ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. S. MISHRA

A. HAMOUI

Sur les variétés presque sasakiennes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 36, nº 3 (1982), p. 201-210

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__36_3_201_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXXVI, n° 3, 1982, p. 201-210.

Section A :
Physique théorique.

Sur les variétés presque sasakiennes

par

R. S. MISHRA et A. HAMOUI

Département de Mathématiques, Université de Koweit

SOMMAIRE. — Il est bien connu qu'une variété Sasakienne est une variété Riemannienne « de K-contact » particulière, qui elle-même est une variété presque Sasakienne particulière. L'objet de ce travail est de donner une formule sur une variété presque Sasakienne, dont l'analogue se retrouve dans le cas des variétés Riemanniennes de K-contact.

La méthode utilisée est non-conventionnelle et a été mise au point par les auteurs. On étudie aussi dans cet article les applications géométriques de cette formule.

SUMMARY. — It is well known that a Sasakian manifold is a particular K-contact Riemannian manifold, which in turn is itself a particular almost Sasakian manifold. The purpose of this paper is to obtain a formula on an almost Sasakian manifold, whose analogous is known in a K-contact Riemannian manifold.

The method used is non-conventional and has been devised by the authors. The geometrical applications of this formula have also been studied.

1. INTRODUCTION

On appelle *variété presque Graynienne* (ou variété métrique presque contact) [*1*] [*2*], une variété différentielle de dimension impaire V_n, $n = 2m + 1$, munie d'un champ de tenseurs F de type (1,1), d'un champ de vecteurs U, d'une 1-forme u et d'un tenseur métrique non-singulier g satisfaisant aux conditions suivantes :

$$a)\ F^2 + I_n = u \otimes U\,, \qquad b)\ g(\bar{X}, \bar{Y}) = g(X, Y) - u(X)u(Y)\,, \qquad (1.1)$$
$$c)\ g(X, U) = u(X)\,, \qquad d)\ \bar{U} = 0$$

où

$$e)\ \bar{X} \overset{\text{def}}{=} F(X).$$

Dans ce qui précède et dans la suite X, Y, Z, . . . $\in T_p(V_n)$ et sont arbitraires, $T_p(V_n)$ étant l'espace tangent à V_n dans un point $P \in V_n$.

Dans une variété presque Graynienne, on peut montrer

$$a)\ u \circ F = 0, \qquad b)\ u(U) = 1, \qquad c)\ \operatorname{rang}(F) = n - 1. \tag{1.2}$$

Posons :

$$'F(X, Y) \overset{\text{def}}{=} g(\bar{X}, Y). \tag{1.3}$$

Alors $'F$ est alternée et est appelée la *2-forme fondamentale de* V_n.

Une variété presque Graynienne est appelée *une variété presque Sasakienne* (notée brièvement dans la suite par (VPS)) [*3*] [*4*], si

$$2'F = du, \tag{1.4 a}$$

qui est équivalente à

$$2'F(X, Y) = (D_X u)(Y) - (D_Y u)(X), \tag{1.4 b}$$

d étant la dérivée extérieure et D la connexion Riemannienne.

On déduit aisément de (1.4) que $'F$ est fermée sur une (VPS) ; c'est-à-dire :

$$d'F = 0. \tag{1.5 a}$$

Celle-ci est équivalente à

$$(D_X{'F})(Y, Z) + (D_Y{'F})(Z, X) + (D_Z{'F})(X, Y) = 0. \tag{1.5 b}$$

Sur une variété presque Graynienne, on a

$$a)\ (D_X u)(U) = 0, \qquad b)\ (D_U{'F})(X, Y) = (D_X u)(\bar{Y}) - (D_Y u)(\bar{X}); \tag{1.6}$$

et sur une (VPS), on a

$$c)\ (D_U u)(X) = 0.$$

L'équation (1.4 b) est équivalente à

$$2\bar{X} = D_X U - ({}^{-1}G\nabla u)(X);$$

d'où

$$2\bar{\bar{X}} = D_{\bar{X}} U - ({}^{-1}G\nabla u)(\bar{X}),$$

${}^{-1}G$ étant l'application inverse de G définie par la relation :

$$(G(X))(Y) = g(X, Y)$$

et ∇ étant la dérivée covariante.

