ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRIK THYS

Description topologique des représentations de $U_q(sl_2)$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 8, n° 4 (1999), p. 695-725

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1999_6_8_4_695_0>

© Université Paul Sabatier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. VIII, n° 4, 1999
pp. 695–725

Description topologique des représentations de $U_q(sl_2)$ (*)

HENRIK THYS (1)

RÉSUMÉ. — Nous construisons une équivalence de catégories rubanées entre une catégorie introduite par Turaev dont les morphismes sont engendrés par des diagrammes planaires et une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules de dimension finie sur $U_q(sl_2)$.

ABSTRACT. — We prove there is an equivalence of ribbon categories between a category introduced by Turaev whose morphisms are generated by planar diagrams and a full subcategory of the category of finite-dimensional modules over $U_q(sl_2)$.

Introduction

Dans cet article nous résolvons un problème soulevé par V. Turaev en montrant que la catégorie des représentations de sl_2 ou de son algèbre enveloppante quantique peut se décrire à l'aide de diagrammes planaires.

Le lien entre la théorie des groupes quantiques et la théorie des nœuds est maintenant bien établi. Rappelons que les groupes quantiques ont été introduits autour de 1983–85 par Drinfeld et Jimbo. Ce sont des déformations à un paramètre des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semisimples. La théorie des représentations des groupes quantiques peut être considérée comme une généralisation puissante et féconde de la théorie classique des représentations des algèbres de Lie semisimples. Les représentations des

(*) Reçu le 18 mai 1999, accepté le 12 octobre 1999
(1) Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur - CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail: thys@math.u-strasbg.fr

groupes quantiques forment ce que Turaev a appelé une catégorie rubanée, c'est-à-dire une catégorie qui possède un produit tensoriel, un tressage et une dualité, ce qui permet d'étendre la notion de trace à ce cadre. Ce sont ces caractéristiques qui expliquent qu'à partir d'une telle catégorie on peut construire des invariants d'entrelacs qui généralisent le célèbre invariant construit par Vaughan Jones en 1984. La construction d'invariants topologiques à partir des groupes quantiques et, plus généralement, de catégories rubanées est due à Reshetikhin et Turaev [20].

Si les groupes quantiques ont des applications spectaculaires en théorie des nœuds et en topologie en dimension 2 et 3, le problème de savoir si on peut complètement décrire les représentations des groupes quantiques et même des groupes classiques en termes d'objets géométriques comme les nœuds, les tresses ou leurs projections planaires reste largement ouvert. Le propos de cet article est de s'attaquer au cas le plus simple, c'est-à-dire à celui de l'algèbre de Lie semisimple sl_2 et de son avatar quantique. Nous construisons ici une équivalence de catégories entre une catégorie de représentations de l'algèbre enveloppante quantique de sl_2 et une catégorie $\mathcal{V}(a)$ construite par Turaev [24], chap. XII, dans laquelle les morphismes sont engendrés par les diagrammes planaires. Cette équivalence préserve les structures rubanées qui existent aussi bien du côté des représentations que du côté topologique. Nous démontrons une telle équivalence pour toutes les valeurs "génériques" du paramètre q qui entre dans la définition de l'algèbre enveloppante quantique de sl_2 ainsi que lorsque q est une racine de l'unité d'ordre pair $\geqslant 6$.

Lorsque ce paramètre est une racine de l'unité différente de 1, on sait que la catégorie des représentations d'une algèbre enveloppante quantique n'est plus semisimple. Lusztig a conjecturé une correspondance entre les représentations des groupes quantiques aux racines de l'unité et les représentations modulaires du groupe algébrique correspondant. Malgré la complexité de la catégorie des représentations pour q racine de l'unité, nous en obtenons néanmoins une description topologique à condition de nous débarrasser de ce que Turaev appelle les modules négligeables. Ces derniers sont des modules sur lesquelles la trace est identiquement nulle et apparaissent, par exemple, dans les travaux de Reshetikhin et Turaev [20].

