ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVETTE AMICE

Un théorème de finitude

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n° 2 (1964), p. 527-531

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_527_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 527-531.

UN THÉORÈME DE FINITUDE

par Yvette AMICE

Étant donnés une suite strictement croissante d'entiers $S = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ et un intervalle J du tore $T = R/Z$, notons $\Theta(S, J)$ l'ensemble de type H associé à S et J :

$$\Theta(S, J) = \{\theta \in T | n \in S \Longrightarrow n\theta \in J\}.$$

Soit d'autre part pour $x > 0$, $\nu(x) = \text{Card}\ \{[0, x[\cap S\}$. P. Eymard [1] a montré qu'il existe une constante $a > 0$, indépendante de la suite S, telle que si $|J| \leqslant a$ ($|J|$ désigne la longueur de J) et si $\overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\nu(x)}{x} \neq 0$, $\Theta(S, J)$ est fini.

Soit $\overline{D}(S) = \lim_{h\to\infty} \left(\sup_x \frac{\nu(x+h) - \nu(x)}{h}\right)$ la *densité uniforme extérieure* de S $\left(\overline{D}(S) \geqslant \overline{\lim} \frac{\nu(x)}{x}\right)$. Le résultat de [1] peut être amélioré de la façon suivante (*) :

PROPOSITION 1. — *Soient* S *une suite croissante d'entiers telle que* $\overline{D}(S) \neq 0$, *et* $l < 1$. *Alors l'ensemble* Θ *des nombres* $\theta \in T$ *tels qu'il existe un intervalle* $J(\theta)$ *associé à* θ *et satisfaisant à* $|J(\theta)| \leqslant l$ *et* $\{n \in S \Longrightarrow n\theta \in J(\theta)\}$ *est fini.*

Il est clair que cette proposition équivaut à la suivante :

PROPOSITION 1 *bis.* — *Soient* Θ *une partie infinie de* J *et* $l < 1$. *A tout* $\theta \in \Theta$ *associons un intervalle* $J(\theta)$ *de longueur* $|J(\theta)| \leqslant l$. *Alors la suite* $S = \{n \in N | \theta \in \Theta \Longrightarrow n\theta \in J(\theta)\}$ *a une densité uniforme extérieure nulle.*

(*) J.-P. Kahane m'a communiqué une démonstration de la proposition 1 qui repose sur un tout autre principe, *cf* [2].

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \Theta$ et soit S_n la suite

$$S_n = \{k \in \mathbf{N} | k\theta_i \in J(\theta_i),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

La suite S_n possède une densité (ordinaire) d_n égale à sa densité uniforme extérieure : nous allons montrer que si Θ est infini on peut extraire une suite $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots$ telle que $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, ce qui démontrera la proposition.

a) Supposons que $(\theta_1, \ldots, \theta_n, 1)$ soient rationnellement indépendants; alors $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ engendre le tore T^n, et $d_n = \prod_{i=1}^{n} |J(\theta_i)| \leqslant l^n$. Donc la proposition (1 *bis*) est vraie pour un ensemble Θ contenant une infinité de nombres rationnellement indépendants avec 1.

b) Supposons que Θ contienne une infinité de rationnels θ_i, $\theta_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$.

La suite S_1 est réunion d'au plus $1 + [|J(\theta_1)|/q_1]$ progressions arithmétiques de raison q_1. Pour $k \geqslant 2$, soient m_k le plus petit commun multiple de $q_1, \ldots, q_k$ et $a_k = (m_{k-1}, q_k)$. Si S_{k-1} est réunion de r_{k-1} progressions arithmétiques de raison m_{k-1}, S_k est réunion d'au plus $(1 + [q_k/a_k|J(\theta_k)|])r_{k-1}$ progressions arithmétiques de raison m_k. Donc

$$d_k \leqslant d_{k-1}(|J(\theta_k)| + a_k/q_k).$$

Or on peut choisir θ_k de telle sorte que $a_k/q_k \leqslant \beta < 1 - l$: alors $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$, ce qui démontre la proposition dans le cas où Θ contient une infinité de rationnels.

c) Il reste à envisager le cas où Θ est réunion d'un nombre fini de rationnels et d'un ensemble Θ' constitué de r éléments $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ rationnellement indépendants de 1 et d'une infinité de nombres θ dépendant rationnellement de $\theta_1, \ldots, \theta_r$, 1. Pour $\theta \in \Theta'$, nous définissons le vecteur

$$M(\theta) = (m_0, m_1, \ldots, m_r, s) \in \mathbf{Z}^{r+2}$$

par les conditions

$$m_0\theta = m_1\theta_1 + \ldots + m_r\theta_r + s$$
$$m_0 \geqslant 1$$
$$n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} M(\theta) \notin \mathbf{Z}^{r+2}.$$

Remarquons que si $(m_0, m_1, \ldots, m_r)$ est fixé, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments θ distincts tels que

$$M(\theta) = (m_0, \ldots, m_r, r).$$

Donc il existe un indice $i \in [0, r]$ tel que $\overline{\lim_{\theta \in \Theta'}} |m_i(0)| = +\infty$. Pour $n \geqslant r$, soient $\theta_1, \ldots \theta_n$ n éléments distincts non rationnels de Θ'. Dans le tore T^n l'élément $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ engendre un sous-groupe connexe H de dimension r. Soient E le pavé $J(\theta_1) \times J(\theta_2) \times \cdots \times J(\theta_n)$ et χ_E la fonction caractéristique de E, la densité d_n de la suite S_n est

$$d_n = \int_E \chi_E(h)\, dh,$$

où dh désigne la mesure de Haar normalisée de H.

