ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

B. D'ORGEVAL

La représentation des plans multiples et le nombre maximum de points doubles d'une surface algébrique

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 165-171

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__165_0>

LA REPRÉSENTATION DES PLANS MULTIPLES ET LE NOMBRE MAXIMUM DE POINTS DOUBLES D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par **Bernard d'ORGEVAL** (Grenoble).

Dans une récente conférence, M. E. Togliatti (1) attirait l'attention sur le difficile problème du nombre maximum de points doubles coniques isolés d'une surface algébrique d'ordre n, dénuée d'autres singularités, dans l'espace ordinaire. Après avoir rappelé l'échec de la méthode de M. Lefschetz (2), pour améliorer le nombre donné par Basset (3), échec démontré par l'étude approfondie des courbes de diramation d'un plan multiple par B. Segre (4), et indiqué la nouvelle méthode basée sur les modules introduite par M. Severi (5) et dont de récents exemples dus encore à M. Segre (6) montrent au moins le caractère restreint, il souhaitait que l'on construisit de nouveaux exemples de surfaces dotées d'un grand nombre de points doubles.

La liaison du problème à la nature de la courbe de diramation du plan n-ple représentatif de la surface m'a conduit à penser que l'étude des formes dégénérées de ces courbes de diramation selon les vues

(1) E. Togliatti. Sulle superficie algebriche col massimo numero di punti doppi. R. C. Sem. Mat. Torino, T. IX, 1950, p. 47-59.

(2) S. Lefschetz. On the existence of loci with given singularities; Trans. Am. Math. Soc., T. XIV, 1913, p. 23-41.

(3) A. B. Basset. The maximum number of double points on a surface. Nature LXXIII, 1906, p. 246.— On the singularities of surfaces, Quart. Jour. XXXVIII, 1907, p. 63-83.

(4) B. Segre; Sulla caratterisazione delle curve di diramazione dei piasni multipli generali, Mem R. Ac. Italia, I, 1930; Mem, 4, p. 1-31.

(5) F. Severi. Sul massimo numero di nodi di una superficie di dato ordine dello spazio ordinario. Ann. d. Mat. (4), T. XXV, 1946, p. 1-41.

(6) B. Segre. Sul massimo numero di nodi delle superficie di dato ordine, Bol. U. M. I. (3), II, 1947, p. 204-212.

de M. Chisini (7) pouvait projeter quelque lueur sur ce difficile problème. La méthode que je propose permet de trouver un nombre maximum de points doubles pour le plan multiple limite, malheureusement, ce maximum ne correspond peut-être pas à un maximum de points doubles proprement dits, isolés. En effet, notre construction à la limite assure seulement l'existence d'une surface sur laquelle les singularités équivalent à un certain nombre de points doubles, sans que l'on puisse assurer que ces singularités puissent effectivement se résoudre en autant de points doubles isolés. Ce nombre est d'autre part lié au nombre maximum de points doubles que l'on puisse imposer au plan double représentatif d'une surface d'ordre n dotée seulement d'un point multiple d'ordre n-2. Ce nombre, pour les valeurs élevées de n semble assez difficile à obtenir du moins par une formule générale. En tout cas on peut obtenir un nombre tel qu'il existe sûrement des surfaces dont les singularités équivalent à, au moins, ce nombre de points doubles.

1. — Rappel de la construction de M. Chisini. Points doubles de la courbe limite.

La méthode de M. Chisini pour obtenir des courbes de diramation d'un plan multiple n-ple, $z^n = f(x, y)$, malgré certaines extensions ne se montre véritablement pratique que pour certaines surfaces dont celles que nous avons à traiter, les surfaces générales de l'espace S^3. Dans ce cas, la courbe limite peut se représenter par une courbe φ, constituée de $n - 1$, courbes C_i, d'ordres respectifs 1, 2, 3, ..., $n - 2$, $n - 1$, chacune comptée deux fois ; la courbe C_i assure le passage du feuillet i au feuillet $i + 1$, c'est-à-dire que sur cette courbe s'échangent les valeurs z_i et z_{i+1} de la fonction z. On appelle points P les points de rencontre de deux courbes consécutives C_i et C_{i+1}, et points Q les intersections de C_i et C_k ($i - k \neq 1$) non consécutives ; dans la courbe φ les C_i sont comptées deux fois en sorte qu'elles aient leurs diramations aux points P, s'il y a d'autres diramations, nous les supposerons choisies arbitrairement. Le passage du type dégénéré de Chisini à un type non dégénéré se fait par variation continue, conservant aux points considérés, l'équiva-

(7) O. Chisini. Un teorema d'esistenza dei piani multipli, R. C. Ac. Lincei (6), XIX, 1934, p. 688 et 766.

lence des intersections avec les polaires, c'est-à-dire que la courbe voisine non dégénérée possède trois cuspides et une tangente parallèle à Oy qui viendront se réunir en un point P et quatre points doubles qui tendront vers un point Q.

