ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-FRANÇOIS MÉLA

Suites lacunaires de Sidon, ensembles propres et points exceptionnels

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 533-538

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_533_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 533-538.

SUITES LACUNAIRES DE SIDON, ENSEMBLES PROPRES ET POINTS EXCEPTIONNELS

par Jean-François MÉLA

Introduction

Dans [2], les auteurs obtiennent certains résultats sur « l'abondance » des points exceptionnels pour la répartition modulo 2π d'une suite de Sidon réelle, dans les ensembles propres (§ 1) pour cette suite. (Ces résultats sont rappelés au § 3).

Notre objet est de montrer que l'on peut obtenir de plus, par la même méthode, des résultats sur « l'abondance » des points de divergence d'une série lacunaire dans les ensembles propres pour la suite spectrale; on obtient ainsi une caractérisation de ces ensembles plus stricte que celle obtenue dans [2]. (La condition de convergence uniforme est remplacée ici par une condition de convergence simple) (§ 4, prop. 2).

On trouvera dans [2] des critères et des exemples d'ensembles propres pour des suites lacunaires convenables (cf. aussi [1]).

1. Rappels et notations.

Soit G un groupe abélien compact; soit Γ son dual discret. Si $\lambda \in \Gamma$, $x \in G$, on notera (x, λ) la valeur du caractère λ au point x et l'on posera :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G (x, \lambda) f(x)\, dx \quad \text{pour toute } f \in L^1(G)$$

$$\hat{\mu}(\lambda) = \int_G (x, \lambda)\, d\mu(x)$$

pour toute mesure de Radon μ sur G.

Soit $\Lambda = \{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \Gamma$ un ensemble de Sidon dénombrable [3].

DÉFINITION. — *Un compact* $K \subset G$ *est dit propre pour* Λ [2], *s'il existe un entier* $\nu \geqslant 0$ *tel que pour l'ensemble des polynômes trigonométriques sur* G *de la forme:*

$$P(x) = \sum_{j \geqslant \nu} \hat{P}(-\lambda_j)\,(x, \lambda_j)$$

les normes suivantes sont équivalentes:

$$\|P\|_{K,\infty} = \sup_{x \in K}.\ |P(x)|,$$
$$\|P\|_{A} = \sum_{j \geqslant \nu} |\hat{P}(-\lambda_j)|.$$

(Pour la clarté des notations nous supposerons dans la suite que $\nu = 0$.)

Pour un compact K quelconque nous noterons :

$\mathcal{F}_K$ l'ensemble des suites $\{(x, \lambda_j)\}_{j \geqslant 0}$ pour lesquelles $x \in K$, $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des suites $\{\hat{\mu}(\lambda_j)\}_{j \geqslant 0}$ pour lesquelles μ est une mesure portée par K.

On a alors :

$$\mathcal{F}_K \subset \mathcal{M}_K \subseteq l^\infty(\Lambda).$$

On démontre par une méthode analogue à celle utilisée dans [3] (cf. [2]) la propriété :

$$K \text{ propre pour } \Lambda \Longleftrightarrow \mathcal{M}_K = l^\infty(\Lambda).$$

2.

Soit a_n une suite d'éléments de $l^1(\Lambda)$ ayant les propriétés :

(1) Si
$$a_n = \{a_n^j\}_{j \geqslant 0}$$
pour tout $j \geqslant 0$ $a_n^j \to 0$ $(n \to \infty)$.

(2) Si
$$\|a_n\|_{l^1} = \sum_{j \geqslant 0} |a_n^j|$$
il existe des constantes m et M telles que pour tout n :

$$m < \|a_n\|_{l^1} < M.$$

Nota. — Ceci revient à considérer une classe de procédés de sommation pour les suites de $l^\infty(\Lambda)$, de matrice (a_n^j), qui comprend notamment les procédés réguliers de Toeplitz (pour lesquels $\sum_j a_n^j = 1$).