La catégorie $\mathcal{V}(a)$ de Turaev est une élaboration des fameuses algèbres de Temperley-Lieb [22] utilisant les idempotents de Jones-Wenzl [7, 25]. Le rapport entre les algèbres de Temperley-Lieb et les invariants quantiques n'est pas nouveau. Il apparaît par exemple dans les travaux de [5, 8, 11, 14, 15, 16, 23]. T. Kerler [13] a montré que la catégorie des représentations de $U_q(sl_2)$ est déterminée par son groupe de Grothendieck, à ce que Kazh-

dan et Wenzl [12] appelent un "twisting" près (*cf.* [12] pour une extension du résultat de Kerler à une algèbre de Lie semisimple générale). Comme conséquence, la catégorie de représentations de $U_q(sl_2)$ que nous considérons est équivalente à une version "tordue" de la catégorie de Turaev. Dans cet article, nous obtenons un résultat plus fort qui se passe de "twisting" en construisant explicitement une équivalence de catégories. L'énoncé principal du texte est le théorème 2.1.

Voici le plan de l'article. Au §1, après un bref rappel sur les catégories rubanées, nous résumons la théorie des représentations de $U_q(sl_2)$ aussi bien dans le cas générique que celui des racines de l'unité. Au §2, nous introduisons les diagrammes planaires, la catégorie $\mathcal{V}(a)$ et nous énonçons le théorème principal. Nous construisons un foncteur $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{V}(a)$ vers la catégorie des représentations de $U_q(sl_2)$ au §3. Le §4 est consacré à une courte étude des morphismes de la catégorie $\mathcal{V}(a)$ et à des rappels sur la formule de Clebsch-Gordan. La démonstration que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une équivalence de catégories est donnée au §5 pour le cas générique et au §6 pour le cas d'une racine de l'unité.

1. Représentations de $U_q(sl_2)$

Nous rappelons les propriétés des représentations de $U_q(sl_2)$ dont nous aurons besoin par la suite. Il est commode de les formuler en utilisant le langage des catégories rubanées. Le contenu des §§1.1-1.3 est tiré de [9, 10, 24].

1.1. Catégories monoïdales

Rappelons qu'une *catégorie monoïdale* est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et d'un objet I, appelé *objet unité*, tels que

$$(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W), \tag{1.1}$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h), \tag{1.2}$$

$$V \otimes I = I = I \otimes V, \tag{1.3}$$

$$f \otimes \mathrm{id}_I = f = \mathrm{id}_I \otimes f, \tag{1.4}$$

pour tous les objets U, V, W et tous les morphismes f, g, h de $\mathcal{C}$.

Ce que nous venons de définir est usuellement appelé une catégorie monoïdale stricte. Les catégories de représentations que nous considérerons ne sont évidemment pas strictes et il conviendrait de remplacer les égalités (1.1)-(1.4) par des isomorphismes naturels appropriés. L'abus que nous commettons en ne le faisant pas est justifié par le théorème de cohérence de

MacLane qui donne la méthode pour passer d'une catégorie monoïdale arbitraire à une catégorie monoïdale stricte, *cf.* [18].

Les catégories monoïdales que nous considérerons par la suite sont $\mathbb{C}$-linéaires, où $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Cela signifie que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V,W)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour tout couple d'objets (V,W) de $\mathcal{C}$ et que la composition et le produit tensoriel des morphismes sont bilinéaires.

Par la suite, nous appellerons *catégorie tensorielle* toute catégorie monoïdale $\mathbb{C}$-linéaire telle que l'espace vectoriel $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(I)$ est de dimension 1.

Soient $(\mathcal{C},\otimes,I)$ et $(\mathcal{C}',\otimes,I')$ des catégories tensorielles. Nous dirons qu'un foncteur $\mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *conserve les structures tensorielles* si les conditions suivantes sont réalisées :

1. Pour tout couple (x,y) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application $\mathcal{G} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{G}(x),\mathcal{G}(y))$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. $\mathcal{G}(x\otimes y) = \mathcal{G}(x)\otimes\mathcal{G}(y)$ pour tout couple (x,y) d'objets et de morphismes de $\mathcal{C}$;
3. $\mathcal{G}(I) = I'$ et $\mathcal{G}$ réalise un isomorphisme de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(I)$ sur $\mathrm{End}_{\mathcal{C}'}(I')$;

