

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-GUY DUBOIS

JEAN-PAUL DUFOUR

La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 29, n° 1 (1978), p. 1-50

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_1_1_0

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique ⁽¹⁾

par

Jean-Guy DUBOIS et Jean-Paul DUFOUR

Département de Mathématiques,
Université du Québec, Montréal, P. Québec, Canada

Institut de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Montpellier, France

RÉSUMÉ. — On appelle transformée de Legendre d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , l'ensemble \mathcal{L}_f donné par « l'équation » de la famille des hyperplans tangents au graphe de f . Nous considérons ici une généralisation de cette notion : celle de transformée de Legendre I-partielle \mathcal{L}_{I_f} , où $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Afin d'en classifier les morphologies, nous introduisons la notion de LI-équivalence des fonctions f et celle de LI-stabilité correspondante. Nous indiquons ensuite comment les transformées \mathcal{L}_{I_f} sont des projections dans \mathbb{R}^{n+1} de variétés de Legendre I-partielles de \mathbb{R}^{2n+1} , celles-ci étant obtenues par un changement de variables particulier dans l'espace des jets d'ordre un de fonctions. Nous relevons alors la notion de LI-équivalence à celle de CI-équivalence, basée sur celle de transformation de contact, et montrons que la LI-stabilité est équivalente à la CI-stabilité. A l'aide de la théorie du déploiement universel, nous fournissons par la suite, pour les dimensions où la LI-stabilité reste une propriété générique, une classification des germes des fonctions LI-stables; ce qui permet d'obtenir les morphologies locales des transformées \mathcal{L}_{I_f} . Nous appliquons finalement notre étude à la thermo-

(1) Travail subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

dynamique de l'équilibre, en particulier à celle des morphologies des surfaces d'énergie libre de Gibbs et des diagrammes de phases des systèmes simples.

SUMMARY. — We call the Legendre transform of a smooth map $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, the set \mathcal{L}_f given by the « equation » of the family of tangent hyperplans to the graph of f . We consider here a generalisation of this notion: the I-partial Legendre transform $\mathcal{L}I_f$, where $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$. In order to classify its morphologies, we introduce the notion of LI-equivalence of the functions f and the corresponding notion of LI-stability. After which we indicate how the transforms $\mathcal{L}I_f$ are projections in \mathbb{R}^{n+1} of the I-partial Legendre manifolds of \mathbb{R}^{2n+1} , these being obtained by a particular change of variables in the space of first-order jets of functions. We then lift the notion of LI-equivalence to that of CI-equivalence, the latter being based on the notion of contact transformation, and we show that LI-stability is equivalent to CI-stability. With the help of the theory of universal unfoldings, we then provide, to the dimensions where LI-stability is a generic property, a classification of LI-stable map-germs; in this way one can obtain local morphologies of the transforms $\mathcal{L}I_f$. Finally we apply our work to equilibrium thermodynamics, in particular to the study of morphologies of Gibbs free energy surfaces and phase diagrams of simple systems.

INTRODUCTION

La thermodynamique est une discipline phénoménologique qui fournit les principes généraux de l'étude macroscopique des systèmes physiques et chimiques. Suivant son développement historique, elle se subdivise en thermodynamique des états d'équilibre, en celle des processus irréversibles linéaires et en celle, encore en pleine croissance, des processus irréversibles non linéaires. L'étude systématique de la première, à laquelle nous limiterons les applications de notre article, remonte aux travaux de Gibbs [1]. La formulation gibbsienne de la thermodynamique réduit cette dernière à une thermostatique en la limitant aux processus quasi-statiques (ils sont réversibles). De tels processus sont, par définition, constitués d'une succession continue d'états d'équilibre. Il s'agit évidemment là d'une idéalisation qui, conformément au second principe de la thermodynamique, ne peut être qu'approximée par un système réel.

Présentons d'abord brièvement les aspects géométriques qui sous-tendent la thermodynamique de l'équilibre. Afin de mieux fixer les idées, nous nous restreindrons, au cours de cette introduction, aux systèmes simples à un seul composant (fluides simples). Nous y indiquons le rôle

fondamental qui y est joué par la notion mathématique de transformée de Legendre et comment la théorie des déploiements universels permet d'en développer l'étude.

Soit \mathbb{R}^5 l'espace d'état thermodynamique d'un fluide simple. Nous supposons ici que le système est fermé, de telle sorte que la quantité de matière qui le compose reste constante. Nous repérons les coordonnées de \mathbb{R}^5 par S, V, T, P, E où S, V et E réfèrent aux paramètres extensifs du système, soient respectivement à l'entropie, le volume et l'énergie interne, et où T et P réfèrent aux paramètres intensifs, soient respectivement à la température et la pression. De plus, nous munissons \mathbb{R}^5 de la 1-forme différentielle

$$\theta = dE - TdS + PdV.$$

Nous basant essentiellement sur la formulation infinitésimale du premier principe de la thermodynamique appliqué aux processus quasi-statiques, la surface des états d'équilibre du système est définie par une variété intégrale de θ de dimension maximale, c'est-à-dire par une surface de \mathbb{R}^5 qui annule la 1-forme θ . Nous plaçant, par exemple, dans la représentation énergétique de la thermodynamique, cette surface, alors paramétrée par S et V , est donnée par une application bornée $\chi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ de classe C^∞ définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 par

$$\chi(S, V) = (S, V, T(S, V), P(S, V), E(S, V))$$

et telle que

$$\chi^*(\theta) = 0,$$

où $\chi^*(\theta)$ dénote l'image réciproque par χ de θ . Poser cette dernière condition est équivalent à se donner les équations d'état

$$T(S, V) = \frac{\partial E}{\partial S}(S, V),$$

$$P(S, V) = -\frac{\partial E}{\partial V}(S, V).$$

Dans certaines situations expérimentales, il peut être plus commode pour le thermodynamicien de travailler dans une autre représentation que la représentation énergétique. Au lieu de considérer la surface d'équilibre dans l'espace des (S, V, T, P, E) , il peut s'intéresser, par exemple, à celle obtenue par le changement de variables

$$C: (S, V, T, P, E) \mapsto (T, P, -S, -V, G = E - TS + PV).$$

La 1-forme différentielle sur \mathbb{R}^5 devient alors

$$\tilde{\theta} = d\tilde{E} - \tilde{T} d\tilde{S} + \tilde{P} d\tilde{V},$$

soit

$$\tilde{\theta} = dG + S dT - V dP.$$

La nouvelle surface d'équilibre L_E est donnée par l'application $C \circ \chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ telle que

$$(C \circ \chi)^*(\tilde{\theta}) = 0.$$

Cette représentation présente l'avantage d'être adaptée aux situations où l'expérimentateur contrôle T et P . La fonction « caractéristique de Gibbs »

$$G(S, V) = E(S, V) - T(S, V)S + P(S, V)V$$

jouit de la propriété remarquable d'avoir une valeur constante au cours d'une transition de phase isotherme et isobare, car alors

$$(C \circ \chi)^*(\tilde{\theta}) = (C \circ \chi)^*(dG) = 0.$$

La projection $\pi(L_E) = \mathcal{L}_E$ de L_E dans l'espace des (T, P, G) est la transformée de Legendre (totale) de la fonction « énergie interne » $E(S, V)$. Suivant la terminologie utilisée par les thermodynamiciens, on peut l'appeler « surface d'énergie libre de Gibbs » ou « surface d'enthalpie libre ». En général, il ne s'agit pas d'une variété, mais d'une « surface à singularités ». On ne peut donc pas toujours exprimer \mathcal{L}_E par le graphe d'une fonction $G(T, P)$, comme le laisse trop souvent entendre les livres courants de thermodynamique (qui se conforment en fait à la terminologie désuète de « fonction multiforme »).

L'intérêt de la surface d'énergie libre de Gibbs est qu'elle permet de synthétiser les situations significatives présentées par le système thermodynamique (d'équilibre) : stabilité de l'équilibre, coexistence des phases, opalescence critique, etc. Il convient donc d'en connaître les morphologies, puisque celles-ci sous-tendent les caractéristiques qualitatives du système. Ces préoccupations furent à l'origine de ce travail et en suggèrent le but principal, la classification des morphologies locales des transformées de Legendre.

La transformée de Legendre d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est, en quelque sorte, l'équation de la famille des hyperplans tangents au graphe de cette fonction. En fait, nous allons considérer les transformées de Legendre partielles, une situation plus générale que celle mentionnée ici. Elle nous est d'ailleurs clairement suggérée par les traités de thermodynamique, qui introduisent aussi les fonctions caractéristiques de Helmholtz, « enthalpie », etc., et qui possèdent chacune des propriétés remarquables adaptées à divers contextes expérimentaux. Ainsi, pour le système fluide considéré plus haut, au lieu de passer des variables indépendantes (S, V) aux variables (T, P) par une « transformation de Legendre totale » (suivie d'une projection), nous aurions pu passer aux couples de variables indépendantes (T, V) ou (S, P) .

Nous introduisons d'abord, à la section 1, la notion de transformée de Legendre I -partielle $\mathcal{L}I_f$ (où $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ spécifie de quelle transformée partielle il s'agit) d'une fonction f de $C(\mathbb{R}^n)$, l'espace des

applications de classe C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Nous indiquons alors comment celle-ci s'obtient à partir d'une variété de Legendre I-partielle LI_f , l'équivalent des surfaces d'équilibre de la thermodynamique. Notre but étant de classer les morphologies des transformées de Legendre I-partielles, nous y définissons la notion de LI-équivalence des fonctions f , qui nous est d'ailleurs suggérée par la forme que prend l'expression de la transformée $\mathcal{L}I_f$, et celle de LI-stabilité correspondante. La notion d'équivalence introduite réduit l'étude des fonctions LI-stables à celle d'une classe particulière de déploiements stables.

Avant d'approfondir celle-ci, nous considérons, à la section 2, les variétés de Legendre LI_f . Tout comme on obtient L_E à partir de la surface d'équilibre définie par l'application χ , la variété LI_f s'obtient à partir d'une variété de Legendre particulière $L\phi_f$ (ϕ l'ensemble vide) par ce qu'on appellera une I-transformation de Legendre. Munissant, à l'aide d'une 1-forme θ , l'espace \mathbb{R}^{2n+1} d'une structure de contact triviale, on vérifie qu'une I-transformation de Legendre est une transformation de contact et que les variétés LI_f sont des sous-variétés intégrales de θ de dimension maximale, donc des sous-variétés de Legendre au sens défini par Arnol'd [2]. Ce contexte plus structural nous permet de « relever » la notion de LI-équivalence à celle plus naturelle de CI-équivalence, basée sur celle de transformation de contact. Nous justifions ainsi l'introduction de la notion de LI-équivalence, d'autant plus que nous montrons que la LI-stabilité est équivalente à la CI-stabilité.

A la section 3, nous montrons d'abord que la classification des germes des transformées de Legendre $\mathcal{L}I_f$ se ramène à celle des germes de f au voisinage de ses points critiques. Comme classer les germes des fonctions LI-stables revient à classer un type particulier de déploiements stables (caractérisé par une partie linéaire), il s'agit alors, utilisant les résultats de la théorie des déploiements universels, de construire les germes f tels que les déploiements « linéaires » correspondants soient versels (à droite). Pour $n \leq 5$, nous sommes dans une situation générique, puisque pour ces dimensions presque tout germe de f est un germe de fonction LI-stable.

La dernière section est une application des résultats de notre étude aux systèmes thermodynamiques d'équilibre. Notons qu'il est impossible, à partir des seuls principes de la thermodynamique de déterminer explicitement pour un système donné sa fonction énergie interne et, *a fortiori*, sa surface des états d'équilibre, sa surface d'énergie libre, son diagramme de phases, etc. La détermination de celle-ci nécessite des informations supplémentaires sur les propriétés particulières du système considéré et, généralement, un recours à la mécanique statistique. Encore là, les exemples où ce programme fut rempli sont assez peu nombreux et il le fut souvent grâce à des hypothèses simplificatrices. Tout au plus pouvons-nous espérer

a priori, et c'est là un des apports de notre travail, pouvoir fournir une classification des germes des fonctions énergie interne et caractériser ainsi qualitativement les systèmes thermodynamiques d'équilibre. En fait, nous pouvons justement considérer cette section comme une introduction à une thermodynamique qualitative.

Toutes les fonctions considérées ci-après seront, sauf mention du contraire, de classe C^∞ . La notation $C(V, W)$ désignera l'espace des applications de classe C^∞ de la variété V dans la variété W ; lorsque W est \mathbb{R} , nous ne l'écrivons pas, tel $C(\mathbb{R}^n)$ pour $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $F : A \times B \rightarrow C$ est une application qui à $(a, b) \in A \times B$ associe $F(a, b)$, on dénotera F_a (resp. F_b) l'application de B dans C (resp. de A dans C) telle que $F_a(b) = F(a, b)$ (resp. $F_b(a) = F(a, b)$).

1. TRANSFORMÉES DE LEGENDRE

Les ouvrages classiques de thermodynamique font souvent usage de la notion de transformée de Legendre d'une fonction. *Grosso modo*, il s'agit de remplacer une fonction par « l'équation » des hyperplans tangents au graphe de celle-ci. En général, ce procédé n'associe pas une variété à toute fonction, mais fait plutôt apparaître des « hypersurfaces à singularités ». Nous nous proposons, entre autres, d'étudier les morphologies locales de ces dernières. Cependant, nous nous attarderons auparavant à généraliser cette notion à celle de transformées de Legendre partielles et à considérer des notions d'équivalence et de stabilité relatives à celles-ci.

DÉFINITION 1.1. — On appelle *transformée de Legendre de la fonction* $f \in C(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble $\mathcal{L}_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ formé des couples (u, z) tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant à

$$z = f(x) - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.1}$$

Voici l'interprétation géométrique que l'on peut donner de la transformée de Legendre d'une fonction, par exemple pour le cas $n = 2$. La valeur z , donnée par la première équation de (1.1), est l'ordonnée de l'intersection avec la droite $x = 0$ du plan tangent au graphe de la fonction f au point $(x, f(x))$, tandis que u_1 et u_2 sont les « coefficients directeurs » de ce plan. Le couple $(u, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ détermine donc ce plan tangent. On peut considérer que \mathcal{L}_f est l'ensemble des plans tangents au graphe de f . Le passage de f à \mathcal{L}_f est, en quelque sorte, l'opération inverse de

celle qui à une famille de plans associe son enveloppe. Nous essaierons de préciser le sens de cette remarque ultérieurement.

La première question qui se pose est la suivante : sous quelles conditions \mathcal{L}_f est-elle le graphe d'une fonction de variable u ? Dans ce cas, on pourrait considérer la transformée de Legendre de f comme une fonction. On vérifie qu'en général ce n'est pas le cas : il suffit que le graphe de f possède deux hyperplans tangents de même direction pour que \mathcal{L}_f puisse avoir deux points sur une même « verticale » $u = c$, où c est une constante. Déterminons d'abord sous quelles conditions \mathcal{L}_f est localement le graphe d'une fonction. Pour cela et des raisons de clarté, il est commode d'introduire le point de vue suivant. On note L_f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ formé des triplets $(u, -x, z)$ qui vérifient le système d'équations (1.1). C'est une variété paramétrée par x ; on l'appellera la *variété de Legendre associée* à f . Ainsi $\mathcal{L}_f = \pi(L_f)$, en notant π la projection $(u, x, z) \mapsto (u, z)$.

LEMME 1.1. — Il existe un voisinage \mathcal{V} de $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{L}_f|_{\mathcal{V}}$ soit une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ si et seulement si la matrice hessienne de f au point x est non dégénérée. De plus, dans ce cas, $\mathcal{L}_f|_{\mathcal{V}}$ est le graphe d'une fonction (locale) de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^∞ .