Pour un compact K quelconque on a :

Lemme. — *Si a_n converge faiblement sur $\mathcal{F}_K$, alors a_n converge faiblement sur $\mathfrak{M}_K$.*

En effet supposons que :

$$\sum_{j\geqslant 0} a_n^j(x, \lambda_j) \quad \text{converge } (n \to \infty) \text{ pour tout } x \in \mathrm{K}.$$

Comme d'autre part

$$\Big|\sum_{j\geqslant 0} a_n^j(x, \lambda_j)\Big| \leqslant \Sigma|a_n^j| < \mathrm{M},$$

pour toute mesure μ portée par K :

$$\sum_{j\geqslant 0} a_n^j\hat{\mu}(\lambda_j) \quad \text{converge } (n \to \infty)$$

puisque

$$\sum_{j\geqslant 0} a_n^j\hat{\mu}(\lambda_j) = \int_G \Big(\sum_{j\geqslant 0} a_n^j(x, \lambda_j)\Big)\, d\mu(x).$$

Proposition 1. — *Si* K *est un compact propre pour* Λ, *le sous-ensemble de $\mathcal{F}_K$ sur lequel a_n ne converge pas faiblement est non dénombrable.*

En effet si a_n converge sur $\mathcal{F}_K$, sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable; à cause de (2) on peut en extraire, par le procédé diagonal, une sous-suite a_{n_k} qui converge faiblement sur $\mathcal{F}_K$, donc sur $\mathfrak{M}_K$ (lemme), donc sur $l^\infty(\Lambda)$ puisque K est propre. Alors a_{n_k} converge fortement dans $l^1(\Lambda)$ [4] ce qui est impossible car il résulte de (1) et (2) que, pour tout n_0 :

$$||a_n - a_{n_0}||_{l^1} \sim ||a_n||_{l^1} + ||a_{n_0}||_{l^1} > 2m.$$

3. Répartition modulo 2π des suites de Sidon. Points exceptionnels.

Dans le cas où les a_n^j sont les coefficients d'une matrice de sommation régulière de Toeplitz A, on a :

Corollaire 1. — *Si* K *est un compact propre, pour tout procédé régulier de sommation* A, *l'ensemble des points x de* K *pour lesquels $\{(x, \lambda_j)\}_{j\geqslant 0}$ n'est pas* A-*sommable est non dénombrable.*

Dans les cas :

$$G = T = R/2\pi Z; \qquad\qquad \Gamma = Z$$
$$G = \overline{R} \text{ compactifié de Bohr de } R; \quad \Gamma = R \text{ discret}$$

$\wedge$ est alors une suite d'entiers ou de réels.

Si $K \subset T$ ou $K \subset R \subset \overline{R}$ et $x \in K$ on a : $(x, \lambda) = \exp i\lambda x$.

Nous rappelons :

DÉFINITION. — *Si* A *est un procédé régulier de sommation, une suite réelle* $\{u_j\}$ *est dite* A*-répartie modulo* 2π *si* $\{\exp inu_j\}$ *est* A*-sommable pour tout* $n \in Z$.

$$\text{Si A a pour matrice :} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & 0 \ \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

on a la notion ordinaire de répartition.

Pour une suite $\wedge$ réelle, nous dirons que $x \in R$ est un *point exceptionnel* pour un procédé A si $\{\lambda_j x\}_{j\geqslant 0}$ n'est pas A-répartie. On sait, par exemple, que pour une suite croissante d'entiers tendant vers l'infini, l'ensemble des points exceptionnels pour la répartition ordinaire est de mesure nulle. Pour les suites lacunaires on a des résultats plus précis :

Dans le cas qui nous occupe, le corollaire I prend la forme :

COROLLAIRE 1'. — *Si* K *est un compact contenu dans* R, *propre pour une suite de Sidon réelle* $\wedge$, *alors, pour tout procédé régulier de sommation* A, *l'ensemble des points exceptionnels de* K *est non dénombrable.*

4. Ensembles propres et points de divergence.

Soit $\wedge$ une suite de Sidon quelconque. Considérons une série trigonométrique (S) :

$$\sum_{j\geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j), \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j| = \infty.$$

Soit A un procédé régulier de sommation de matrice (a_p^n) dont les lignes sont finies ($a_p^n = 0$ si $n > n(p)$).

