Annales de l'I. H. P., section A

Éliane Blancheton

Mécanique analytique des milieux continus

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 3 (1967), p. 189-213
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_189_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1967, p. 189-213.

Section A :
Physique théorique.

Mécanique analytique des milieux continus

par

Éliane BLANCHETON
Faculté des Sciences de Caen, Laboratoire de Mathématiques.

SOMMAIRE. — Nous montrons qu'il est possible de repérer l'état d'un milieu continu par un point dans un espace de Banach. Les résultats du calcul variationnel classique (principe de Maupertuis, théorie d'Hamilton-Jacobi), généralisés aux espaces de Banach, permettent de développer la mécanique analytique des milieux continus de façon analogue à la mécanique analytique des systèmes de corps solides.

ABSTRACT. — It is shown that it may be associated to every state of a continuous medium a point of a Banach space. The results of the classical calculus of variations (principle of Maupertuis, theory of Hamilton-Jacobi), after being generalised, allow to expose the analytic Mecanic of continuous media in a similar way as the analytic mecanic of solid bodys.

Le calcul des variations classiques se généralise sans peine au cas où l'espace des états est un espace affine F dont l'espace vectoriel associé $\vec{F}$ est un espace de Banach. Les dérivations sont alors des dérivations au sens de Fréchet. Or il est possible de repérer l'état d'un milieu continu à l'instant t par un point d'un tel espace, et les équations de la mécanique des milieux continus, lorsqu'on néglige les phénomènes thermodynamiques, la viscosité, la capillarité, etc., peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel de ce type. L'extension aux espaces de Banach des études faites en dimension finie par Hamilton, Jacobi, Maupertuis, études qui ont conduit à la mécanique analytique des systèmes de corps solides, permettra donc de développer une mécanique analytique des milieux continus.

I. — PRINCIPE VARIATIONNEL DANS LES MILIEUX CONTINUS

Nous désignons par E_3 l'espace affine euclidien de dimension 3, par $\vec{E}_3$ son espace vectoriel (espace des vecteurs libres de E_3). Soit K_0 le domaine de E_3 occupé par le milieu continu à l'instant initial; K_0 sera supposé être un ensemble compact. Si $M_0 \in K_0$ désigne la position d'une molécule à l'instant initial, M celle de la même molécule à l'instant t, nous écrirons

$$M = u(t)(M_0).$$

Nous poserons

$$X = u(t),$$

donc

$$M = X(M_0).$$

Précisons que, pour t donné, X est une application de K_0 dans E_3. Nous la supposerons prolongeable par une application de classe C^1 sur un ouvert de E_3 contenant K_0, à valeurs dans E_3. Sur cet ensemble, on considère la relation d'équivalence

$$\{ X \approx Y \} \Leftrightarrow \{ X = Y \text{ sur } K_0 \}.$$

Nous désignerons par F l'ensemble des classes d'équivalence. Cet ensemble est un espace affine, la norme sur l'espace vectoriel $\vec{F}$ associé étant pour $Z \in \vec{F}$

$$\| Z \| = \operatorname*{Max}_{M_0 \in K_0} (\| Z(M_0) \| , \| Z'(M_0) \|).$$

Notons que $\| Z(M_0) \|$ et $\| Z'(M_0) \|$ désignent les normes usuelles respectivement dans $\vec{E}_3$ et dans $\mathcal{L}(\vec{E}_3, \vec{E}_3)$.

L'application $u : t \to X$ est alors une application d'un intervalle $[a, b]$ réel et compact dans F. Nous la supposerons de classe C^1. L'ensemble des applications de classe C^1 de $[a, b]$ dans F est un espace affine E lorsqu'on munit l'espace vectoriel associé $\vec{E}$ (qui est l'ensemble des applications de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\vec{F}$) de la norme

$$v \in \vec{E} \Rightarrow \| v \| = \operatorname*{Max}_{t \in [a,b]} (\| v(t) \| , \| v'(t) \|)$$

où les normes figurant au deuxième membre sont des normes dans $\vec{F}$.

Les équations classiques de la mécanique des milieux continus, lorsqu'on néglige les phénomènes thermodynamiques, la viscosité, la capillarité... peuvent être obtenues à partir d'un principe variationnel dans lequel l'espace des états est F. Le lagrangien est somme de trois termes T, U_1 et U_2 que nous définirons séparément.

a) *Définition de T* (énergie cinétique).

On introduit :

$K = X(K_0)$, domaine occupé par le milieu continu à l'instant t,
dv_0 élément de volume dans E_3,
$dv = \text{dét}(X'(M_0))dv_0$, où l'abréviation dét désigne le déterminant,
ρ_0 application donnée de K_0 dans R, de classe C^2. Le nombre $\rho_0(M_0)$ est la masse spécifique en M_0 à l'instant initial, l'intégrale

$$m = \iiint_{K_0} \rho_0(M_0)dv_0$$

la masse totale.

Enfin $\rho_t(M)$ désignera la masse spécifique en M à l'intant t; ρ_t est l'application de K dans R définie par

$$\rho_t(M)dv = \rho_0(M_0)dv_0.$$

Nous définirons l'application T de $F \times \vec{F}$ dans R par

$$\begin{aligned} T(u(t), u'(t)) &= \frac{1}{2}\iiint_K \left\langle \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial t} \right\rangle \rho_t(M)dv \\ &= \frac{1}{2}\iiint_{K_0} \langle u'(t)(M_0), u'(t)(M_0) \rangle \rho_0(M_0)dv_0. \end{aligned}$$

Nous remarquerons d'ailleurs que T ne dépend en fait que de $u'(t)$.

b) *Définition de U_1* ($-\ U_1$ est l'énergie de gravitation).

On introduit le vecteur accélération de la pesanteur $\vec{G}(\in \vec{E}_3)$. U_1 est définie à une constante près, par

$$U_1(X) = \iiint_{K_0} \langle \vec{G}, X(M_0) \rangle \rho_0(M_0)dv_0.$$

c) *Définition de U_2* ($-\ U_2$ est l'énergie élastique).

On donne une application Φ de $\mathcal{L}(\vec{E}_3, \vec{E}_3)$ dans R, caractérisant le milieu étudié. On définit U_2 par

$$U_2(X) = \iiint_{K_0} \Phi(X'(M_0)dv_0.$$

Rappelons par exemple que, pour les fluides parfaits, $\Phi(X'(M_0))$ ne dépend que du déterminant de $X'(M_0)$. Autrement dit,

$$\Phi(X'(M_0)) = f(\text{dét}\,(X'(M_0))),$$

où f désigne une fonction de classe C^2 sur R. La dérivée $f'(\text{dét}\,(X'(M_0)))$ est la pression du fluide en M.

Les équations classiques des milieux continus s'obtiennent en écrivant que l'application I de E dans R définie par l'équation

$$I(u) = \int_a^b [T(u(t), u'(t)) + U_1(u(t)) + U_2(u(t))]dt$$

est stationnaire pour des fonctions u données aux extrémités.