Démonstration. — Tout point $(u, -x, z)$ de L_f satisfait au système d'équations (1.1). Ainsi l'espace tangent à L_f en ce point est engendré par les vecteurs

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_k}(x), -\delta_1^k, \dots, -\delta_n^k, -\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right),$$

pour $k = 1, 2, \dots, n$, où δ_i^j est le symbole de Kronecker. Par la projection π , ces vecteurs deviennent

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_k}(x), -\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x) \right),$$

pour $k = 1, 2, \dots, n$. La dernière composante étant une combinaison linéaire des autres, on voit que $\pi|_{L_f}$ est de rang maximum n si et seulement si la matrice des $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ est non dégénérée. Ceci démontre la première partie du lemme. Enfin, on voit que dans ce cas la projection de L_f sur \mathbb{R}^n est de rang maximum : donc \mathcal{L}_f peut être paramétrée localement par u . Ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 1.2. — Supposons que la matrice hessienne $\mathcal{H}(f)(x)$ de f en x

soit non dégénérée. Alors \mathcal{L}_f est localement le graphe d'une fonction $z = g(u)$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} de classe C^∞ telle que

$$\mathcal{H}(g)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = -[\mathcal{H}(f)(x)]^{-1}.$$

Démonstration. — Sous les hypothèses du lemme, l'équation

$$u = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

est localement inversible et donc équivalente localement à

$$x = q(u);$$

on a alors

$$\mathcal{J}(q)(u) = [\mathcal{H}(f)(x)]^{-1},$$

où $\mathcal{J}(q)(u)$ désigne la matrice jacobienne de q en u . La première des équations (1.1) mène localement à

$$z = f(q(u)) - \sum_{i=1}^n u_i q_i(u) = g(u),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}(u) = -q_j(u)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(u) = -\frac{\partial q_j}{\partial u_i}(u).$$

Le résultat suit.

REMARQUE 1.1. — En particulier, si le graphe de f est convexe, celui de g est concave, et réciproquement. On le voit du fait que si l'une des matrices hessiennes est définie positive, l'autre sera définie négative, et réciproquement.

Parallèlement à la notion de transformée de Legendre introduite, que nous pourrions considérer comme une transformée de Legendre totale, nous étudierons les transformées de Legendre partielles dont la définition suit.

Notations. — Par la suite, I désignera toujours une partie de $\{1, 2, \dots, n\}$ et J sera la partie complémentaire. Si $x \in \mathbb{R}^n$, on notera x_I (respectivement x_J) l'ensemble des composantes x_i de x telles que $i \in I$ (resp. $i \in J$). Ainsi on écrira indifféremment $x = (x_1, \dots, x_n)$ ou $x = (x_I, x_J)$. La notation $u_I \cdot x_I$ désignera $\sum_{i \in I} u_i x_i$; $\frac{\partial f}{\partial x_I}(x)$ dénotera le $|I|$ -uplet des $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i \in I$,

où $|I|$ est le cardinal de I ; en particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ sera le vecteur

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

de \mathbb{R}^n ; etc.

DÉFINITION 1.2. — On appelle *transformée de Legendre I-partielle* de $f \in C(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble $\mathcal{L}I_f$ formé des couples $(u, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}^{|I|}$ avec

$$\begin{aligned} z &= f(x) - x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \\ u_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \\ u_j &= x_j. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pour $I = \{1, 2, \dots, n\}$, on retrouve la transformée de Legendre totale telle que définie en (1.1); pour $I = \emptyset$, on trouve le graphe de f . On peut considérer que $\mathcal{L}I_f$ est obtenu en prenant les transformées de Legendre totales des fonctions partielles $x_1 \mapsto f(x_1, x_j)$ pour tout x_j . On peut réécrire le lemme 1.1 pour les transformées partielles à la condition de remplacer la matrice hessienne de f par la matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i \in I, j \in I}$ dans l'énoncé de celui-ci. On peut aussi écrire l'analogie du lemme 1.2 en prenant quelques précautions supplémentaires.

Ici on définit LI_f , la *variété de Legendre I-partielle associée* à f , par l'ensemble des points $(u, t, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} z &= f(x) - x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \\ u_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \\ u_j &= x_j, \\ t_1 &= -x_1, \\ t_j &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

On voit que LI_f est une variété paramétrée par x et que $\mathcal{L}I_f = \pi(LI_f)$, en notant π la projection $(u, t, z) \mapsto (u, z)$.

Comme notre but est de classifier les morphologies des ensembles $\mathcal{L}I_f$, nous devons introduire une relation d'équivalence relative à ceux-ci. Puisque nous nous intéressons aux propriétés qualitatives de ces ensembles, nous sommes d'abord conduits à la définition qui suit.

DÉFINITION 1.3. — Soient f et g dans $C(\mathbb{R}^n)$. Nous disons que la fonction f est faiblement LI-équivalente à g s'il existe un difféomorphisme $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tel que $K(u, z) = (p(u), k(u, z))$ avec $\partial k / \partial z(u, z) > 0$ pour tout (u, z) (K conserve les fibres $u = c$ et l'ordre sur ces fibres) et tel que K échange $\mathcal{L}I_f$ et $\mathcal{L}I_g$.

En particulier, si $\mathcal{L}I_f$ est localement un graphe de fonction (de variable u), il en sera de même de $\mathcal{L}I_g$ au point correspondant par K . Nous voudrions étudier les fonctions f stables pour cette relation d'équivalence, c'est-à-dire les fonctions f telles que tout g assez proche de f (pour une topologie qui convient) soit faiblement LI-équivalente à f . Cependant, nous disposons de peu d'outils mathématiques pour considérer directement cette notion. C'est pourquoi nous travaillerons avec une notion d'équivalence plus rigide ; elle nous est toutefois suggérée par la forme particulière prise par les équations (1.2) définissant $\mathcal{L}I_f$. En accord avec (1.2) et (1.3), x_j et u_j désigneront, par la suite, les mêmes paramètres.

DÉFINITION 1.4. — Soient f et g dans $C(\mathbb{R}^n)$. Nous disons que la fonction f est LI-équivalente à g si le déploiement $f(x) - u_1 \cdot x_1$, de contrôle $u = (x_j, u_1) \in \mathbb{R}^n$ et d'état $x_1 \in \mathbb{R}^{\text{III}}$, est d -équivalent au déploiement $g(x) - u_1 \cdot x_1$ ⁽²⁾.

Cette définition, de prime abord moins naturelle, présente l'avantage de permettre l'utilisation des techniques maintenant classiques de la théorie des singularités. Dans la prochaine section, nous tenterons de la justifier en montrant que la notion de stabilité auquel elle mène est assez naturelle. On peut d'ailleurs conjecturer que, au moins pour $n \leq 5$, les fonctions stables au sens de la définition 1.3 sont les mêmes que les fonctions stables au sens de cette définition. Pour le moment, nous pouvons au moins énoncer le résultat suivant.

LEMME 1.3. — Si f est LI-équivalente à g , alors f est faiblement LI-équivalente à g .

Démonstration. — Dire que f est LI-équivalente à g veut dire qu'il existe un difféomorphisme $(u, x_1) \mapsto (p(u), h(u, x_1))$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\text{III}}$ (dans lui-même) et une fonction $u \mapsto \psi(u)$ tels que

$$f(x) - u_1 \cdot x_1 + \psi(u) = g(p_j(u), h(u, x_1)) - p_1(u) \cdot h(u, x_1). \quad (1.4)$$

Dérivant par rapport à x_i , $i \in \text{I}$, on en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - u_i = \sum_{j \in \text{I}} \left[\frac{\partial g}{\partial x_j}(p_j(u), h(u, x_1)) - p_j(u) \right] \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(u, x_1). \quad (1.5)$$

⁽²⁾ Pour les notions de déploiement et de d -équivalence entre déploiements, nous renvoyons à l'appendice, que nous désignerons par la suite par un A.

Alors on a

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

pour tout $i \in I$, si et seulement si

$$p_j(u) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(p_j(u), h(u, x_1))$$

pour tout $j \in I$. Ainsi lorsque (u, x, z) vérifie (1.2), on a

$$z + \psi(u) = g(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(\tilde{x}),$$

$$p_1(u) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\tilde{x}),$$

$$p_j(u) = \tilde{x}_j,$$

avec $\tilde{x}_1 = h(u, x_1)$. Donc $(u, z) \mapsto (p(u), z + \psi(u))$ envoie $\mathcal{L}I_f$ sur $\mathcal{L}I_g$. Comme c'est un difféomorphisme qui a la forme requise par la définition 1.3, le lemme est démontré.

Par la suite, nous munissons les espaces de fonctions tels que $C(\mathbb{R}^n)$, $C(V, W)$ de la topologie de Whitney. Rappelons que dans cette topologie une base de voisinages de $f \in C(\mathbb{R}^n)$ est donnée par l'ensemble des

$$\mathcal{V}_\mu^k(f) = \{ g \in C(\mathbb{R}^n); \forall x \in \mathbb{R}^n, \|j^k f(x) - j^k g(x)\| < \mu(x) \},$$

pour toute fonction continue $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ et tout $k \in \mathbb{N}$, en désignant par $j^k f(x)$ le jet d'ordre k en x de f (les coefficients de la série de Taylor en x tronquée à l'ordre k) et par $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur l'espace des jets correspondant (isomorphe à \mathbb{R}^N , pour un certain N). Nous utiliserons sans démonstration les propriétés élémentaires de cette topologie telles qu'on les trouve dans Mather [3], § 2. En particulier, nous aurons à utiliser sa proposition 1 qui dit que la composition $(h, k) \mapsto k \circ h$ est continue à la condition de se restreindre à prendre h dans l'ouvert des fonctions propres.

On désignera par $C_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ le sous-ensemble de $C(\mathbb{R}^n)$ formé des fonctions f telles que la projection $(u, x_1) \mapsto u$, restreinte à l'ensemble $\left\{ (u, x_1); u_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right\}$, soit propre. C'est aussi l'ensemble des $f \in C(\mathbb{R}^n)$

tel que, pour tout x_j , les applications $x_1 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_j)$ soient propres. Cet ensemble est un ouvert de $C(\mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION 1.5. — Nous disons que la fonction $f \in C(\mathbb{R}^n)$ est *LI-stable* si pour tout g assez voisin de f (dans la topologie de Whitney), on a g LI-équivalente à f .

THÉORÈME 1.1. — La fonction $f \in C_{\text{pr}1}(\mathbb{R}^n)$ est LI-stable si et seulement si le déploiement $f(x) - u_1 \cdot x_1$, de contrôle u et d'état x_1 , est stable (A).

Démonstration. — Si $f(x) - u_1 \cdot x_1$ est stable, pour tout $g \in C(\mathbb{R}^n)$ assez proche de f , $g(x) - u_1 \cdot x_1$ est proche de $f(x) - u_1 \cdot x_1$ et lui est donc d -équivalent. Ceci montre que f est LI-stable.

Supposons maintenant que f soit LI-stable. Pour toute fonction $\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ assez proche de 0, on aura $f(x) - u_1 \cdot x_1 + \varepsilon(x)$ d -équivalent à $f(x) - u_1 \cdot x_1$. Cela est vrai en particulier si $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_1)$, c'est-à-dire si ε ne dépend que des variables d'état. Alors $f(x) - u_1 \cdot x_1$ est un déploiement faiblement stable au sens de la définition A.4 et, par le théorème A.1, on en déduit qu'il est stable.

2. VARIÉTÉS DE LEGENDRE

Au cours de cette section, nous considérons la transformée de Legendre d'un point de vue plus structural, en portant notre attention aux variétés de Legendre LI_f associées à f plutôt qu'à leurs projections $\mathcal{L}I_f$. Comme on peut obtenir LI_f par un changement de variables particulier dans l'espace des jets d'ordre 1 de fonctions, nous sommes amenés à introduire une transformation de contact spécifique, qu'on appellera I-transformation de Legendre, reliant $L\phi_f$ à LI_f . Plaçant alors notre étude dans le cadre des variétés de Legendre introduites par Arnol'd [2], nous définissons une autre notion de stabilité, la CI-stabilité, qui consiste à considérer comme stable une fonction telle que toute fonction voisine engendre une variété de Legendre I-partielle équivalente sous une transformation de contact. Cette notion de stabilité, plus naturelle que la LI-stabilité, lui est toutefois équivalente.

Soit V une variété de contact, i. e. une variété de dimension impaire $2n + 1$ munie d'une 1-forme θ telle que $\theta \wedge (d\theta)^n$ soit non dégénérée. Une sous-variété de Legendre de V est une variété intégrale de θ de dimension maximale n [2].

Par la suite, nous travaillerons avec la variété de contact triviale $V = \{(u, t, z)\} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ munie de la 1-forme

$$\theta = dz - \sum_{i=1}^n t_i du_i.$$

Toute variété de contact est localement de ce type.

Soient (V, θ) et $(\tilde{V}, \tilde{\theta})$ deux variétés de contact. Une transformation de contact de V dans \tilde{V} est un difféomorphisme $C : V \rightarrow \tilde{V}$ qui conserve la forme de contact, c'est-à-dire tel que $C^*(\tilde{\theta}) = \theta$. Si L est une sous-variété de Legendre de V , alors $C(L)$ est une sous-variété de Legendre de \tilde{V} .

DÉFINITION 2.1. — Nous appelons *I-transformation de Legendre* l'application $C_I : V \rightarrow V$ qui associe à (u, t, z) la valeur $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{z})$ telle que

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= z - u_1 \cdot t_1, \\ \tilde{u}_1 &= t_1, \\ \tilde{u}_j &= u_j, \\ \tilde{t}_1 &= -u_1, \\ \tilde{t}_j &= t_j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On vérifie sans peine que C_I est une transformation de contact.

LEMME 2.1. — Les variétés de Legendre I-partielles LI_f associées aux $f \in C(\mathbb{R}^n)$ sont des sous-variétés de Legendre de V . De plus, on a $LI_f = C_I(L\phi_f)$ pour tous I et f .

La démonstration de ce lemme est directe.

REMARQUE 2.1. — La variété $L\phi_f$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ formé des (x, t, z) tels que $z = f(x)$, $t = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$: on peut donc identifier $L\phi_f$ au graphe de $x \mapsto j^1 f(x)$. Cela est d'autant plus légitime qu'on identifie habituellement V à $J^1(n)$, l'espace des jets d'ordre 1 de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Faisant jouer le rôle principal aux variétés LI_f plutôt qu'aux ensembles $\mathcal{L}I_f$ (que l'on retrouve à partir de LI_f), nous obtenons, par la définition précédente, une notion plus maniable que celle de transformée de Legendre. Ainsi nous pourrons, en particulier, définir les opérations réciproques C_I^{-1} ; elles sont données par

$$\begin{aligned} z &= \tilde{z} - \tilde{t}_1 \cdot \tilde{u}_1, \\ u_1 &= -\tilde{t}_1, \\ u_j &= \tilde{u}_j, \\ t_1 &= \tilde{u}_1, \\ t_j &= \tilde{t}_j. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que si I et K sont deux parties disjointes de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a $C_I \circ C_K = C_{I \cup K}$.

REMARQUE 2.2. — Considérons une famille paramétrée par $t \in \mathbb{R}^n$ d'hyperplans de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \{(u, z)\}$ d'équations $z = g(t) + u \cdot t$. La méthode élémentaire pour déterminer l'enveloppe de cette famille consiste à éliminer t entre les équations

$$\begin{aligned} z &= g(t) + u \cdot t, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial t}(t) + u. \end{aligned}$$

Cette enveloppe est donc donnée par $\pi \circ C_{\{1,2,\dots,n\}}^{-1}(G)$, où G est la sous-variété de Legendre de V formée des points $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= g(\tilde{u}), \\ \tilde{t} &= \frac{\partial g}{\partial t}(\tilde{u}).\end{aligned}$$

Ainsi on peut associer l'opération de recherche d'enveloppe à $C_{\{1,2,\dots,n\}}^{-1}$ comme on associe la transformée de Legendre totale à $C_{\{1,2,\dots,n\}}$.

Faire jouer le rôle principal aux LI_f nous conduit à une notion d'équivalence plus naturelle que la LI-équivalence. On devra considérer la variété LI_f comme équivalente à LI_g s'il existe une transformation de contact qui les échange ; toutefois, cette transformation devra commuter avec la projection π pour envoyer $\mathcal{L}I_f$ sur $\mathcal{L}I_g$. Ce qui mène à la définition suivante.

DÉFINITION 2.2. — Soient f et g deux fonctions de $C(\mathbb{R}^n)$. Nous disons que la fonction f est *CI-équivalence* à g s'il existe une transformation de contact $C: V \rightarrow V$, qui commute avec π ($\pi \circ C = c \circ \pi$), telle que $C(LI_f) = LI_g$.

Le lemme suivant précise la structure des transformations de contact qui commutent avec π .

