

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SALIOU TOURE

Généralisation de l'équation intégrale d'Ambarzumian

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, n° 3 (1967), p. 249-255

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_249_0

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Généralisation de l'équation intégrale d'Ambarzumian

par

Saliou TOURE

(Laboratoire de Mécanique Théorique,
Besançon, Faculté des Sciences).

RÉSUMÉ. — La détermination de la fonction de fréquence des vitesses spatiales d'un groupe d'étoiles, connaissant la fonction de fréquence des vitesses radiales, conduit à une équation intégrale dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions. On résout ici l'équation intégrale correspondante dans l'espace à n dimensions.

1. — INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous proposons de résoudre l'équation intégrale :

$$(1) \quad g(R, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \int_{\Sigma} f(u_1, u_2, \dots, u_n) d\sigma$$

où (Σ) est l'hyperplan d'équation :

$u_1 \sin \theta_1 + u_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1} - R = 0$
perpendiculaire à la direction $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ et à la distance R de l'origine des coordonnées.

Dans la relation (1), $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est la fonction inconnue et $g(R, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ une fonction donnée. f est une fonction de fréquence, ce qui impose à g certaines conditions. Dans l'espace à trois dimensions,

on démontre (cf. (4)) que $g(R, \theta_1, \theta_2)$ est une fonction positive vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(R, \theta_1, \theta_2) dR = 1$
- 2) $g(R, \theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi) = g(R, \theta_1, \theta_2)$
- 3) $g(R, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) = g(R, \theta_1 - \theta_2)$
- 4) $g(R, \theta_1 + \pi, -\theta_2) = g(-R, \theta_1, \theta_2)$

Par analogie, nous supposons que $g(R, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ est positive, telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(R, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) dR = 1$$

et que g vérifie des conditions de symétrie des types précédents.

Les notations utilisées sont les suivantes :

- $\mathbb{R}$ est la droite numérique réelle : $\mathbb{R}^n$ est l'espace réel à n dimensions.
- On note $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

On désigne par Ω la sphère d'unité de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ est l'aire de cette

sphère,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Pour toute fonction f à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^n$ et intégrable, on pose :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions mesurables telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < +\infty$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on définit l'opérateur $\mathcal{F}$ par :

$$(\mathcal{F}f)(y) = F(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ixy} dx$$

$F(y)$ est la transformée de Fourier de la fonction f .

Enfin $f_{x_k}^{(p)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est la dérivée d'ordre de p de $f(x)$ par rapport à la variable x_k .

2. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE (1)

La résolution utilise deux lemmes que nous allons établir tout d'abord.

Lemme 1. — Soient :

$$\Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{iu\xi} du$$

et

$$\varphi(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{R}, \theta) e^{it\mathbf{R}} d\mathbf{R}$$

les transformées de Fourier de $f(u)$ et $g(\mathbf{R}, \theta)$ respectivement. Alors il existe entre ces deux fonctions, la relation :

$$(2) \quad \Phi(t \sin \theta_1, t \sin \theta_2 \cos \theta_1, \dots, t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}) = \varphi(t, \theta)$$

Démonstration. — Posons :

$$\xi_1 = t \sin \theta_1, \quad \xi_2 = t \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad \dots, \quad \xi_n = t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}$$

alors :

$$iu\xi = it\mathbf{R}$$

Effectuons ensuite une rotation des axes et prenons pour nouvelles variables :

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \mathbf{R}$$

On a :

$$du_1 du_2 \dots du_n = dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} d\mathbf{R}$$

Par suite :

$$\Phi(t \sin \theta_1, t \sin \theta_2 \cos \theta_1, \dots, t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mathbf{R}} d\mathbf{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \mathbf{R}, \theta) dx$$

Mais le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de la rotation précédente transforme l'équation intégrale (1) en :

$$g(R, \theta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, R, \theta) dx$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Phi(t \sin \theta_1, t \sin \theta_2 \cos \theta_1, \dots, t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(R, \theta) e^{itR} dR = \varphi(t, \theta) \end{aligned}$$

d'où le lemme 1.

Lemme 2. — Considérons la fonction :

$$(3) \quad G(R, u) = \frac{1}{\Omega_n} \int_{\Omega} g(R + u_1 \sin \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}, \theta) d\Omega$$

moyenne de

$$g(R + u_1 \sin \theta_1 + u_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}, \theta)$$

sur la sphère unité à n dimensions.

Pour u fixé, la fonction $R \rightarrow G(R, u)$ est paire.

On le voit facilement par récurrence; en effet, la propriété est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$, voir [4].

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — La solution de l'équation intégrale (1) est donnée par :

$$(4) \quad f(u) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-2} \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} \frac{G_{\mathbb{R}^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) dR}{R} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} G_{\mathbb{R}^{n-1}}^{(n-1)}(0, u) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$G(R, u)$ est la fonction définie dans le lemme 2.

