

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

JEAN-GUY DUBOIS

JEAN-PAUL DUFOUR

OLEG STANEK

La théorie des catastrophes. III. Caustiques de l'optique géométrique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, n° 3 (1976), p. 243-260

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_3_243_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

La théorie des catastrophes.

III. Caustiques de l'optique géométrique ⁽¹⁾

par

Jean-Guy DUBOIS, Jean-Paul DUFOUR (*) et Oleg STANEK

Département des Sciences Pures,
Université du Québec, Rimouski, P. Québec, Canada
(*) Institut de Mathématiques, Université des Sciences
et Techniques du Languedoc, Montpellier, France

RÉSUMÉ. — Des propriétés des milieux optiques isotropes plans, utilisant la théorie des catastrophes de R. Thom, nous classifions les morphologies locales stables des caustiques de l'optique géométrique bidimensionnelle. Nous caractérisons ces morphologies par une notion de courbure optique locale d'un front d'onde initial donné et nous les relierons aux singularités stables des fronts d'onde en évolution.

SUMMARY. — From properties of plane isotropic optical media, using R. Thom's catastrophe theory, we classify the stable local morphologies of caustics of bidimensional geometrical optics. We characterize these morphologies by a notion of local optical curvature of a given initial wave front, and we establish the relations between these morphologies and the stable singularities of propagating wave fronts.

1. INTRODUCTION

En optique géométrique, rayons et fronts d'onde sont des êtres de raison, tandis que les caustiques sont des réalités physiques directement observables. Elles deviennent visibles en envoyant un nuage de fumée dans la région du foyer d'une lentille ou d'un miroir concave par exemple.

⁽¹⁾ Travail partiellement subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada.

R. Thom, dans son livre sur la *Stabilité structurelle et morphogénèse* [1], reproduit diverses photographies de caustiques prises en laboratoire. Justement, dans ce livre (p. 62), Thom suggère l'étude, à l'aide d'un principe variationnel, des singularités structurellement stables des fronts d'onde. A ces singularités stables des fronts d'onde correspondent nécessairement diverses caustiques stables dont les morphologies locales ne sont autres que celles des ensembles catastrophes de bifurcation de la classification de Thom.

Nous plaçant dans un contexte variationnel, nous spécialisons notre étude aux milieux optiques isotropes plans. La définition d'une fonction distance optique nous permet d'établir diverses propriétés de ces milieux optiques. L'ensemble catastrophe de cette fonction coïncide localement avec la caustique relative à un front d'onde initial donné. Nous classifions ainsi, pour les situations génériques, les morphologies locales stables des caustiques. Comme l'ensemble catastrophe de la fonction distance optique coïncide aussi avec l'ensemble des centres de « courbure optique » du front d'onde initial, ces morphologies locales sont caractérisables par la courbure optique locale de ce front d'onde. Finalement, nous relierons ces morphologies de la caustique aux singularités stables du front d'onde en évolution dans le milieu optique.

Rappelons le modèle variationnel par lequel peut être fondée l'optique géométrique [2]. Un milieu optique isotrope plan est défini à l'aide d'une fonction différentiable $n(t, x)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^+ dite *indice de réfraction* du milieu. Nous supposons que les fonctions définies dans ce travail sont suffisamment différentiables pour que les calculs effectués aient un sens. Ses valeurs en chaque point du milieu sont inversement proportionnelles à celles de la vitesse d'un photon en ces points, le facteur de proportionnalité étant la vitesse c de la lumière dans le vide. Le temps de parcours d'un photon (virtuel) le long d'une courbe différentiable $\gamma(t) = (t, \phi(t))$ dans ce milieu, du point $\gamma(t_1)$ au point $\gamma(t_2)$, est donc donné, au facteur $1/c$ près, par

$$I(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} n(t, \phi(t)) [1 + \phi_t^2(t)]^{1/2} dt.$$

L'équation d'Euler-Lagrange associée à cette intégrale variationnelle s'écrit selon

$$\phi_{tt}(t) = [\nabla n(t, \phi(t)) \cdot (-\phi_t(t), 1)](1 + \phi_t^2(t))/n(t, \phi(t)), \quad (1.1)$$

$n(t, \phi(t)) [1 + \phi_t^2(t)]^{1/2}$ étant le lagrangien du problème. Selon le principe de Fermat, les rayons (définis par les trajectoires des photons dans le milieu optique) satisfont nécessairement à cette équation.

Nous supposons que le problème de Cauchy associé à (1.1), i. e. celui qui consiste à en trouver une solution $\phi(t)$ satisfaisant aux conditions $a = (t_1, \phi(t_1))$ et $b = (t_2, \phi(t_2))$, est toujours résolu. Par contre, on ne

supposera pas l'unicité des solutions. Puisque l'équation (1.1) est une équation différentielle du deuxième ordre qui peut être réduite à un système du premier ordre, on peut introduire des hypothèses locales. Pour $(\tau, \mu, y) \in \mathbb{R}^3$, on peut affirmer qu'il existe localement une solution unique $(\phi(t), \phi'(t))$ du système du premier ordre telle que $\phi(\tau) = \mu, \phi'(\tau) = y$.

2. DISTANCE OPTIQUE

Soit λ un front d'onde initial du milieu optique donné par une sous-variété différentiable de \mathbb{R}^2 de dimension 1 (une courbe lisse, i. e. une courbe difféomorphe à un intervalle ouvert) et définie implicitement par

$$\psi(t, x) = 0$$

telle que $\psi_t \neq 0$ pour tout (t, x) du domaine de définition de ψ ; c'est dire que la sous-variété est en aucun de ses points parallèle à l'axe t . Considérons maintenant la surface

$$\hat{\psi}(t, x, z) = \psi(t, x) = 0 \tag{2.1}$$

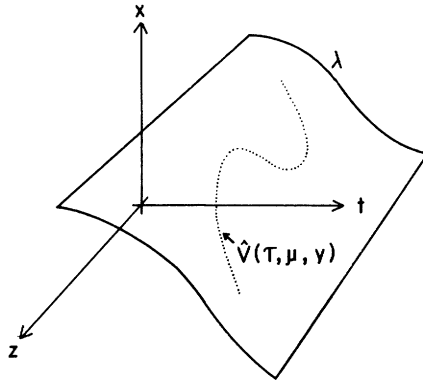


FIG. 1. — Surface $\hat{\psi}(t, x, z) = 0$.