En contractant la dernière équation, on obtient sur une (VPS) :

$$d) \qquad (\operatorname{div} F)U = n - 1.$$

Si sur une (VPS) le vecteur U est un vecteur de Killing ; c'est-à-dire si

$$(D_X u)(X) = 0, \tag{1.7}$$

alors cette variété est dite *variété Riemannienne de K-contact*, [5] [6]. Ainsi sur une variété Riemannienne de K-contact, on a :

$$a)\qquad 'F(X, Y) = (D_X u)(Y) = -(D_Y u)(X), \qquad b)\ D_X U = \bar{X} : \tag{1.8}$$

et on peut démontrer de (1.8) et (1.5) que

$$a)\qquad \operatorname{div} U = 0, \qquad b)\ \operatorname{Ric}(Y, U) = (\operatorname{div} F)Y, \tag{1.9}$$

$$(D_Z{}'F)(X, Y) = {}'K(X, Y, Z, U) \tag{1.10}$$

où Ric est le tenseur de Ricci et $'K(X, Y, Z, U)$ est le tenseur covariant associé au tenseur de courbure K.

Si sur une variété Riemannienne de K-contact V_n on a

$$(D_Z{}'F)(X, Y) = {}'K(X, Y, Z, U) = u(Y)g(X, Z) - u(X)g(Y, Z), \tag{1.11}$$

alors V_n est appelée *variété Sasakienne.*

Sur une variété Sasakienne, on peut démontrer que :

$$(\operatorname{div} F)X = \operatorname{Ric}(X, U) = (n-1)u(X). \tag{1.12}$$

Dans ce travail une formule analogue à (1.10) qui s'applique à une variété Riemannienne de K-contact, est établie pour une (VPS).

Les formules suivantes, qui sont valables sur les variétés presque Grayniennes, seront utilisées dans la suite :

$$a)\ (D_X{}'F)(\bar{Y}, Z) - (D_X{}'F)(Y, \bar{Z}) = (D_X u)(Y)u(Z) + (D_X u)(Z)u(Y), \tag{1.13}$$

$$b)\ (D_X{}'F)(\bar{Y}, \bar{Z}) + (D_X{}'F)(Y, Z) = (D_X u)(\bar{Z})u(Y) - (D_X u)(\bar{Y})u(Z).$$

2. SOLUTION DU PROBLÈME POSÉ

L'équation (1.4) est équivalente à :

$$\nabla u(Z, Y) = 2'F(Y, Z) + (\nabla u)(Y, Z),$$

d'où

$$(\nabla\nabla u)(Z, Y, X) = 2(D_X{}'F)(Y, Z) + (\nabla\nabla u)(Y, Z, X). \tag{2.1}$$

Celle-ci entraîne :

$$a)\ -u(K(X, Y, Z) = 2(D_X{}'F)(Y, Z) + 2(D_Y{}'F)(Z, X) + A(X, Z, Y) - A(Y, Z, X), \tag{2.2}$$

où

$$b)\qquad A(X, Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla\nabla u)(Z, Y, X).$$

K étant le tenseur de Riemann-Christoffel du second type, c'est-à-dire le tenseur de courbure de la connexion Riemannienne D.

Le membre de gauche de (2.2 *a*) est égal à $-\,'K(X, Y, Z, U)$, où

$$'K(X, Y, Z, W) \overset{\text{def}}{=} gK(X, Y, Z), W).$$

Il est clair, d'après (2.1) et (2.2 *a*), que

$$-\,'K(X, Y, Z, U) = A(X, Y, Z) - A(Y, X, Z). \tag{2.3}$$

En comparant (2.2 *a*) et (2.3), il vient

$$A(X, Y, Z) + A(Y, Z, X) - A(Y, X, Z) - A(X, Z, Y) = -2(D_Z{'F})(X, Y) \tag{2.4}$$

comme conséquence de (1.5).

