ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Sur le mouvement isentropique en magnétohydrodynamique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 29, n° 2 (1978), p. 233-240

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_2_233_0>

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIX, n° 2, 1978, p. 233-240. *Physique théorique.*

Sur le mouvement isentropique en magnétohydrodynamique

par

M. BRAY

657, rue de Robbé, 02120 Guise

ABSTRACT. — A study of the isentropic flow in magnetohydrodynamics is completed by some considerations based on different hypotheses.

I. INTRODUCTION

Le tenseur d'impulsion-énergie de la magnétohydrodynamique s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{1}{2}\mu |h|^2\right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta$$

Dans cette expression r désigne la densité de masse propre, ρ la densité d'énergie propre $\rho = c^2 r\left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2}\right)$ et ε l'énergie spécifique interne. Définissant l'enthalpie spécifique par $i \equiv \varepsilon + \frac{p}{r}$ nous avons

$$f = (1 + c^{-2} i) > 0 \tag{1}$$

La vitesse d'univers U^α est normée $U^\alpha U_\alpha = 1$; $\vec{h}$ est orthogonal à $\vec{U}$

$$|h|^2 = -(h^\alpha h_\alpha)$$

(1) A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75, Section A.

Rappelons également la formule fondamentale $Td\mathrm{S} = d\varepsilon + pd(r^{-1})$ T : température propre ; S : entropie. On peut écrire

$di = d\varepsilon + pd(r^{-1}) + r^{-1}dp \rightarrow Td\mathrm{S} = di - r^{-1}dp\,; \quad dp = c^2 rdf - r\mathrm{T}d\mathrm{S}$

La densité d'énergie mesurée par un observateur associé à $\vec{\mathrm{U}}$ est :

$$\tilde{\rho} = c^2 rf + \frac{\mu}{2}|h|^2 - p\,.$$

Introduisant alors la pression totale $\tilde{p} \equiv p + \frac{1}{2}\mu|h|^2$ il vient

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} = [(\tilde{\rho} + \tilde{p})\mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta - \tilde{p} g_{\alpha\beta}] - \mu h_\alpha h_\beta$$

$\mathrm{T}_{\alpha\beta}$ est donc la somme d'un tenseur de type fluide parfait et d'un tenseur résiduel $-\mu h_\alpha h_\beta$.

Aux équations fondamentales

$$\mathscr{C} : \nabla_\alpha(r\mathrm{U}^\alpha) = 0\,; \qquad \mathscr{M} : \nabla_\beta[h^\alpha \mathrm{U}^\beta - h^\beta \mathrm{U}^\alpha] = 0\,; \qquad \mathscr{E} : \nabla_\beta(\mathrm{T}^{\alpha\beta}) = 0$$

nous ajoutons le postulat de conservation du courant numérique $\mathscr{N} : \nabla_\alpha(n\mathrm{U}^\alpha) = 0$ n étant la densité numérique propre.

De $\mathscr{C}$ et $\mathscr{N}$ on déduit $\mathrm{U}^\alpha \nabla_\alpha \log\left(\frac{r}{n}\right) = 0$. La masse propre $\frac{r}{n} = m_0$ d'une particule devant être une constante absolue on a $\frac{r_\alpha}{r} = \frac{n_\alpha}{n}$; $r_\alpha \equiv \nabla_\alpha(r)$.

II. LE MOUVEMENT ISENTROPIQUE

Posons $\tilde{\mathscr{H}} \equiv \left(\frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{n}\right) = \mathscr{H} + \sigma$ avec $\mathscr{H} \equiv \left(\frac{\rho + p}{n}\right)$; $\sigma \equiv \mu \frac{|h|^2}{n}$. En vertu de $\mathscr{N}$ nous tirons de ξ : $n\mathrm{U}^\beta \nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{p}) = \mu \nabla_\beta(h_\alpha h^\beta)$ soit

$$n\mathrm{U}^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\beta)] + (n\tilde{\mathscr{H}}_\alpha - \tilde{p}_\alpha) = \mu \nabla_\beta(h_\alpha h^\beta)\,; \qquad \tilde{\mathscr{H}}_\alpha \equiv \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}})$$