de \mathbb{R}^3 obtenue par une translation de λ dans la direction z . D'autre part considérons, pour un point (τ, μ) du milieu optique, la surface

$$(t, \phi(t, \tau, \mu, y), \phi_t(t, \tau, \mu, y)) \tag{2.2}$$

de \mathbb{R}^3 où $\phi(t, \tau, \mu, y)$ est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange (1.1) satisfaisant à $\phi(\tau, \tau, \mu, y) = \mu$ et $\phi_t(\tau, \tau, \mu, y) = y$. L'intersection de cette surface avec la surface (2.1) vérifie

$$\hat{\psi}(t, \phi(t, \tau, \mu, y), \phi_t(t, \tau, \mu, y)) = 0. \tag{2.3}$$

Remarquons que la possibilité de résoudre le problème de Cauchy entraîne que cette intersection est non vide.

Si l'on suppose que le rayon $(t, \phi(t, \tau_0, \mu_0, y_0))$ n'est pas tangent au front d'onde λ , ce qui revient à dire que pour un certain $(t_0, \tau_0, \mu_0, y_0)$ correspondant au point d'intersection

$$\frac{d\hat{\psi}}{dt} = (\psi_t, \psi_x) \cdot (1, \phi_t) \neq 0,$$

on pourra résoudre l'équation (2.3) par rapport à t pour un voisinage de (τ_0, μ_0, y_0) :

$$t = \zeta(\tau, \mu, y)$$

avec $t_0 = \zeta(\tau_0, \mu_0, y_0)$. On obtient ainsi une fonction implicite ζ différentiable dont les dérivées vérifient

$$\zeta_\sigma = -\psi_x \phi_\sigma / (\psi_t + \psi_x \phi_t) \quad (2.4)$$

pour $\sigma = \tau, \mu, y$.

La courbe de \mathbb{R}^3 fournie par l'intersection (2.3) peut donc être localement paramétrée par

$$\hat{V}(\tau, \mu, y) = (\zeta(\tau, \mu, y), \phi(\zeta(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y), \phi_t(\zeta(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y)).$$

En projetant cette courbe dans le plan (t, x) , on obtient une paramétrisation locale du front d'onde λ de la forme

$$V(\tau, \mu, y) = (\zeta(\tau, \mu, y), \phi(\zeta(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y)) \quad (2.5)$$

et dont le vecteur tangent vérifie

$$V_y(\tau, \mu, y) = (\zeta_y(\tau, \mu, y), \phi_t(\zeta(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y)\zeta_y(\tau, \mu, y) + \phi_y(\zeta(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y)). \quad (2.6)$$

En fait, (2.5) détermine une famille différentiable dépendant de (τ, μ) de paramétrisations locales de λ .

Chaque rayon $(t, \phi(t, \tau, \mu, y))$ relie la position (τ, μ) de l'observateur au point $V(\tau, \mu, y)$ de λ tel qu'illustré à la figure 2.

Une telle construction tient compte de la non unicité des solutions du problème de Cauchy : il peut arriver que pour plus d'un y il y ait un rayon

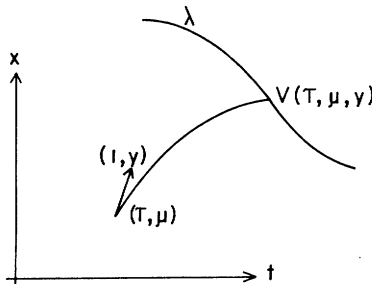


FIG. 2. — Parcours du rayon $(t, \phi(t, \tau, \mu, y))$.

qui relie la position de l'observateur au même point du front d'onde λ . Ainsi en général la paramétrisation (2.5) n'est pas injective. C'est ce que nous suggérons par l'intersection $\hat{V}(\tau, \mu, y)$ particulière tracée sur la surface de la figure 1. Cette précaution est essentielle pour assurer la différentiabilité du système $(\xi(\tau, \mu, y), \phi(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y))$ par rapport à y .

Définissons maintenant la fonction

$$I(u, \tau, \mu, y) = \int_{\tau}^u n(t, \phi(t, \tau, \mu, y)) [1 + \phi_t^2(t, \tau, \mu, y)]^{1/2} dt \quad (2.7)$$

et posons

$$J(\tau, \mu, y) = I(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y). \quad (2.8)$$

Cette fonction J sera appelée *fonction distance optique* (à λ).

LEMME 2.1. — Soient $\xi_1(u)$ et $\xi_2(u)$ deux fonctions différentiables à valeurs dans \mathbb{R} et $(t, \phi(t, u))$ une famille différentiable à un paramètre de rayons. La fonction

$$I(u) = \int_{\xi_1(u)}^{\xi_2(u)} n(t, \phi(t, u)) [1 + \phi_t^2(t, u)]^{1/2} dt$$

est différentiable et

$$\frac{dI}{du}(u) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{n(\xi_i(u), \phi(\xi_i(u), u))}{[1 + \phi_t^2(\xi_i(u), u)]^{1/2}} \left\{ \phi_t(\xi_i(u), u) \phi_u(\xi_i(u), u) + [1 + \phi_t^2(\xi_i(u), u)] \frac{d\xi_i}{du}(u) \right\}.$$

Utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, la démonstration de ce lemme est immédiate.

Ce lemme entraîne la différentiabilité des fonctions (2.7) et (2.8) et permet de calculer facilement leurs dérivées :

$$J_\tau(\tau, \mu, y) = a[\phi_t(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) \phi_\tau(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) + b \xi_\tau(\tau, \mu, y)] - c, \quad (2.9 a)$$

$$J_\mu(\tau, \mu, y) = a[\phi_t(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) \phi_\mu(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) + b \xi_\mu(\tau, \mu, y)] - cy, \quad (2.9 b)$$

$$J_y(\tau, \mu, y) = a[\phi_t(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) \phi_y(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) + b \xi_y(\tau, \mu, y)], \quad (2.9 c)$$

où

$$a = \frac{n(\xi(\tau, \mu, y), \phi(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y))}{[1 + \phi_t^2(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y)]^{1/2}},$$

$$b = 1 + \phi_t^2(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y),$$

$$c = n(\tau, \mu) / [1 + y^2]^{1/2}.$$

3. GÉOMÉTRIE DES MILIEUX OPTIQUES

DÉFINITION 3.1. — L'ensemble des points dont la distance optique à un point c d'un milieu optique est égale à ρ sera appelé *cercle optique* de centre c et de rayon ρ .