L'équation d'Euler-Lagrange traduisant la stationnarité de I s'écrit

$$\text{(I-1)} \quad \frac{d}{dt}[\partial_2 T(u(t), u'(t))] - \partial_1 T(u(t), u'(t)) - U_1'(u(t)) - U_2'(u(t)) = 0.$$

Nous avons supposé jusqu'à présent qu'aucune condition de liaison n'était imposée à u ou à X. Les deux membres de l'équation (I-1) sont des éléments de $\vec{F}' = \mathcal{L}(\vec{F}, R)$.

Nous ne voulons pas aborder ici l'étude générale des liaisons en mécanique des milieux continus. Notons toutefois qu'il existe un cas particulièrement simple : c'est le cas où l'application X est astreinte à vérifier l'équation

$$X(M_0) = M_0$$

quel que soit M_0 appartenant au bord ∂K_0 de K_0. Dans ce cas en effet, il suffit de considérer X comme un élément du sous-espace affine F_1 de F constitué par les applications de K_0 dans E_3, de classe C^1 sur K_0, se réduisant à l'application identique sur le bord de K_0. L'espace vectoriel associé $\vec{F}_1$ est constitué par l'ensemble des applications de $\vec{K}_0$ dans E_3, de classe C^1, nulles sur ∂K_0. Dans ce cas, l'équation du mouvement est encore (I-1), mais les deux membres sont des éléments de $\vec{F}_1' = \mathcal{L}(\vec{F}_1, R)$.

A titre d'exemple, donnons la forme explicite de (I-1) pour un fluide parfait. Partant des expressions de T, U_1, U_2 données plus haut, un calcul simple conduit à

$$\left\{ h \to \iiint_{K_0} [\langle u''(t)(M_0) - \vec{G}\ , h(M_0) \rangle \rho_0(M_0) - f'(\alpha)\ \mathrm{Tr}\,(A^{-1}h'(M_0)\alpha)]dv_0 \right\} = 0$$

où on a posé

$$A = X'(M_0)$$
$$\alpha = \text{dét}\,(A)$$

et où Tr désigne la trace; h désigne un vecteur de $\vec{F}$ dans le problème libre, un vecteur de $\vec{F}_1$ dans le problème lié considéré ci-dessus.

On retrouve les équations classiques en transformant l'intégrale sur K_0 en une intégrale sur K. Il vient

$$\iiint_K [\langle u''(t)(X^{-1}(M)) - \vec{G}, [h.X^{-1}](M) \rangle \rho(M) \\ - f'(\alpha) \operatorname{div} ([h.X^{-1}](M)]dv = 0$$

$\forall h \in \vec{F}$ (resp. à $\vec{F}_1$), ou encore, en désignant par N la normale orientée au point M du bord ∂K,

$$\iiint_K \Big[\langle (u''(t)(X^{-1}(M) - \vec{G})\rho(M) - \frac{\partial}{\partial M} [f'(\alpha)], [h.X^{-1}](M) \rangle dv \\ - \iiint_{\partial K} \langle f'(\alpha)[h.X^{-1}\Big](M), N \rangle dv = 0$$

$\forall h \in \vec{F}$ (resp. à $\vec{F}_1$).

Dans le problème lié, l'intégrale sur le bord est nulle. Écrivant que l'intégrale sur K est nulle quel que soit h dans $\vec{F}_1$, on obtient

$$[u''(t)(X^{-1}(M)) - \vec{G}]\rho(M) - \frac{\partial}{\partial M} [f'(\alpha)] = 0,$$

qui est l'équation classique où $p = f'(\alpha)$ et $\Gamma = u''(t)(X^{-1}(M))$.

Dans le problème sans liaison, il faut ajouter la condition $f'(\alpha) = 0$ sur le bord de K.

II. — LE PRINCIPE DE MAUPERTUIS

A. — Le principe de Maupertuis dans les espaces de Banach.

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien L satisfaisant aux hypothèses suivantes : L est la somme de deux termes

$$L(t, u(t), u'(t)) = T(u(t), u'(t)) + U(u(t)).$$

T désigne une fonction réelle, définie sur le produit $\Omega_1 \times \vec{F}$, où Ω_1 désigne un ouvert de F. L'application $X \to T(X, Y)$ est supposée être de classe C^1

sur Ω_1. L'application $Y \to T(X, Y)$ est supposée être bilinéaire et continue, et $T(X, Y)$ est supposé strictement positif pour tout Y non nul.

U désigne une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur Ω_1.

Notons que le principe variationnel à la base des équations de la mécanique des milieux continus est de ce type.

1. L'intégrale de l'énergie.

Nous poserons pour simplifier l'écriture

$$X = u(t), \qquad Y = u'(t).$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\partial_1 T(X, Y) + U'(X) - \frac{d}{dt}[\partial_2 T(X, Y)] = 0.$$

On applique les deux membres de cette équation (qui sont des éléments de $\vec{F}'$) au vecteur Y. Il vient, après un calcul immédiat

$$\partial_1 T(X, Y)Y + \partial_2(X, Y)\frac{dY}{dt} + U'(X)Y - \frac{d}{dt}[\partial_2 T(X, Y)Y] = 0$$

Compte tenu de l'identité d'Euler des fonctions homogènes, qui s'écrit

$$\partial_2 T(X, Y)Y = 2T(X, Y),$$

on obtient, tous calculs faits

$$\frac{d}{dt}[U(X) - T(X, Y)] = 0,$$

ou, en désignant par C une constante réelle, appelée constante de l'énergie

$$T(X, Y) = U(X) + C.$$

2. Le principe de Maupertuis.

Énoncé du principe de Maupertuis : Soit u une extrémale régulière (c'est-à-dire telle que $u'(t) \neq 0\ \forall t \in [a, b]$) de

$$I(u) = \int_a^b [T(X, Y) + U(X)]dt.$$

C'est une géodésique de la variété riemannienne obtenue en munissant F de la métrique

$$ds^2 = (U(X) + C)T(X, dX), \tag{II-I}$$

où $C = T(X, Y) - U(X)$ est la constante de l'énergie pour le mouvement considéré.