Si dans l'expression de $d\tilde{\mathscr{H}}$ nous portons $\rho = c^2 r + r\varepsilon$ il vient compte tenu de $\partial_\alpha(\log r) = \partial_\alpha(\log n)$

$$\frac{d\rho}{n} - \left(\frac{\rho + p}{n}\right)\left(\frac{dn}{n}\right) = \frac{r}{n}\left[d\varepsilon - \frac{p}{r}\left(\frac{dr}{r}\right)\right] = m_0 \mathrm{T}d\mathrm{S}$$

d'où

$$d\mathscr{H} = \frac{dp}{n} + \frac{r}{n}\mathrm{T}d\mathrm{S} \rightarrow d\tilde{\mathscr{H}} = d\mathscr{H} + d\sigma$$

puis

$$n\mathrm{U}^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}\mathrm{U}_\beta)] + r\mathrm{T}\mathrm{S}_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$$

avec

$$\xi_\alpha \equiv \left\langle \nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{2}\right) - |h|^2\nabla_\alpha(\log r) - \nabla_\nu(h_\alpha h^\nu)\right\rangle$$

$$U^\alpha\xi_\alpha = 0\,; \qquad h^\alpha\xi_\alpha = r\nabla_\beta\left(\frac{|h|^2}{r}h^\beta\right)$$

D'autre part

$$d\tilde{\mathscr{H}} = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\mathrm{T}dS + \frac{\sigma}{2}d\log\left(\frac{\sigma}{r}\right) = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\left\langle \mathrm{T}dS + \frac{\mu|h|^2}{2r}d\log\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)\right\rangle$$

Pour tout $\vec{h}$ tel que $|h|^2 = Kr^2$, K : c^{te} on a donc

$$d\tilde{\mathscr{H}} = \frac{d\tilde{p}}{n} + \frac{r}{n}\mathrm{T}dS$$

et en cas d'isentropie $d\tilde{\mathscr{H}} = \dfrac{d\tilde{p}}{n}$. Nous avons dans ce cas $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(r)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(r)$ et ξ_α se réduit à $-\nabla_\nu(h_\alpha h^\nu)$.

Si $|h|^2 = Kr^2$, $\dfrac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} + |h|^2\theta = 0$ avec $(\ )^{\cdot} \equiv \mu^\beta\nabla_\beta(\ )$; $\theta \equiv \nabla_\nu(U^\nu)$.

Donc la relation générale $h^\alpha h^\beta U_{\beta;\alpha} + \dfrac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} + |h|^2\theta = 0$ tirée de $\mathscr{M}$ devient $h^\alpha h^\beta U_{(\alpha;\beta)} = 0$.

D'après $\sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - U_{(\alpha}\dot{U}_{\beta)} - \dfrac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}$; $\pi_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$ on a

$$h^\alpha h^\beta U_{(\alpha;\beta)} = 0 \rightleftharpoons \sigma_{\alpha\beta}h^\alpha h^\beta = \frac{\theta}{3}|h|^2 = \frac{K}{6}(r^2)^{\cdot}$$

Puisque $\mathrm{T}h^\alpha\nabla_\alpha(S) = c^2\nabla_\alpha(fh^\alpha)$ l'hypothèse isentropique entraîne

$$\nabla_\alpha\left\langle h^\alpha + \frac{i}{c^2}h^\alpha\right\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}\nabla_\alpha(\log r)$$

On a toujours $\dot{\varepsilon} = -\dfrac{p}{r}\theta$ (loi générale) mais aussi $h^\alpha\varepsilon_\alpha = \dfrac{p}{r}h^\alpha\nabla_\alpha(\log r)$

Dans la formule $nU^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)] + r\mathrm{TS}_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$ décomposons $\tilde{\mathscr{H}}$ selon $\tilde{\mathscr{H}} = \mathscr{H} + \sigma$, il vient

$$nU^\beta[\nabla_\beta(\mathscr{H}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathscr{H}U_\beta)] + n[\dot{\sigma}U_\alpha + \sigma\dot{U}_\alpha - \sigma_\alpha] + r\mathrm{TS}_\alpha + \mu\xi_\alpha = 0$$

Considérons le terme $n[(\sigma U_\alpha)^{\cdot} - \sigma_\alpha] = n\sigma\left[U_\alpha\left(\dfrac{\dot{\sigma}}{\sigma}\right) + \dot{U}_\alpha - \dfrac{\sigma_\alpha}{\sigma}\right]$,

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = (\log|h|^2)^{\cdot} - (\log n)^{\cdot} = \frac{\dot{r}}{r}$$

en vertu de $|h|^2 = Kr^2$ et $\nabla_\alpha(\log\sigma) = \nabla_\alpha(\log r)$.