Le cercle optique de rayon ρ n'est autre que le front d'onde engendré par une source lumineuse ponctuelle après un temps de parcours correspondant à ρ .

LEMME 3.1. — Les cercles optiques sont des courbes différentiables.

Démonstration. — En effet, le cercle optique de centre (τ, μ) et de rayon ρ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 tels que

$$I(u, \tau, \mu, y) = \rho. \quad (3.1)$$

Puisque d'après (2.7)

$$I_u(u_0, \tau_0, \mu_0, y_0) = n(u_0, \phi(u_0, \tau_0, \mu_0, y_0)) [1 + \phi_t^2(u_0, \tau_0, \mu_0, y_0)]^{1/2} \neq 0,$$

l'équation (3.1) peut être localement résolue par rapport à u de telle sorte que $u_0 = \omega(\tau_0, \mu_0, y_0, \rho_0)$ et, pour un voisinage de $(\tau_0, \mu_0, y_0, \rho_0)$, que

$$I(\omega(\tau, \mu, y, \rho), \tau, \mu, y) = \rho. \quad (3.2)$$

La fonction implicite différentiable ω ainsi définie fournit une paramétrisation locale par y du cercle donnée par

$$W(\tau, \mu, y, \rho) = (\omega(\tau, \mu, y, \rho), \phi(\omega(\tau, \mu, y, \rho), \tau, \mu, y)); \quad (3.3)$$

d'où le lemme,

La paramétrisation (3.3) sera dite *paramétrisation canonique du cercle optique*. Le vecteur tangent au cercle optique est, dans cette paramétrisation, de la forme

$$W_y = (\omega_y, \phi_t \omega_y + \phi_y). \quad (3.4)$$

DÉFINITION 3.2. — Soient λ un front d'onde initial et p un point de λ .

(a) Tout cercle optique passant par p dont les vecteurs tangent et bitangent en p coïncident avec ceux de λ dans la paramétrisation canonique sera dit *cercle osculateur optique* de λ en p .

(b) Le rayon ρ du cercle osculateur optique au point p sera appelé le *rayon de courbure optique* de λ en p .

(c) Le centre c du cercle osculateur optique au point p sera appelé le *centre de courbure optique* de λ en p .

Indiquons que le cercle osculateur optique n'est pas nécessairement unique.

LEMME 3.2. — Une condition suffisante pour que l'ensemble des centres de courbure de λ forment au voisinage du point c , correspondant au

point $V(\tau, \mu, y)$ de λ , une courbe différentiable est que l'une des conditions

$$(a) \quad J_{yyy} \neq 0 \quad \text{et} \quad (J_{\tau y}, J_{\mu y}) \neq 0,$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{vmatrix} \neq 0$$

soit vérifiée au point (τ, μ, y) .

Démonstration. — Par la définition 3.2 a, il existe une fonction différentiable $f : U \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie au voisinage U du point (τ, μ, y, ρ) , ρ le rayon de courbure optique de λ en $V(\tau, \mu, y)$, par

$$f = (\omega - \xi, \omega_y - \xi_y, \omega_{yy} - \xi_{yy})$$

telle que $f(\tau, \mu, y, \rho) = 0$. Par le théorème de la fonction implicite, pour que l'ensemble des centres de courbure correspondant aux points de λ au voisinage du point $V(\tau, \mu, y)$ soit différentiable il faut qu'au point (τ, μ, y, ρ)

$$(a) \quad \omega_{yyy} - \xi_{yyy} = -J_{yyy}/I_u \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} \omega_\tau - \xi_\tau & \omega_\rho \\ \omega_{y\tau} - \xi_{y\tau} & \omega_{y\rho} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.5}$$

ou

$$\begin{vmatrix} \omega_\mu - \xi_\mu & \omega_\rho \\ \omega_{y\mu} - \xi_{y\mu} & \omega_{y\rho} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3.6}$$

car $\omega_y - \xi_y = \omega_{yy} - \xi_{yy} = 0$, ou que

$$(b) \quad \begin{vmatrix} \omega_\tau - \xi_\tau & \omega_\mu - \xi_\mu & \omega_\rho \\ \omega_{y\tau} - \xi_{y\tau} & \omega_{y\mu} - \xi_{y\mu} & \omega_{y\rho} \\ \omega_{yy\tau} - \xi_{yy\tau} & \omega_{yy\mu} - \xi_{yy\mu} & \omega_{yy\rho} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.7}$$

Utilisant les relations (2.8), (3.1) avec $u = \omega(\tau, \mu, y, \rho)$ et $\omega_y = \xi_y$, le déterminant (3.5) est donné par

$$\frac{1}{I_u^2} \begin{vmatrix} -J_\tau & 1 \\ -J_{\tau y} - \alpha J_\tau & \alpha \end{vmatrix}$$

qui est immédiatement réduit à

$$\frac{1}{I_u^2} \begin{vmatrix} -J_\tau & 1 \\ -J_{\tau y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Comme on obtient un résultat similaire pour la condition (3.6), il faut que $(J_{\tau y}, J_{\mu y}) \neq 0$. De façon analogue, le déterminant (3.7) est donné par

$$\frac{1}{I_u^3} \begin{vmatrix} -J_\tau & -J_\mu & 1 \\ -J_{\tau y} - \alpha J_\tau & -J_{\mu y} - \alpha J_\mu & \alpha \\ -J_{\tau yy} - 2\alpha J_{\tau y} - \beta J_\tau & -J_{\mu yy} - 2\alpha J_{\mu y} - \beta J_\mu & \beta \end{vmatrix},$$

où α et β sont des fonctions de (τ, μ, y, ρ) , qui est immédiatement réduit à

$$\frac{1}{\bar{I}_u^3} \begin{vmatrix} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau y y} & J_{\mu y y} \end{vmatrix};$$

d'où le résultat.