Posons :

$$S_n = \sum_{j \leqslant n} \alpha_j(x, \lambda_j), \qquad \{T_p\} = A\{S_n\}.$$

On a :

$$T_p = \sum_{n \geqslant 0} a_p^n S_n,$$

$$T_p = \sum_{n \geqslant 0} a_p^n \sum_{j \leqslant n} \alpha_j(x, \lambda_j) = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j) \sum_{n \geqslant j} a_p^n$$

soit en posant :

$$R_p^j = \sum_{n \geqslant j} a_p^n, \qquad T_p = \sum_{j \geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j) R_p^j.$$

Si en un point $x \in G$ la série (S) est A-sommable, la suite $\{T_p\}$ est convergente en ce point. Alors il existe un procédé de sommation B ayant les propriétés (1) et (2) qui somme la suite $\{(x, \lambda_j)\}$ au point considéré. En effet il suffit de prendre :

$$B = (b_p^j) \qquad \text{avec} \qquad b_p^j = \alpha_j R_p^j / \sum_{j \geqslant 0} |\alpha_j||R_p^j|.$$

Alors, si

$$\{U_p\} = B\{(x, \lambda_j)\}, \qquad U_p = T_p / \sum_{j \geqslant 0} |\alpha_j||R_p^j|.$$

Or il est facile de voir que :

$$\sum_{j \geqslant 0} |\alpha_j||R_p^j| \to \infty \quad (p \to \infty)$$

car $\sum_{j \geqslant 0} |\alpha_j| = \infty$ et $R_p^j \to 1$ ($p \to \infty$; j fixé).

Ceci entraîne que les propriétés (1) et (2) sont vérifiées et que $\{U_p\}$ converge (vers 0).

Dans ces conditions on déduit de la proposition 1 :

Corollaire 2. — *Si* K *est un compact propre pour* Λ, *pour toute série* (S) : $\sum_{j \geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$ *avec* $\sum_{j \geqslant 0} |\alpha_j| = \infty$, *pour tout procédé régulier de sommation* A *à lignes finies, l'ensemble des points de* K *où* (S) *n'est pas* A-*sommable est non dénombrable.*

Or si K n'est pas propre pour Λ, il résulte de la définition qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques $\{P_n\}$ *à spectre dans* Λ avec :

$$||P_n||_A = 1, \qquad ||P_n||_{K,\infty} < \frac{1}{n^2}.$$

De plus on peut supposer les spectres des P_n disjoints.

Si
$$P_n(x) = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} \alpha_j(x, \lambda_j), \quad (k_{n-1} < k_n),$$

la série (S) : $\sum_{j\geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$ a ses sommes partielles de rang k_n partout convergentes ($n \to \infty$) sur K. Autrement dit, il existe un procédé régulier de sommation à lignes finies qui somme (S) en tout point de K alors que :

$$\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j| = \infty.$$

D'où une caractérisation des ensembles non propres :

Proposition 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* K *soit non propre pour* Λ *est qu'il existe une série* (S) : $\sum_{j\geqslant 0} \alpha_j(x, \lambda_j)$, *avec* $\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j| = \infty$, *et un procédé régulier de sommation à lignes finies* A *tel que* (S) *soit* A-*sommable sur* K.

Remarque. — Dans tout ce paragraphe on peut remplacer « A-sommable » par « A-bornée » comme on le voit aisément.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris 1963.

[2] H. Helson et J. P. Kahane, A Fourier method in diophantine problems, *J. d'Analyse Math.* d'Israël (à paraître).

[3] W. Rudin, Trigonometric series with gaps. *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 203-228.

[4] Dunford et Schwartz, *Linear Operators*.

Manuscrit reçu en Novembre 1964.

Jean-François Mela,
69, rue Galande,
Paris (5e),