LEMME 2.2. — Toute transformation de contact $C: V \rightarrow V$ qui commute avec π est telle que

$$C(u, t, z) = \left(p(u), {}^t[\mathcal{J}(p)(u)]^{-1} \left(t + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u) \right), z + \psi(u) \right), \quad (2.2)$$

où p est un difféomorphisme quelconque de \mathbb{R}^n , ${}^t[\mathcal{J}(p)(u)]$ désigne la transposée de la matrice jacobienne de p au point u et ψ est une fonction quelconque de $C(\mathbb{R}^n)$. En particulier, C est déterminée par sa projection par π , c'est-à-dire par $(u, z) \mapsto (p(u), z + \psi(u))$.

Démonstration. — Comme C commute avec π , on a

$$C(u, t, z) = (U(u, z), T(u, t, z), Z(u, z)).$$

Écrivant que C conserve la forme de contact θ , on arrive à

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial U_i}{\partial z} = 1, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u_j} - \sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial U_i}{\partial u_j} = t_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Dérivant par rapport à t_j , (2.3) mène à

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial t_j} \frac{\partial U_i}{\partial z} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Comme C est un difféomorphisme, la matrice $\left(\frac{\partial T_i}{\partial t_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ est inversible et (2.5) mène à $\frac{\partial U_i}{\partial z} = 0$ pour tout i . On en déduit que U_i est indépendant de z :

$$U(u, z) = p(u).$$

Alors (2.3) devient $\partial Z/\partial z = 1$ et

$$Z(u, z) = z + \psi(u).$$

Portant ces résultats dans (2.4), on obtient

$$\sum_{i=1}^n T_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j} = t_j + \frac{\partial \psi}{\partial u_j}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

qui équivaut à

$$T = [\mathcal{J}(p)(u)]^{-1} \left(t + \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)$$

et démontre alors (2.2). Réciproquement, étant donnés $\psi \in C(\mathbb{R}^n)$ et un difféomorphisme p de \mathbb{R}^n quelconque, la formule (2.2) définit une transformation de contact qui commute avec π . Ceci termine la démonstration du lemme.

On remarque que la projection de C est du type requis par la définition 1.3. Ainsi si f est CI-équivalente à g , elle est aussi faiblement LI-équivalente à g .

LEMME 2.3. — Si f est LI-équivalente à g , elle est aussi CI-équivalente à g .

Démonstration. — Si f est LI-équivalente à g , on a, comme dans la démonstration du lemme 1.3,

$$f(x) - u_1 \cdot x_1 + \psi(u) = g(p_j(u), h(u, x_1)) - p_1(u) \cdot h(u, x_1), \tag{2.7}$$

et

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

équivaut à

$$p_1(u) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(p_j(u), h(u, x_1)). \tag{2.8}$$

Dérivant les deux membres de (2.7) par rapport à u_j , $j \in I$, on obtient

$$-x_j + \frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \sum_{i \in I} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} - p_i \right) \frac{\partial h_i}{\partial u_j} - h_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j} \right] + \sum_{i \in J} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial p_i}{\partial u_j}. \quad (2.9)$$

Dérivant les deux membres de (2.7) par rapport à u_j ($= x_j$), $j \in J$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} + \frac{\partial \psi}{\partial u_j} = \sum_{i \in I} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} - p_i \right) \frac{\partial h_i}{\partial u_j} - h_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j} \right] + \sum_{i \in J} \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial p_i}{\partial u_j}. \quad (2.10)$$

Dénotons C la transformation de contact de V dans V qui commute avec π et dont la projection par π est $(u, z) \mapsto (p(u), z + \psi(u))$. Montrons que C envoie LI_f sur LI_g . Pour cela, considérons un point (u, t, z) de LI_f ; il vérifie les équations (1.3), et en particulier

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

On définit $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{z}) \in LI_g$ en posant

$$\tilde{z} = g(\tilde{x}) - \tilde{x}_1 \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(\tilde{x}),$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\tilde{x}),$$

$$\tilde{u}_j = \tilde{x}_j = p_j(u),$$

$$\tilde{t}_1 = -\tilde{x}_1 = -h(u, x_1),$$

$$\tilde{t}_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{x}).$$

Voyons que C envoie bien (u, t, z) sur $(\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{z})$. Les équations (2.7) et (2.8) mènent à

$$z + \psi(u) = \tilde{z}, \quad (2.11)$$

$$p_1(u) = \tilde{u}_1, \quad (2.12)$$

et d'autre part, par définition,

$$p_j(u) = \tilde{u}_j. \quad (2.13)$$

Les équations (2.9) et (2.10) deviennent

$$-x_j + \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u) = \sum_{i=1}^n \tilde{t}_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j}(x), \quad j \in I,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(x) + \frac{\partial \psi}{\partial u_j}(u) = \sum_{i=1}^n \tilde{t}_i \frac{\partial p_i}{\partial u_j}(x), \quad j \in J;$$

donc

$$\tilde{t} = [\mathcal{J}(p)(u)]^{-1} \left(t + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u) \right).$$

Compte tenu du lemme (2.2), ceci combiné avec (2.11), (2.12) et (2.13) achève la démonstration du lemme.

Le théorème 3.1.6 de Hörmander [4] permettrait d'écrire une réciproque partielle à ce lemme. En fait, nous reprendrons le pas essentiel de la démonstration de ce théorème pour mener à bien la démonstration du théorème 2.1 ci-après.

La définition suivante introduit la notion de stabilité relative à la CI-équivalence. Ici, contrairement à ce que nous avons fait pour la LI-stabilité, nous demanderons que l'équivalence qui relie une fonction stable à ses voisines puisse être choisie aussi proche que l'on veut de l'identité.

DÉFINITION 2.3. — Nous disons qu'une fonction de $C(\mathbb{R}^n)$ est *CI-stable* si, pour tout voisinage \mathcal{U} de l'identité dans l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{R}^{2n+1} , il existe un voisinage \mathcal{V} de f dans $C(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{V}$, il existe une transformation de contact $C \in \mathcal{U}$, respectant la projection π , qui envoie LI_f sur LI_g .

Cette notion de stabilité paraît plus naturelle que la LI-stabilité; cependant, le théorème 2.1 qui suit affirme que ces deux notions coïncident.

THÉORÈME 2.1. — La fonction $f \in C_{Pr}(\mathbb{R}^n)$ est CI-stable si et seulement si elle est LI-stable.

Démonstration. — Supposons f LI-stable; cela veut dire que le déploiement $f - u_1 \cdot x_1$ (d'état x_1) est stable. Dans ce cas, d'après le théorème A.0, il est fortement stable. C'est dire que pour g assez voisin de f , non seulement $g - u_1 \cdot x_1$ est d -équivalent à $f - u_1 \cdot x_1$, mais encore qu'on peut imposer au difféomorphisme (p, h) et à la fonction ψ , qui réalisent cette équivalence, d'être respectivement proche de l'identité et de 0. Revenant au lemme 2.3, cela prouve que f est CI-stable.

On démontre maintenant la réciproque en supposant que f est CI-stable. Pour prouver que f est LI-stable, il suffit, d'après le théorème A.0, de montrer que le graphe de l'application ${}_r J_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)$ est transverse à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{|H|})^r \times \mathcal{O}$, où \mathcal{O} est l'orbite de ${}_r J_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)(u, x_1^1, \dots, x_1^r)$, et ce pour tout r -uplet (x_1^1, \dots, x_1^r) de $(\mathbb{R}^{|H|})^r$, tout point u de \mathbb{R}^n et tous k et r de \mathbb{N} assez grands. En fait, il suffit de se restreindre à l'étude des orbites « critiques », i. e. de celles pour lesquelles on a $u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^i, x_j)$, pour tout $i = 1, \dots, r$, puisque les orbites non critiques sont des ouverts. Par la suite, nous travaillerons avec l'orbite \mathcal{O} de ${}_r J_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)(u_0, x_{10}^1, \dots, x_{10}^r)$ vérifiant ces conditions.

Supposons démontré pour l'instant la propriété suivante: pour g assez

proche de f , le déploiement $g - u_1 \cdot x_1$ (d'état x_1) est d -équivalent à $f - u_1 \cdot x_1$, au moins sur un voisinage des points (u_0, x_{10}^i) , $i = 1, \dots, r$. Alors pour g assez proche de f on peut écrire

$$f - u_1 \cdot x_1 + \psi(u) = g(p_j(u), h(u, x_1)) - p_1(u) \cdot h(u, x_1),$$

où le difféomorphisme $(u, x_1) \mapsto (p(u), h(u, x_1))$ est défini au voisinage des points (u_0, x_{10}^i) , $i = 1, \dots, r$. On construit alors un difféomorphisme local \mathcal{H} de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{|I|})^r \times (\mathbb{J}^k(|I|))^r$ en posant (cf. A)

$$\mathcal{H}(u, x_1^1, \dots, x_1^r, (v, -\psi(u))y) = (p(u), h(u, x^1), \dots, h(u, x^r), y),$$

où $y \in (\mathbb{J}^k(|I|))^r$ et $v = (v^1, \dots, v^r) \in (\text{Diff}^k(|I|))^r$ est tel que v^i est le jet d'ordre k en 0 de $x_1 \mapsto h(u, x_1 + x_1^i) - h(u, x_1^i)$, $i = 1, \dots, r$. Ce difféomorphisme échange les graphes de ${}^r\mathbb{J}_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)$ et de ${}^r\mathbb{J}_{x_1}^k(g - u_1 \cdot x_1)$ et conserve $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{|I|})^r \times \mathcal{O}$. En particulier, si le graphe de ${}^r\mathbb{J}_{x_1}^k(g - u_1 \cdot x_1)$ est transverse à ce dernier ensemble en tout point, on pourra en déduire que le graphe de ${}^r\mathbb{J}_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)$ lui est transverse en $(u_0, x_0^1, \dots, x_0^r)$. Or le lemme A.1 prouve que dans tout voisinage de f il existe un tel g . Ceci montre que le graphe de ${}^r\mathbb{J}_{x_1}^k(f - u_1 \cdot x_1)$ est transverse à $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{|I|})^r \times \mathcal{O}$ en $(u_0, x_{10}^1, \dots, x_{10}^r)$, et achève la démonstration du théorème.

Preuve de la d -équivalence locale de $f - u_1 \cdot x_1$ et $g - u_1 \cdot x_1$ (pour g proche de f). — Tout d'abord, si g est assez proche de f , la CI-stabilité de f implique l'existence d'une transformation de contact

$$C : (u, t, z) \mapsto (p(u), T(u, t), z + \psi(u))$$

qui échange LI_f et LI_g . On posera

$$h(u, x_1) = -T_1\left(u, -x_1, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right).$$

Pour g assez proche de f , C est proche de l'identité et $(u, x_1) \mapsto (p(u), h(u, x_1))$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|I|}$ proche de l'identité ($-h = T_1 \circ D$, où D est propre). Pour simplifier l'écriture, on note

$$F(u, x_1) = f(x) - u_1 \cdot x_1,$$

$$G(u, x_1) = g(p_j(u), h(u, x_1)) - p_1(u) \cdot h(u, x_1) - \psi(u).$$

Par construction (et pour g assez proche de f), G est un déploiement d -équivalent à $g(x) - u_1 \cdot x_1$; il nous reste donc à montrer que G est équivalent à F . Pour cela, on construit un difféomorphisme local

$$E : (u, x_1) \mapsto (u, \bar{x}_1),$$

défini sur un voisinage des points (u_0, x_{10}^i) , tel que $F \circ E = G$.

Pour construire un tel difféomorphisme E , étudions la fonction

$$A(u, x_1) = F(u, x_1) - G(u, x_1).$$

On a (avec un léger abus de notations)

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = -x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} - p_1 \right] \cdot \frac{\partial h}{\partial u_1} + h \cdot \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_1}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi}{\partial u_j} - \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} - p_1 \right] \cdot \frac{\partial h}{\partial u_j} + h \cdot \frac{\partial p_1}{\partial u_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial x_j}. \quad (2.15)$$

Comme C échange LI_f et LI_g , les (u, t, z) satisfont aux relations (1.3) et on a $C(u, t, z) = (\tilde{u}, \tilde{t}, \tilde{z})$ avec

$$\tilde{z} = g(\tilde{x}) - \tilde{u}_1 \cdot \tilde{x}_1,$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\tilde{x}),$$

$$\tilde{u}_j = \tilde{x}_j,$$

$$\tilde{t}_1 = -\tilde{x}_1,$$

$$\tilde{t}_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}(\tilde{x}).$$

Remarquant que

$$\tilde{z} = z + \psi(u),$$

$$\tilde{u}_1 = p_1(u),$$

$$\tilde{x}_j = p_j(u),$$

$$\tilde{x}_1 = -T_1(u, t),$$

cela mène à

$$A(u, x_1) = 0 \quad \text{si} \quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

Toujours pour $u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et observant que $\tilde{u}_1 = p_1(u)$, on obtient

$p_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}(p_1, h)$: alors (2.14) et (2.15) deviennent

$$\frac{\partial A}{\partial u_1} = t_1 + \frac{\partial \psi}{\partial u_1} - \tilde{t}_1 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - \tilde{t}_j \cdot \frac{\partial p_j}{\partial u_1},$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_j} = t_j + \frac{\partial \psi}{\partial u_j} - \tilde{t}_1 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial u_j} - \tilde{t}_j \cdot \frac{\partial p_j}{\partial u_j}.$$

Ce qui, grâce au lemme 2.2, conduit à

$$\frac{\partial A}{\partial u}(u, x_1) = 0 \quad \text{si} \quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

Posant $\bar{u}_1 = u_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$, on a $A(u_1, x) = B(\bar{u}_1, x)$ avec $B(0, x) = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \bar{u}_1}(0, x) = 0$. Alors

$$B(\bar{u}_1, x) = \sum_{i,j \in I} b_{ij}(\bar{u}_1, x) \bar{u}_i \bar{u}_j,$$

d'où l'on tire

$$A(u, x_1) = \sum_{i,j \in I} a_{ij}(u, x_1) \left(u_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) \left(u_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right), \quad (2.16)$$

avec $a_{ij} \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|I|})$ pour tout couple $(i, j) \in I \times I$.

Par ailleurs, posons

$$\bar{x}_i = x_i - \sum_{j \in I} w_{ij}(u, x_1) \left(u_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right), \quad i \in I, \quad (2.17)$$

où les w_{ij} sont des fonctions de $C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|I|})$ à déterminer. Par la formule de Taylor, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(u, \bar{x}_1) - F(u, x_1) &= \left(u_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right) \cdot (\bar{x}_1 - x_1) \\ &\quad + \sum_{i,j \in I} \lambda_{ij}(u, \bar{x}_1, x_1) (\bar{x}_i - x_i) (\bar{x}_j - x_j). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Remarquons que $E : (u, x_1) \mapsto (u, \bar{x}_1)$ sera un difféomorphisme si w_{ij} est assez petit pour tout $(i, j) \in I \times I$. D'autre part, poser l'équation $F \circ E = G$ revient à écrire que le premier membre de (2.18) est l'opposé de $A(u, x_1)$. Compte tenu de (2.16), (2.17) et (2.18), cela équivaut à

$$a_{ij} = w_{ij} - \sum_{k,l \in I} w_{ki} w_{lj} \lambda_{kl} \quad (2.19)$$

pour tout couple $(i, j) \in I \times I$. On peut considérer (2.19) comme une équation implicite de la forme $\Phi(u, x_1, w) = 0$, et l'on voit que l'on a $\frac{D\Phi}{Dw}(u, x_1, w) = 1$ dès que $u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$. Donc, au moins au voisinage de

tout compact de l'ensemble critique $\left\{ u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right\}$, (2.19) définit implicitement w : c'est vrai en particulier au voisinage du r -uplet des points (u_0, x_{10}^i) , $i = 1, \dots, r$. Enfin, pour que les w_{ij} soient petits, il suffit que les a_{ij} le soient. Nous allons montrer que c'est le cas si g est assez proche de f .

La formule (2.16) mène à

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_i \partial u_j}(u, x_1) = a_{ij}(u, x_1),$$

pour (u, x_1) sur l'ensemble critique. Par ailleurs,

$$A(u, x_1) = F(u, x_1) - F \circ H(u, x_1) + F \circ H(u, x_1) - \bar{G} \circ H(u, x_1) + \psi(u),$$

en notant le difféomorphisme H par $H(u, x_1) = (p(u), h(u, x_1))$ et \bar{G} par $\bar{G}(u, x_1) = g(x) - u_1 \cdot x_1$. Si l'on impose que g soit proche de f , le déploie-

ment \bar{G} sera proche de F , mais on pourra aussi imposer que H soit proche de l'identité et que ψ soit proche de 0. Sous ces conditions, on peut imposer que $A(u, x_i)$ soit assez petit, donc que a_{ij} soit petit au voisinage des points qui nous intéressent si g est assez proche de f . Ceci achève la construction du difféomorphisme local E et prouve donc, pour g assez proche de f , que les déploiements $g - u_1 \cdot x_1$ et $f - u_1 \cdot x_1$ sont d -équivalents au voisinage des points $(u_0, x_{i0}^i), i = 1, \dots, r$.