Les équations (2.4) et (1.13) nous permettent d'écrire A(X, Y, Z) sous la forme :

$$\begin{aligned}
A(X, Y, Z) = {} & \underset{1}{\alpha}(D_X{'F})(Y, Z) + \underset{2}{\alpha}(D_Y{'F})(Z, X) + \underset{3}{\alpha}(D_Z{'F})(X, Y) \\
& + \underset{1}{\beta}(D_{\bar X}{'F})(Y, Z) + \underset{2}{\beta}(D_{\bar Y}{'F})(Z, X) + \underset{3}{\beta}(D_{\bar Z}{'F})(X, Y) \\
& + \underset{1}{\gamma}(D_X{'F})(\bar Y, Z) + \underset{2}{\gamma}(D_Y{'F})(\bar Z, X) + \underset{3}{\gamma}(D_Z{'F})(\bar X, Y) \\
& + \underset{1}{\delta}(D_{\bar X}{'F})(\bar Y, Z) + \underset{2}{\delta}(D_{\bar Y}{'F})(\bar Z, X) + \underset{3}{\delta}(D_{\bar Z}{'F})(\bar X, Y) \\
& + \underset{1}{A}(D_X u)(Y)u(Z) + \underset{2}{A}(D_Y u)(Z)u(X) + \underset{3}{A}(D_Z u)(X)u(Y) \\
& + \underset{1}{B}(D_Y u)(X)u(Z) + \underset{2}{B}(D_Z u)(Y)u(X) + \underset{3}{B}(D_X u)(Z)u(Y) \\
& + \underset{1}{C}(D_X u)(\bar Y)u(Z) + \underset{2}{C}(D_Y u)(\bar Z)u(X) + \underset{3}{C}(D_Z u)(\bar X)u(Y) \\
& + \underset{1}{D}(D_Y u)(\bar X)u(Z) + \underset{2}{D}(D_Z u)(\bar Y)u(X) + \underset{3}{D}(D_X u)(\bar Z)u(Y) \\
& + \underset{1}{E}(D_{\bar X} u)(Y)u(Z) + \underset{2}{E}(D_{\bar Y} u)(Z)u(X) + \underset{3}{E}(D_{\bar Z} u)(X)u(Y) \\
& + \underset{1}{F}(D_{\bar Y} u)(X)u(Z) + \underset{2}{F}(D_{\bar Z} u)(Y)u(X) + \underset{3}{F}(D_{\bar X} u)(Z)u(Y) \\
& + \underset{1}{G}(D_{\bar X} u)(\bar Y)u(Z) + \underset{2}{G}(D_{\bar Y} u)(\bar Z)u(X) + \underset{3}{G}(D_{\bar Z} u)(\bar X)u(Y) \\
& + \underset{1}{H}(D_{\bar Y} u)(\bar X)u(Z) + \underset{2}{H}(D_{\bar Z} u)(\bar Y)u(X) + \underset{3}{H}(D_{\bar X} u)(\bar Z)u(Y).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Substituant dans (2.4) la valeur de A donnée dans (2.5) et comparant les coefficients, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&a)\ \underset{1}{\alpha} = \frac{1}{2}, \quad \underset{3}{\alpha} = -\underset{2}{\alpha} - 1 ; && b)\ \underset{1}{\beta} = 0, \quad \underset{3}{\beta} = -\underset{2}{\beta} ; \\
&c)\ \underset{1}{\gamma} = \underset{2}{\gamma} = \underset{3}{\gamma} = \underset{1}{\delta} = \underset{2}{\delta} = \underset{3}{\delta} = 0 ; && d)\ \underset{1}{B} = \underset{3}{A}, \quad \underset{2}{B} = \underset{2}{A}, \quad \underset{3}{B} = \underset{1}{A} ; \\
&e)\ \underset{1}{D} = \underset{3}{C}, \quad \underset{2}{D} = \underset{2}{C}, \quad \underset{3}{D} = \underset{1}{C} ; && f)\ \underset{1}{F} = \underset{3}{E}, \quad \underset{2}{F} = \underset{2}{E}, \quad \underset{3}{F} = \underset{1}{E} ; \\
&g)\ \underset{1}{H} = \underset{3}{G}, \quad \underset{2}{H} = \underset{2}{G}, \quad \underset{3}{H} = \underset{1}{G}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En mettant dans (2.5) les valeurs données dans (2.6) et substituant ensuite la valeur de A donnée en (2.3) et en invoquant (1.5 *b*), il vient