Démonstration : La démonstration du principe de Maupertuis se fait, comme en dimension finie, en écrivant les deux équations d'Euler-Lagrange exprimant respectivement que I et J définie par

$$J(v) = \int_a^b \sqrt{U(v(\tau)) + C}\sqrt{T(v(\tau), v'(\tau))}d\tau$$

sont stationnaires. On fait dans la première de ces équations le changement de variable $t = \psi(s)$, où ψ^{-1} est définie, à une constante additive près, par

$$s = \psi^{-1}(t) = \int [U(u(t)) + C]dt$$

et dans la seconde le changement de variable $\tau = \varphi(s)$, où φ est définie, à une constante additive près, par

$$s = \varphi(\tau) = \int \sqrt{U(v(\tau)) + C}\sqrt{T(v(\tau), v'(\tau))}d\tau.$$

On constate alors que les fonctions $v.\varphi^{-1}$ et $u.\psi$ satisfont à la même équation différentielle. L'équation commune, où

$$X = [v.\varphi^{-1}](s) = [u.\varphi](s)$$

et

$$\dot{X} = \frac{dX}{ds}$$

s'écrit

$$\text{(II-2)} \quad \frac{d}{ds}[(U(X)+C)\partial_2 T(X, \dot{X})] - T(X, \dot{X})U'(X) - (U(X)+C)\partial_1 T(X, \dot{X}) = 0.$$

Cette équation est l'équation des géodésiques de la variété riemannienne de métrique (II-1) lorsque le paramètre définissant la géodésique est l'abscisse curviligne. Elle se met sous une forme simple en introduisant les applications bilinéaires continues, symétriques $a(X)$ et $g(X)$ définies respectivement par

$$\frac{1}{2}a(X)(Y, Y) = T(X, Y)$$

$$g(X) = (U(X) + C)a(X).$$

(II-2) devient

$$\frac{d}{ds}[2g(X)(\dot{X}, h)] - g'(X)(h)(\dot{X}, \dot{X}) = 0 \qquad \forall h \in \vec{F}.$$

En effectuant la dérivation, on obtient

$$\text{(II-3)} \quad g(\mathrm{X})(\ddot{\mathrm{X}}, h) + \frac{1}{2}[g'(\mathrm{X})(\dot{\mathrm{X}})(\dot{\mathrm{X}}, h) + g'(\mathrm{X})(\dot{\mathrm{X}})(h, \dot{\mathrm{X}}) - g'(\mathrm{X})(h)(\dot{\mathrm{X}}, \dot{\mathrm{X}})] = 0$$

pour tout h de $\vec{\mathrm{F}}$.

B. — Dérivation covariante et tenseur de courbure dans les variétés de Banach.

1. Définition d'une connexion sur un espace fibré localement trivial.

Soit V une variété de classe C^{p+1}, $\Pi : \mathcal{E} \to V$ un espace fibré de classe C^{p+1} sur V, dont les fibres sont isomorphes à un espace de Banach fixe $\vec{\mathrm{E}}$, $\rho : T(V) \to V$ le fibré tangent de v, dont les fibres sont isomorphes à l'espace de Banach $\vec{\mathrm{F}}$. Nous introduirons également le fibré tangent de $\mathcal{E}$, soit $\lambda : T(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. $T(\mathcal{E})$ peut être considéré comme un espace fibré sur T(V), l'application canonique $T(\mathcal{E}) \to T(V)$ étant l'application linéaire tangente Π_* associée à Π.

Soit alors H l'application de $T(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} T(V)$ qui, à l'élément θ de $T(\mathcal{E})$ fait correspondre l'élément $(\lambda\theta, \Pi_*\theta)$ de $\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} T(V)$ — $\underset{(V)}{\times}$ désigne le produit de deux espaces fibrés sur V —, et I l'injection de $\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} \mathcal{E}$ dans $T(\mathcal{E})$. Notons que la suite

$$0 \to \mathcal{E} \times \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{I}} T(\mathcal{E}) \xrightarrow{\mathrm{H}} \mathcal{E} \times T(V) \to 0$$

où l'on considère les trois espaces comme fibrés sur $\mathcal{E}$ est exacte.

Définition : On appelle connexion sur Π (ou sur $\mathcal{E}$) une application K de $\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} T(V)$ dans $T(\mathcal{E})$ satisfaisant aux deux conditions

1) $H.K = 1_{\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} T(V)}$

2) K est un C^p-morphisme de fibré bivectoriel sur $\mathcal{E}$ et sur T(V). Dans le cas trivial où V est un ouvert d'un espace affine F, où $T(V) = V \times \vec{\mathrm{F}}$ et $\mathcal{E} = V \times \vec{\mathrm{E}}$, on a

$$\mathcal{E} \underset{(V)}{\times} T(V) = V \times \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{F}} \quad , \quad T(\mathcal{E}) = V \times \vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{F}} \times \vec{\mathrm{E}}.$$

L'application H fait correspondre à l'élément $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $T(\mathcal{E})$ l'élément (α, β, γ) de $V \times \vec{E} \times \vec{F}$. On vérifie alors que toute connexion K est définie par une équation de la forme

$$K(x, s, v) = (x, s, v - \Gamma(x)(s, v))$$

où $\Gamma(x)$ est une application bilinéaire continue de $\vec{E} \times \vec{F}$ dans $\vec{E}$, et où Γ est de classe C^p.

Notons aussi que dans ce cas on a

$$I(x, \beta, \delta) = (x, \beta, o, \delta).$$

2. Dérivation covariante d'une section locale de $\mathcal{E}$.

Soit s une section locale de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une application de V dans $\mathcal{E}$ telle que $\Pi . s = 1_V$. Soit s_* l'application linéaire tangente correspondante, et (x, v) un point de T(V). L'identité

$$Hs_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)) = 0$$

montre que $s_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)) = 0$ appartient au noyau de H, donc à l'image de I. Il existe par suite un élément et un seul η de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ tel que

$$I(\eta) = s_*(x, v) - K((x, s(x)), (x, v)).$$

Dans le cas trivial, on a

$$I(\eta) = (x, s(x), 0, s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v)),$$

donc

$$\eta = (x, s(x), s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v)).$$

η est la dérivée covariante au point x de la section s. Nous noterons

$$\nabla s(x)(v) = s'(x)v + \Gamma(x)(s(x), v),$$

ou encore

(II-4) $$\nabla s_x(v) = s'_x v + \Gamma_x(s_x, v).$$

3. Dérivation covariante des sections locales de $\mathcal{E}'$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$...

On prolonge la définition de l'opérateur ∇ aux sections locales de $\mathcal{E}'$, $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, etc. de façon que les règles de dérivation dans les espaces normés soient vérifiées. De façon plus précise, on écrira, pour tout $x \in V$:

a) si $f(x) \in \mathbb{R}$

(II-5) $$\nabla f(x) = f'(x);$$

b) si $\omega(x) = \omega_x \in \mathcal{E}'_x$, fibre de $\mathcal{E}'$ en x,

$$\nabla(\omega_x s_x)h_x = [\nabla\omega_x . h_x]s_x + \omega_x . [\nabla s_x . h_x]$$

$\forall s_x \in \mathcal{E}_x$, $h_x \in T_x(V)$, ($\mathcal{E}_x$ et $T_x(V)$ désignent respectivement les fibres en x de $\mathcal{E}$ et $T(V)$).