DÉFINITION 3.3. — Le front d'onde λ sera dit *régulier relativement à un point* (τ, μ, y) si $\phi_y(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) \neq 0$.

En ne considérant que les points réguliers du front d'onde λ , on élimine les points de λ pour lesquels $V(\tau, \mu, y)$ est soit un « point de retour » soit un « point d'arrêt » par rapport à y . On le voit du fait que, pour un système de coordonnées tel que $\psi_x \neq 0$, $\phi_y = 0$ entraîne que $\xi_y = 0$ (cf. l'équation (2.4)), et qu'alors $V_y = 0$ (cf. l'expression (2.6)), et du fait que $\phi_y = \phi_{yy} = 0$ entraîne que $\xi_y = \xi_{yy} = 0$ et qu'alors $V_y = V_{yy} = 0$. Les relations

$$\begin{aligned} \phi_y(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) &= 0, \\ \phi_{yy}(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y) &= 0 \end{aligned}$$

définissent les points (τ, μ) de \mathbb{R}^2 où il y a bifurcation des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange. Par exemple, lorsque cet ensemble est une courbe, en le traversant, il y a changement de la multiplicité de ces solutions. Remarquons qu'aux points irréguliers de λ peut correspondre divers points de rebroussement du cercle osculateur optique en ces points puisque,

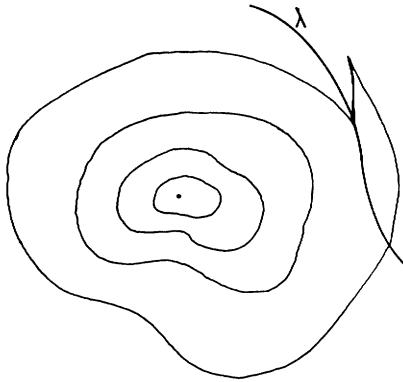


FIG. 3. — Point irrégulier de λ (cas $\phi_y = 0$, $\phi_{yy} \neq 0$).

par la définition 3.2 a, $\omega = \xi$, $\omega_y = \xi_y$ et $\omega_{yy} = \xi_{yy}$ en un point de λ et que par conséquent si $\phi_y = 0$, $W_y = 0$ (cf. l'expression (3.4)), et si $\phi_y = \phi_{yy} = 0$, $W_y = W_{yy} = 0$. C'est ce que nous illustrons par les figures 3 et 4.

Dans le cas des points réguliers, $J_y(\tau, \mu, y) = 0$ si et seulement si un rayon orthogonal au front d'onde λ passe par le point (τ, μ) en direction $(1, y)$, tel qu'on le voit de l'expression (2.9 c) de J_y qui contient le facteur

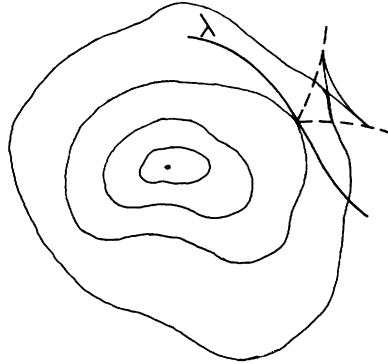


FIG. 4. — Point irrégulier de λ (cas $\phi_y = \phi_{yy} = 0$).

$(1, \phi_t) \cdot (\xi_y, \phi_t \xi_y + \phi_y)$, où $(1, \phi_t)$ définit le vecteur tangent au rayon et $(\xi_y, \phi_t \xi_y + \phi_y)$ le vecteur V_y tangent à λ .

DÉFINITION 3.4. — On appellera *surface critique* de J l'ensemble des $(\tau, \mu, y) \in \mathbb{R}^3$ tels que $J_y(\tau, \mu, y) = 0$.

LEMME 3.3. — Aux points de la surface critique de J pour lesquels le front d'onde λ est régulier, le vecteur (J_τ, J_μ) est non nul et colinéaire à $(1, y)$.

La démonstration est immédiate par les expressions de J_τ, J_μ, J_y et ξ_y .

DÉFINITION 3.5. — On appellera *ensemble catastrophe* (de bifurcation) de J l'ensemble des $(\tau, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $J_y(\tau, \mu, y) = J_{yy}(\tau, \mu, y) = 0$ pour un $y \in \mathbb{R}$.

LEMME 3.4. — L'ensemble catastrophe de la fonction distance optique J coïncide avec l'ensemble des centres de courbure optique du front d'onde λ .

Démonstration. — En effet par (2.8), $J_y(\tau, \mu, y) = J_{yy}(\tau, \mu, y) = 0$ pour un y si et seulement si au point (τ, μ, y)

$$\begin{aligned} \xi_y &= -I_y/I_u, \\ \xi_{yy} &= -(I_{uu}I_y^2 - 2I_{uy}I_uI_y + I_{yy}I_u^2)/I_u^3; \end{aligned}$$

et qu'alors par (3.2)

$$\begin{aligned} \xi_y(\tau, \mu, y) &= \omega_y(\tau, \mu, y, \rho), \\ \xi_{yy}(\tau, \mu, y) &= \omega_{yy}(\tau, \mu, y, \rho). \end{aligned}$$

LEMME 3.5. — Si le front d'onde λ est régulier relativement aux points (τ, μ, y) tels que (τ, μ) soit un point catastrophe de J pour y , alors $J_{\mu y} \neq 0$ et $(J_{\tau y}, J_{\mu y})$ est orthogonal à $(1, y)$.

Démonstration. — Il s'agit de dériver les identités

$$J_y \phi_\tau = J_\tau \phi_y + n(\tau, \mu) \phi_y / (1 + y^2)^{1/2}, \quad (3.8 a)$$

$$J_y \phi_\mu = J_\mu \phi_y + n(\tau, \mu) y \phi_y / (1 + y^2)^{1/2}, \quad (3.8 b)$$

obtenues des expressions (2.9) et de

$$\xi_\tau \phi_y = \xi_y \phi_\tau,$$

$$\xi_\mu \phi_y = \xi_y \phi_\mu,$$

relativement à y pour avoir

$$(J_{\tau y}, J_{\mu y}) = \frac{n(\tau, \mu)}{(1 + y^2)^{3/2}} (y, -1). \quad (3.9)$$

DÉFINITION 3.6. — Un système orthotomique de rayons est un système différentiable à un paramètre $(t, \phi(t, u))$ de rayons tel que pour tout u l'on puisse trouver une courbe lisse $\gamma(v)$ définie dans un voisinage de u dont le vecteur tangent soit non nul et orthogonal à chacun des rayons correspondant au voisinage.