Pour $S_\alpha = 0$ nous obtenons ainsi

$$nU^\beta[\nabla_\beta(\mathscr{H}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathscr{H}U_\beta)] + n\sigma[\dot{U}_\alpha - \pi_\alpha{}^\beta\nabla_\beta(\log r)] + \mu\xi_\alpha = 0$$

L'obtention de la relation $d\tilde{\mathscr{H}} = n^{-1}d\tilde{p}$ est fondée sur les postulats

$$S_\alpha = 0 \qquad \text{(isentropie)} \qquad \text{et} \qquad |h|^2 = Kr^2$$

On obtient la même relation si, abandonnant l'hypothèse isentropique on admet

$$Td\mathrm{S} + \frac{\mu|h|^2}{2r}d\log\frac{|h|^2}{r^2} = 0 \rightleftharpoons Td\mathrm{S} + \mu\frac{r}{2}d\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right) = 0$$

$$S_\alpha = -\frac{\mu r}{2T}\nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)$$

$\mathscr{C}$ entraînant $\dot{S} = 0$ on déduit $(|h|^2r^{-2})^{\cdot} = 0$.

De $\nabla_\alpha(S_\beta) = \nabla_\beta(S_\alpha)$ découle la proportionnalité des gradients $\nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)$ et $\nabla_\alpha\left(\frac{r}{T}\right)$.

Donc

$$U^\beta\nabla_\beta\left(\frac{r}{T}\right) = 0 \rightleftharpoons \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{T}}{T} \quad (\log T)^{\cdot} = -\theta$$

Ceci donne la loi de variation de T le long des lignes de courant dans le cas considéré. Tandis que la formule fondamentale $Td\mathrm{S} = d\varepsilon + pd(r^{-1})$ donne maintenant

$$\varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}\nabla_\alpha(\log r) - \mu\frac{r}{2}\nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)$$

L'énergie spécifique interne varie donc dans les directions $\vec{U}$ et $\vec{h}$ selon les lois

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{p}{r}\theta \qquad \text{et} \qquad h^\alpha\varepsilon_\alpha = \frac{p}{r}h^\alpha\nabla_\alpha(\log r) - \mu\frac{r}{2}h^\alpha\nabla_\alpha\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)$$

Étudions maintenant le cas

$$\xi_\alpha = 0 \rightleftharpoons \frac{|h|^2}{2}\nabla_\alpha\log\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right) - \eta_\alpha = 0$$

en posant $\eta_\alpha \equiv \nabla_\beta(h_\alpha h^\beta)$.

Nous avons

$$\nabla_\alpha(\log|h|^2) = \nabla_\alpha(\log r^2) + 2\frac{\eta_\alpha}{|h|^2}$$

On en tire $\nabla_\alpha(\eta_\beta|h|^{-2}) = \nabla_\beta(\eta_\alpha|h|^{-2})$. En développant on constate que cette relation peut être remplacée par la suivante $\partial_\alpha(\eta_\beta r^{-2}) = \partial_\beta(\eta_\alpha r^{-2})$ soit $\eta_\alpha = r^2\nabla_\alpha\tilde{\phi}$; $\tilde{\phi}$ scalaire. Donc

$$r^2\dot{\tilde{\phi}} = h^\beta U^\alpha\nabla_\beta(h_\alpha) = -h^\alpha h^\beta U_{(\alpha;\beta)} = -\sigma_{\alpha\beta}h^\alpha h^\beta + \frac{\theta}{3}|h|^2$$

D'après une relation générale rappelée antérieurement nous pouvons écrire :

$$\left(\tilde{\phi} - \frac{|h|^2}{2r^2}\right)^{\cdot} = 0$$

Tout écoulement isentropique tel que $\xi_\alpha = 0$ satisfait les équations

$$U^\beta[\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)] = 0$$

Posons $\phi \equiv \tilde{\mathscr{H}}U_\beta dx^\beta \rightarrow d\phi = \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)dx^\alpha \wedge dx^\beta = \nabla_{[\alpha}\langle \tilde{\mathscr{H}}U_{\beta]}\rangle dx^\alpha \wedge dx^\beta$

$$d\phi = -\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

avec $F_{\alpha\beta} \equiv [\nabla_\beta(\tilde{\mathscr{H}}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\tilde{\mathscr{H}}U_\beta)]$. Puisque $F_{\alpha\beta}U^\beta = 0$,

$$\text{dét}\,|F_{\alpha\beta}| = 0 \rightarrow \overset{*}{F}{}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0 \rightleftharpoons F_{[\alpha\beta}F_{\gamma\delta]} = 0$$

Soit $d\phi \wedge d\phi = 0$.