Notons qu'il est possible de remplacer une $(C_i)^2$ par une courbe d'ordre $2i$, tangente aux courbes consécutives partout où elle les rencontre, de tels points de contact étant à regarder comme des points P; en particulier nous remplacerons dans la suite, la $(C_{n-1})^2$ liant les derniers feuillets par une C_{2n-2}, tangente à la C_{n-2} précédente, en chacun de ses points de rencontre; ces points de contact sont des points P, au contraire les intersections de la C avec les autres C_i seront des points Q' limites de deux points doubles de la courbe non dégénérée.

Si la surface correspondant au plan multiple non dégénéré vient à acquérir des points doubles isolés, ceux-ci feront naître sur la courbe de diramation autant de points doubles indépendants de ceux qui vont converger aux points Q; dans le passage à la limite ces points doubles devront apparaître soit

a) comme points doubles R' de la C_{2n-2},

b) comme points doubles R d'une des C_i doubles,

c) comme points où coïncident deux diramations d'une C_i.

Dans ce dernier cas, on doit distinguer si les points de diramation qui viennent se réunir sont ou non des points P ; si ce ne sont pas des points P, le point sera limite d'un seul point double ; si le point est réunion de deux points P, c'est-à-dire correspond à la tangence de deux courbes consécutives, il y aura en ce point, limite de six cuspides et d'un point double, enfin si l'on a réunion d'un point P et d'une diramation arbitraire, il y aura en ce point limite de trois cuspides et d'un point double.

Le calcul du nombre maximum de points doubles que l'on puisse obtenir par ces constructions assure, par la simple application des résultats de M. Chisini, de l'existence d'une surface pour laquelle existent des singularités qui dans le passage à la limite équivalent à ce nombre maximum de points doubles. Mais il n'est pas exclu que sur cette surface certains de ces points doubles ne puissent effectivement être isolés les uns des autres.

Nous traiterons d'abord le cas des petites valeurs de n.

2. — Les surface d'ordre $n \leqslant 5$.

Pour la quadrique, la courbe limite est la

$$(C_1)^2.$$

Sur une droite, on ne peut avoir que deux diramations, leur coïncidence donne le cône et l'on a $N = 1$.

Pour la surface cubique, la courbe limite sera :

$$(C_1)^2 - C_4,$$

la C_1 étant bitangente à la quartique ; on peut imposer à la quartique trois points doubles et prendre la C_1 quadritangente, mais cette construction peut soulever de délicats problèmes de possibilité ; pour les éviter on réduira la C_4 à deux coniques tangentes à la C_1, d'où $N = 4$.

On ne peut aller jusqu'à la décomposition en quatre droites car on ne pourrait plus respecter les conditions de tangence de la quartique et de la droite.

Pour la surface du quatrième ordre, la courbe limite prend la forme

$$(C_1)^2 - (C_2)^2 - C_6,$$

la C_6 étant sextitangente à la conique précédente. On peut décomposer la sextique en six droites d'où quinze points doubles ; on peut ensuite choisir les deux points de diramation de C_1 confondus, la droite étant alors tangente à la conique, donc

$$N = 16.$$

Passons à la surface du cinquième ordre dont la courbe de diramation limite sera une :

$$(C_1)^2 - (C_2)^2 - (C_3)^2 - C_8,$$

la courbe du huitième ordre étant douze fois tangente à la cubique précédente. Décomposons cette courbe du huitième ordre en quatre coniques tritangentes à la cubique, ce qui donne 24 points doubles. On peut ensuite réunir les diramations de la droite en la faisant tangente à la conique puis les six autres diramations de cette conique en la prenant tritangente à la cubique. Pour aller plus loin, il faut pouvoir réunir les diramations de la cubique situées sur l'octique, pour cela il faudra prendre les quatre coniques, décomposition de la C_8 surosculatrices à la cubique et les répartir en deux couples de coniques tangentes entre elles en un point où elles seront également tangentes à la cubique ; le choix de telles coniques est effectivement possible, car si on considère en un point A de la cubique les coniques qui y sont tangentes, elles découpent sur la cubique une g_4^3 qui possède quatre points quadruples ; on peut donc choisir deux coniques tangentes en A et surosculatrices à la cubique.

Cette construction nous fournit une surface pour laquelle $N = 34$ nombre obtenu par Basset. Il est ici à noter qu'il est vraisemblable que ce type limite ne corresponde pas à une surface dotée effectivement de 34 points doubles isolés, puisqu'une construction analogue permettrait d'obtenir une surface cubique avec cinq points doubles qui n'existe pas effectivement.