Dans \mathbb{R}^2 , tout système de rayons admettant une paramétrisation différentiable $(t, \phi(t, u))$ est un système orthotomique. On le voit en considérant les courbes intégrales du champ de vecteurs $(-\phi_t \phi_u, \phi_t^2 + 1)$ dont les images par l'application $(t, u) \mapsto (t, \phi(t, u))$ sont les fronts d'onde associés au système. Naturellement la propriété fondamentale de ces derniers est que leurs vecteurs tangents sont orthogonaux aux vecteurs $(1, \phi_t)$ tangents aux rayons. Remarquons que, par le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles du premier ordre, toute courbe lisse de \mathbb{R}^2 peut jouer le rôle de front d'onde associé à un système orthotomique de rayons.

LEMME 3.6. — Supposons que le front d'onde λ soit régulier relativement au point (τ_0, μ_0, y_0) tel que (τ_0, μ_0) soit un point catastrophe de J pour y_0 et soit $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ une paramétrisation de λ au voisinage de $(\xi(\tau_0, \mu_0, y_0), \phi(\xi(\tau_0, \mu_0, y_0), \tau_0, \mu_0, y_0)) = \lambda(u_0)$ avec $\lambda'(u_0) \neq 0$. Il existe alors un système orthotomique de rayons associé à λ au voisinage de $\lambda(u_0)$ qui peut être localement paramétré par une fonction $\chi(\tau, u) = (\tau, \mu(\tau, u))$ avec $\lambda'_1(u) + \mu_\tau(\lambda_1(u), u)\lambda'_2(u) = 0$, où $\lambda'(u) \neq 0$.

Démonstration. — On choisit un système d'axes tel que $\xi_y(\tau_0, \mu_0, y_0) \neq 0$ et soit $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \lambda_2(u))$ une paramétrisation locale de λ telle que $\lambda(u_0) = (\xi(\tau_0, \mu_0, y_0), \phi(\xi(\tau_0, \mu_0, y_0), \tau_0, \mu_0, y_0))$, avec $\lambda'(u_0) \neq 0$. Utilisant le théorème de la fonction implicite, on peut alors résoudre

$$\xi(\tau, \mu, y) = \lambda_1(u)$$

par rapport à y tel que $y_0 = y(\tau_0, \mu_0, u_0)$ et

$$\xi(\tau, \mu, y(\tau, \mu, u)) = \lambda_1(u) \quad (3.10)$$

sur un voisinage de (τ_0, μ_0, u_0) .

D'autre part, puisque le rayon considéré aboutit orthogonalement à λ , la fonction

$$f(\tau, \mu, u) = \lambda'_1(u) + \phi_t(\lambda_1(u), \tau, \mu, y(\tau, \mu, u))\lambda'_2(u)$$

s'annule en (τ_0, μ_0, u_0) . En appliquant le théorème de la fonction implicite, on peut exprimer localement μ en fonction de (τ, u) , et ainsi obtenir la conclusion du lemme. Il suffit qu'en (τ_0, μ_0, u_0)

$$\phi_{ty}y_\mu + \phi_{t\mu} \neq 0,$$

puisque $\lambda'_2(u_0) \neq 0$; ou de façon équivalente, puisque de

$$\phi(\lambda_1(u), \tau, \mu, y(\tau, \mu, u)) = \lambda_2(u)$$

on obtient

$$y_\mu = -\phi_\mu/\phi_y, \tag{3.11}$$

que

$$\phi_{t\mu}\phi_y - \phi_{ty}\phi_\mu \neq 0. \tag{3.12}$$

Montrons qu'une condition suffisante pour que (3.12) soit vérifié est que $J_{\mu y}(\mu_0, \tau_0, y_0) \neq 0$. Il s'agit de montrer que si (3.12) n'est pas satisfait, $J_{\mu y}(\mu_0, \tau_0, y_0) = 0$. Pour cela, notons d'abord que (3.10) entraîne que

$$y_\mu = \xi_\mu/\xi_y,$$

d'où de (3.11)

$$\xi_{yy}\phi_\mu - \xi_{y\mu}\phi_y = \phi_{yy}\xi_\mu - \phi_{y\mu}\xi_y. \tag{3.13}$$

Utilisant l'expression (2.9 c) de J_y , des hypothèses

$$J_y(\tau_0, \mu_0, y_0) = J_{yy}(\tau_0, \mu_0, y_0) = 0$$

et $\phi_{ty}\phi_\mu = \phi_{t\mu}\phi_y$ et des identités $\phi_\mu\xi_y = \phi_y\xi_\mu$ et (3.13), le résultat est immédiat.

4. CLASSIFICATION DES CAUSTIQUES

DÉFINITION 4.1. — Soit Γ une famille différentiable de courbes γ de \mathbb{R}^2 paramétrée localement par $\Phi(t, u) = (t, \phi(t, u))$. On appellera *graphe de la famille* Γ dans \mathbb{R}^3 l'ensemble

$$\text{Gr}_\Phi(\Gamma) = \{ (t, \phi(t, u), u) \in \mathbb{R}^3 ; (t, u) \in I_1 \times I_2 \},$$

où $I_1 \times I_2$ est le domaine de définition de Φ .

DÉFINITION 4.2. — L'ensemble $\partial\Gamma = \overline{\Phi(\Delta(\gamma))}$, où

$$\Delta(\gamma) = \{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 ; \phi_u(t, u) = 0, \phi_{tt}(t, u) \neq 0 \},$$

sera appelé *enveloppe géométrique* de Γ .