On tire de cette équation, compte tenu de (II-4) et de (II-5)

$$\nabla\omega_x(h_x, s_x) = \omega'_x(h_x, s_x) - \omega_x(\Gamma_x(s_x, h_x)).$$

c) La même technique permet d'obtenir l'expression de la dérivée covariante d'une section A de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Sous-entendant systématiquement l'indice x, on obtient

$$\nabla A(h, s) = A'(h, s) + \Gamma(As, h) - A(\Gamma(s, h))$$
$$\forall h \in T_x(V),\ s \in \mathcal{E}_x.$$

Enfin la dérivée covariante d'une section g_x de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}; \mathbb{R})$ est donnée par l'équation

$$\nabla g_x(h)(s_1, s_2) = g'_x(h)(s_1, s_2) - g_x(\Gamma(s_1, h), s_2) - g_x(s_1, \Gamma(s_2, h))$$
$$\forall h \in T_x(V),\ s_1 \text{ et } s_2 \in \mathcal{E}_x.$$

4. Courbure et torsion d'une connexion linéaire.

Les connexions linéaires sur la variété V s'obtiennent en prenant $\mathcal{E} = T(V)$. Notons que si V est de classe C^n, Γ est de classe C^{n-2}. L'application K est alors définie sur $T(V) \times T(V)$. La partie antisymétrique de K, définie par

$$sk(K)(h, k) = K(h, k) - K(k, h), \quad h, k \in T(V),$$

appartient au noyau de H. Il existe donc un élément $\theta(h, k)$ et un seul dans $T(V) \times T(V)$ tel que

$$I(\theta(h, k)) = Sk(K)(h, k).$$

θ est la *torsion* de la connexion considérée. Dans le cas trivial, on a

$$\theta(h, k) = \Gamma(h, k) - \Gamma(k, h).$$

La courbure s'obtient, comme en dimension finie, par antisymétrisation de la dérivée covariante seconde. On obtient, dans le cas trivial

$$R(h, k, l) = \Gamma'(k)(h, l) - \Gamma'(l)(h, k) + \Gamma(\Gamma(h, l), k) - \Gamma(\Gamma(h, k), l).$$

5. Variétés hilbertiennes.

Nous dirons que la variété V de classe C^p est hilbertienne si on donne une application g de T(V) dans T'(V) qui soit un isomorphisme d'espaces fibrés : $g(x) = g_x$ est une application linéaire, continue, inversible, de $T_x(V)$ sur $T'_x(V)$, que nous identifierons d'ailleurs canoniquement avec une application, également notée g_x bilinéaire, continue, symétrique de $T_x(V) \times T_x(V)$ dans $\mathbb{R}$. L'application $x \to g_x$ est de classe C^{p-1}.

On démontre très simplement la proposition suivante :

Proposition : Il existe une connexion linéaire et une seule possédant les deux propriétés

a) La torsion associée à cette connexion est nulle (donc Γ est symétrique).

b) La dérivée covariante de g associée à cette connexion est nulle.

Dans le cas trivial, cette connexion est définie par

$$\Gamma(h, k) = \frac{1}{2}\,[g_x]^{-1}[g'_x(h)k + g'_x(k)h - S(g'_x)(h, k)]$$

où $S(g'_x)$ est défini par

$$S(g'_x)(h, k)(v) = g'_x(v)(h, k) \qquad \forall h, k, v \in T_x(V).$$

On l'appellera connexion hilbertienne sur V.

La courbure R est alors donnée, en fonction de g, par l'équation suivante où g est mis systématiquement à la place de g_x :

$$\text{(II-6)}\quad \begin{aligned} g(R(h_1, h_2, h_3), h_4) = {} & \frac{1}{2}\, g''(h_1, h_2)(h_3, h_4) + \frac{1}{2} g''(h_3, h_4)(h_1, h_2) \\ & - \frac{1}{2}\, g''(h_1, h_3)(h_2, h_4) - \frac{1}{2} g''(h_2, h_4)(h_1, h_3) \\ & + g(\Gamma(h_1, h_2), \Gamma(h_3, h_4)) - g(\Gamma(h_1, h_3), \Gamma(h_2, h_4)), \\ & \forall h_1, h_2, h_3, h_4 \in T_x(V). \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie des applications g, g'' et Γ, on voit que

a) l'application $(h_2, h_3) \to g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est antisymétrique (cette antisymétrie vient de la définition de R),

b) l'application $(h_1, h_4) \to g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est antisymétrique,

c) l'application $((h_1, h_2), (h_3, h_4)) \to g(R(h_1, h_2, h_3), h_4)$ est symétrique.

6. Équation des géodésiques de la variété hilbertienne définie par g.

L'équation différentielle des géodésiques de la variété hilbertienne définie par g (nous dirons aussi pour une raison évidente la variété hilbertienne de métrique g) a été obtenue à la fin du paragraphe A. Elle s'écrit

$$g(\ddot{X})(h) + g(\Gamma(\dot{X}, \dot{X}))(h) = 0 \qquad \forall h \in T_x(V),$$

ou encore, puisque g est supposé inversible.

$$\ddot{X} + \Gamma(\dot{X}, \dot{X}) = 0. \tag{II-7}$$

C. — Stabilité infinitésimale des mouvements à énergie constante.

Soit $s \to X$ une solution de (II-7). Nous dirons que cette solution est stable (au point de vue infinitésimal) si toutes les solutions de l'équation aux variations associées à la solution particulière $s \to X$ de (II-7) sont bornées.

Théorème de Synge : Soit F un espace affine banachique muni d'une structure de variété hilbertienne V par la donnée d'une métrique g à laquelle correspond la courbure R. Soit (II-7) l'équation différentielle des géodésiques de cette variété, le paramètre étant l'abscisse curviligne. Soit enfin $s \to X = f(s)$ une des solutions de (II-7) définissant une géodésique (C). Si, en tout point X de (C), on a

$$g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h) \geqslant 0$$

quel que soit h dans F, alors la solution f est instable.

Démonstration : L'équation aux variations associée à (II-7) s'écrit

$$\ddot{\xi} + \Gamma'(\xi)(\dot{X}, \dot{X}) + 2\Gamma(\dot{\xi}, X) = 0 \tag{II-8}$$

où

$$\dot{\xi} = \frac{d}{ds} \quad , \quad \ddot{\xi} = \frac{d\dot{\xi}}{ds}.$$

Nous transformerons cette équation en introduisant la dérivée covariante de ξ le long de la courbe (C).