D'après A. Krasinski ([2]) ceci entraîne l'existence de 3 fonctions τ, ν et ζ telles que

$$\tilde{\mathscr{H}}U_\beta = \nabla_\beta(\tau) + \nu\nabla_\beta(\zeta) \rightleftharpoons \phi = d\tau + \nu d\zeta$$

On en déduit $F_{\alpha\beta} = 2\zeta_{[\alpha}\nu_{\beta]}$.

L'introduction d'un vecteur $W^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_\beta U_{\gamma;\delta}$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tenseur de Levi-Civita ; permet d'exprimer l'équivalence des conditions $F_{\alpha\beta} = 0$, $d\phi = 0$ sous la forme $\vec{W} = 0$.

En outre

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{\mathscr{H}}\langle 2U_{[\alpha;\beta]} + 2U_{[\alpha}\nabla_{\beta]}\log\tilde{\mathscr{H}}\rangle$$

D'autre part $\omega_{\alpha\beta} \equiv \pi_\alpha{}^\rho\pi_\beta{}^\sigma U_{[\rho;\sigma]} = U_{[\alpha,\beta]} + U_{[\alpha}\dot{U}_{\beta]}$ d'où

$$F_{\alpha\beta} = 2\tilde{\mathscr{H}}\omega_{\alpha\beta} + \tilde{\mathscr{H}}\langle U_\alpha[\nabla_\beta(\log\tilde{\mathscr{H}}) - \dot{U}_\beta] - U_\beta[\nabla_\alpha(\log\tilde{\mathscr{H}}) - \dot{U}_\alpha]\rangle$$

Les équations $\mathscr{E}$ fournissant par ailleurs :

$$n\tilde{\mathscr{H}}\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta}\langle \tilde{p}_\beta + \nabla_\nu(\mu h_\beta h^\nu)\rangle$$

Soit d'après l'hypothèse $\xi_\alpha = 0$

$$n\tilde{\mathscr{H}}\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta}\left\langle \tilde{p}_\beta + \frac{\mu}{2}|h|^2\nabla_\beta\log\left(\frac{|h|^2}{r^2}\right)\right\rangle = \pi^{\alpha\beta}\langle p_\beta + n\sigma_\beta\rangle$$

Or

$$\tilde{\mathscr{H}}_\beta = \mathscr{H}_\beta + \sigma_\beta = \left(\frac{p_\beta}{n} + \frac{r}{n}TS_\beta\right) + \sigma_\beta$$

([2]) A. Krasiński, Solutions of the Einstein field equations for a rotating perfect fluid. *Acta Physica Polonica*, vol. **B 5**, n° 4, 1974, p. 411-436.

Pour un mouvement isentropique

$$\tilde{\mathscr{H}}_\beta = \frac{p^\beta}{n} + \sigma_\beta \rightarrow \dot{U}_\alpha = \pi_\alpha{}^\beta \nabla_\beta (\log \tilde{\mathscr{H}})$$

Par conséquent $\nabla_\beta (\log \tilde{\mathscr{H}}) - \dot{U}_\beta = U_\beta (\log \tilde{\mathscr{H}})^{\cdot}$. Nous avons donc $F_{\alpha\beta} = 2\tilde{\mathscr{H}}\omega_{\alpha\beta}$.