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{U}) - \left(3\underset{2}{\alpha} + \frac{5}{2}\right)(\mathrm{D}_{\mathrm{Z}}{}'\mathrm{F})(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \underset{2}{\beta}\,\{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Y}}}{}'\mathrm{F})(\mathrm{Z}, \mathrm{X}) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{X}}}{}'\mathrm{F})(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - 2(\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}{}'\mathrm{F})(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \} \\
&= 2'\mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})u(\mathrm{Z})\{ \underset{1}{\mathrm{B}} - \underset{1}{\mathrm{A}} - \underset{1}{\mathrm{G}} + \underset{1}{\mathrm{H}} \} + \{ (\mathrm{D}_{\mathrm{X}}u)(\mathrm{Z})u(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}u)(\mathrm{Z})u(\mathrm{X}) \}(\underset{2}{\mathrm{A}} - \underset{1}{\mathrm{A}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\mathrm{Z}}u)(\mathrm{X})u(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}u)(\mathrm{Y})u(\mathrm{X}) \}(\underset{2}{\mathrm{A}} - \underset{1}{\mathrm{B}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}u)(\bar{\mathrm{X}}) - (\mathrm{D}_{\mathrm{X}}u)(\bar{\mathrm{Y}}) \}u(\mathrm{Z})(\underset{1}{\mathrm{C}} - \underset{1}{\mathrm{D}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\mathrm{Y}}u)(\bar{\mathrm{Z}})u(\mathrm{X}) - (\mathrm{D}_{\mathrm{X}}u)(\bar{\mathrm{Z}})u(\mathrm{Y}) \}(\underset{1}{\mathrm{C}} - \underset{2}{\mathrm{C}}) \qquad\qquad (2.7) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\mathrm{Z}}u)(\bar{\mathrm{X}})u(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\mathrm{Z}}u)(\bar{\mathrm{Y}})u(\mathrm{X}) \}(\underset{2}{\mathrm{C}} - \underset{1}{\mathrm{D}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{X}}}u)(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Y}}}u)(\mathrm{X}) \}u(\mathrm{Z})(\underset{1}{\mathrm{F}} - \underset{1}{\mathrm{E}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Y}}}u)(\mathrm{Z})u(\mathrm{X}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{X}}}u)(\mathrm{Z})u(\mathrm{Y}) \}(\underset{1}{\mathrm{E}} - \underset{2}{\mathrm{E}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}u)(\mathrm{X})u(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}u)(\mathrm{Y})u(\mathrm{X}) \}(\underset{2}{\mathrm{E}} - \underset{1}{\mathrm{F}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Y}}}u)(\bar{\mathrm{Z}})u(\mathrm{X}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{X}}}u)(\bar{\mathrm{Z}})u(\mathrm{Y}) \}(\underset{1}{\mathrm{G}} - \underset{2}{\mathrm{G}}) \\
&+ \{ (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}u)(\bar{\mathrm{X}})u(\mathrm{Y}) - (\mathrm{D}_{\bar{\mathrm{Z}}}u)(\bar{\mathrm{Y}})u(\mathrm{X}) \}(\underset{2}{\mathrm{G}} - \underset{1}{\mathrm{H}}).
\end{aligned}
$$

En remplaçant Z par U dans l'équation précédente et en utilisant (1.6), on obtient :

$$a)\ \underset{1}{\mathrm{E}} - \underset{1}{\mathrm{F}} = \underset{1}{\mathrm{C}} - \underset{1}{\mathrm{D}} - 1\,; \qquad b)\ \underset{1}{\mathrm{A}} - \underset{1}{\mathrm{B}} + \underset{1}{\mathrm{G}} - \underset{1}{\mathrm{H}} = \underset{2}{\beta}. \qquad (2.8)$$

Considérons maintenant le cas particulier d'une variété Riemannienne de K-contact dans laquelle les équations (1.10), (1.7) et (1.8) sont satisfaites. Tenant compte de ces équations, la comparaison des coefficients dans (2.7) donne :

$$a)\ \underset{2}{\alpha} = -\frac{1}{2}\,; \qquad b)\ \underset{2}{\beta} = 0\,; \qquad c)\ \underset{1}{\mathrm{A}} + \underset{1}{\mathrm{G}} = \underset{1}{\mathrm{B}} + \underset{1}{\mathrm{H}}\,; \qquad (2.9)$$

$$d)\ \underset{1}{\mathrm{C}} + \underset{1}{\mathrm{D}} + 2\underset{2}{\mathrm{E}} = \underset{1}{\mathrm{E}} + \underset{1}{\mathrm{F}} + 2\underset{2}{\mathrm{C}}.$$