Définition : Soit $X \to \xi$ un champ de vecteurs défini sur un voisinage d'une courbe (C), de classe C^1 sur ce voisinage. La dérivée covariante de ξ en $X \in (C)$ prise suivant le vecteur tangent $\dot{X}$ est

$$\nabla \xi(\dot{X}) = \xi'(\dot{X}) + \Gamma(\xi, \dot{X})$$

ou

$$\nabla \xi(\dot{X}) = \frac{d\xi}{ds} + \Gamma(\xi, \dot{X}).$$

Le deuxième membre de cette équation a encore un sens si $X \to \xi$ est un champ de vecteurs défini sur (C). Nous l'appellerons dérivée covariante du champ de vecteurs $X \to \xi$ sur (C) et noterons

$$\nabla_C \xi = \frac{d\xi}{ds} + \Gamma(\xi, \dot{X}).$$

$X \to \nabla_C \xi$ est encore un champ de vecteurs sur (C). Si (C) et ξ sont de classe C^2, on peut itérer l'opération. On obtient

$$\text{(II-9)} \quad \nabla_C{}^2 \xi = \frac{d^2\xi}{ds^2} + \Gamma'(\dot{X})(\xi, \dot{X}) + 2\Gamma\left(\frac{d\xi}{ds}, \dot{X}\right) + \Gamma(\xi, \ddot{X}) + \Gamma(\Gamma(\xi, \dot{X}), \dot{X}).$$

L'élimination de $\xi = \dfrac{d^2\xi}{ds^2}$ entre (II-8) et (II-9) conduit à l'équation

$$\text{(II-10)} \qquad \nabla_C{}^2 \xi + R(\dot{X}, \xi, \dot{X}) = 0.$$

Pour achever la démonstration du théorème de Synge, nous nous introduirons la norme du vecteur ξ considéré comme vecteur tangent au point X de la variété V, soit

$$\| \xi \|_V = [g(\xi, \xi)]^{1/2},$$

et le champ de vecteurs unitaires au sens de la norme sur V

$$X \to \eta = \xi / \| \xi \|_V.$$

On a évidemment

$$g(\eta, \eta) = 1,$$

équation qui donne par dérivations le long de (C)

$$g(\nabla_C \eta, \eta) = 0 \quad , \quad g(\nabla_C{}^2 \eta, \eta) = - \| \nabla_C \eta \|_V^2.$$

De

$$\xi = \eta \, \| \xi \|_V,$$

on déduit

$$\nabla_C \xi = \frac{d}{ds}(\| \xi \|_V)\eta + \| \xi \|_V \nabla_C \eta,$$

puis

$$\nabla_C{}^2 \xi = \frac{d^2}{ds^2}[\| \xi \|_V]\eta + 2\frac{d}{ds}[\| \xi \|_V]\nabla_C \eta + \| \xi \|_V \nabla_C{}^2 \eta.$$

Cette équation entraîne

$$g(\nabla_C{}^2 \xi, \eta) = \frac{d^2}{ds^2}[\| \xi \|_V] - \| \xi \|_V \| \nabla_C \eta \|_V^2,$$

qui s'écrit en utilisant (II-10)

$$\frac{d^2}{ds^2}[\| \xi \|_V] = \| \xi \|_V [\| \nabla_C \eta \|_V^2 + g(R(\dot{X}, \dot{X}, \eta), \eta)].$$

Le théorème de Synge s'en déduit immédiatement.

D. — Expression de la condition d'instabilité de Synge pour un milieu continu.

Les notations sont celles du paragraphe A. Nous écrirons toutefois U(X) au lieu de U(X) + C (C est supposé fixé), et remarquerons que, pour un milieu continu, T est fonction de X′ seul. On a donc

$$T(X, Y) = a(Y, Y)$$
$$g(X) = U(X)a.$$

Comme plus haut, nous écrirons systématiquement U, U′, U″, g, g', g'', au lieu de U(X), U′(X), U″(X), g(X), g'(X), g''(X). L'équation (II-6) devient ici

$$\begin{aligned} g(R(h_1, h_2, h_3), h_4) = {} & \frac{1}{2} U''(h_1, h_2)a(h_3, h_4) + \frac{1}{2} U''(h_3, h_4)a(h_1, h_2) \\ & - \frac{1}{2} U''(h_1, h_3)a(h_2, h_4) - \frac{1}{2} U''(h_2, h_4)a(h_1, h_3) \\ & + \frac{1}{2} U'(\Gamma(h_2, h_4))a(h_1, h_3) - \frac{1}{2} U'(\Gamma(h_1, h_2))a(h_3, h_4) \\ & + \frac{1}{4U}[3U'(h_1)U'(h_3)a(h_2, h_4) - 3U'(h_3)U'(h_4)a(h_1, h_2) \\ & + U'(h_2)U'(h_4)a(h_1, h_3) - U'(h_1)U'(h_2)a(h_3, h_4)]. \end{aligned}$$

Remarquons que, en raison des symétries et antisymétries de $g(R(h_1, h_2, h_3)h)$, il suffit, pour étudier le signe de la forme quadratique $h \to g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h)$, de se limiter à des vecteurs h orthogonaux à $\dot{X}$ au sens de la métrique g, donc tels que

$$a(\dot{X}, h) = 0.$$

Supposant cette condition réalisée, on obtient

$$g(R(\dot{X}, \dot{X}, h), h) = \frac{1}{2} U''(\dot{X}, \dot{X})a(h, h) + \frac{1}{2} U''(h, h)a(\dot{X}, \dot{X}) + \frac{1}{4U} [-(U'(\dot{X}))^2 a(h, h) - 3[U'(h)]^2 a(\dot{X}, \dot{X})] - \frac{1}{2} U'(\Gamma(\dot{X}, \dot{X}))a(h, h).$$

Mais X est solution de l'équation différentielle (II-7) et, puisque l'abscisse curviligne est le paramètre définissant la courbe (C), on a

$$g(\dot{X}, \dot{X}) = 1.$$

D'autre part $T(X, \dot{X}) = U(X)$ montre que U est strictement positif pour $\dot{X}$ différent de 0, ce que nous supposerons. En tenant compte de ces remarques, la condition d'instabilité de Synge s'écrit

$$UU''(h, h) - \frac{3}{2} (U'h)^2 + \left[U''(\dot{X}, \dot{X}) + U'\ddot{X} - \frac{(U'\dot{X})^2}{2U}\right] U^2 a(h, h) \geqslant 0$$

pour tout h orthogonal à $\dot{X}$ au sens de la métrique g.

Cette même condition, écrite en remplaçant $\dot{X}$ et $\ddot{X}$ par leurs expressions en fonction de $u'(t)$ et $u''(t)$ devient

$$\text{(II-11)} \qquad \frac{U''(h, h) - \frac{3}{2U} (U'h)^2}{a(h, h)} + \frac{U''(u'(t), u'(t)) - \frac{3}{2U} (U'(u'(t)))^2}{a(u'(t), u'(t))} + U'(u''(t)) \geqslant 0$$

ou encore, en introduisant $W = \dfrac{1}{\sqrt{U}}$,

$$\frac{W''(h, h)}{a(h, h)} + \frac{W''(u'(t), u'(t))}{a(u'(t), u'(t))} + W'(u''(t)) \geqslant 0.$$

Condition d'instabilité de Synge pour un fluide parfait en l'absence de pesanteur.

Avec les notations du paragraphe I, on a successivement

$$U_2'(X)h = \iiint_{K_0} f'(\alpha)\,\mathrm{Tr}\,(A^{-1}.h'(M_0))\alpha dv_0$$

$$U_2''(X)(h, h) = \iiint_{K_0} \{[\alpha f''(\alpha) + f'(\alpha)]\,[\mathrm{Tr}\,(A^{-1}.h'(M_0))]^2 - f'(\alpha)\,\mathrm{Tr}\,[(A^{-1}.h'(M_0)]^2)\}\,\alpha dv_0.$$

Il faut joindre à ces équations

$$a(h, h) = \iiint_{K_0} \langle h(M_0), h(M_0) \rangle \rho_0(M_0) dv_0,$$

et

$$U = U_2(X) + C,$$

où C désigne la constante de l'énergie du mouvement dont on étudie la stabilité.