Pour nos fins, qui sont de définir une caustique comme l'enveloppe d'un système orthotomique de rayons, la notion classique d'enveloppe ne convient pas. Cette notion, qui demande que les vecteurs tangents aux

courbes de la famille et à l'enveloppe aux points de contact correspondant soient respectivement égaux, n'est pas toujours satisfaite pour une caustique. C'est le cas pour une caustique ponctuelle ou le point cuspidé d'une caustique cuspidée (point de rebroussement de première espace) pour lesquels on ne peut définir de vecteurs tangents. Nous utiliserons plutôt la notion d'enveloppe géométrique illustrée à la figure 5.

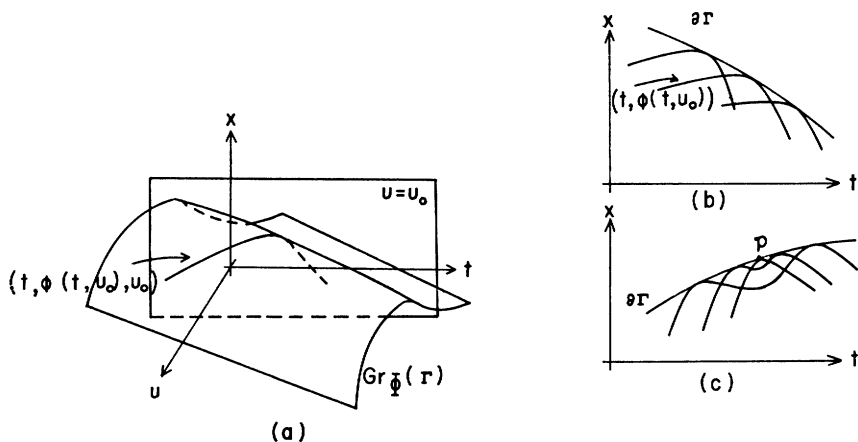


FIG. 5. — Enveloppe géométrique.

La condition $\phi_{ut} \neq 0$ de la définition évite qu'une courbe de la famille soit une enveloppe. Nous introduisons cette condition puisqu'un rayon, par le théorème d'unicité des solutions des systèmes différentiels du premier ordre, ne peut pas être l'enveloppe d'une famille de rayons. Toutefois, pour l'étude de certaines situations singulières, qui ne seront pas considérées ici, il convient de ne pas tenir compte de cette condition (cf. Thom [3]). Dans la situation de la figure 5 a, cette condition est toujours satisfaite puisque la crête de $\text{Gr}_\Phi(\Gamma)$ n'est pas parallèle à l'axe des t . De plus, cette condition nous assure que les points critiques de pr_1 :

$$(t, \phi(t, u), u) \mapsto (t, \phi(t, u))$$

déterminés par $\phi_u = 0$ sont indépendants de la paramétrisation Φ . Finalement, nous affaiblissons la définition d'enveloppe en prenant l'adhérence de $\Phi(\Delta(\gamma))$, afin de ne pas éliminer certaines situations significatives pour notre étude pour lesquelles $\phi_{ut} = 0$. Nous illustrons un résultat possible d'une telle situation à la figure 5 c (point p).

LEMME 4.1. — Supposons que $\text{Gr}_\Phi(\Gamma) = \{ (t, x, u) \in \mathbb{R}^3 ; F_u(t, x, u) = 0 \}$,

que pour tout $(t, \phi(t, u), u) \in \text{Gr}_\Phi(\Gamma)$ le vecteur $(F_t(t, x, u), F_x(t, x, u))$ est non nul et colinéaire à $(1, \phi_t(t, u))$ et que $F_{xu}(t, x, u) \neq 0$ si

$$F_u(t, x, u) = F_{uu}(t, x, u) = 0.$$

Alors l'ensemble catastrophe de F coïncide avec $\partial\Gamma$.

Démonstration. — De la relation $F_u(t, x, u) = 0$, on a

$$F_{ux}\phi_u + F_{uu} = 0;$$

d'où l'on tire que $F_u = F_{uu} = 0$ si et seulement si $\phi_u = 0$. Comme on suppose que le vecteur (F_t, F_x) est non nul et colinéaire à $(1, \phi_t)$, on a que

$$F_t(t, \phi(t, u), u)\phi_t(t, u) = F_x(t, \phi(t, u), u).$$

Pour montrer la condition $\phi_{ut}(t, u) \neq 0$ de la définition 4.2, dérivons cette équation relativement à u :

$$F_{tx}\phi_u\phi_t + F_{tu}\phi_t + F_t\phi_{tu} = F_{xx}\phi_u + F_{xu}.$$

Si $F_u = F_{uu} = 0$, on a

$$F_{tu}\phi_t + F_t\phi_{tu} = F_{xu}.$$

Dans ces conditions, on obtient donc que $\phi_{tu} = 0$ si et seulement si

$$F_{tu}\phi_t - F_{xu} = 0.$$

Or en dérivant relativement à t la relation $F_u(t, x, u) = 0$, on a

$$F_{ut} + F_{ux}\phi_t = 0.$$

Ce qui montre que $\phi_{tu} \neq 0$, car autrement $F_{xu} = 0$.

DÉFINITION 4.3. — On appellera *caustique* l'enveloppe géométrique d'un système orthotomique de rayons.

THÉORÈME 4.1. — Dans les conditions du lemme 3.6, l'ensemble catastrophe de la fonction $J(\tau, \mu, y)$ coïncide au voisinage de (τ_0, μ_0) avec la caustique relative au front d'onde λ .