Pour majorer d_n nous allons utiliser un lemme nécessitant encore quelques notations.

Désignons par K un ensemble de n-r indices, $K \leqslant [1, n]$, et soit H_0 le sous-groupe de T^n :

$$H_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | i \notin K \Longrightarrow x_i = 0\}.$$

Posons

$$\lambda_{j,K}(H) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \notin K \\ 2 \operatorname*{Sup}_{x \in T^n} \left(\operatorname*{inf}_{x-h \in H_0,\, h \in H} |x_j - h_j| \right) & \text{si } j \in K. \end{cases}$$

LEMME. — *Avec les notations ci-dessus*

$$d_n \leqslant \prod_{j=1}^{n} (|J(\theta_j)| + \lambda_j).$$

Soit en effet $G_1 = \{x \in H_0 | -\lambda_j \leqslant 2x_j < \lambda_j, j \in K$. Alors tout $x \in T^n$ s'écrit de façon unique $x = h + g_1$ où $h \in H$ et $g_1 \in G_1$. G_1 s'identifie alors de façon évidente à un tore de dimension $n - r$ dont la mesure de Haar normalisée sera notée dg_1, et pour toute fonction $f(x)$ intégrable sur T^n on a

$$\int_{T^n} f(x)\, dx = \int_{G_1} dg_1 \int_H f(g_1 + h)\, dh.$$

Soit $E_1 = E + G_1$ le saturé de E par G_1 : $E_1 \supseteq E$ et on a

$$d_n \leqslant \int_H \chi_{E_1}(h)\, dh = \int_{T^n} \chi_{E_1}(x)\, dx.$$

Or E_1 est contenu dans un pavé de mesure $\prod_{j=1}^{n}(|J(\theta_j)| + \lambda_j)$, d'où le lemme.

Pour achever la démonstration il suffit de montrer qu'on peut extraire de Θ une suite θ_n telle que pour chaque n, et pour un ensemble d'indices K convenablement choisi, on ait

(1) $\lambda_j \leqslant \beta$, où β est donné, $0 < \beta < 1 - l$.

Nous envisageons deux cas.

1. — Si $\overline{\lim_{\theta\in\Theta'}} m_0(\theta) = +\infty$, choisissons pour tout entier $n \geqslant r$, $K = [r+1, n]$. Alors pour $j \in K$ on a $\lambda_i \leqslant \frac{1}{m_0(\theta_j)}$ donc on pourra satisfaire (1) pour une suite θ_j convenable.

2. — Si pour tout $\theta \in \Theta'$, $1 \leqslant m_0(\theta) \leqslant M$, alors il existe un indice $i \in [1, r]$ tel que $\overline{\lim_{\theta\in\Theta'}} |m_i(\theta)| = +\infty$. Soit $i = 1$. Choisissons alors, pour $n \geqslant r$, $K = \{1 \cup [r+1, n-1]$, et supposons, ce qui est loisible, que $m_1(\theta_j) \neq 0$ pour $j > r$. Alors $\lambda_1 \leqslant \frac{M}{|m_1(\theta_n)|}$ et $\lambda_j \leqslant M\left|\frac{m_1(\theta_j)}{m_1(\theta_n)}\right|$ pour $j \in [r+1, n-1]$. Donc en extrayant de Θ une suite telle que

$$|m_1(\theta_n)| \geqslant \frac{1}{\beta}|m_1(\theta_{n-1})|$$

la condition (1) sera satisfaite, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. — *Soit* S *une suite croissante d'entiers telle que* $\overline{D}(S) \neq 0$, *alors l'ensemble* Θ *des nombres* θ *pour lesquels il existe un intervalle* $J_\theta \neq T$ *satisfaisant à :* $n \in S \Rightarrow n\theta \in J_\theta$, *est dénombrable.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* $G = T_1 \times \cdots \times T_n \times \cdots$ *le tore produit d'une infinité dénombrable de copies de* T. Soit H *un sous-groupe connexe de* G *de dimension finie satisfaisant aux conditions.*

(i) *La projection naturelle de* H *dans* T_n *est surjective.*

(ii) *Pour* $n \neq k$, *l'image de* H *par la projection naturelle dans* $T_n \times T_k$ *n'est pas la diagonale de* $T_n \times T_k$.

Soient E *un pavé de* G *se projetant sur* T_n *suivant un intervalle* J_n *de longueur* $|J_n| \leqslant l < 1$ *pour tout* $n \geqslant 1$, χ_E *la fonction caractéristique de* E *et dh la mesure de Haar normalisée de* H, *alors*

$$\int_H \chi_E(h)\, dh = 0.$$

En effet les hypothèses faites sur H signifient que H possède un générateur $\alpha = (\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots)$ tel que $\theta_i \neq \theta_j$ pour $i \neq j$, $\theta_i \notin Q$, et $\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots\}$ contient au plus r éléments rationnellement indépendants de 1, r étant la dimension de H.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Eymard, Sur les applications qui laissent stable l'ensemble des fonctions presque périodiques, *Bull. Soc. Math.*, F, t. 89, 1961, 2, p. 207-222, II : Un lemme de finitude.

[2] J. P. Kahane, Sur les mauvaises distributions modulo I, *Ann. Inst. Fourier*, 14, 2 (1964), pp. 519-526.

Manuscrit reçu en aout 1964.

Mme Yvette Amice,
Service de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Route de Chauvigny,
Poitiers (Vienne).