Nous écrirons l'inégalité (II-11) dans le cas où le mouvement étudié est rectiligne et uniforme

$$M = M_0 + Vt$$

où V désigne un vecteur constant. On a ici

$$u'(t)(M_0) = V \quad , \quad u''(t)(M_0) = 0.$$

Donc

$$U(u(t)) = \frac{1}{2}\,a(u'(t) \quad , \quad u'(t)) = \frac{1}{2}\,m\,|\,V\,|^2.$$

$U'(u'(t))$ et $U''(u'(t), u'(t))$ sont nuls puisque $[u'(t)]'(M_0) = 0$. Enfin

$$X'(M_0) = 1_{E^3}$$

entraîne

$$\alpha = 1.$$

L'inégalité (II-11) se réduit ici à

$$m\,|\,V\,|^2 \iiint_{K_0} \{[f''(1) + f'(1)]\,[\mathrm{Tr}\,(h'(M_0))]^2 - f'(1)\,\mathrm{TR}\,(h'(M_0)^2)\}\,dv_0 \geqslant 0.$$

Cette condition entraîne

$$\begin{cases} f'(1) \leqslant 0 \\ f''(1) + f'(1) \geqslant 0. \end{cases}$$

III. — L'ÉQUATION D'HAMILTON-JACOBI

A. — Les équations canoniques.

Soit F un espace affine, $\vec{F}$ son espace vectoriel associé qui est supposé être un espace de Banach, $V = V_1 \times V_2$ un ouvert de $F \times \vec{F}$, I un intervalle réel, L une fonction réelle de classe C^2 sur $I \times V$.

Considérons l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}[\partial_3 L(t, X, X')] - \partial_2 L(t, X, X') = 0. \tag{III-1}$$

Nous introduisons la variable supplémentaire

$$p = \partial_3 L(t, X, X') \qquad (p \in \vec{F}'). \tag{III-2}$$

L'équation

$$z - \partial_3 L(t, X, Y) = 0,$$

où $(t, X, Y) \in I \times V$, définit implicitement Y en fonction de (t, X, z). Soit (t_0, X_0, Y_0) un point de $I \times V$, $z_0 = \partial_3 L(t_0, X_0, Y_0)$. *Supposons* $\partial_{33}L(t_0, X_0, Y_0)$ *inversible de* $\vec{F}$ *dans* $\vec{F}'$ (condition qui permettrait de munir $\vec{F}$ d'une structure d'espace hilbertien). Il existe alors un voisinage ouvert D de (t_0, X_0, z_0) dans $R \times F \times \vec{F}'$, un voisinage ouvert W de Y_0 dans $\vec{F}$ et un C^1-isomorphisme A de D sur W tel que

$$z - \partial_3 L(t, X, A(t, X, z)) = 0 \tag{III-3}$$

pour tout (t, X, z) de D. Nous supposerons, au besoin en nous limitant à une restriction de L, que A est définie sur $I \times V_1 \times \Omega$, où Ω désigne l'image de $I \times V$ par $\partial_3 L$.

Le système différentiel composé des équations (III-1) et (III-2) est alors équivalent au système

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A(t, X, p) \\[2mm] \dfrac{dp}{dt} = \partial_2 L(t, X, p). \end{cases} \tag{III-4}$$

On met le système (III-4) sous une forme plus symétrique en introduisant la fonction d'Hamilton H définie sur $I \times V_1 \times \Omega$ par l'équation

$$H(t, X, z) = zA(t, X, z) - L(t, X, A(t, X, z)). \tag{III-5}$$

Les dérivées partielles de H sont

$$\text{(III-6)} \qquad \begin{cases} \partial_1 H(t, X, z) = -\ \partial_1 L(t, X, A(t, X, z)) \\ \partial_2 H(t, X, z) = -\ \partial_2 L(t, X, A(t, X, z)) \\ \partial_3 H(t, X, z) = \cdot\ A(t, X, z)\ (= \{ h \to hA(t, X, z) \}), \end{cases}$$

ce qui prouve que H est de classe C^2. Le système (III-4) devient

$$\text{(III-7)} \qquad \begin{cases} \cdot \dfrac{dX}{dt} = \quad \partial_3 H(t, X, p) \\ \dfrac{dp}{dt} = -\ \partial_2 H(t, X, p). \end{cases}$$

Ces deux équations sont appelées équations canoniques ou système canonique.

B. — L'équation d'Hamilton-Jacobi.

1. Étude d'un problème de géométrie.

Soit S une fonction réelle, de classe C^2 sur $I \times V_1$, telle que

$$S'(t, X)\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X)Y$$

soit non nul sur $I \times V$. S définit une famille $\mathcal{F}$ de surfaces dépendant d'un paramètre σ par l'équation

$$S(t, X) = \sigma.$$

On considère la fonction réelle g définie sur $I \times V$ par l'équation

$$\text{(III-8)} \qquad g(t, X, Y) = \frac{L(t, X, Y)}{\partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X)}.$$

(t, X) étant supposé donné, nous cherchons les vecteurs Y rendant (III-8) stationnaire, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\partial_3 g(t, X, Y) = 0.$$

Cette équation s'écrit

$$\text{(III-9)} \qquad \partial_3 L(t, X, Y) - g(t, X, Y)S_2'(t, X) = 0.$$

Supposons que pour une certaine valeur (t_0, X_0) de (t, X), (III-9) admette une racine Y_0. Le théorème de la fonction implicite montre alors que sous l'hypothèse $\partial_{33}L(t_0, X_0, Y_0)$ inversible, il existe un C^1-isomorphisme f d'un voisinage ouvert D_1 de (t_0, X_0) sur un voisinage ouvert de Y_0 tel que

$$\text{(III-10)} \quad \partial_3 L(t, X, f(t, X)) - g(t, X, f(t, X))S_2'(t, X) = 0 \qquad \forall (t, X) \in D_1.$$

Nous supposerons dans la suite $D_1 = I \times V_1$, et associerons au champ de vecteurs f l'équation différentielle

$$\text{(III-11)} \qquad \frac{dX}{dt} = f(t, X).$$

Remarque : Le problème étudié plus haut est la généralisation du problème classique : étude des trajectoires orthogonales de la famille $\mathcal{F}$. La « norme » au point (t, X) serait donnée par

$$\| (\tau, Y) \| = | \tau | + L(t, X, Y) - 1.$$

Proposition : Toute courbe intégrale de (III-11) rencontre localement toute hypersurface de la famille $\mathcal{F}$ en un point et un seul.