Démonstration. — Définissons localement la fonction

$$F(\tau, \mu, u) = J(\tau, \mu, y(\tau, \mu, u)).$$

Les ensembles catastrophes de F et J coïncident puisque

$$\begin{aligned} F_u &= J_y y_u, \\ F_{uu} &= J_{yy} y_u^2 + J_y y_{uu} \end{aligned}$$

et que, de

$$\phi(\lambda_1(u), \tau, \mu, y(\tau, \mu, u)) = \lambda_2(u)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda'_1(u) + \phi_t(\lambda_1(u), \tau, \mu, y(\tau, \mu, u))\lambda'_2(u) &= 0, \\ y_u &= \lambda'_2(1 + \phi_t^2)/\phi_y \neq 0. \end{aligned}$$

De plus, en vertu du lemme 3.6, la surface critique de F définie par

$$\{ (\tau, \mu, u) \in \mathbb{R}^3 ; F_u(\tau, \mu, u) = 0 \}$$

peut être paramétrée par la fonction

$$\Phi(\tau, u) = (\tau, \mu(\tau, u), u)$$

dont l'image est le graphe du système orthotomique de rayons passant au voisinage du point $\lambda(u_0)$ de λ . D'autre part, d'après le lemme 3.3, le vecteur $(F_\tau(\tau, \mu(\tau, u), u), F_\mu(\tau, \mu(\tau, u), u))$ est non nul et colinéaire au vecteur $(1, \phi_\tau(\tau, u))$. Finalement, $F_{\mu\mu} \neq 0$ si et seulement si $J_{\mu y} \neq 0$. Le lemme 4.1 établit alors le résultat.

DÉFINITION 4.4. — La fonction distance optique $J(\tau, \mu, y)$ est une *bonne fonction* si elle vérifie en chaque point de son domaine de définition l'une des conditions suivantes :

$$J_y(\tau, \mu, y) \neq 0 ; \quad (c.1)$$

$$J_y(\tau, \mu, y) = 0, \quad J_{yy}(\tau, \mu, y) \neq 0 ; \quad (c.2)$$

$$J_y(\tau, \mu, y) = J_{yy}(\tau, \mu, y) = 0, \quad J_{yyy}(\tau, \mu, y) \neq 0, \\ (J_{\tau y}(\tau, \mu, y), J_{\mu y}(\tau, \mu, y)) \neq 0 ; \quad (c.3)$$

$$J_y(\tau, \mu, y) = J_{yy}(\tau, \mu, y) = J_{yyy}(\tau, \mu, y) = 0, \quad J_{yyyy}(\tau, \mu, y) \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} J_{\tau y}(\tau, \mu, y) & J_{\mu y}(\tau, \mu, y) \\ J_{\tau yy}(\tau, \mu, y) & J_{\mu yy}(\tau, \mu, y) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (c.4)$$

L'ensemble des bonnes fonctions J forme un ouvert dense (la propriété d'être une bonne fonction est générique) dans l'espace des applications différentiables de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} . On peut fournir des modèles canoniques locaux des bonnes fonctions J dont les ensembles catastrophes sont, à un difféomorphisme près, respectivement les ensembles catastrophes locaux des bonnes fonctions du type i correspondant à chacune des conditions $c.i$, $i = 1, \dots, 4$. Mentionnons finalement que les bonnes fonctions sont localement stables, d'où la stabilité des morphologies des ensembles catastrophes qu'elles présentent. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [4].

THÉORÈME 4.2. — Supposons que la fonction distance optique J est une bonne fonction et que le front d'onde λ est régulier relativement à (τ, μ, y) . Alors au point (τ, μ) l'un des cas suivants se présente de façon stable selon que J satisfait respectivement en (τ, μ, y) les conditions $c.i$:

(c.1) Aucun rayon du système orthotomique défini au voisinage du point correspondant de λ ne passe par (τ, μ) .

(c.2) Il y a au moins un rayon qui passe par (τ, μ) , mais il n'y a pas de caustique qui passe par (τ, μ) .

(c.3) Une caustique de type pli passe par (τ, μ) .

(c.4) Une caustique de type cuspidale se situe au point (τ, μ) .

La démonstration est une conséquence immédiate du théorème 4.1 et de la classification des ensembles catastrophes des bonnes fonctions (cf. la référence [4]).

Remarque. — Il peut se présenter localement dans le plan (t, x) une autre morphologie stable de la caustique : l'intersection transversale de deux lignes de pli. Une telle situation se déduit d'une étude globale du système orthotomique.

LEMME 4.2. — Si le front d'onde λ est régulier relativement au point (τ, μ, y) tel que (τ, μ) est un point catastrophe de J pour y et $J_{yyy}(\tau, \mu, y) = 0$, alors

$$\begin{vmatrix} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{vmatrix} \neq 0$$

en ce point.

Démonstration. — Utilisant les expressions (3.9) et celles obtenues pour $J_{\tau yy}$ et $J_{\mu yy}$ de (3.8), on a que

$$\begin{vmatrix} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{vmatrix} = n^2(\tau, \mu)/(1 + y^2)^3;$$

d'où le lemme.

D'après les lemmes 3.2, 3.5 et 4.2, un front d'onde λ régulier relativement à un point (τ, μ, y) admet, lorsque défini, un rayon de courbure optique différentiable au voisinage du point $(\xi(\tau, \mu, y), \phi(\xi(\tau, \mu, y), \tau, \mu, y))$. On désignera par $\rho(u)$ ce rayon de courbure optique, le paramètre u étant choisi relativement à une paramétrisation locale de λ .

THÉORÈME 4.3. — Si λ est un front d'onde régulier relativement à (τ, μ, y) , les cas suivants se présentent localement :

(a) Lorsque ρ n'est pas défini, de façon stable il n'y a pas de caustique.

(b) Lorsque $\rho'(u) \neq 0$, la morphologie de la caustique est celle d'une ligne de pli stable.

(c) Lorsque $\rho'(u) = 0$, $\rho''(u) \neq 0$, la morphologie de la caustique est celle d'une cuspidale stable.

(d) Lorsque $\rho'(u) = \rho''(u) = 0$, la morphologie de la caustique est instable.

Remarque. — La notion de stabilité est celle utilisée relativement à la fonction distance optique. Elle implique la stabilité de la morphologie locale de la caustique sous la « perturbation » correspondante du front d'onde.

Démonstration du théorème 4.3. — Le théorème découle directement

des lemmes 3.2 à 3.5 et 4.2, du théorème 4.2 et des expressions suivantes en (τ, μ, y) : si $J_{yyy}(\tau, \mu, y) \neq 0$,

$$\rho_\tau = \left| \begin{array}{cc} J_\tau & J_{\mu y} \\ J_{\tau y} & J_{\mu y} \end{array} \right| \Big/ J_{\mu y} ;$$

si en (τ, μ, y)

$$\left| \begin{array}{cc} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{array} \right| \neq 0,$$

$$\rho_y = J_{yyy} \left| \begin{array}{cc} J_\tau & J_\mu \\ J_{\tau y} & J_{\mu y} \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{cc} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{array} \right| ;$$

si $J_{yyy}(\tau, \mu, y) = 0$,

$$\rho_{yy} = J_{yyyy} \left| \begin{array}{cc} J_\tau & J_\mu \\ J_{\tau y} & J_{\mu y} \end{array} \right| \Big/ \left| \begin{array}{cc} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{array} \right|.$$

Nous donnons une illustration du cas (c) de ce théorème, pour les milieux homogènes, par la figure 6 ci-après.