Soient V une variété de contact de dimension $2n + 1$ et W une variété de dimension $n + 1$. On dit que $\pi : V \rightarrow W$ est une *fibration de Legendre* si π est une fibration dont les fibres sont des sous-variétés de Legendre. Si $L \subset V$ est une sous-variété de Legendre, π une fibration de Legendre, alors $\pi|L : L \rightarrow W$ est une *application de Legendre* [2].

Prenant pour V la variété de contact triviale et pour π la projection $(u, x, z) \mapsto (u, z)$, nous pouvons énoncer le lemme évident suivant.

LEMME 2.5. — La fibration $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est une fibration de Legendre et $\mathcal{L}I_f$ est, pour tout f et tout I , l'image de l'application de Legendre $\pi|LI_f : LI_f \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Ainsi, l'étude des transformées de Legendre s'inscrit naturellement dans celle des applications de Legendre telle qu'introduite par Arnol'd. C'est pourquoi la classification que nous présenterons plus loin au théorème 3.1 correspond en partie à celle d'Arnol'd. D'ailleurs, compte tenu du fait qu'une sous-variété de Legendre quelconque est toujours localement de la forme LI_f , nous avons développé ici les outils pour l'étude générale de ces applications de Legendre.

3. CLASSIFICATION DES GERMES DE TRANSFORMÉES DE LEGENDRE

Le but de cette section est de présenter une classification des germes des fonctions f de $C(\mathbb{R}^n)$ qui sont LI-stables, auquel se réduit celle des germes des transformées de Legendre. Sans perte de généralité, nous considérons les germes f (par abus d'écriture, nous identifions le germe et son représentant) de $C_0(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des germes en 0 des fonctions de $C(\mathbb{R}^n)$. On montre d'abord là que les germes des transformées de Legendre sont déterminés, à un difféomorphisme près, par les classes des germes des fonctions f au voisinage de leurs points critiques. En bref, on peut considérer cette section comme une introduction à une étude systématique des déploiements « linéaires » $f(x) - u_1 \cdot x_1$.

Soit $F(u, x)$ un déploiement de contrôle $u \in \mathbb{R}^n$. On notera par $\mathcal{C}F$ l'ensemble des $(u, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe x satisfaisant à

$$\begin{aligned} z &= F(u, x), \\ \frac{\partial F}{\partial x}(u, x) &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

On a de manière évidente que la transformée $\mathcal{L}I_f$ associée à $f \in C(\mathbb{R}^n)$ est donnée par $\mathcal{L}I_f = \mathcal{C}F$, où $F = f - u_1 \cdot x_1$ est un déploiement d'état x_1 .

LEMME 3.1. — Soient f et g deux fonctions LI-stables de $C_{\text{Pr}1}(\mathbb{R}^n)$ et soient S et T les ensembles respectifs de points critiques de $f_{x_1=0}$ et $g_{x_1=0}$. Alors si $f_{x_1=0}$, au voisinage de S , est localement d -équivalent ⁽³⁾ à $g_{x_1=0}$ au voisinage de T , il existe un difféomorphisme

$$(u, z) \mapsto (p(u), z + \psi(u)) \quad (3.2)$$

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ défini au voisinage de $u = 0$ et tel que $p(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, qui échange $\mathcal{L}I_f$ et $\mathcal{L}I_g$.

Démonstration. — D'après le théorème A.0, les déploiements $F = f - u_1 \cdot x_1$ et $G = g - u_1 \cdot x_1$ (d'état x_1) sont d -versels. Il résulte du théorème d'unicité des déploiements d -versels (l'analogue du théorème III de [5]) que F , au voisinage de $\{0\} \times S$, est d -équivalent à G , au voisinage de $\{0\} \times T$: c'est dire qu'on peut écrire la formule (1.4) pour $u = (x_1, u_1)$ voisin de 0 et x_1 voisin de S , avec $p(0) = 0$ et $\psi(0) = 0$. Notant S' et T' deux voisinages respectifs de S et T , on en déduit, comme dans la démonstration du lemme 1.3, qu'il existe un difféomorphisme du type (3.2) qui échange $\mathcal{L}I_f|_{S'}$ et $\mathcal{L}I_g|_{T'}$.

Il reste à voir que les germes en $\{u = 0\}$ de ces deux ensembles sont respectivement ceux de $\mathcal{L}I_f$ et $\mathcal{L}I_g$. Il résulte de l'hypothèse de propreté faite sur f (et sur g) que, pour u assez voisin de 0, l'ensemble des x_1 pour lesquels $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = u_1$ est dans S' . Cela mène au résultat et achève ainsi la démonstration du lemme.

Ce lemme montre, de manière analogue à ce qui se passe pour les ensembles catastrophes [5], qu'un germe de $\mathcal{L}I_f$ ne dépend que de la classe d'équivalence du germe correspondant de f au voisinage de ses points critiques.

LEMME 3.2. — Soit $g \in \mathcal{M}_0^3 C(\mathbb{R}^q)$ un germe en 0 de fonction de $C(\mathbb{R}^q)$, dont le jet d'ordre 2 en 0 est nul, de d -codimension $\leq n$ et soit $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ avec $|I| \geq q$. Il existe alors un germe $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tel que $f_{x_1=0}$ soit d -équivalent à tout germe de $C_0(\mathbb{R}^p)$ défini par

$$g(x_1, \dots, x_q) + \sum_{i=q+1}^p \pm x_i^2$$

et tel que f soit un germe de fonction LI-stable. De plus, si G est un déploiement d -versel de g en $0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}I_f$ est localement difféomorphe au sous-ensemble $\mathcal{C}G$ par un difféomorphisme du type 3.2.

⁽³⁾ Pour la notion de d -équivalence locale, nous référons à [5] (déf. 1.5').

Démonstration. — Pour simplifier l'écriture, nous prendrons

$$I = \{ 1, 2, \dots, p \} ;$$

le cas général se déduit de celui-ci par une permutation des indices. Soit g_1, \dots, g_n une base de $C_0(\mathbb{R}^q)$ modulo $Jg_0 + \mathbb{R}$, où Jg_0 dénote l'idéal jacobien de $C_0(\mathbb{R}^q)$ associé à g , telle que $g_1 = x_1, \dots, g_q = x_q$. Alors on pose (4)

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_q) + \sum_{i=q+1}^p \pm (x_i - g_i(x_1, \dots, x_q))^2 + \sum_{i=p+1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_q) \quad (3.3)$$

(où, par abus de notation, on identifie un germe et son représentant). Nous allons vérifier que f convient.

Tout d'abord,

$$f(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) = g(x_1, \dots, x_q) + \sum_{i=q+1}^p \pm (x_i - g_i(x_1, \dots, x_q))^2,$$

et équivaut donc à

$$g + \sum_{i=q+1}^p \pm x_i^2.$$

Pour vérifier que f est un germe en 0 de fonction LI-stable, il suffit de vérifier que $f - u_1 \cdot x_1$ est un déploiement d -versel de contrôle $u = (x_j, u_1)$, c'est-à-dire que $x_1, \dots, x_p, g_{p+1}, \dots, g_n$ engendrent $C_0(\mathbb{R}^p)$ modulo $Jf_0 + \mathbb{R}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} + \sum_{i=q+1}^p \pm 2(x_i - g_i) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}, \quad \text{pour } j = 1, \dots, q,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \pm 2(x_j - g_j), \quad \text{pour } j = q + 1, \dots, p. \quad (3.4)$$

On en déduit que Jf_0 est l'idéal engendré par $\partial g/\partial x_1, \dots, \partial g/\partial x_q, x_{q+1} - g_{q+1}, \dots, x_p - g_p$. Par ailleurs, si λ est une fonction quelconque de $C(\mathbb{R}^p)$, on peut toujours écrire

$$\lambda(x_1, \dots, x_p) = \mu(x_1, \dots, x_q, x_{q+1} - g_{q+1}, \dots, x_p - g_p),$$

en appliquant le changement de variable

$$x \mapsto (x_1, \dots, x_q, x_{q+1} - g_{q+1}, \dots, x_p - g_p).$$

(4) Nous adaptons ici à notre cas une méthode due à Guckenheimer [6].

Alors, par une formule de Taylor, on peut écrire

$$\lambda(x_1, \dots, x_p) = v(x_1, \dots, x_q) + \sum_{j=q+1}^p (x_j - g_j) h_j(x_1, \dots, x_p),$$

et ainsi

$$\lambda(x_1, \dots, x_p) = v(x_1, \dots, x_q) \quad \text{modulo } Jf_0.$$

Revenant à la définition des g_j on a

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \quad \text{modulo } Jg_0 + \mathbb{R},$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$; donc

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \quad \text{modulo } Jf_0 + \mathbb{R}.$$

Enfin, comme $g_i = x_i$ pour $i = 1, \dots, q$ et comme (3.4) implique $g_i = x_i$ modulo Jf_0 pour $i = q + 1, \dots, p$, on a

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{i=p}^n \alpha_i g_i \quad \text{modulo } Jf_0 + \mathbb{R}.$$

Ce qui démontre la première partie du lemme.

Soit maintenant $G(u, x_1, \dots, x_q)$ un déploiement d -versel de g en $0 \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\bar{G}(u, x_1) = G(u, x_1, \dots, x_q) + \sum_{i=q+1}^p \pm x_i^2,$$

où la forme quadratique rajoutée a même signature que celle intervenant

en (3.3). Puisque par la première partie du lemme $g + \sum_{i=q+1}^p \pm x_i^2$ est

localement équivalente à $f_{x_1=0}$ (respectivement aux voisinages de $0 \in \mathbb{R}^p$), il résulte de l'unicité des déploiements d -versels que \bar{G} est, au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, localement d -équivalent à $f - u_1 \cdot x_1$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Il existe donc un difféomorphisme local

$$(u, x_1) \mapsto (p_1(u), p_1(u), h(u, x_1))$$

de $\mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ et une application $u \mapsto \psi(u)$, tels que $p(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, qui échangent ces déploiements. On vérifie alors qu'un difféomorphisme du

type (3.2) applique localement l'ensemble $\mathcal{L}I_f$ dans l'ensemble des $(u, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}^p$ pour lequel

$$z = \bar{G}(u, x_1),$$

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1}(u, x_1) = 0.$$

Or cet ensemble n'est autre que

$$z = G(u, x_1, \dots, x_q),$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(u, x_1, \dots, x_q), \quad i = 1, \dots, q.$$

Ce qui, d'après les notations introduites en (3.1), achève la démonstration du lemme.

Le lemme permet de déduire des classifications existantes (n petit) des germes de fonctions de codimension inférieure à n (cf. par exemple le début de liste présentée au tableau 1 de [5]) une liste de germes de fonctions LI-stables. Le procédé de construction est explicité par la formule (3.3). Le lemme 3.1 permet d'affirmer que la liste ainsi construite est complète. En particulier, nous pouvons en déduire le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. — Pour $n \leq 5$ et $I = \{1, 2, \dots, p\}$, $p \leq n$, tout germe de fonction LI-stable est LI-équivalent à l'un des germes de la liste ci-dessous :

$$n = 1, p = 1$$

$$\pm x_1^2, x_1^3;$$

$$n = 2, p = 1$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2, x_1^3 \pm x_2^2, \pm x_1^4 + x_2 x_1^2;$$

$$n = 2, p = 2$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2, x_1^3 \pm x_2^2, \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2;$$

$$n = 3, p = 1$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2, \pm x_1^4 + x_2 x_1^2 \pm x_3^2, x_1^5 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3;$$

$$n = 3, p = 2$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2, \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2,$$

$$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3 x_1^3, x_1^2 x_2 \pm x_3^2 + x_3 x_2^2;$$

$$n = 3, p = 3$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2, x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2,$$

$$x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2, x_1^2 x_2 \pm x_3^2 \pm (x_3 - x_2^2)^2;$$

$$n = 4, p = 1$$

$$\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \pm x_1^4 + x_2 x_1^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2,$$

$$x_1^5 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3 \pm x_4^2, \pm x_1^6 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1^3 + x_4 x_1^4;$$

$$n = 4, p = 2$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \\ &x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3x_1^3 \pm x_4^2, \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 + x_3x_2^2 \pm x_4^2, x_1^2x_2 \pm x_2^4 + x_3x_2^2 + x_4x_2^3; \end{aligned}$$

$$n = 4, p = 3$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \\ &x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2, \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 + x_4x_1^4, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2, x_2^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 + x_4x_2^3; \end{aligned}$$

$$n = 4, p = 4$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2, \\ &x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2, \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm (x_4 - x_1^4)^2, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2, x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_2^3)^2; \end{aligned}$$

$$n = 5, p = 1$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^4 + x_2x_1^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^5 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^6 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 \pm x_5^2, x_1^7 + x_2x_1^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5; \end{aligned}$$

$$n = 5, p = 2$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3x_1^3 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 \pm x_5^2, x_1^7 \pm (x_2 - x_1^2)^2 + x_3x_1^3 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 + x_3x_2^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^2x_2 \pm x_2^4 + x_3x_2^2 + x_4x_2^3 \pm x_5^2, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^5 + x_3x_2^2 + x_4x_2^3 + x_5x_2^4, x_1^3 \pm x_2^4 + x_3x_2^2 + x_4x_1x_2 + x_5x_1x_2^2; \end{aligned}$$

$$n = 5, p = 3$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 + x_4x_1^4 \pm x_5^2, \\ &x_1^7 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 + x_4x_1^4 + x_5x_1^5, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 + x_4x_2^3 \pm x_5^2, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3 - x_2^2)^2 + x_4x_2^3 + x_5x_2^4, \\ &x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 + x_4x_1x_2 + x_5x_1x_2^2; \end{aligned}$$

$$n = 5, p = 4$$

$$\begin{aligned} &\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ &\pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm (x_4 - x_1^4)^2 \pm x_5^2, \\ &x_1^7 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm (x_4 - x_1^4)^2 + x_5x_1^5, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, x_1^2x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_2^3)^2 \pm x_5^2, \\ &x_1^2x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_2^3)^2 \pm x_5x_2^4, \\ &x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_1x_2)^2 + x_5x_1x_2^2; \end{aligned}$$

$n = 5, p = 5$

$$\begin{aligned} & \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \quad x_1^3 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ & \pm x_1^4 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm x_3^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \quad x_1^5 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \\ & \pm x_1^6 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm (x_4 - x_1^4)^2 \pm x_5^2, \\ & \quad x_1^7 \pm (x_2 - x_1^2)^2 \pm (x_3 - x_1^3)^2 \pm (x_4 - x_1^4)^2 \pm (x_5 - x_1^5)^2, \\ & \quad x_1^2 x_2 \pm x_2^3 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm x_4^2 \pm x_5^2, \quad x_1^2 x_2 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_2^3)^2 \pm x_5^2, \\ & \quad x_1^2 x_2 \pm x_2^5 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_2^3)^2 \pm (x_5 - x_2^4)^2, \\ & \quad x_1^3 \pm x_2^4 \pm (x_3 - x_2^2)^2 \pm (x_4 - x_1 x_2)^2 \pm (x_5 - x_1 x_2^2)^2. \end{aligned}$$

La deuxième partie du lemme 3.2 montre que tous les germes en un point de \mathcal{CF} , où F est un déploiement d -versel (de dimension n) se retrouvent comme germes de \mathcal{LI}_I en un point. Le lemme suivant permet de globaliser ce résultat aux multigerms (germes en plusieurs points) pour

$$I = \{ 1, 2, \dots, n \}.$$

Nous pourrions évidemment énoncer un résultat analogue pour

$$I \subset \{ 1, 2, \dots, n \}.$$

LEMME 3.3. — Soit (g_1, g_2, \dots, g_s) un s -uplet de germes, tels que $g_i \in \mathcal{M}_0 \mathbf{C}(\mathbb{R}^{n_i})$, dont la somme des d -codimensions est $\delta = n - s + 1$. Il existe alors $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ et un s -uplet de points de \mathbb{R}^n , (a_1, a_2, \dots, a_s) , tels que le germe de f en $\{ a_1, a_2, \dots, a_s \}$ soit L -stable et, pour tout i , f soit, au voisinage de a_i , d -équivalente à $g_i + q_i$ au voisinage de 0 , en prenant pour q_i une forme quadratique non dégénérée de $n - n_i$ variables.