De (2.8 *b*) et (2.9 *d*), on déduit :

$$a)\ \underset{1}{\mathrm{C}} - \underset{2}{\mathrm{C}} = \underset{1}{\mathrm{E}} - \underset{2}{\mathrm{E}} + \frac{1}{2}\,; \qquad b)\ \underset{2}{\mathrm{E}} - \underset{1}{\mathrm{F}} = \underset{2}{\mathrm{C}} - \underset{1}{\mathrm{D}} - \frac{1}{2}. \qquad (2.10)$$

Par les relations (2.9 *a*, *b*, *c*) et (2.10), la relation (2.7) prend la forme :

$$
\begin{aligned}
a)\ 'K(X, Y, Z, U) &= (D_Z{}'F)(X, Y) - \{ (D_X u)(\bar{Y}) - (D_Y u)(\bar{X}) \} u(Z) \\
&- \frac{1}{2} \{ (D_X u)(\bar{Z})u(Y) - (D_Y u)(\bar{Z})u(X) + (D_Z u)(\bar{Y})u(X) - (D_Z u)(\bar{X})u(Y) \} \\
&+ \alpha \{ (D_X u)(Z)u(Y) - (D_Y u)(Z)u(X) \} + \beta \{ (D_Z u)(Y)u(X) - (D_Z u)(X)u(Y) \} \\
&+ \gamma \{ (D_X u)(\bar{Z})u(Y) - (D_Y u)(\bar{Z})u(X) + (D_{\bar{X}} u)(Z)u(Y) - (D_{\bar{Y}} u)(Z)u(X) \} \\
&+ \delta \{ (D_Z u)(\bar{Y})u(X) - (D_Z u)(\bar{X})u(Y) + (D_{\bar{Z}} u)(Y)u(X) - (D_{\bar{Z}} u)(X)u(Y) \} \\
&+ \theta \{ (D_{\bar{X}} u)(\bar{Z})u(Y) - (D_{\bar{Y}} u)(\bar{Z})u(X) \} \\
&- (\alpha + \beta + \theta) \{ (D_{\bar{Z}} u)(\bar{Y})u(X) - (D_{\bar{Z}} u)(\bar{X})u(Y) \}, \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

où nous avons posé :

$$
\underset{2}{A} - \underset{1}{A} = \alpha, \quad \underset{1}{B} - \underset{2}{A} = \beta, \quad \underset{2}{E} - \underset{1}{E} = \gamma, \quad \underset{1}{F} - \underset{2}{F} = \delta, \quad \underset{2}{G} - \underset{1}{G} = \theta .
$$

A l'aide de (1.4 *a*), l'équation (2.11 *a*) peut être simplifiée en :

$$
\begin{aligned}
b)\ 'K(X, Y, Z, U) &= (D_Z{}'F)(X, Y) - \{ (D_X u)(\bar{Y}) - (D_Y u)(\bar{X}) \} u(z) \\
&- g(Y, Z)u(X) + g(X, Z)u(Y) + 2(\alpha + \theta) \{ u(X)'F(Y, Z) - u(Y)'F(X, Z) \} \\
&+ \left(\gamma - \delta - \frac{1}{2} \right) \{ u(Y)(D_X u)(\bar{Z}) - u(X)(D_Y u)(\bar{Z}) \} \\
&+ (\alpha - \beta) \{ (D_X u)(Z)u(Y) - (D_Y u)(Z)u(X) \} \qquad (2.11) \\
&+ \left(\gamma - \delta + \frac{1}{2} \right) \{ u(Y)(D_{\bar{X}} u)(Z) - u(X)(D_{\bar{Y}} u)(Z) \} \\
&+ (2\theta + \alpha + \beta) \{ u(Y)(D_{\bar{X}} u)(\bar{Z}) - u(X)(D_{\bar{X}} u)(\bar{Z}) \} .
\end{aligned}
$$

(2.11 *b*) *est l'équation recherchée.*

De ce qui précède, on voit que, sur une (VPS) le tenseur 'K n'est pas déterminé de façon unique. Il est déterminé en fonction de cinq paramètres α, β, γ, δ, θ.

Le théorème suivant ne contient pas de paramètres.