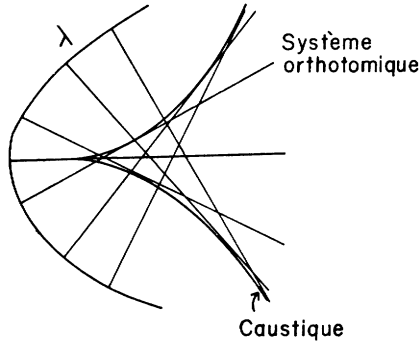


FIG. 6. — Caustique cuspidée.

Nous relierons les singularités des fronts d'onde en évolution aux morphologies locales des caustiques stables par le théorème suivant.

THÉORÈME 4.4. — Si λ est un front d'onde initial régulier relativement à $(\tau_0, \mu_0, \gamma_0)$, les situations génériques suivantes se présentent au voisinage de (τ_0, μ_0) :

(a) Lorsque (τ_0, μ_0) n'appartient pas à une caustique, les morphologies des fronts d'onde sont celles d'une ligne de pli stable.

(b) Lorsque par (τ_0, μ_0) passe une caustique stable de type pli, les morphologies des fronts d'onde sont celles d'une cuspidé stable.

(c) Lorsqu'en (τ_0, μ_0) se situe une caustique stable de type cuspidé, les morphologies des fronts d'onde sont celles des sections de la queue d'aronde.

Démonstration. — Il s'agit de considérer la fonction différentiable

$$\mathfrak{J}(\tau, \mu, \alpha, y) = \int_{y_0}^y J(\tau, \mu, z) dz - \alpha y.$$

Les sections par rapport à α de son ensemble catastrophe dans l'espace des (τ, μ, α) définissent les fronts d'onde en évolution au voisinage de (τ_0, μ_0) , puisque (τ, μ, α) est un point catastrophe de J s'il existe un y tel que

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y(\tau, \mu, \alpha, y) &= J(\tau, \mu, y) - \alpha = 0, \\ \mathfrak{J}_{yy}(\tau, \mu, \alpha, y) &= J_y(\tau, \mu, y) = 0. \end{aligned}$$

Si (τ_0, μ_0) n'appartient pas à une caustique,

$$\mathfrak{J}_{yyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) = J_{yy}(\tau_0, \mu_0, y_0) \neq 0$$

et

$$\mathfrak{J}_{\alpha y}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) = -1,$$

où $\alpha_0 = J(\tau_0, \mu_0, y_0)$: on a donc le résultat (a).

Si part (τ_0, μ_0) passe une caustique de type pli,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{yyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) &= 0, \\ \mathfrak{J}_{yyyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) &= J_{yyy}(\tau_0, \mu_0, y_0) \neq 0 \end{aligned}$$

et en $(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{J}_{\mu y} & \mathfrak{J}_{\alpha y} \\ \mathfrak{J}_{\mu yy} & \mathfrak{J}_{\alpha yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{\mu} & -1 \\ J_{\mu y} & 0 \end{vmatrix} = J_{\mu y} \neq 0;$$

d'où le résultat (b). Si en (τ_0, μ_0) se situe une caustique de type cuspidale,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_{yyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) &= \mathfrak{J}_{yyyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) = 0, \\ \mathfrak{J}_{yyyyy}(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0) &= J_{yyyy}(\tau_0, \mu_0, y_0) \neq 0 \end{aligned}$$

et en $(\tau_0, \mu_0, \alpha_0, y_0)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{J}_{\tau y} & \mathfrak{J}_{\mu y} & \mathfrak{J}_{\alpha y} \\ \mathfrak{J}_{\tau yy} & \mathfrak{J}_{\mu yy} & \mathfrak{J}_{\alpha yy} \\ \mathfrak{J}_{\tau yyy} & \mathfrak{J}_{\mu yyy} & \mathfrak{J}_{\alpha yyy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{\tau} & J_{\mu} & -1 \\ J_{\tau y} & J_{\mu y} & 0 \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{\tau y} & J_{\mu y} \\ J_{\tau yy} & J_{\mu yy} \end{vmatrix} \neq 0;$$

d'où le résultat (c) (cf. la référence [4]).

Pour une illustration du cas (c) de ce théorème, dans les milieux homogènes, nous référons à la figure 7 ci-après.

Il est à remarquer que pour le cas d'une caustique de type cuspidale, l'ensemble catastrophe de conflit de $J(\tau, \mu, y)$ au voisinage du point cuspidale détermine l'ensemble des points de self-intersection des fronts d'onde en évolution.

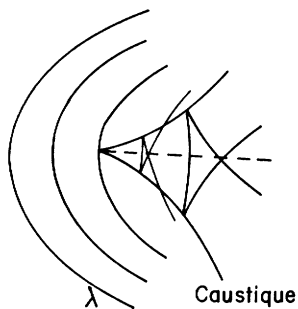


FIG. 7. — Singularité queue d'aronde des fronts d'onde.

REFERENCES

- [1] R. THOM, *Stabilité structurelle et morphogénèse*. W. A. Benjamin, Reading, Mass., 1972.
- [2] O. N. STAVROUDIS, *The Optics of Rays, Wavefronts, and Caustics*. Academic Press, New York, 1972.
- [3] R. THOM, Sur la structure des enveloppes. *Journ. de Math.*, t. XLI, fasc. 2, 1962, p. 177.
- [4] J.-G. DUBOIS, J.-P. DUFOUR, La théorie des catastrophes. II. Dynamiques gradients à une variable d'état. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, vol. XX, n° 2, 1974, p. 135.

(Manuscrit reçu le 18 décembre 1974)