Démonstration. — Pour simplifier, on suppose que $g_i \in \mathcal{M}_0^2 \mathbf{C}(\mathbb{R}^{n_i})$, pour $i = 1, \dots, r$, et que g_i est non dégénéré pour $i > r$. On note δ_i la d -codimension de g_i , $i = 1, \dots, s$. Le lemme 3.2 permet d'associer à chaque g_i , $i \leq r$, un germe $f_i \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}^{\delta_i})$ qui est L -stable et du type $g_i + q_i$. On a $n = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_r + s - 1$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par x^1 l'ensemble des δ_1 premières composantes de x , $x^1 = (x_1, \dots, x_{\delta_1})$, par x^2 l'ensemble des δ_2 composantes suivantes, $x^2 = (x_{\delta_1+1}, \dots, x_{\delta_1+\delta_2})$, et ainsi de suite jusqu'à x^r . Enfin, on note y_1, y_2, \dots, y_{s-1} les $s - 1$ dernières coordonnées de x . On pose

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{i=1}^{r-1} \varepsilon_i(x) \left(f_i(x^i) + \sum_{\substack{x_j \notin x^i \\ j \neq \delta+1}} x_j^2 + (y_i - 1)^2 \right) \\ & + \varepsilon_r(x) \left(f_r(x^r) + \sum_{x_j \notin x^r} x_j^2 \right) + \sum_{i=r+1}^s \varepsilon_i(x) \left(\sum_{j \neq \delta+i-1} x_j^2 + (y_{i-1} - 1)^2 \right) \end{aligned}$$

et l'on prend pour a_i le point déterminé par

$$x^j = 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

et

$$\begin{array}{lll} y_j = 0 & \text{pour } j \neq i, & y_i = 1 \quad \text{si } i < r, \\ y_j = 0 & \text{pour tout } j, & \text{si } i = r, \\ y_j = 0 & \text{pour } j \neq i - 1, & y_{i-1} = 1, \quad \text{si } i > r; \end{array}$$

ici la fonction ε_i est, pour tout i , une fonction égale à 1 sur un voisinage de a_i et nulle au voisinage de a_j pour $j \neq i$. Il reste à vérifier que cette fonction convient.

Pour cela, il faut montrer que pour toute fonction $\lambda \in C(\mathbb{R}^n)$ il existe $\beta \in \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i = 1, \dots, s$ le germe de λ en a_i vérifie l'équation de germes suivante :

$$\lambda_{a_i} = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j + a \right)_{a_i} \quad \text{modulo } Jf_{a_i}. \quad (3.5)$$

Si $i = r$, l'idéal jacobien Jf_{a_r} est engendré par les dérivées partielles $\frac{\partial f_r}{\partial x}$ et par x_j pour $x_j \notin x^r$. L'équation (3.5) devient dans ce cas

$$\lambda_{a_r} = \left(\sum_{x_j \in x^r} \beta_j x_j + a \right)_{a_r} \quad \text{modulo } Jf_{a_r}.$$

Or on sait résoudre cette équation, c'est-à-dire trouver les β_j et a , par construction de f_r . Si $i < r$, pour des raisons analogues, (3.5) devient

$$\lambda_{a_i} = \left(\sum_{x_j \in x^i} \beta_j x_j + \beta_{\delta+i} + a \right)_{a_i} \quad \text{modulo } Jf_{a_i}$$

que l'on sait résoudre en revenant à la construction de f_i . Enfin, pour $i > r$, (3.5) devient

$$\lambda_{a_i} = (\beta_{\delta+i-1} + a)_{a_i} \quad \text{modulo } Jf_{a_i},$$

que l'on sait encore résoudre. Cela mène au résultat et achève la démonstration du lemme.

Ce lemme montre que l'on peut trouver pour les déploiements linéaires $f - u \cdot x$ les « mêmes » multigerms que pour les déploiements les plus généraux. Nous laissons le soin au lecteur de se convaincre d'un résultat comparable pour les déploiements $f - u_1 \cdot x_{\mathbf{p}}$, où \mathbf{I} est une partie stricte de $\{1, 2, \dots, n\}$. En particulier, on peut en déduire, comme pour la deuxième partie du lemme 3.2, que les multigerms en $\{u = 0\}$ des ensembles $\mathcal{L}I_f$, pour f LI-stable, sont échangeables avec les multigerms en $\{u = 0\}$ des ensembles $\mathcal{C}F$ pour les déploiements F d -versels.

REMARQUE 3.1. — Notons π' la projection $(u, z) \mapsto u$. Il est clair que les LI-équivalences ou CI-équivalences commutent avec cette projection. Si f est LI-équivalente (ou CI-équivalente) à g , il existe un difféomorphisme p de \mathbb{R}^n qui échange $\pi'(\mathcal{L}I_f)$ et $\pi'(\mathcal{L}I_g)$. En particulier, ce difféomorphisme envoie les valeurs critiques de la projection $\pi' \circ \pi$, restreinte à LI_f , sur celles de $\pi' \circ \pi$, restreinte à LI_g ; de même, les projections par π' des valeurs multiples de π , restreinte à LI_f et LI_g , sont échangées par p . Or l'ensemble des valeurs critiques de $\pi' \circ \pi$, restreinte à LI_f , est l'ensemble catastrophe de bifurcation [5] de $f - u_1 \cdot x_1$. Quant à l'ensemble des projections par π' des valeurs multiples de π , restreinte à LI_f , il constitue l'ensemble catastrophe de conflit (généralisé, i. e. qui ne tient pas compte uniquement des minima les plus bas) de $f - u_1 \cdot x_1$. Ce résultat est une conséquence immédiate des définitions et du lemme 1.1 (étendu au cas des transformées I-partielles).

Pour terminer cette section, nous énoncerons le résultat de densité suivant.

THÉORÈME 3.2. — Pour $n \leq 5$, toute fonction $f \in C(\mathbb{R}^n)$ peut être approchée par une fonction qui a en chaque point un germe de fonction LI-stable.

Démonstration. — Voici les principales étapes d'une telle démonstration. Les fonctions f ayant en chaque point un germe de fonction LI-stable sont telles que $J_{x_1}^{n+2}(f - u_1 \cdot x_1) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{|I|} \mapsto J^{n+2}(|I|)$ est transverse à toute orbite sous l'action de $(\text{Diff } \mathbb{R}^{|I|}) \times \mathbb{R}$, où $\text{Diff } \mathbb{R}^{|I|}$ est le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^{|I|}$. Il suffit de montrer que cet ensemble de fonctions est dense dans $C(\mathbb{R}^n)$. On sait que pour $n \leq 5$ l'espace $J^{n+2}(|I|)$ ne possède qu'un nombre fini d'orbites de codimensions $\leq n + |I|$ et que l'ensemble des orbites de codimensions $> n + |I|$ se décompose en une réunion finie de variétés de codimensions $> n + |I|$ (voir Zeeman [7], théorème 4.2). Alors le théorème est une conséquence du théorème de transversalité (cf. lemme A.1).

4. THERMODYNAMIQUE QUALITATIVE

Nous pouvons décrire les aspects de la thermodynamique qui nous intéressent selon deux formulations équivalentes : la représentation énergétique et la représentation entropique. Nous choisissons de les présenter selon la première. De plus, nous nous restreindrons à ce que nous pourrions appeler « la thermodynamique de l'équilibre différentiable » en supposant que l'énergie interne, notion sur laquelle s'appuie la représentation énergétique, est définie par une fonction infiniment différentiable. D'autre part, le modèle exposé est adapté à la description des systèmes simples (dont la réalisation type est un fluide idéal à c composants); d'autres classes de

systèmes pourraient être traitées par diverses accommodations de celui-ci. Pour les termes non définis, nous renvoyons le lecteur non initié à la thermodynamique aux exposés courants dans le domaine ; le livre de Callen [8], par exemple, est une référence standard.

4.1. Systèmes thermodynamiques homogènes

Pour spécifier les états d'équilibre d'un système simple homogène, on introduit les variables $S, V, N = (N_1, \dots, N_c)$ et E , qui fournissent respectivement une représentation paramétrique de l'entropie, du volume, du nombre de moles de chacun des c constituants et de l'énergie interne du système. La propriété d'homogénéité du système s'exprime par la condition suivante : si les variables S, V et N sont changées par kS, kV et kN , où k est une constante, l'énergie interne E devient kE . En représentation énergétique, les quantités qui sont homogènes de degré un en S, V, N (incluant ces variables elles-mêmes) sont dites *extensives* ; tandis que celles qui sont homogènes de degré zéro sont dites *intensives*. Pour cette représentation, la fonction fondamentale à considérer est la *fonction énergie interne*

$$E = E(S, V, N),$$

qui est une fonction homogène de degré un en S, V et N , que nous supposons de classe C^∞ . Du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, il découle qu'à l'équilibre

$$E(S, V, N) = TS - PV + \mu N, \quad (4.1)$$

où

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}(S, V, N),$$

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V}(S, V, N),$$

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}(S, V, N).$$

Aux variables extensives S, V et N correspond donc les variables intensives $T, -P$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_c)$, prises respectivement comme paramètres de la température absolue, de l'opposé de la pression isotrope P et des c potentiels chimiques associés aux c constituants du système. On voit que le graphe de E est un hyper-cône, en général non régulier.

Dans un système composé de N_1, \dots, N_c moles des espèces 1, 2, \dots , c respectivement, on peut faire correspondre à chaque grandeur extensive une grandeur intensive en la divisant par

$$\sum_{j=1}^c N_j = M,$$

le nombre total de moles. Ces grandeurs intensives sont alors des grandeurs molaires moyennes. Par l'homogénéité de $E(S, V, N)$, on a

$$E(S, V, N) = ME \left(S/M, V/M, N_1/M, \dots, N_{c-1}/M, 1 - \sum_{j=1}^{c-1} N_j/M \right).$$

Ainsi les valeurs E de $E(S, V, N)$ sont ici données à l'aide d'une certaine fonction $\varepsilon(s, v, x)$ par

$$E = M\varepsilon(s, v, x),$$

où $s = S/M$ et $v = V/M$ dénotent respectivement les quantités molaires moyennes associées à S et V , $x = (x_1, \dots, x_{c-1})$, où $x_j = N_j/M$, $j = 1, \dots, c - 1$, les fractions molaires de $c - 1$ des c constituants du système; on notera $\varepsilon = E/M$ les valeurs de l'énergie interne molaire moyenne.

Cette réduction nous permet d'utiliser \mathbb{R}^{2n+1} comme *espace d'état thermodynamique*, où $n = c + 1$, dont les coordonnées sont dénotées par $X = (s, v, x)$, $Y = (T, -P, y)$ et ε , où $y = (y_1, \dots, y_{c-1})$ avec $y_j = \mu_j - \mu_c$, $j = 1, \dots, c - 1$. Nous munissons cet espace de la 1-forme

$$\theta = d\varepsilon - Y \cdot dX.$$

La *surface des états d'équilibre* (une hypersurface) est déterminée par une application bornée $\chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ définie sur un ouvert Λ de \mathbb{R}^n par

$$\chi(X) = (X, Y(X), \varepsilon(X))$$

et telle que

$$\chi^*(\theta) = 0. \tag{4.2}$$

La condition (4.2) s'exprime par l'équation d'état

$$Y(X) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial X}(X). \tag{4.3}$$

La surface d'équilibre est évidemment la variété de Legendre ϕ -partielle $L\phi_\varepsilon$ associée à la fonction ε . Les variétés de Legendre I-partielles LI_ε sont obtenues de $L\phi_\varepsilon$ par la I-transformation de Legendre

$$C_1 : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

définie par

$$C_1(X, Y, \varepsilon) = (Y_I, X_J, -X_I, Y_J, z = \varepsilon - Y_I \cdot X_I).$$

La 1-forme θ sur \mathbb{R}^{2n+1} s'écrit alors

$$\tilde{\theta} = dz + X_I \cdot dY_I - Y_J \cdot dX_J.$$

La nouvelle surface d'équilibre LI_ε est donnée par l'application $C_1 \circ \chi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ telle que

$$(C_1 \circ \chi)^*(\theta) = 0,$$

c'est-à-dire par l'ensemble des points

$$(Y_I(X), X_J, -X_I, Y_J(X), z(X) = \varepsilon(X) - Y_I(X) \cdot X_I)$$

de \mathbb{R}^{2n+1} tels que l'équation d'état (4.3) soit satisfaite. La transformée de Legendre I-partielle correspondante de la fonction ε est la projection $\pi(LI_\varepsilon) = \mathcal{L}I_\varepsilon$ de LI_ε dans l'espace des (Y_I, X_J, z) . Elle est donc donnée par l'ensemble des points (Y_I, X_J, z) de \mathbb{R}^{n+1} tels qu'il existe $X_I \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant à

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon(X) - Y_I \cdot X_I, \\ Y_I &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_I}(X). \end{aligned} \tag{4.4}$$

La fonction $z = z(X)$ définit une *fonction caractéristique* du système.

4.2. Stabilité de l'équilibre homogène

Les arguments de stabilité de l'équilibre homogène rencontrés dans les livres courants de thermodynamique, basés essentiellement sur le second principe, peuvent se traduire selon le critère qui suit.

Critère de stabilité de l'équilibre homogène. — L'état d'équilibre $\chi(X_0)$ est stable si et seulement si

$$\varepsilon(X) - \varepsilon_0 - Y_0 \cdot (X - X_0) > 0 \tag{4.5}$$

pour tout X autre que X_0 , où ε_0 et Y_0 sont les valeurs des fonctions ε et Y prises au point X_0 . Géométriquement, poser la condition (4.5) revient à dire que le graphe de ε est situé au-dessus de l'hyperplan tangent en (X_0, ε_0) pour tout autre point du graphe que le point de contact. En particulier, si le graphe de ε est convexe, les états d'équilibre sont tous stables.

On distingue généralement quatre types d'états d'équilibre stables ou instables :

i) Les états d'équilibre stables réguliers. Ce sont ceux qui, en plus de satisfaire au critère (4.5), correspondent à des points de contact réguliers de l'hyperplan tangent au graphe de ε .

ii) Les états d'équilibre stables critiques. Ce sont ceux qui, tout en satisfaisant au critère (4.5), correspondent à des points de contact dégénérés de l'hyperplan tangent au graphe de ε .

iii) Les états d'équilibre essentiellement instables. L'état d'équilibre $\chi(X_0)$ est un tel état s'il n'existe pas de voisinage de X_0 tel que l'inégalité (4.5) soit satisfaite. C'est le cas, en particulier, pour les états associés à une région localement concave du graphe de ε .

iv) Les états d'équilibre métastables. Ils se présentent lorsque la condition (4.5) est localement satisfaite, tandis que l'hyperplan tangent rencontre encore le graphe de ε à une distance finie du point de contact. Expériment-

talement, de tels états sont stables pour des perturbations suffisamment petites.

Pour des raisons de stabilité structurelle du modèle, nous négligeons de considérer les situations où le graphe de ε présenterait des régions plates; une telle fonction ε n'est pas de d -codimension finie. Cette restriction élimine la considération des états d'équilibre localement indifférents.

Illustrons trois des types d'équilibre mentionnés à l'aide du *système thermodynamique le plus simple* que l'on puisse étudier: un fluide simple fermé à volume fixe. Les états d'équilibre de ce système sont paramétrés par l'entropie molaire moyenne s (ou tout simplement par l'entropie S). Nous supposons que le graphe de ε présente l'allure indiquée à la figure 1. Les points a et d de $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ ont une tangente commune, tandis que les points b et c sont des points d'inflexion. Les régions à gauche de a et à droite de d correspondent à des états d'équilibre stables réguliers (lignes continues); celles de a à b , b non compris, et de c à d , c non compris, à des états métastables (lignes à petits traits); finalement celle de b à c , à des états essentiellement instables (ligne pointillée).

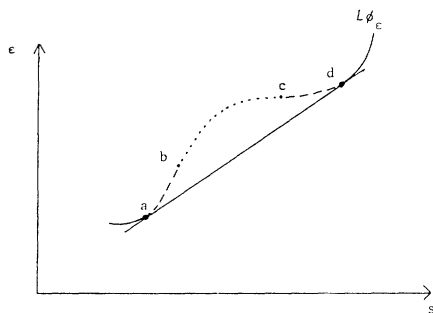


FIG. 1. — Graphe de ε .