Pourtant ce plan multiple étant un cas particulier de la surface du cinquième ordre dotée d'un point triple, on peut dire que, pour certaines particularités de la position des points doubles, cette surface équivaut à une surface avec 34 points doubles, question qui se trouvait posée par M. Togliatti.

3. — Le cas général.

Pour une surface générale d'ordre n la courbe limite prend la forme :

$$(C_1)^2 - (C_2)^2 - \cdots - (C_{n-2})^2 - C_{2n-2},$$

cette dernière courbe étant $(n-1)(n-2)$ fois tangente à la précédente.

Pour obtenir le nombre maximum de points doubles, on peut voir ce qui se passe si l'on fait naître un point double sur une des C_i ; on abaisse ainsi le genre de 1 et celui de la courbe double de 4, d'où résulte d'après la formule de Zeuthen abaissement de 4 pour le nombre des points de diramation que l'on peut imposer ; mais cette diminution ne peut être imposée à une C_i puisque les points P sont exactement $2i^2$. Le nombre maximum des points doubles possibles s'obtient donc facilement à partir de celui de la C_{2n-2}. Soit alors D' le nombre maximum de points doubles d'une F_n dotée seulement d'un point multiple d'ordre $n-2$, on peut en plus lui imposer la réunion des deux points de diramation de la droite, puis des trois situés sur la coniqne à des contacts avec la cubique... sur $C_{n-3}(n-3)(n-2)/2$ points de tangence avec la C_{n-2}, enfin sur cette dernière $\frac{(n-1)(n-2}{2}$ points d'osculation avec la C_{2n-2}, ces derniers étant peut-être soumis à des conditions de possibilité, si la C_{2n-2} vient à se décomposer. On a donc sûrement :

$$D_n \leqslant D'_n + 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

$$D_n \leqslant D'_n + \frac{(n^3 - 3n^2 + 2n)}{6}.$$

Dans le cas où la C_{2n-2} ne se décompose pas, les conditions autres que D'_n sont toutes possibles et l'on a alors $D'_n = (2n-3)(n-2)$.

On a donc certainement, pour l'équivalence en points doubles du maximum possible

$$D_n \geqslant \frac{n^3 + 9n^2 - 40n + 36}{6}.$$

Ce nombre est supérieur à celui de Severi basé sur le nombre des module dès que $n > 5$.

Il est à noter que les surfaces construites par B. Segre montrent que dans le cas général on peut trouver des décompositions de la courbe de diramation d'un plan double représentatif d'une surface d'ordre n dotée d'un point multiple d'ordre $n-2$.

Comparons nos résultats avec ceux de Basset, on peut alors dire que le nombre maximum des points doubles d'une surface d'ordre n est compris entre :

$n =$	6	7	8	9	10	11	12
limite inf.	56	90	134	189	256	336	430
limite sup.	61	114	181	270	383	525	691

Les valeurs de Severi correspondantes étaient :

52	80	116	161	216	282	360

Les deux surfaces de Segre rentrant dans ce tableau donnent

225	396

4. — Les surfaces d'ordre $2n$ avec une conique d'ordre n.

Notre méthode permet de traiter immédiatement le problème du nombre maximum des points doubles pour une surface d'ordre $2n$ dotée d'une conique multiple d'ordre n, c'est-à-dire pour la surface intersection dans S^4 d'une quadrique par une hypersurface générale d'ordre n. La forme limite de sa courbe de diramation ([8]) est en effet

$$(C_1)^2-(C_2)^2-\ldots(C_{n-2})^2-(C_{n-1})^2-(C_{n-2})^2-\ldots(C_2)^2-(C_1)^2.$$

En prenant comme précédemment la courbe médiane C_{n-1} comptée deux fois sous la forme d'une C_{2n-2} simple tangente aux deux C_{n-2} consécutives, on a immédiatement une limite du nombre des points doubles

$$\Delta \leqslant D'_n+\frac{n^3-3n^2+2n}{3}.$$

Si l'on suppose la C_{2n-2} non décomposée, on aura une limite inférieure de ce maximum, soit

$$L=\frac{n^3+3n^2-13n+18}{3}.$$

Ce nombre est donc tel qu'il puisse exister des hypersurfaces d'ordre n de S^4 tangentes en plus de L points à une quadrique de cet espace.

([8]) B. d'Orgeval Les plans multiples représentatifs d'une surface algébrique et la méthode de M. Chisini, Bul. Ac. R. Belg., T. XXIX, p. 215-229 (1943) et p. 653-666 (1945).

(Parvenu aux Annales en mars 1951.)