Démonstration. — Nous utiliserons la transformation de Fourier. Si $\Phi(\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(u)$, nous aurons par la formule d'inversion,

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi) e^{-iu\xi} d\xi$$

Faisons le changement de variables :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= t \sin \theta_1 \\ \xi_2 &= t \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ &\vdots \\ \xi_n &= t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}\end{aligned}$$

Il vient :

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty t^{n-1} dt \int_\Omega \Phi(\dots, \dots, \dots) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \dots \cos \theta_{n-1})} d\Omega$$

ou en utilisant le lemme 1 :

$$(5) \quad f(u) = \frac{\Omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt$$

avec :

$$\psi(t, u) = \frac{1}{\Omega_n} \int_\Omega \varphi(t, \theta) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1})} d\Omega$$

Mais on sait que la transformation de Fourier transforme la translation en multiplication par une exponentielle, donc :

$$\begin{aligned}\varphi(t, \theta) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1})} \\ = \int_{-\infty}^\infty g(R + u_1 \sin \theta_1 + \dots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1}, \theta) e^{itR} dR\end{aligned}$$

On en déduit en changeant l'ordre des intégrations :

$$\psi(t, u) = \int_{-\infty}^\infty G(R, u) e^{itR} dR$$

$\psi(t, u)$ étant une fonction paire de t (c'est la transformée de Fourier d'une fonction paire), la formule d'inversion donne :

$$G(R, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(t, u) \cos tR dt$$

d'où en dérivant $n - 1$ fois par rapport à R ,

$$G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) \cos \left[tR + \frac{(n-1)\pi}{2} \right] dt$$

Comme :

$$\cos \left[tR + \frac{(n-1)\pi}{2} \right] = \begin{cases} (-1)^p \sin tR & \text{si } n = 2p \\ (-1)^p \cos tR & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases}$$

On aura une formule de résolution différente suivant que n est un nombre pair ou impair.

1^{er} cas. $n = 2p$

$$G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) \sin tR dt$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{R}$ puis intégrons de 0 à $+\infty$ par rapport à R , en observant que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin tR dR}{R} &= \frac{\pi}{2} \\ \int_0^\infty \frac{G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) dR}{R} &= \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt \int_0^\infty \frac{\sin tR dR}{R} \\ &= \frac{(-1)^{n/2}}{2} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1} \psi(t, u) dt = 2(-1)^{n/2} \int_0^\infty \frac{G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) dR}{R}$$

En portant l'expression de $\int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt$ dans (5) et remplaçant Ω_n par sa valeur : $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, il vient :

$$f(u) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-2} \pi^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) dR}{R}$$

2^e cas. $n = 2p + 1$

$$G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(R, u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) \cos tR dt$$

d'où

$$G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(0, u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt$$

Tirons $\int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt$ de là, la relation (5) donne alors :

$$f(u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1} \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} G_{R^{n-1}}^{(n-1)}(0, u)$$

L'équation intégrale (1) est ainsi complètement résolue dans le cas général.

Cas particuliers. — Si $n = 2$, on a :

$$f(u, v) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'_R(R, u, v) dR}{R}$$

si $n = 3$, il vient :

$$f(u, v, w) = -\frac{1}{2\pi} G''_{R^2}(0, u, v, w)$$

La première de ces formules a été obtenue à l'aide de la transformation de Fourier par M. Nahon dans [2] et la dernière par l'auteur dans [3]; confère aussi [4]. Dans [1], Ambarzumian a résolu le même problème dans le plan et dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant une méthode de moyennes.

On trouvera dans ces publications des exemples d'applications à des problèmes de statistique stellaire : déterminer la fonction de fréquence inconnue $f(u, v, w)$ du nuage des vitesses spatiales des étoiles proches du soleil connaissant la fonction de fréquence observée $g(R, \theta_1, \theta_2)$ des vitesses radiales des étoiles de direction donnée.

Dans le cas où le nuage des vitesses spatiales est réduit à un point C (cas du « courant d'étoiles ») de coordonnées inconnues u_0, v_0, w_0 , la fonction $g(R, \theta)$ se réduit alors à l'ensemble des projections $R_1, R_2, \dots, R_n$ du point C sur les N directions θ_i . Le calcul de u_0, v_0, w_0 fait intervenir la méthode des moindres carrés; on peut donc dire que l'équation intégrale d'Ambarzumian généralise la méthode des moindres carrés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. AMBARZUMIAN, On the derivation of the frequency function of space velocities of the stars from the observed radial velocities, *Monthly Notices*, t. 96, 1936.
- [2] F. NAHON, Sur une nouvelle méthode d'analyse des vitesses radiales, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 426-464.
- [3] S. TOURE, Sur la résolution de l'équation intégrale d'Ambarzumian, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 6529-6531.
- [4] S. TOURE, Sur une équation intégrale de statistique stellaire, *Ann. Sc. de l'Université de Besançon*, 3^e série, Mécanique et Physique théorique, fasc. 4.

(Manuscrit reçu le 22 avril 1967).