Afin de faciliter le traitement général des conditions de stabilité, il convient de les retraduire sur diverses fonctions, qu'on appellera *potentiels thermodynamiques*. Le potentiel adapté à la situation où $Y = Y_0$ est défini par la fonction

$$p_{Y_0} : X \mapsto \varepsilon(X) - Y_0 \cdot X.$$

Sous la variation des Y_0 , nous définissons en fait un champ de potentiels thermodynamiques; un tel champ sera dit contrôlé par Y_0 . Notons que les valeurs de p_{Y_0} mesurent les distances (orientées) du graphe de ε à l'hyperplan

$$\varepsilon = Y_0 \cdot X$$

de \mathbb{R}^{n+1} . Comme par la définition de l'équilibre la fonction p_{Y_0} possède une dérivée nulle en X_0 , tout revient à considérer le type de point critique qu'est X_0 .

Remarquons d'abord que le point d'équilibre $\chi(X_0)$ satisfait le critère de stabilité (4.5) si et seulement si X_0 est le seul minimum absolu de p_{Y_0} . Parallèlement aux types indiqués plus haut, voici maintenant la caractérisation des situations qui se présentent :

i') Si X_0 est un minimum absolu unique non dégénéré, il lui correspond un état d'équilibre stable régulier.

ii') Si X_0 est un minimum absolu unique dégénéré, il lui correspond un état d'équilibre stable critique.

iii') Si X_0 est un maximum relatif ou un col, il lui correspond un état d'équilibre essentiellement instable.

iv') Si X_0 est un minimum absolu non unique ou un minimum relatif strict, il lui correspond un état d'équilibre métastable.

On est dans la situation *i')* si la matrice hessienne $\mathcal{H}(\varepsilon)(X_0)$ de ε en X_0 est définie positive (toutes ses valeurs propres sont strictement positives). Comme la hessienne est alors non dégénérée, on peut exprimer localement \mathcal{L}_ε comme le graphe d'une fonction $z = g(Y)$ de classe C^∞ . Alors, de façon équivalente, on peut dire qu'on est dans la situation *i')* si la hessienne $\mathcal{H}(g)(Y_0)$ est définie négative (cf. lemme 1.2). Comme $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ est ici convexe pour un voisinage de $(X_0, \varepsilon(X_0))$, \mathcal{L}_ε sera concave pour un voisinage de $(Y_0, g(Y_0))$.

Nous illustrons la situation *i')* pour le système thermodynamique le plus simple aux figures 2 *a)* et 2 *b)* : s_0 est un état d'équilibre stable régulier à la température $T = T_0$, car c'est un minimum absolu unique non dégénéré du potentiel

$$p_{T_0}(s) = \varepsilon(s) - T_0 s.$$

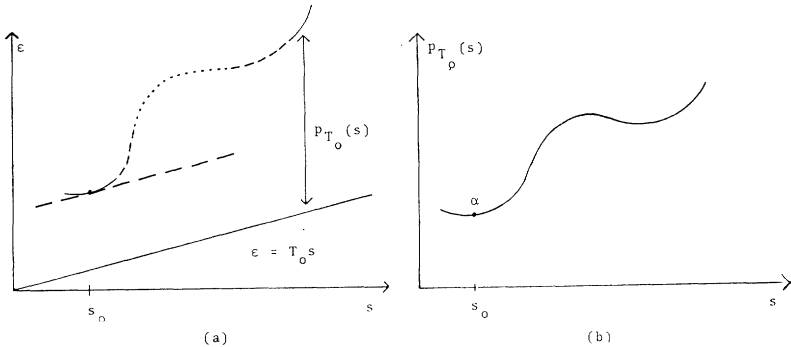


FIG. 2. — *a)* Graphe de ε . *b)* Graphe de p_{T_0} .

EXEMPLE 4.1. — Les équations d'état d'une mole d'un gaz parfait monoatomique classique sont

$$Pv = RT,$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} RT,$$

où R est une constante. On obtient, par intégration de $\chi^*(d\varepsilon/\varepsilon)$, où

$$\chi(s, v) = (s, v, T(s, v), -P(s, v), \varepsilon(s, v))$$

est telle que

$$\chi^*(d\varepsilon - Tds + Pdv) = 0,$$

la fonction énergie interne

$$\varepsilon(s, v) = \bar{\varepsilon} \left(\frac{v}{\bar{v}} \right)^{-2/3} \exp \left[\frac{2}{3R} (s - \bar{s}) \right],$$

avec \bar{s} , \bar{v} et $\bar{\varepsilon}$ des constantes d'intégration telles que $\varepsilon(\bar{s}, \bar{v}) = \bar{\varepsilon}$. On vérifie sans difficulté que tout point $\chi(s, v)$ de la surface des états d'équilibre est un état d'équilibre stable régulier.

EXEMPLE 4.2. — Les équations d'état d'une mole d'un fluide de van der Waals sont

$$(P + a/v^2)(v - b) = RT,$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2} RT - \frac{a}{v},$$

où a et b sont des constantes caractéristiques du fluide considéré. La fonction énergie interne est donnée par

$$\varepsilon(s, v) = \frac{(\bar{\varepsilon} \bar{v} + a)}{\bar{v}} \left(\frac{v - b}{\bar{v} - b} \right)^{-2/3} \exp \left[\frac{2}{3R} (s - \bar{s}) \right] - \frac{a}{v}.$$

On vérifie que le point $(s_c, v_c, T_c, -P_c, \varepsilon_c)$ de la surface des états d'équilibre, où

$$s_c = \bar{s} + \ln \left\{ \left[\frac{4a}{3(\bar{\varepsilon} \bar{v} + a)} \right]^{3R/2} \left(\frac{2b}{\bar{v} - b} \right)^R \left(\frac{3b}{\bar{v}} \right)^{-3R/2} \right\},$$

$$v_c = 3b,$$

$$T_c = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb},$$

$$P_c = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2},$$

$$\varepsilon_c = \frac{4a}{9b},$$

est un état d'équilibre stable critique.

Au lieu de travailler avec $\mathcal{L}\phi_e$, pour certaines situations il est commode de considérer la transformée de Legendre $\mathcal{L}I_e$. D'après (4.4), lorsque la hessienne $\mathcal{H}(u_{X_0})(X_1^0)$ est non dégénérée, X_1 peut s'exprimer sur un voisinage de (Y_1^0, X_J^0) , où $Y_1^0 = \partial\varepsilon/\partial X_1(X_0)$, par une fonction de classe C^∞ de (Y_1, X_J) , soit

$$X_1 = X_1(Y_1, X_J),$$

avec $X_i(Y_i^0, X_j^0) = X_i^0$. Alors, sur un voisinage de (Y_i^0, X_j^0) , la fonction caractéristique devient

$$z = \tilde{z}(Y_i, X_j),$$

où

$$\tilde{z}(Y_i, X_j) = \varepsilon(X_i(Y_i, X_j), X_j) - Y_i \cdot X_i(Y_i, X_j).$$

Ainsi la variété de Legendre $L\varepsilon$ est définie localement par $C_1 \circ \chi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de X_0 , satisfaisant à

$$X_i = - \frac{\partial \tilde{z}}{\partial Y_i}(Y_i, X_j),$$

$$Y_j = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial X_j}(Y_i, X_j).$$

Si à $Y_i = Y_i^0$ cette construction est admissible globalement, on peut exprimer les conditions de stabilité à l'aide de $\mathcal{L}I_\varepsilon \cap \{Y_i = Y_i^0\}$ d'une façon analogue à ci-haut. Le champ de potentiels thermodynamiques adapté à cette situation est défini par

$$q_{(Y_i^0, Y_j)} : X_j \mapsto \tilde{z}(Y_i^0, X_j) - Y_j \cdot X_j.$$

Dans le cas d'un fluide simple, par exemple, Y_i^0 pourrait être l'opposé $-P_0$ de la pression P_0 , Y_j la température T , X_i le volume molaire v , X_j l'entropie molaire s et z les valeurs de l'enthalpie molaire h .

4.3. Systèmes thermodynamiques hétérogènes

La question de savoir s'il existe plus d'un état d'équilibre pour une valeur Y donnée est équivalente à celle de l'existence de plus d'un point sur le graphe $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ de ε dont les hyperplans tangents sont parallèles (de direction Y). Que ces états d'équilibre possèdent tous la même valeur de Y n'est pas suffisant pour qu'ils soient mutuellement en équilibre. Un tel ensemble est dit en *équilibre hétérogène* si de plus Y détermine un hyperplan tangent commun.

Qu'en est-il maintenant de la stabilité d'un équilibre hétérogène? Il s'agit d'étendre le critère (4.5) à l'ensemble des états en équilibre hétérogène. Ainsi l'*équilibre hétérogène* $\{\chi(X_0^1), \dots, \chi(X_0^p)\}$ d'ordre p est *stable* si et seulement si le graphe de ε est situé au-dessus de l'hyperplan tangent commun pour tout autre point du graphe que les p points de contact. De façon analogue à l'équilibre homogène, nous pourrions distinguer ici divers types d'équilibres stables ou instables. Par exemple, un équilibre hétérogène stable régulier $\{\chi(X_0^1), \dots, \chi(X_0^p)\}$ à $Y = Y_0$ serait caractérisé par p minima X_0^1, \dots, X_0^p absolus non dégénérés de p_{Y_0} .

A l'existence d'instabilité d'équilibre pour un système donné est liée la possibilité de disparition et d'apparition de phases. On définit une *phase* comme un sous-système homogène. Lorsqu'un système présente plus d'une phase simultanément, il est dit *hétérogène*. A Y donné, dépendant

des situations, un système est susceptible de présenter $p \leq n + 1$ phases en coexistence si on peut lui associer un état d'équilibre hétérogène stable régulier ou métastable régulier d'ordre $p \leq n + 1$. Nous nous limiterons cependant aux régimes d'un système correspondant à des états d'équilibre homogènes ou hétérogènes stables : on s'exemptera ainsi le traitement des phases métastables.

La limitation indiquée sur le nombre de phases possibles provient de la règle des phases de Gibbs. Celle-ci répond à la question : combien de variables intensives indépendantes peuvent varier tout en maintenant un système dans un régime caractérisé par p phases respectivement de même nature? Ce nombre $d \geq 0$, appelé variance (ou nombre de degrés de liberté thermodynamiques), est donné par

$$d = n + 1 - p.$$

Par exemple, pour un régime de p phases, d correspond géométriquement au nombre de degrés de liberté de l'hyperplan tangent à $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ lorsque celui-ci doit conserver p points de contact « en position générale ».

Soient $(X^\alpha, Y_0, \varepsilon_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, p$ avec $\varepsilon_\alpha - Y_0 \cdot X^\alpha = \mu_c^0$ pour tout α , où $Y_0 = \partial\varepsilon/\partial X(X^\alpha)$ pour tout α et $\varepsilon_\alpha = \varepsilon(X^\alpha)$, p points de $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ définissant un équilibre hétérogène stable régulier d'ordre $p \leq n + 1$. Les états d'équilibre à $Y = Y_0$ des p phases en coexistence associées à ces p points sont alors définis par les points (X, Y, ε) de \mathbb{R}^{2n+1} tels que

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\alpha=1}^p w_\alpha X^\alpha, \\ Y &= Y_0, \\ \varepsilon &= \sum_{\alpha=1}^p w_\alpha \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon - Y \cdot X &= \mu_c^0, \\ \sum_{\alpha=1}^p w_\alpha &= 1, \\ 0 < w_\alpha < 1, \quad \alpha &= 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Physiquement, $X^\alpha = (s_\alpha, v_\alpha, x^\alpha)$ et ε_α sont les quantités molaires moyennes s, v, ε de la phase α (à $Y = Y_0$ et $\mu_c = \mu_c^0$) et x_j^α , la fraction molaire moyenne par rapport à la phase α du constituant j , $j = 1, \dots, c - 1$; $w_\alpha = N^\alpha/M$, avec N^α le nombre de moles dans la phase α , d'où $N^\alpha s_\alpha = S_\alpha$, $N^\alpha v_\alpha = V_\alpha$, $N^\alpha \varepsilon_\alpha = E_\alpha$, $N^\alpha x_j^\alpha = N_j^\alpha$ sont respectivement les quantités totales S, V, E de la phase α et le nombre de moles du constituant j dans la phase α ; la

constante μ_c^0 est la valeur du potentiel chimique du constituant c pour chacune des phases (cf. l'équation (4.1)).

Il en découle que le graphe des énergies internes pour toute région d'équilibre entre p phases est constitué par une hypersurface réglée (une portion d'hyperplan si $p = n + 1$). Les états d'équilibre correspondants sont ainsi localement indifférents : on peut déplacer un tel état d'équilibre en variant X tout en maintenant Y et μ_c constants. Nous illustrons de telles régions de coexistence de phases, dans le cas d'un fluide simple, à la figure 3.

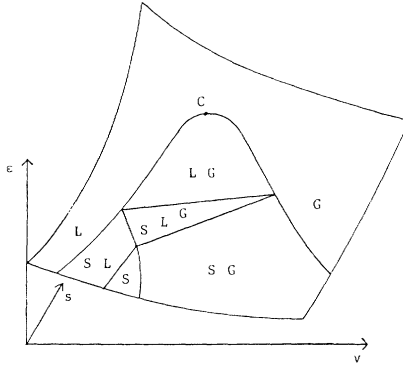


FIG. 3. — Surface de Gibbs d'un fluide simple.

Mentionnons que la surface des énergies internes associée aux divers régimes d'un système thermodynamique est telle que la région au-dessus de celle-ci est globalement convexe. On construit cette hypersurface, appelée *surface de Gibbs* du système, en remplaçant l'ensemble des points d'instabilité du graphe initial de ε par les hypersurfaces réglées appropriées. Afin d'éviter toute ambiguïté, nous définirons cette surface de Gibbs, dénotée par $\mathcal{L}\phi_{\varepsilon}$, par le graphe d'une nouvelle fonction $\bar{\varepsilon}$ construite à partir de ε de la façon indiquée.

Pour l'étude d'un système hétérogène, il arrive qu'on utilise la variété de Legendre LI_{ε} au lieu de $\mathcal{L}\phi_{\varepsilon}$. Il s'agit alors de considérer p points d'équilibre $C_1(X^{\alpha}, Y_0, \varepsilon_{\alpha})$ de LI_{ε} tels que $z_{\alpha} - Y_j^0 \cdot X_j^{\alpha} = \mu_c^0$ pour $\alpha = 1, \dots, p$, où $z_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} - Y_1^0 \cdot X_1^{\alpha}$ et $Y_0 = \partial\varepsilon/\partial X(X^{\alpha})$ pour tout α . La définition des états d'équilibre des p phases en coexistence associées à ces p points est alors induite de celle donnée en (4.6).

L'analogue de la surface de Gibbs $\mathcal{L}\phi_{\varepsilon}$ est la projection $\pi(LI_{\bar{\varepsilon}}) = \mathcal{L}I_{\bar{\varepsilon}}$ de $LI_{\bar{\varepsilon}}$ dans l'espace des (Y_1, X_1, z) , où $LI_{\bar{\varepsilon}}$ est obtenue à partir de LI_{ε} en remplaçant ε par $\bar{\varepsilon}$. Il est à remarquer que, contrairement à la transformée de Legendre $\mathcal{L}I_{\varepsilon}$, l'hypersurface $\mathcal{L}I_{\bar{\varepsilon}}$ peut toujours être définie par le graphe d'une fonction continue des variables (Y_1, X_1) , mais qui en général n'est pas différentiable partout. Nous traçons une telle surface pour un

fluide simple à la figure 4 : à (Y_I, X_J, z) correspond le triplet $(-P, s, h)$. La surface correspondante dans l'espace des (P, s, h) est appelée *surface de Mollier*.

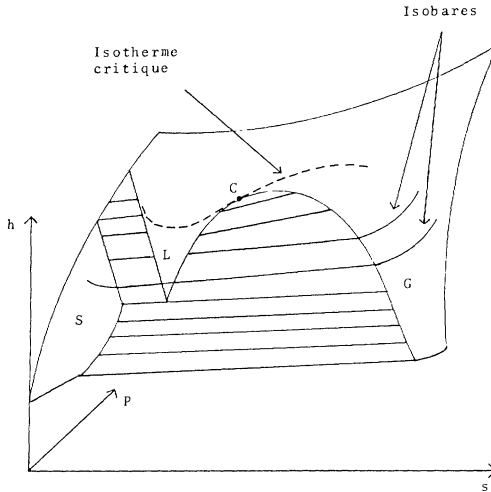


FIG. 4. — Surface de Mollier.