THÉORÈME 2.1. — Sur une variété presque Sasakienne, on a :

$$
\begin{aligned}
a)\ 'K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, U) &= - (D_Z{}'F)(X, Y) + (D_Z u)(\bar{Y})u(X) - (D_Z u)(\bar{X})u(Y) \\
&\qquad + \{ (D_{\bar{X}} u)(Y) - (D_{\bar{Y}} u)(X) \} u(Z) . \qquad (2.13) \\
b)\ 'K(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, U) &= - (D_{\bar{Z}}{}'F)(X, Y) + (D_{\bar{Z}} u)(\bar{Y})u(X) - (D_{\bar{Z}} u)(\bar{X})u(Y) .
\end{aligned}
$$

En effet, si on remplace X, Y dans (2.11) par $\bar{X}$, $\bar{Y}$ respectivement et en utilisant (1.13 *b*) et (1.6), on obtient (2.13 *a*). En outre, (2.13 *b*) s'obtient de (2.13 *a*) en remplaçant Z par $\bar{Z}$ et en utilisant (1.2 *a*).

REMARQUE 2.1. — De (2.13 *a*) on tire la relation, valable sur une variété Sasakienne :

$$
'K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, U) = 0 .
$$

COROLLAIRE 2.1. — Sur une variété presque Sasakienne, on a :

$$(D_{\bar{X}}{}'F)(Y, Z) + (D_{\bar{Y}}{}'F)(Z, X) + (D_{\bar{Z}}{}'F)(X, Y) + 2'F(X, Y)u(Z) + 2'F(Y, Z)u(X) + 2'F(Z, X)u(Y) = 0 \quad (2.14)$$

En effet, cette relation s'obtient en appliquant les identités cycliques de Bianchi dans (2.13 *b*) et en utilisant (1.4 *b*).

REMARQUE 2.2. — On peut obtenir directement (2.14) en substituant de (1.4 *b*) dans la relation

$$(D_{\bar{X}}{}'F)(Y, Z) + (D_{\bar{Y}}{}'F)(Z, X) + (D_{\bar{Z}}{}'F)(X, Y) + \{ (D_{\bar{Z}}u)(\bar{X}) - (D_{\bar{X}}u)(\bar{Z}) \} u(Y) + \{ (D_{\bar{X}}u)(\bar{Y}) - (D_{\bar{Y}}u)\bar{X} \} u(Z) + \{ (D_{\bar{Y}}u)(\bar{Z}) - (D_{\bar{Z}}u)(\bar{Y}) \} u(X) = 0$$

et en utilisant en outre la relation

$$'F(\bar{X}, \bar{Y}) = 'F(X, Y).$$

THÉORÈME 2.2. — Sur une variété presque Sasakienne, on a :

$$\begin{aligned} &a) \ \operatorname{Ric}(Y, U) = (\operatorname{div} F)Y + 2\beta u(Y) \operatorname{div} U, \\ &b) \ \operatorname{Ric}(U, U) = (\operatorname{div} F)U + 2\beta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Démonstration. — L'équation (2.11 *b*) est équivalente à

$$\begin{aligned} K(X, Y, U) &= (D_X F)Y - (D_Y F)X + \{ (D_X u)(\bar{Y}) - (D_Y u)(\bar{X}) \} U + \{ u(X)Y - u(Y)X \} \\ &- 2(\alpha + \theta)\{ u(X)\bar{Y} - u(Y)\bar{X} \} - \left(\gamma - \delta - \frac{1}{2}\right)\{ u(Y)(D_X F)U - u(X)(D_Y F)U \} \\ &- (\alpha - \beta)\{ u(Y)D_X U - u(X)D_Y U \} \\ &- \left(\frac{1}{2} + \gamma - \delta\right)\{ u(Y)D_{\bar{X}}U - u(X)D_{\bar{Y}}U \} \\ &- (2\theta + \alpha + \beta)\{ u(Y)(D_{\bar{X}}F)U - u(X)(D_{\bar{Y}}F)U \}. \end{aligned}$$

En contractant cette équation et en faisant usage de (1.6), on obtient (2.15 *a*).

En remplaçant Y par U dans (2.15 *a*), on obtient (2.15 *b*).