Observons que la condition $\xi_\alpha = 0$ peut être écrite $\nabla_\beta(\psi_\alpha{}^\beta) = \psi \nabla_\alpha (\log r^{1/3})$ avec

$$\psi_\alpha{}^\beta = h_\alpha h^\beta - \frac{1}{2} g_\alpha{}^\beta \mid h \mid^2 \rightarrow \psi = -3 \mid h \mid^2$$

Supposons que l'espace-temps admette un groupe d'isométries spatiales à vecteur générateur $Z_\alpha = e^\phi h_\alpha$

$$\mathscr{L}(\vec{Z}) g_{\alpha\beta} = 2Z_{(\alpha;\beta)} = 0 \rightarrow \nabla_{(\alpha} h_{\beta)} + h_{(\alpha}\phi_{\beta)} = 0 \rightarrow \nabla_\beta(h^\beta) + (h^\beta \phi_\beta) = 0$$

Dans ces conditions l'expression de ξ_α devient

$$\xi_\alpha = h^\beta \langle 2h_{(\alpha}\phi_{\beta)} + g_{\alpha\beta}(h^\nu \phi_\nu) + h_\beta \nabla_\alpha (\log r) \rangle$$

on en tire

$$h^\alpha \xi_\alpha = (h^\alpha h_\alpha) h^\beta [3\phi_\beta + \nabla_\beta (\log r)] = 0$$

si l'on postule $\vec{\xi} = 0$.

De même $U^\alpha \xi_\alpha = 0$ nous donne $(h^\alpha h_\alpha) U^\beta [\phi_\beta + \nabla_\beta (\log r)] = 0$. Si $\phi = 0$, $Z_\alpha = h_\alpha \rightarrow h_{(\alpha;\beta)} = 0$; $-\xi_\alpha = \mid h \mid^2 \nabla_\alpha (\log r)$. $\xi_\alpha = 0$ exigerait alors $r = c^{te}$.

Considérons maintenant un groupe de transformations conformes tel que

$$\mathscr{L}(\vec{h}) g_{\alpha\beta} = \frac{\phi}{2} g_{\alpha\beta} = 2\nabla_{(\alpha} h_{\beta)} \rightarrow \nabla_\beta(h^\beta) = \phi$$

$$-\xi_\alpha = h^\beta \left\langle \frac{3}{2} \phi g_{\alpha\beta} - h_\beta \nabla_\alpha (\log r) \right\rangle = \frac{3}{2} \phi h_\alpha + \mid h \mid^2 \nabla_\alpha (\log r)$$

Pour annuler $\vec{\xi}$ il faudrait postuler une relation $\vec{h} = K\vec{\nabla}(\log r)$ avec $K = -\dfrac{2 \mid h \mid^2}{3\phi}$. On déduit alors $\dot{r} = 0$ puis $\theta = 0$ (en vertu de $\mathscr{C}$) et $\dot{\varepsilon} = 0$.

De même

$$h^\alpha \nabla_\alpha (\log r) = \frac{3}{2}\phi = \frac{3}{2} \nabla_\alpha (h^\alpha)$$

De la relation fondamentale $T dS = d\varepsilon + p d(r^{-1})$ écrite pour $S = c^{te}$ découle de la loi de variation de ε le long de $\vec{h}$ (lorsque $\xi_\alpha = 0$) soit

$$h^\alpha \varepsilon_\alpha = \frac{3}{2} \frac{p}{r} \nabla_\alpha (h^\alpha)$$

Si $S_\alpha = 0$ on a

$$d\mathscr{H} = n^{-1} dp \rightarrow d\,\frac{\rho + p}{r} = \frac{dp}{r}$$

$$\rho = \rho(r) \; ; \qquad p = p(r)$$

Nous pouvons décomposer $T^{\alpha\beta}$ selon la formule

$$T^{\alpha\beta} = [(\rho + p)U^\alpha U^\beta - pg^{\alpha\beta}] + \tau^{\alpha\beta} ; \qquad \tau^{\alpha\beta} = \mu \mid h \mid^2 U^\alpha U^\beta - \frac{\mu}{2} \mid h \mid^2 g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta$$

$\tau^{\alpha\beta}$ admet les vecteurs propres $\vec{U}$ et $\vec{h}$ correspondant à la même valeur propre $\frac{\mu}{2} \mid h \mid^2$; les équations $\mathscr{E}$ s'écrivent maintenant

$$(\rho + p)\dot{U}^\alpha = \pi^{\alpha\beta} \langle p_\beta + X_\beta \rangle ;$$

$$\nabla_\beta \langle (\rho + p)U^\beta \rangle = U^\beta \langle p_\beta + X_\beta \rangle \qquad \text{avec} \quad X^\alpha = -\nabla_\beta(\tau^{\alpha\beta})$$