4.4. Changements de phase

Sous la variation des valeurs de n paramètres intensifs, un système peut se présenter sous diverses phases ou ensembles de phases. On dit qu'il y a *transition de phase* lorsqu'on observe le passage d'un complexe de p phases définies à un complexe différent. Expérimentalement, on distingue deux types de transition selon qu'elles s'accompagnent ou non d'un dégagement ou d'une absorption d'une certaine quantité de chaleur, appelée *chaleur latente de transition*. Les premières, qualifiées de *première espèce*, se traduisent par une discontinuité des variables extensives, en particulier de l'entropie. C'est le cas lors de la fusion, de la vaporisation ou de la sublimation d'un corps pur, par exemple. Les secondes, dites de *deuxième espèce*, sont caractérisées par une discontinuité (généralement de type divergent) des coefficients de réponse, dont la chaleur spécifique, les coefficients de dilatation ou de compressibilité, etc. L'apparition de l'opalescence critique pour la coexistence gaz-liquide d'un fluide simple nous en fournit un exemple.

L'ensemble de transition, tracé dans un sous-espace paramétré par n variables intensives, constitue un *diagramme de phases* du système considéré. Il convient d'utiliser la *convention de Maxwell* pour la recherche d'un diagramme de phases dans l'espace des (Y_I, X_J) , $I \neq \emptyset$. Cette règle prévient l'adoption par le système d'un régime correspondant à un état d'équilibre

instable. Lorsque le système obéit à cette convention, au cours d'un processus quasi-statique à $Y_1 = Y_1^0$, les états du système sont donnés par les minima absolus des potentiels du champ $q_{(Y^0, Y_1)}$, lorsque ce dernier est défini. Deux situations peuvent se présenter, séparément ou simultanément : soit que $q_{(Y^0, Y_1)}$, pour un Y_1 donné, atteigne son minimum absolu en plusieurs points distincts, soit qu'il admette un minimum absolu dégénéré. La première caractérise les transitions de première espèce, la seconde celles de deuxième espèce. Une transition de phase de deuxième espèce est donc associée à un état d'équilibre critique. En particulier, le diagramme de phases dans l'espace des Y est fourni par l'ensemble catastrophe de conflit du champ des p_Y sous la variation de Y .

Illustrons une transition de phase de première espèce pour le système le plus simple introduit à la section 4.2. Supposons qu'initialement le système soit dans l'état d'équilibre $(s_0, T_0 = \partial\varepsilon/\partial s(s_0), \varepsilon(s_0))$ tel qu'indiqué à la figure 2 a). Déterminons maintenant un processus quasi-statique en fournissant de la chaleur au système, de sorte que son entropie molaire moyenne augmente. D'abord $T < T_t$ (cf. figures 2 a) et 2 b)), ensuite $T = T_t$ (cf. figures 5 a) et 5 b)) et finalement $T > T_t$ (l'analogue des figures 2 a) et 2 b)), où T_t dénote la valeur de la température pendant la transition. A ces situations correspond respectivement un régime à une phase (phase α), à deux phases en coexistence (phases α et β) et à une phase (phase β). La partie de $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ correspondant aux états de coexistence est donnée par les points intérieurs du segment de droite reliant $(s_\alpha, \varepsilon(s_\alpha))$ et $(s_\beta, \varepsilon(s_\beta))$. Les valeurs $s_{\alpha\beta}$ de s pour les phases α et β en coexistence sont reliées aux données du problème, d'après (4.6), selon l'expression

$$\frac{N^\alpha}{N^\beta} = \frac{s_\beta - s_{\alpha\beta}}{s_{\alpha\beta} - s_\alpha},$$

dite *règle du levier*.

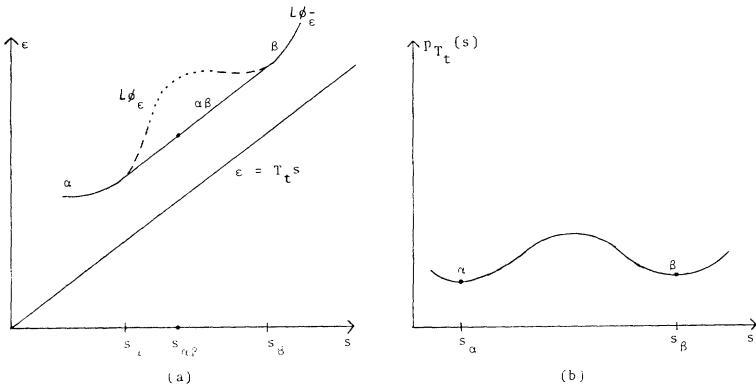


FIG. 5. — Transition de phase. a) Graphes de $\mathcal{L}\phi_\varepsilon$ et $L\phi_\varepsilon$.
b) Graphe de p_{T_t} .

Le diagramme de phases sur l'axe s est déterminé par les points s_α et s_β , où l'intervalle ouvert (s_α, s_β) est la région de coexistence. Sur la droite des T , il l'est par un seul point, soit par $T = T_t$. Ce point est la projection sur l'axe T du point d'auto-intersection de la transformée totale \mathcal{L}_ε (cf. figure 6 a): une section de queue d'aronde). La transformée $\mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}}$ peut s'exprimer comme le graphe d'une fonction continue de T , soit de $z = \bar{g}(T)$. On a

$$\begin{aligned} s_\alpha &= -\bar{g}'_g(T_t), \\ s_\beta &= -\bar{g}'_d(T_t), \end{aligned}$$

où \bar{g}'_g et \bar{g}'_d dénotent respectivement les dérivées à gauche et à droite de \bar{g} . La grandeur ΔS de la discontinuité de l'entropie S due à la transition est donnée par la différence

$$\Delta S = M(s_\beta - s_\alpha).$$

Il est à remarquer que la fonction caractéristique

$$\bar{z}(s) = \bar{\varepsilon}(s) - s \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial s}(s)$$

prend une valeur constante tout au cours de la transition. A la figure 6 b), nous traçons la projection dans le plan des (T, s) de la surface des états d'équilibre, soit la surface dans le plan T, s définie par l'équation d'état

$$T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}(s);$$

les états de coexistence de phases correspondent au palier vertical en T_t .

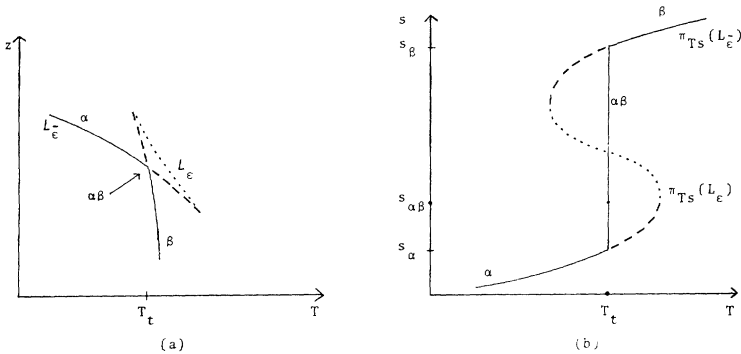


FIG. 6. — a) Transformées de Legendre \mathcal{L}_ε et $\mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}}$.
b) Projection $\pi_{T_s}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ et $\pi_{T_s}(\mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}})$ dans le plan T, s de \mathcal{L}_ε et $\mathcal{L}_{\bar{\varepsilon}}$.

Nous représentons deux diagrammes de phases d'un fluide simple dans les plans s, P et T, P aux figures 7 a) et 7 b) respectivement. Sur le diagramme s, P , les domaines hachurés correspondent aux zones d'équilibre des phases deux à deux, excepté pour $P = P_{tr}$ où les trois phases sont en

équilibre. Les entropies molaires moyennes des trois phases en coexistence sont désignées par les projections sur l'axe des abscisses des trois points s , l et g : s_S pour la phase solide S, s_L pour la phase liquide L, s_G pour la phase gazeuse G. La température T et la pression P pour lesquelles les trois phases coexistent sont indiquées sur le diagramme T, P par le point d'intersection (T_{tr}, P_{tr}) des courbes de transition : ce point est appelé *point triple*. L'allure possible de la surface d'enthalpie au voisinage de $P = P_{tr}$ est illustrée par les trois sections représentées aux figures 7 c), 7 d) et 7 e); de celles-ci on construit les sections correspondantes de la surface de Mollier tracée à la figure 4.

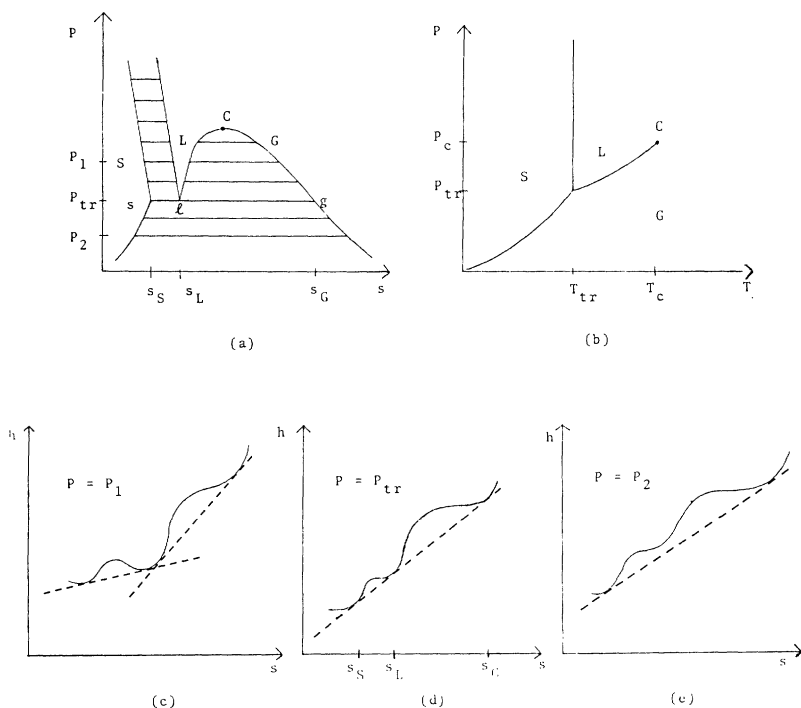


FIG. 7. — Fluide simple. a) Diagramme de phases s, P . b) Diagramme T, P . c) Section à $P = P_1 > P_{tr}$ de la surface d'enthalpie. d) Section à $P = P_{tr}$. e) Section à $P = P_2 < P_{tr}$.

La courbe de transition dans le plan T, P entre les phases L et G se termine au *point critique* $C = (T_c, P_c)$. En ce point, les différences distinctives entre les deux phases disparaissent : ce qui donne lieu à une transition de deuxième espèce. A $P = P_c$, l'énergie libre de Gibbs molaire et l'entropie molaire sont, au voisinage de $T = T_c$, des fonctions de T . Le graphe de la première est une section de queue d'aronde passant au point queue d'aronde :

l'analogue de la figure 6 a) à la disparition de la singularité. Le graphe de la deuxième est tracé à la figure 8 : c'est l'analogue de la figure 6 b) à la disparition du palier vertical.

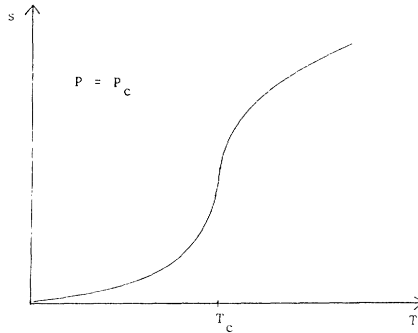


FIG. 8. — Fluide simple au voisinage du point critique :
projection $\pi_{Ts}(L_\varepsilon \cap \{P = P_c\})$.

4.5. Morphologies de la thermodynamique

Les systèmes thermodynamiques définis par des fonctions énergies internes ε L-équivalentes présentent diverses propriétés qualitatives communes. On peut lire ces propriétés sur les transformées de Legendre \mathcal{L}_ε , puisque celles-ci sont échangées par un difféomorphisme assez bien fait qui conserve l'espace des paramètres Y pour deux fonctions ε et ε' L-équivalentes. En particulier, les diagrammes de phases sont aussi échangés par un tel difféomorphisme.

Le dogme de la stabilité des modèles, tel que suggéré par Thom dans [9], nous permet d'émettre l'hypothèse que les fonctions ε de la thermodynamique sont L-stables. Nous basant alors sur les résultats de la section 3, nous pouvons déduire une classification des morphologies présentées par les modèles de la thermodynamique de l'équilibre, au moins pour ceux qui sont décrits par un nombre petit de paramètres. A ces morphologies sont associables divers comportements significatifs des systèmes thermodynamiques.

Comme seul les systèmes thermodynamiques possédant des états d'équilibre stables nous intéressent, nous nous limiterons à n'étudier que la forme des potentiels thermodynamiques au voisinage de leurs minima. Utilisant et prolongeant les résultats du théorème 3.1, on peut en particulier énoncer la proposition suivante; on remarquera que dans la liste mentionnée n'intervient que des cuspoïdes.

PROPOSITION 4.1. — Pour $n \leq 6$, tout germe de fonction L-stable en 0

de $C_0(\mathbb{R}^n)$ et possédant un minimum en ce point est L-équivalent à l'un des germes en 0 de la liste qui suit :

$$n = 1$$

$$x_1^2;$$

$$n = 2$$

$$x_1^2 + x_2^2, x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2;$$

$$n = 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2 + x_3^2;$$

$$n = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ x_1^6 + (x_2 - x_1^2)^2 + (x_3 - x_1^3)^2 + (x_4 - x_1^4)^2;$$

$$n = 5$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, \\ x_1^6 + (x_2 - x_1^2)^2 + (x_3 - x_1^3)^2 + (x_4 - x_1^4)^2 + x_5^2;$$

$$n = 6$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ x_1^6 + (x_2 - x_1^2)^2 + (x_3 - x_1^3)^2 + (x_4 - x_1^4)^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ x_1^8 + (x_2 - x_1^2)^2 + (x_3 - x_1^3)^2 + (x_4 - x_1^4)^2 + (x_5 - x_1^5)^2 + (x_6 - x_1^6)^2.$$

De cette classification des germes, on déduit immédiatement une classification des multigerms : chaque classe de s -multigerms est déterminée par un s -uplet de classes de germes. Comme les ensembles de transition dans l'espace des Y sont définis par les ensembles catastrophes de conflit du champ de potentiels p_Y et que d'après le lemme 3.3 on peut trouver pour les déploiements linéaires $f - u \cdot x$ des multigerms « équivalents » à ceux des déploiements les plus généraux, la détermination des morphologies de la thermodynamique de l'équilibre gravitera autour de la classification des ensembles catastrophes de conflit des déploiements universels (cf. tableau 3 de [5] pour un début de liste). Les tableaux 1 et 2 ci-après indiquent, pour les cas $n = 1, 2$, les transformées de Legendre totales \mathcal{L}_f et $\mathcal{L}_{\bar{f}}$ associées aux multigerms f , ainsi que les diagrammes de phases qui se présentent dans ces cas. On remarquera que ces diagrammes dans l'espace des u sont les projections dans cet espace des singularités de $\mathcal{L}_{\bar{f}}$.

Les systèmes fluides fournissent de nombreux exemples concrets [10] présentant les diagrammes de phases du tableau 2 dans le cas $n = 2$. Toutes les situations données se retrouvent pour les fluides simples : le cas 1 au voisinage d'un point régulier, le cas 2 au voisinage du point critique d'un système gaz-liquide, le cas 3 pour la coexistence de deux phases et le cas 4 pour la coexistence de trois phases ; le groupe (a) dans le plan T, P, le

Multigerme f	L_f	$L_{\bar{f}}$
Un minimum du type x_1^2		
Deux minima du type x_1^2		
Un minimum du type $x_1^2 + x_2^2$		
Un minimum du type $x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2$		
Deux minima du type $x_1^2 + x_2^2$		
Trois minima du type $x_1^2 + x_2^2$		

TABLEAU 1. — Transformées de Legendre totales.

groupe (b) dans les plans T, v ou P, s et le groupe (c) dans le plan s, v. La miscibilité critique des mélanges binaires illustre aussi le cas 2 (b) pour les plans T, x ou P, x. La coexistence de deux phases et l'eutectique pour les mélanges binaires, dans les plans T, x ou P, x, fournissent respectivement des exemples des cas 3 (b) et 4 (b).