THÉORÈME 2.3. — Posons

$$\begin{aligned} &a) \quad 'H(Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr} K(\bar{X}, Y, Z) = \operatorname{tr} \overline{K(X, Y, Z)} \\ &b) \quad {}^*H(Y, Z) \stackrel{\text{def}}{=} 'H(\bar{Y}, Z). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Alors sur une variété presque Sasakienne, 'H *est alterné :*

$$\begin{aligned} &a) \quad 'H(Y, Z) = -'H(Z, Y), \\ &b) \quad {}^*H(Y, U) = (\operatorname{div} F)\bar{\bar{Y}} = -(\operatorname{div} F)Y + (n - 1)u(Y). \end{aligned}$$

Démonstration. — L'équation (2.13 *a*) est équivalente à :

$$K(\bar{X}, \bar{Y}, U) = ({}^{-1}G\nabla'F)(X, Y) - ({}^{-1}G\nabla u)(\bar{Y})u(X) + ({}^{-1}G\nabla u)(\bar{X})u(Y). \quad (2.18)$$

En contractant cette équation et en utilisant (1.6 *d*), on obtient (2.17 *b*).

3. APPLICATIONS

Nous allons maintenant considérer quelques applications de la formule (2.11 *b*).

THÉORÈME 3.1. — Sur une variété presque Sasakienne, on a :

$$a)\ (D_X u)(X) = 0 \Leftrightarrow b)\ 'K(X, Y, Z, U) = (D_Z 'F)(X, Y). \quad (3.1)$$

Démonstration. — Sur une (VPS), si on a (3.1 *a*) alors

$$c) \qquad 'F(X, Y) = (D_X u)(Y).$$

En substituant l'équation précédente dans (2.11 *b*), on obtient immédiatement (3.1 *b*).

Inversement, si sur une (VPS) on a (3.1 *b*), alors (2.11 *b*) nous donne :

$$\begin{aligned}\{ (D_X u)(\bar{Y}) - (D_Y u)(\bar{X}) \} u(Z) &= g(X, Z)u(Y) - g(Y, Z)u(X) \\ &+ 2(\alpha + \theta) \{ u(X)'F(Y, Z) - u(Y)'F(X, Z) \} \\ &+ \left(\gamma - \delta - \frac{1}{2}\right) \{ u(Y)(D_X u)(\bar{Z}) - u(X)(D_Y u)(\bar{Z}) \} \\ &+ (\alpha - \beta) \{ (D_X u)(Z)u(Y) - (D_Y u)(Z)u(X) \} \\ &+ \left(\gamma - \delta + \frac{1}{2}\right) \{ u(Y)(D_{\bar{X}} u)(Z) - u(X)(D_{\bar{Y}} u)(Z) \} \\ &+ (2\theta + \alpha + \beta) \{ u(Y)(D_{\bar{X}} u)(\bar{Z}) - u(X)(D_{\bar{Y}} u)(\bar{Z}) \}.\end{aligned}$$

En remplaçant Z par U et puis X par U dans l'équation précédente et en tenant compte du fait que les paramètres sont arbitraires, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{gathered} a)\ (D_X u)(\bar{Y}) = (D_Y u)(\bar{X}), \qquad b)\ 'F(\bar{Y}, Z) = (D_{\bar{Y}} u)(Z), \\ c)\ (D_{\bar{\bar{Y}}} u)(Z) + (D_{\bar{Y}} u)(\bar{Z}) = 0. \end{gathered} \quad (3.2)$$

Toutes ces équations sont satisfaites si et seulement si (3.1 *a*) ou (3.1 *b*) est satisfaite sur une (VPS).

Le théorème précédent nous permet de définir la variété Riemannienne de K-contact de la façon suivante :

Une variété Riemannienne de K-contact est une variété presque Sasakienne sur laquelle (3.1 *b*) *est satisfaite.*

THÉORÈME 3.2. — Sur une variété Riemannienne de K-contact, on a :

$$'K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, U) = -(D_Z{}'F)(X, Y) + u(X)g(Y, Z) - u(Y)g(X, Z). \quad (3.3)$$

En effet, en substituant de (3.1 *c*) dans (2.13 *a*), nous obtenons (3.3). De (1.11), on voit que sur une variété Sasakienne le second membre de (3.3) est nul. Par conséquent les variétés Sasakiennes peuvent être définies de la façon suivante :