Démonstration : Soit $m = (\tau, \xi)$ un point de $I \times V_1$, $X = \alpha(t, m)$ l'équation de la courbe intégrale maximale de (III-11) passant par m, σ un point du domaine de valeurs de S. Les valeurs de t correspondant aux points d'intersection de la courbe $X = \alpha(t, m)$ et de l'hypersurface $S(t, X) = \sigma$ sont les racines de l'équation

$$\text{(III-12)} \qquad S(t, \alpha(t, m)) - \sigma = 0.$$

En raison des hypothèses faites sur S et des propriétés de α, (III-12) définit implicitement t en fonction de m et de σ. On a donc localement

$$t = \Phi(m, \sigma),$$

Φ étant un C^1-isomorphisme d'un ouvert de $R \times F \times R$ sur un ouvert de R.

2. Cas où $g(t,X,f(t, X))$ est constant sur toute hypersurface de la famille $\mathcal{F}$.

Proposition 1 : Pour que $g(t, X, f(t, X))$ soit constant sur toute hypersurface de la famille $\mathcal{F}$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction réelle ψ telle que

$$\text{(III-13)} \qquad g(t, X, f(t, X)) = \psi(S(t, X)).$$

De plus ψ est de classe C^1.

Démonstration : La proposition est évidente.

Proposition 2 : Si la famille $\mathcal{F}$ d'hypersurfaces satisfait à la condition (III-13) et si $L(t, X, Y) \neq 0$ sur $I \times V$, il existe une définition $\bar{S}$ de la famille $\mathcal{F}$, C^2-équivalente à S, telle que, si on définit $\bar{g}$ par

$$\bar{g}(t, X, f) = \frac{L(t, X, Y)}{\bar{S}'(t, X)(l, Y)}$$

et si on désigne par $\bar{f}$ le champ de vecteurs associé à $\bar{S}$ par (III-10), on ait

$$\text{(III-14)} \qquad \bar{g}(t, X, \bar{f}(t, X)) = 1 \qquad \forall t, X, \sigma.$$

Démonstration : On cherche un C^2-isomorphisme φ tel que, si $\bar{S} = \varphi . S$, (III-14) soit vérifiée. Remarquant que $\bar{f} = f$ car ces deux fonctions satisfont à des équations (III-10) identiques et la solution de (III-10) est unique, on trouve immédiatement pour définir φ, l'équation différentielle

$$\varphi'(\sigma) = \psi(\sigma),$$

ce qui démontre la proposition 2.

Si la famille $\mathcal{F}$ est définie par $\bar{S}$, alors l'équation (III-8) devient

$$L(t, X, f(t, X)) = \partial_1\bar{S}(t, X) + \partial_2\bar{S}(t, X)f(t, X),$$

et l'équation (III-9)

$$\partial_3 L(t, X, f(t, X)) = \partial_2\bar{S}(t, X).$$

Introduisons la fonction d'Hamilton H. Les deux dernières équations deviennent respectivement

$$\partial_1\bar{S}(t, X) + H(t, X, \partial_2\bar{S}(t, X)) = 0$$
$$f(t, X) = A(t, X, \partial_2\bar{S}(t, X)).$$

Dans toute la suite de cet exposé, nous supprimerons la barre sur S et nous intéresserons à la famille $\mathcal{F}$ d'hypersurfaces définie par une fonction S satisfaisant à l'équation connue sous le nom d'*équation d'Hamilton-Jacobi*

$$\text{(III-15)} \qquad \partial_1 S(t, X) + H(t, X, \partial_2 S(t, X)) = 0.$$

A chaque solution S de (III-15) on associe l'équation différentielle (III-11) qui s'écrit ici

$$\text{(III-16)} \qquad \frac{dX}{dt} = A(t, X, \partial_2 S(t, X)).$$

Proposition 3 : $L(t, X, Y)$ est supposé non nul sur $I \times V$. Soit S une fonction de classe C^2 sur $I \times V_1$, telle que $S'(t, X)(1, Y)$ soit non nul sur $I \times V$. Soit (C) une courbe intégrale de l'équation (III-16), A_1 (resp. A_2) le point d'intersection de (C) avec l'hypersurface d'équation

$$S(t, X) = \sigma_1 (\text{resp. } S(t, X) = \sigma_2).$$

On considère l'intégrale, prise sur l'arc A_1A_2 de (C)

$$J = \int_{A_1A_2} L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) dt.$$

Pour que S soit solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, il faut et il suffit que

$$J = \sigma_1 - \sigma_2$$

quelle que soit la courbe intégrale (C), quels que soient σ_1 et σ_2.

Démonstration : La démonstration de cette proposition généralise trivialement la démonstration faite classiquement en dimension finie.

C. — Relation entre l'équation d'Hamilton-Jacobi et les équations canoniques.

Proposition 1 : Soit S une solution de classe C^2 de l'équation d'Hamilton-Jacobi et soit

$$\text{(III-17)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A(t, X, p) \\ p &= \partial_2 S(t, X) \end{aligned} \right.$$

l'équation différentielle associée à S. L'ensemble des solutions de (III-17) est contenu dans l'ensemble des solutions des équations canoniques.

Démonstration : La première équation canonique résulte de la première équation (III-17) et de la première équation (III-6). La seconde s'obtient en dérivant la deuxième équation (III-17) par rapport à t et en éliminant $\partial_{12}S$ entre l'équation obtenue et la dérivée par rapport à X de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Proposition 2 : Soit α (resp. β) une application d'un ouvert Ω_0 de $R \times F$ dans F (resp. dans $\vec{F}'$), de classe C^1, telle que $\partial_2\alpha(t, u)$ soit une application inversible de $\vec{F}$ dans $\vec{F}$. Soit alors φ l'application inverse de $u \to \alpha(t, u)$. Si α et β définissent une famille $\mathcal{F}_1$, dépendant du paramètre u, de solutions du système canonique, et si le champ de covecteurs $X \to \beta(t_0, \varphi(t_0, X))$ est une 1-forme fermée, alors il existe une solution S de l'équation d'Hamilton-Jacobi, de classe C^2, telle que $\mathcal{F}_1$ soit l'ensemble des solutions de (III-17).

Démonstration : Nous supposons que les équations

$$\text{(III-18)} \qquad \begin{cases} X = \alpha(t, u) \\ p = \beta(t, u) \end{cases}$$

définissent pour tout u une solution du système canonique (III-7). Tirant u de la première équation et portant dans la seconde, il vient

$$p = \beta(t, \varphi(t, X)).$$

La fonction S cherchée doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \partial_2 S(t, X) &= p && \text{(deuxième équation (III-17))} \\ \partial_1 S(t, X) &= -\ H(t, X, p) && \text{(équation d'Hamilton-Jacobi).} \end{aligned}$$

Autrement dit, la dérivée S′ de S doit satisfaire à

$$\text{(III-19)} \qquad S'(t, X) = [-\ H(t, X, \beta(t, \varphi(t, X))) \quad \beta(t, \varphi(t, X))]$$

D'après le théorème de Poincaré, pour qu'il existe une fonction S satisfaisant à (III-19), il faut et il suffit localement que la dérivée extérieure du deuxième membre soit nulle. Autrement dit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}[-\ H(t, X, \beta(t, \varphi(t, X)))] = \dfrac{\partial}{dt}[\beta(t, \varphi(t, X))] \\ \dfrac{\partial}{\partial X}[\beta(t, \varphi(t, X))](\xi)(\eta) = \dfrac{\partial}{\partial X}[\beta(t, \varphi(t, X))](\eta)(\xi) \end{cases}$$

quels que soient ξ et η dans $\vec{F}$.