Remarquons que les « conflits multiples » se produisent forcément pour des fonctions de d -codimension strictement plus grande que n . Par exemple, si une fonction de $C(\mathbb{R}^2)$ possède trois minima, elle admet nécessairement d'autres points critiques et ceux-ci amènent une contribution à la d -codimension. On a travaillé ici forcément dans une section en négligeant les composantes triviales que demandent à introduire ces nouveaux points critiques.

Multigerme	Espace des u_1		Espace des x_1
Un minimum du type x_1^2			
Deux minima du type x_1^2			
Multigerme	Espace des u_1, u_2 (a)	Espace des x_1, u_2 (b)	Espace des x_1, x_2 (c)
1. Un minimum du type $x_1^2 + x_2^2$			
2. Un minimum du type $x_1^4 + (x_2 - x_1^2)^2$			
3. Deux minima du type $x_1^2 + x_2^2$			
4. Trois minima du type $x_1^2 + x_2^2$			

TABLEAU 2. — Diagrammes de phases.

En fait, si l'on se restreint à ne travailler que sur un voisinage ouvert des minima plutôt que sur tout \mathbb{R}^n , nous n'avons plus à tenir compte de ces composantes. On peut aussi modifier le modèle en se restreignant à l'ensemble des fonctions f telles que $\mathcal{J}_{x_1}^k(f - x_1 \cdot u_1)$ soit transverse aux orbites de minima. Pour $n \leq 6$, cet ensemble est dense dans $C(\mathbb{R}^n)$; la classification de ces fonctions et des $\mathcal{L}I_f$ correspondants au voisinage des minima est alors la même que celle des germes de fonctions LI-stables.

APPENDICE

Nous rappelons ici les notions d'équivalence et de stabilité des déploiements. A l'instar de ce que fait Mather [11] pour les fonctions, on peut établir une liste de conditions équivalentes à la stabilité d'un déploiement $F(u, x)$; c'est ce que nous présentent, par exemple, Latour dans [12] et Duistermaat dans [13]. Nous rappelons ces résultats, du moins la partie que nous utilisons, au théorème A.0 qui suit. Pour les besoins du travail qui précède, nous avons été amenés à étudier une nouvelle condition équivalente : la stabilité faible. Cette étude fait l'objet du théorème A.1.

Par la suite, \mathcal{C} est un ouvert de \mathbb{R}^n et \mathcal{E} un ouvert de \mathbb{R}^p ; \mathcal{C} est appelé l'espace de contrôle, \mathcal{E} l'espace d'état.

DÉFINITION A.1. — On appelle *déploiement* de contrôle $u \in \mathcal{C}$ et d'état $x \in \mathcal{E}$ toute application $F : (u, x) \mapsto F(u, x)$ de classe C^∞ de $\mathcal{C} \times \mathcal{E}$ dans \mathbb{R} . On dénotera abusivement un tel déploiement par $F(u, x)$.

DÉFINITION A.2. — Deux déploiements $F(u, x)$ et $G(u, x)$ sont dit *d-équivalents* ⁽¹⁾ s'il existe un difféomorphisme (conservant le contrôle)

$$H : (u, x) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E} \mapsto (p(u), h(u, x)) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E}$$

et une fonction $\psi \in C(\mathcal{C})$ tels que l'on ait

$$F(u, x) + \psi(u) = G(p(u), h(u, x)) \tag{A.1}$$

pour tout $(u, x) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E}$.

Si S et T sont des parties de $\mathcal{C} \times \mathcal{E}$, nous disons que le déploiement $F(u, x)$, au voisinage de S , est *localement d-équivalent* à $G(u, x)$, au voisinage de T , si l'on peut écrire (A.1) mais avec les restrictions que (u, x) soit dans un voisinage de S et H envoie ce voisinage de S sur un voisinage de T .

DÉFINITION A.3. — Un déploiement $F(u, x)$ est dit *stable* s'il est *d-équivalent* à tout déploiement assez voisin (pour la topologie de Whitney sur $\mathcal{C}(\mathcal{C} \times \mathcal{E})$).

DÉFINITION A.4. — Un déploiement $F(u, x)$ est dit *fortement stable* si pour tout voisinage \mathcal{V} de l'identité dans $C(\mathcal{C} \times \mathcal{E}, \mathcal{C} \times \mathcal{E})$ et tout voisinage \mathcal{W} de la fonction nulle dans $C(\mathcal{C})$, il existe un voisinage \mathcal{U} de F dans $C(\mathcal{C} \times \mathcal{E})$ tel que, pour tout G dans \mathcal{U} , on ait non seulement G *d-équivalent* à F , mais où en plus le difféomorphisme H et la fonction ψ qui réalisent cette équivalence peuvent être choisis respectivement dans \mathcal{V} et \mathcal{W} .

DÉFINITION A.5. — Un déploiement $F(u, x)$ est dit (infinitésimalement ⁽²⁾) *d-versel* en $u_0 \in \mathcal{C}$ si l'on peut écrire

$$C(\mathcal{E}) = JF_{u_0} + \mathbb{R}.1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \right)_{u_0},$$

où JF_{u_0} désigne l'idéal jacobien de $C(\mathcal{E})$, c'est-à-dire celui engendré par les p fonctions $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x_i}(u_0, x)$, et la notation $\mathbb{R}.g$, avec $g \in C(\mathcal{E})$, désigne l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto \lambda g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

⁽¹⁾ Nous employons ici « *d-équivalent* » (*d* pour à droite) au sens *d'* « *équivalent* » de Duistermaat [13].

⁽²⁾ Nous oublions le terme « *infinitésimal* » ici : le théorème II de [5] fournit une justification à cet oubli.

Pour un déploiement $F(u, x)$, on notera par \dot{C}_F l'ensemble critique de F formé des $(u, x) \in \mathcal{C} \times \mathcal{E}$ tels que $\frac{\partial F}{\partial x}(u, x) = 0$. Adoptant les notations de Duistermaat [13] (chap. 2), $J^k(p)$ désignera l'espace des jets d'ordre k de fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , c'est-à-dire l'espace des \mathbb{R} -polynômes de degré $\leq k$ et à p variables. Le jet $j^k f(x)$ d'ordre k en x d'une fonction $f \in C(\mathcal{E})$ sera son polynôme de Taylor en x tronqué à l'ordre k . Pour tout déploiement F , on dénotera par $j_x^k F$ le jet d'ordre k en x de la fonction $F_u : x \mapsto F(u, x)$. Pour tout entier r , on notera $\mathcal{E}^{(r)}$ l'ensemble des r -uplets de points de \mathcal{E} deux à deux distincts. Alors le (x) r -multi-jet d'ordre k de F sera la fonction $\mu_x^k F : \mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \rightarrow (J^k(p))^r$ définie par

$$\mu_x^k F(u, x^1, \dots, x^r) = (j_x^k F(u, x^1), \dots, j_x^k F(u, x^r)). \quad (A.2)$$

Soit $\text{Diff}^k(p)$ le groupe des jets d'ordre k en 0 de difféomorphismes $h : \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$. On fait agir le groupe $(\text{Diff}^k(p))^r \times \mathbb{R}$ sur $(J^k(p))^r$ en posant

$$(j^k h^1(0), \dots, j^k h^r(0), c)(j^k f^1(0), \dots, j^k f^r(0)) = (j^k(f^1 \circ h^1 + c)(0), \dots, j^k(f^r \circ h^r + c)(0)).$$

C'est une action de groupe de Lie pour laquelle toutes les orbites sont des variétés plongées. Dans ce texte, le mot *orbite* désignera toujours une telle orbite.

THÉORÈME A. 0. — Soit $F(u, x)$ un déploiement tel que la projection $(u, x) \mapsto u$ restreinte à l'ensemble critique C_F soit propre. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) F est stable ;
- ii) F est fortement stable ;
- iii) le graphe de $\mu_x^k F$ est transverse à $\mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \times \mathcal{O}$, pour toute orbite \mathcal{O} dans $(J^k(p))^r$, avec $r = k = n + 2$;
- iv) F est d -versel en tout point $u \in \mathcal{C}$.

DÉFINITION A. 6. — Nous disons qu'un déploiement $F(u, x)$ est *faiblement stable* si, pour toute fonction $f \in C(\mathcal{E})$ assez proche de la fonction nulle, le déploiement $F(u, x) + f(x)$ est d -équivalent au déploiement $F(u, x)$.

THÉORÈME A. 1. — Si la projection $(u, x) \mapsto u$ restreinte à l'ensemble critique C_F du déploiement $F(u, x)$ est propre, alors une condition nécessaire et suffisante pour que F soit stable est que F soit faiblement stable.

Démonstration. — Il est évident, par définition, que la stabilité entraîne la stabilité faible. Montrons la réciproque. Pour cela, il suffit de prouver que la stabilité faible implique la condition *iii*) du théorème A. 0. Appliquant la même méthode que celle qui conduit de *i*) à *iii*) (voir Duistermaat [13], proposition 2.1.2), il suffit de prouver que, dans tout voisinage de la fonction nulle dans $C(\mathcal{E})$ et pour toute orbite \mathcal{O} , il existe une fonction f telle que le graphe de $\mu_x^k(F + f)$ soit transverse à $\mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \times \mathcal{O}$. C'est une conséquence du lemme qui suit.

LEMME A. 1. — Soient un déploiement $F(u, x)$ et une sous-variété U de $(J^k(p))^r$. Alors l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathcal{E})$ telles que le graphe de $\mu_x^k(F + f)$ soit transverse à $\mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \times U$ est dense dans $C(\mathcal{E})$.

Démonstration. — On commence par choisir un recouvrement dénombrable de $\mathcal{E}^{(r)} \times U$ par des sous-ensembles de la forme $E_1^r \times E_2^r \times \dots \times E_r^r \times U^r$, où U^r est une sous-variété compacte (à bord) de U et les E_i^r des sous-variétés compactes de \mathcal{E} telles qu'il existe des ouverts disjoints V_1, V_2, \dots, V_r avec $V_i \supset E_i^r$. Compte tenu du fait que $C(\mathcal{E})$ est un espace de Baire pour la topologie de Whitney (cf. Mather [11]), il suffit de démontrer le lemme en remplaçant $\mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \times U$ par $\mathcal{C} \times E_1^r \times \dots \times E_r^r \times U^r$ dans l'énoncé de celui-ci. C'est ce que nous allons faire.

Pour chaque $i = 1, \dots, r$, on choisit une fonction ρ_i de classe C^∞ , à support compact dans V_i , à valeurs dans $[0, 1]$ et égale à 1 sur un voisinage de E_i^r . On prend $f \in C(\mathcal{E})$, on

pose $E = (J^k(p))^r$ et on définit $\phi : E \rightarrow C(\mathcal{E})$ en écrivant, pour tout $e = (e_1, \dots, e_r) \in E$,

$$\phi(e)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{E} - (V_1 \cup \dots \cup V_r), \\ \rho_i(x)e_i(x) + f(x) & \text{si } x \in V_i, \quad i = 1, \dots, r; \end{cases}$$

(on identifie ici un polynôme de $J^k(p)$ et la fonction polynômiale qu'il définit). On vérifie sans peine que $\phi(e)$ est bien définie, est de classe C^∞ et que $\Phi_0 : E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\Phi_0(e, x) = \phi(e)(x)$, est de classe C^∞ . On en déduit que ϕ est continue pour la topologie de Whitney (et une norme quelconque sur E). On considère maintenant l'application

$$\Phi : E \times \mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)} \rightarrow \mathcal{E}^{(r)} \times (J^k(p))^r,$$

où

$$\Phi(e, u, x^1, \dots, x^r) = (x^1, \dots, x^r, \rho_x^k(F + \phi(e))(u, x^1, \dots, x^r)).$$

Cette application est de classe C^∞ et est une submersion au voisinage de chaque point dont l'image est dans $E_1^z \times \dots \times E_r^z \times U^z$. En effet, supposons

$$\Phi(e_0, u_0, x_0^1, \dots, x_0^r) \in E_1^z \times \dots \times E_r^z \times U^z;$$

cela entraîne, entre autres, que $x_0^i \in E_i^z$ et par conséquent, pour x^i assez voisin de x_0^i , que $\rho_i(x^i) = 1$. On construit alors une section locale s de Φ en posant, pour tout (x^1, \dots, x^r) assez proche de x_0^1, \dots, x_0^r et tout $(g_1, \dots, g_r) \in (J^k(p))^r$,

$$s(x^1, \dots, x^r, g_1, \dots, g_r) = (e, u_0, x^1, \dots, x^r),$$

où e est défini (de manière unique) par les équations

$$g_i = j^k(e_i + F_{u_0} + f)(x^i).$$

Sous ces conditions, Φ est transverse à $\Omega = E_1^z \times \dots \times E_r^z \times U^z$.

Pour achever cette démonstration, nous énonçons le sous-lemme suivant, qui est le lemme 3.2 de Mather [11].

Sous-lemme. — Soient Ω une sous-variété d'une variété W , \mathcal{F} un espace topologique et $j : \mathcal{F} \rightarrow C(V, W)$, où V est une variété. Supposons que pour chaque $f \in \mathcal{F}$ il existe une application continue $\phi : (E, e_0) \rightarrow (\mathcal{F}, f)$, où E est une variété et $e_0 \in E$, de telle sorte que l'application $\Phi : E \times V \rightarrow W$ définie par $\Phi(e, v) = j \circ \phi(e)(v)$ soit de classe C^∞ et transverse à Ω . Alors l'ensemble

$$\{ f \in \mathcal{F} ; j(f) \text{ soit transverse à } \Omega \}$$

est dense dans \mathcal{F} .

Fin de la démonstration du lemme A.1. — On applique ce sous-lemme avec $\mathcal{F} = C(\mathcal{E})$, $V = \mathcal{C} \times \mathcal{E}^{(r)}$, $W = \mathcal{E}^{(r)} \times (J^k(p))^r$, $j(f)$ définie par

$$j(f)(u, x^1, \dots, x^r) = (x^1, \dots, x^r, \rho_x^k(F + f)(u, x^1, \dots, x^r)).$$

Le résultat découle du fait que $j(f)$ est transverse à Ω si et seulement si le graphe de $\rho_x^k(F + f)$ est transverse à Ω .

REMERCIEMENTS

L'un des auteurs (J.-G. Dubois) remercie l'Institut de Mathématiques de l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc pour sa bienveillante hospitalité. Il remercie aussi la Coopération Franco-québécoise pour le soutien fourni lors de ce séjour.

CORRECTIONS

Ligne manquante à [5], page 263 :

lemmes qui nous permettrons à la fois une classification des multigerms

REFERENCES

- [1] J. W. GIBBS, *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances*, 1874-1878.
- [2] V. I. ARNOL'D, Critical points of smooth functions. dans *Congrès International des Mathématiciens*, le 17^e. Vancouver. 1974.
- [3] J. N. MATHER. Stability of C^∞ mappings. II. Infinitesimal stability. *Ann. of Math.*, no. 89, 1969, p. 254.
- [4] L. HORMANDER, Fourier integral operators I. *Acta Mathematica*, vol. 127, 1971, p. 79.
- [5] J.-G. DUBOIS, J.-P. DUFOUR, O. STANEK, La théorie des catastrophes. IV. Déploiements universels et leurs catastrophes. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XXIV, no. 3, 1976, p. 261.
- [6] J. GUCKENHEIMER, Catastrophes and partial differential equations. *Ann. Inst. Fourier*, vol. 23, n° 2, 1973, p. 31.
- [7] C. ZEEMAN, The classification of elementary catastrophes of codimension ≤ 5 . dans *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 525. Springer-Verlag, Berlin, 1976, p. 263.
- [8] H. B. CALLEN, *Thermodynamics*, John Wiley, and Sons, New York, 1960.
- [9] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Benjamin, Reading, Mass., 1972.
- [10] J. E. RICCI, *The Phase Rule and Heterogeneous Equilibrium*. Dover Publ., New York, 1966.
- [11] J. N. MATHER. Stability of C^∞ mappings. V. Transversality. *Adv. in Math.*, vol. 4, 1970, p. 301.
- [12] F. LATOUR. Stabilité des champs d'applications différentiables : généralisation d'un théorème de J. Mather. *C. R. Acad Sci Paris*, t. 268, 1969, p. 1331.
- [13] J. J. DUISTERMAAT, Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions, and Unfoldings of Singularities. *Commun. pure appl. Math.*, vol. XXVII, no. 2, 1974, p. 207.

(Manuscrit reçu le 20 avril 1977)