$

$$ii) \quad L_X W = 0.$$

Preuve. — On construit une 2-forme W sur HM en posant $i_X i_Y W = 0$, $i_X i_{[X, Y]} W = 0$, $i_Y i_{[X, Y]} W = 1$.

Cette 2-forme est fermée puisque

$$\begin{aligned} dW(X, Y, [X, Y]) &= L_X(W(Y, [X, Y])) - L_Y(W(X, [X, Y])) \\ &\quad + L_{[X, Y]}(W(X, Y)) - W([X, Y], [X, Y]) \\ &\quad + W([X, [X, Y]], Y) \\ &\quad - W([Y, [X, Y]], X). \end{aligned}$$

Il ne reste par construction que

$$dW(X, Y, [X, Y]) = W([X, [X, Y]], Y).$$

En fait, seule compte la projection de $[X, [X, Y]]$ sur $[X, Y]$. Mais comme on peut écrire localement

$$[X, [X, Y]] = aY + b[X, Y] + cX,$$

on obtient

$$v_X[X, [X, Y]] = -bY = -2\gamma_X(Y).$$

Or $\gamma_X(Y) \equiv 0$ et Y est sans singularité, d'où $b = 0$ et

$$i) \quad dW(X, Y, [X, Y]) = 0.$$

Par construction $i_X W = 0$ et donc

$$L_X W = i_X dW + di_X W = 0. \quad \blacksquare$$

REMERCIEMENTS

J'adresse ici mes plus vifs remerciements à Jean-Pierre Bourguignon qui a suivi pas à pas l'évolution des idées contenues dans cet article et qui a participé à leur conception. Je tiens à remercier aussi le Laboratoire de Physique Théorique et le Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique pour leur aide et en particulier Camille Amozig qui a frappé avec soin chaque caractère de ce texte.

BIBLIOGRAPHIE

V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Éditions MIR, Moscou.

- V. I. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- D. BENNEQUIN, *Quelques remarques simples sur la rigidité symplectique*, *Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie symplectique*, 1983, vol. II, Herman.
- A. BESSE, *Manifolds all whose geodesic are closed*, Springer-Verlag, 1972.
- (F. 1) P. FOULON, *Contribution à l'étude géométrique des problèmes de la dynamique lagrangienne*. Preprint Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France, octobre 1983.
- (F. 3) P. FOULON, *Réductibilité de systèmes dynamiques variationnels*. Preprint Centre de Physique Théorique, 91128, Palaiseau, France, mai 1985.
- (F. 4) P. FOULON, *Estimation de l'entropie des systèmes Lagrangiens sans points conjugués*. Preprint Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, 91128, Palaiseau, France, octobre 1985.
- A. FREIRE et R. MĀNÉ, On the entropy of geodesic flow in manifolds without conjugate points, *Inventiones*, t. **69**, 1982, p. 375-392. Springer Verlag.
- (G. 1) C. GOBILLON, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Herman, 1969.
- J. KLEIN, Espaces variationnels et mécaniques. *Annales de l'Institut Fourier*, t. **XII**, 1962, p. 1-124.
- J. KLEIN, *Geometry of Sprays. Lagrangian Case. Principle of least curvature*. Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern developments of Sciences of Turin, 7 septembre 1982.
- P. LIBERMANN, *Sur quelques propriétés de géométrie homogène*. Colloque de Balaruc, 1984, Travaux en cours (Herman).
- R. OSSERMAN et P. SARNAK, New curvature invariant and entropy of geodesic flows. *Inventiones*, t. **77**, 1984, p. 455-462. Springer Verlag.

(Manuscrit reçu le 30 octobre 1985)