Un calcul ne présentant aucune difficulté montre que, sous les hypothèses énoncées dans la proposition, ces deux conditions sont satisfaites. Il existe donc bien une fonction S satisfaisant à (III-19). Elle est de classe C^2 puisque S′ est par définition même de classe C^1. Le système différentiel associé à cette application, qui s'écrit en raison de la troisième identité (III-6)

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \partial_3 H(t, X, p) \\ p = \partial_2 S(t, X) \end{cases}$$

est alors vérifié identiquement, quel que soit u, par (III-18).

D. — La condition de Weierstrass.

Proposition : Soient $X = v_1(t)$, $p = v_2(t)$ une solution du système canonique, (C) la courbe $(t, v_1(t))$, A_1 et A_2 deux points de (C). Soit (Γ) une courbe de classe C^1 par morceaux joignant A_1 et A_2 et dont tous les points sont dans $I \times V_1$. Si, quel que soit (t, X, Y) dans $I \times V$, $\partial_{33}L(t, X, Y)$ est une forme quadratique positive, alors

$$\int_C L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right)dt \leqslant \int_\Gamma L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right)dt.$$

$\int_C \left(\text{resp. } \int_\Gamma\right)$ représente l'intégrale curviligne prise sur (C) (resp. (Γ)) entre les points A_1 et A_2.

Démonstration : La courbe (C) appartient certainement à une famille à un paramètre (III-18) satisfaisant aux conditions de la proposition 2. En effet, soit $X = \alpha(t, X_0, p_0)$, $p = \beta(t_0, X_0, p_0)$ la solution générale maximale du système canonique pour la condition initiale (X_0, p_0). Supposons $p_0 = v_2(t_0)$ fixé. La famille à un paramètre X_0

$$X = \alpha(t, X_0, v_2(t_0))$$
$$p = \beta(t, X_0, v_2(t_0))$$

contient (C) et satisfait aux conditions de la proposition 2 puisque, pour $t = t_0$, p prend la valeur $v_2(t_0)$ indépendant de X_0.

Soit donc S une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi telle que (C) soit une courbe intégrale de l'équation différentielle associée (III-16). On désigne par t_1 et X_1 (resp. t_2 et X_2) les composantes de A_1 (resp. A_2). On a, quelle que soit (Γ), et en particulier si (Γ) = (C),

$$J = \int_\Gamma dS(t, X) = S(t_2, X_2) - S(t_1, X_1).$$

Utilisant d'autre part

$$\frac{dS(t, X)}{dt} = \partial_1 S(t, X) + \partial_2 S(t, X)\frac{dX}{dt},$$

l'équation d'Hamilton-Jacobi et la définition (III-5) de H, il vient

$$J = \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) + \partial_3 L(t, X, Y)\left(\frac{dX}{dt} - Y\right)\right]dt,$$

où on a posé

$$Y = A(t, X, \partial_2 S(t, X)).$$

On en déduit

$$\int_C L(t, X, Y)dt = \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) + \partial_3 L(t, X, Y)\left(\frac{dX}{dt} - Y\right)\right]dt.$$

On a donc

$$\text{(III-20)} \quad \int_C L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right)dt - \int_\Gamma L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right)dt$$
$$= \int_\Gamma \left[L(t, X, Y) - L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) - \partial_3 L(t, X, T)\left(Y - \frac{dX}{dt}\right)\right]dt.$$

Par application de la formule de Taylor à la fonction $Y \to L(t, X, Y)$, on voit qu'il existe $\xi \in \left[\frac{dX}{dt}, Y\right]$ tel que

$$L(t, X, Y) - L\left(t, X, \frac{dX}{dt}\right) - \partial_3 L(t, X, Y)\left(Y - \frac{dX}{dt}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\partial_{33} L(t, X, \xi)\left(Y - \frac{dX}{dt}\right)^2.$$

Le deuxième membre de (III-20) est donc négatif par hypothèse. La proposition en résulte.

E. — Application à la mécanique des milieux continus.

Les notations sont celles du paragraphe I. On a

$$L(t, X, Y) = \frac{1}{2} a(Y, Y) + U(X).$$

On en déduit

$$p = a(Y) = \iiint_{K_0} \langle Y(M_0) \ , \ .(M_0) \rangle \rho_0(M_0) dv_0.$$

Soit a^{-1} l'application inverse de a. On a ici

$$A(t, X, p) \equiv a^{-1}(p).$$

L'équation

$$H(t, X, p) \equiv pa^{-1}(p) - L(t, X, a^{-1}(p))$$

donne après simplification

$$H(t, X, p) = \frac{1}{2} pa^{-1}(p) - U(X) = \frac{1}{2} a^{-1}(p, p) - U(X).$$

Les équations canoniques ont la forme très simple

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a^{-1}(p) \\ \dfrac{dp}{dt} = U'(X), \end{cases}$$

et l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_1 S(t, X) + \frac{1}{2} a^{-1}(\partial_2 S(t, X), \partial_2 S(t, X)) - U(X) = 0.$$

Enfin la condition de Weierstrass exprime que

$$I(u) = \int \cdots \int_{[t_1 t_2] \times K_0} \left[\frac{1}{2} \langle u'(t)(M_0), u'(t)(M_0) \rangle \rho_0(M_0) + \langle \vec{G}, u(t)(M_0) \rangle + \Phi(u(t)'(M_0)\right] dv_0$$

où I est définie sur l'ensemble des applications de $[t_1, t_2]$ dans F (resp. F_1), continues et continûment différentiables par morceaux sur $[t_1, t_2]$ est minimum au point $\tilde{u}$ correspondant au mouvement.

Notons aussi que les hypothèses faites dans le paragraphe I assurent l'unicité de la solution maximale des équations canoniques passant par un point (t_0, X_0, p_0) donné. Autrement dit, la donnée des applications $u(t_0)$ et $u'(t_0)$ (champ des positions et champ des vitesses à l'instant t_0) détermine le mouvement.

BIBLIOGRAPHIE

V. ARNOLD, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 5668-5671.
S. LANG, Introduction to differentiable manifolds.
A. LICHNEROWICZ, Éléments de calcul tensoriel.
A. D. MICHAL, Le calcul différentiel dans les espaces de Banach.
J. J. MOREAU, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 249, 1959, p. 2156-2159.
H. RUND, The Hamilton-Jacobi theory in the calculs of variations.
SYNGE, On the geometry of dynamics, *Trans. Roy. Soc. London*, 1926.

(Manuscrit reçu le 22 avril 1967).