Une variété Sasakienne est une variété Riemannienne de K-contact sur laquelle :

$$'K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, U) = 0.$$

THÉORÈME 3.3. — Sur une variété presque Sasakienne, on a :

$$\begin{aligned} 'K(U, Y, Z, U) = {} & (D_{\bar{\bar{Z}}}u)(\bar{Y}) - g(\bar{Y}, \bar{Z}) - \frac{1}{2}\{(D_{\bar{\bar{Y}}}u)(\bar{Z}) + (D_Y u)(Z)\} \\ & + (\gamma - \delta)\{(D_{\bar{\bar{Y}}}u)(\bar{Z}) - (D_{\bar{Y}}u)(Z)\} + \alpha\{2'F(Y, Z) + (D_{\bar{\bar{Y}}}u)(Z) \\ & - (D_{\bar{Y}}u)(\bar{Z})\} - \beta\{(D_{\bar{\bar{Y}}}u)(Z) + (D_{\bar{Y}}u)(\bar{Z})\} \\ & + 2\theta\{'F(Y, Z) - (D_{\bar{Y}}u)(\bar{Z})\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

En effet, en remplaçant X par U dans (2.11 *b*), on obtient (3.4).

THÉORÈME 4.3. — Une variété presque Sasakienne ne peut pas être plate.

Démonstration. — Si une (VPS) est plate, alors $'K = 0$, ce qui implique que le second membre de (3.4) est nul pour des paramètres α, β, γ, δ, θ arbitraires.

Ceci est vrai seulement si

$$'F(Y, Z) = (D_{\bar{Y}}F)(\bar{Z}).$$

En substituant cette valeur dans le second membre de (3.4) et en annulant celui-ci, nous obtenons :

$$g(\bar{Y}, \bar{Z}) = 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi le théorème est achevé.

REMARQUE 3.1. — Le théorème précédent implique que *ni les variétés Riemanniennes de K-contact ni les variétés Sasakiennes peuvent être plates.*

De (3.1 *b*), il est clair que sur une variété Riemannienne de K-contact l'expression de Ric (Y, U) ne contient pas de paramètres. En tenant compte de cela dans (2.15 *a*), on voit que *sur une variété Riemannienne de K-contact :*

$$a)\ \operatorname{Ric}(Y, U) = (\operatorname{div} F)Y; \qquad b)\ \operatorname{div} U = 0. \quad (3.5)$$

Ces résultats, qui sont identiques aux (1.9 *a*, *b*), sont obtenus ici d'une façon plus simple.

THÉORÈME 3.5. — Sur *une variété Riemannienne de K-contact :*

a) $$*H(Y, U) = -\operatorname{Ric}(Y, U) + (n-1)u(Y); \tag{3.6}$$

et par conséquent sur une *variété Sasakienne :*

b) $$*H(Y, U) = 0.$$

En effet, en substituant de (3.5 *a*) dans (2.17 *b*), nous obtenons (3.6 *a*). En outre (3.6 *b*) est une conséquence de (3.6 *a*) et (1.9 *b*).

THÉORÈME 3.6. — *Sur une variété Riemannienne de K-contact,* on a *la formule de récurrence* suivante :

$$'K(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}, Z, U) + 'K(\bar{X}, \bar{Y}, Z, U) = 0.$$

Ce théorème se déduit de (3.3).

REMARQUE 3.2. — Sur une variété Sasakienne, (3.7) est identiquement satisfaite.

REFERENCES

[1] S. SASAKI, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, *Tôhoku Math. J.*, t. **12**, 1960, p. 456.

[2] Y. HATAKEYAMA, Y. OGAWA and S. TANNO, Some properties of manifolds with some almost metric structure, *Tôhoku Math. J.*, t. **15** (1), 1964, p. 42.

[3] J. W. GRAY, Some global properties of contact structures, *Annals of Math.*, t. **69**, 1959, p. 421.

[4] M. KURITA, On normal contact metric manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, t. **15**, 1963, p. 304.

[5] M. OKUMURA, Some remarks on spaces with certain contact structures, *Tôhoku Math. J.*, t. **14**, 1962, p. 135.

[6] T. MIYAZAWA, S. YAMAGAUCHI, Some theorems on K-contact metric manifold and Sasakian space, *T. R. U. Math.*, t. **2**, 1966, p. 46.

(Manuscrit reçu le 7 septembre 1981)