Mais $\rho + p = n\mathscr{H}$ d'où $nU^\alpha \dot{\mathscr{H}} + n\mathscr{H}\dot{U}^\alpha = g^{\alpha\beta}(p_\beta + X_\beta)$. Puis

$$n\dot{\mathscr{H}} = U^\beta(p_\beta + X_\beta) \rightarrow nU^\beta \langle n^{-1}p_\beta + n^{-1}rTS_\beta \rangle = U^\beta(p_\beta + X_\beta)$$

Puisque $\dot{S} = 0$ on a $(U^\beta X_\beta) = 0$

$$-(X^\alpha h_\alpha) = h_\alpha \nabla_\beta(\tau^{\alpha\beta}) = \nabla_\beta(h_\alpha \tau^{\alpha\beta}) - \tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta(h_\alpha)$$

$\tau^{\alpha\beta}h_\alpha = \frac{\mu}{2} \mid h \mid^2 h^\beta$. Il vient, compte tenu de la relation générale $\nabla_\beta(h^\beta) = (U^\beta \dot{h}_\beta)$: $(X^\alpha h_\alpha) = 0$.

Dans tous les cas où $\vec{X} \neq 0$ il est orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{h}$ d'où la possibilité de choisir un repère tel que

$$\vec{e}_0 = \vec{U} ; \qquad \vec{e}_1 = \frac{\vec{h}}{\mid h \mid} ; \qquad \vec{e}_2 = \frac{\vec{X}}{\mid X \mid} ; \qquad \vec{e}_3$$

Notons également les relations

$$\mu \mid h \mid^2 = (\tau^{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta})^{1/2} ; \qquad \tau^{\alpha\beta}\tau_{\nu\beta} = \frac{1}{4}(\tau^{\gamma\delta}\tau_{\gamma\delta})g^\alpha_\nu$$

Nous pouvons étudier la condition $\vec{X} = 0$ soit

$$\dot{U}^\alpha + \theta U^\alpha + U^\alpha (\log \mid h \mid^2)^{\cdot} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\nabla_\beta (\log \mid h \mid^2) - \frac{h^\beta \nabla_\beta(h^\alpha)}{\mid h \mid^2} - \frac{h^\alpha \nabla_\beta(h^\beta)}{\mid h \mid^2} = 0$$

Écrivons d'une manière générale $-X^\alpha = \mu \mid h \mid^2(\dot{U}^\alpha + Z^\alpha)$ avec

$$Z^\alpha = \theta U^\alpha + U^\alpha (\log \mid h \mid^2)^{\cdot} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \nabla_\beta (\log \mid h \mid^2) - \frac{h^\beta}{\mid h \mid^2} \nabla_\beta(h^\alpha) - \frac{h^\alpha}{\mid h \mid^2} \nabla_\beta(h^\beta)$$

Les équations $\mathscr{E}$ nous donnent

$$(\rho + p) \left\langle -\frac{X^\alpha}{\mu \mid h \mid^2} - Z^\alpha \right\rangle = \pi^{\alpha\beta} p_\beta + X^\alpha \qquad \text{puisque} \quad (U^\beta X_\beta) = 0$$

Soit pour tout mouvement satisfaisant $\vec{X} = 0$: $-(\rho + p)Z^\alpha = \pi^{\alpha\beta}p_\beta$. On a

$$Z^\alpha U_\alpha = 0 ; \qquad Z^\alpha h_\alpha = \nabla_\alpha(h^\alpha)$$

Dans ce cas

$$\nabla_\beta \langle n\mathscr{H}U^\alpha U^\beta - pg^{\alpha\beta} \rangle = 0 \rightarrow nU^\beta[\nabla_\beta(\mathscr{H}U_\alpha) - \nabla_\alpha(\mathscr{H}U_\beta)] + n\mathscr{H}_\alpha = p_\alpha$$

Pour un mouvement isentropique, il vient

$$U^{\beta}[\nabla_{\beta}(\mathscr{H}U_{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(\mathscr{H}U_{\beta})] = 0$$

Posant $\psi \equiv \mathscr{H}U_{\beta}dx^{\beta}$ on en déduit comme précédemment la relation

$$[\nabla_{\beta}(\mathscr{H}U_{\alpha}) - \nabla_{\alpha}(\mathscr{H}U_{\beta})] = 2\mathscr{H}\omega_{\alpha\beta}.$$

(Manuscrit reçu le 6 janvier 1978)