1.2. Catégories rubanées

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tensorielle, d'objet unité I. Un *tressage* est une famille d'isomorphismes naturels $c = (c_{V,W} : V\otimes W \to W\otimes V)$, où V,W décrivent l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$, telle que

$$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,V}\otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes c_{V,W}) \quad \text{et} \quad c_{U,V\otimes W} = (\mathrm{id}_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W)$$

pour tous les objets U,V,W de $\mathcal{C}$. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est munie d'une *dualité* si à tout objet V on a associé un objet V^*, appelé *dual* de V, et des morphismes $b_V : I \longrightarrow V\otimes V^*$ et $d_V : V^*\otimes V \longrightarrow I$ dans $\mathcal{C}$ tels que

$$(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V \quad \text{et} \quad (d_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})(\mathrm{id}_{V^*} \otimes b_V) = \mathrm{id}_{V^*}. \quad (1.5)$$

Enfin, une *torsion* dans $\mathcal{C}$ est une famille d'isomorphismes naturels $\theta = (\theta_V : V \to V)$, où V décrit l'ensemble des objets de $\mathcal{C}$, telle que

$$\theta_{V\otimes W} = c_{V,W}c_{W,V}(\theta_V \otimes \theta_W)$$

pour tous les objets V,W de $\mathcal{C}$.

Une *catégorie rubanée* est une catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ munie d'un tressage c, d'une dualité $(*,b,d)$ et d'une torsion θ telle que

$$(\theta_V \otimes \mathrm{id}_{V^*})b_V = (\mathrm{id}_V \otimes \theta_{V^*})b_V$$

pour tout objet V de $\mathcal{C}$.

1.3. Morphismes négligeables

Soit $(\mathcal{C}, \otimes, I, c, *, \theta)$ une catégorie rubanée, V un objet de $\mathcal{C}$ et f un endomorphisme de V. La *trace quantique* de f est l'élément de $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(I)$ défini par

$$\mathrm{tr}_q(f) = d_V c_{V,V^*}(\theta_V f \otimes \mathrm{id}_{V^*}) b_V. \tag{1.6}$$

La trace quantique jouit des propriétés suivantes :

1. Pour tous les morphismes $f : V \to W$, $g : W \to V$, nous avons $\mathrm{tr_q}(fg) = \mathrm{tr_q}(gf)$.
2. Pour tous les endomorphismes f, g d'objets de $\mathcal{C}$, nous avons $\mathrm{tr_q}(f \otimes g) = \mathrm{tr_q}(f)\,\mathrm{tr_q}(g)$.
3. Pour tout endomorphisme k de I, nous avons $\mathrm{tr_q}(k) = k$.

Un morphisme $f : V \to W$ dans $\mathcal{C}$ est dit *négligeable* si $\mathrm{tr}_q(fg) = 0$ pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V)$. Un objet V de $\mathcal{C}$ est dit *négligeable* si son morphisme identité est négligeable, *i.e.* $\mathrm{tr_q}(f) = 0$ pour tout endomorphisme f de V. Il en résulte que, pour tout objet W de $\mathcal{C}$, tout morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, V)$ est négligeable si V est négligeable. La composition et le produit tensoriel d'un morphisme négligeable avec n'importe quel autre morphisme est un morphisme négligeable. Nous en déduisons que le produit tensoriel d'un objet négligeable avec n'importe quel autre objet est un objet négligeable, *cf.* [24], chap. XI.

Nous notons $\mathrm{Negl}_{\mathcal{C}}(V, W)$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ des morphismes négligeables et posons

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W) / \mathrm{Negl}_{\mathcal{C}}(V, W).$$

Nous pouvons alors définir une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{C}$ et telle que $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(V, W) = \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ pour tout couple (V, W) d'objets de $\mathcal{C}$. Turaev ([24], chap. XI) appelle cette catégorie la catégorie purifiée de $\mathcal{C}$. Par construction, $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie rubanée qui n'admet pas de morphismes négligeables non nuls.

1.4. Rappels sur $U_q(sl_2)$

Pour plus de détails, voir [4, 3, 6, 9, 10, 20, 24]. Soit q un nombre complexe différent de ± 1. L'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(sl_2)$ est l'algèbre engendrée sur $\mathbb{C}$ par K, K^{-1}, X et Y et les relations

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$

$$KXK^{-1} = q^2 X, \quad KYK^{-1} = q^{-2} Y,$$

$$XY - YX = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

L'algèbre $U_q(sl_2)$ est une algèbre de Hopf dont la comultiplication Δ, la coünité ε et l'antipode S sont déterminées par

$$\begin{array}{lll} \Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes K, & \Delta(Y) = K^{-1} \otimes Y + Y \otimes 1, & \Delta(K) = K \otimes K, \\ S(X) = -XK^{-1}, & S(Y) = -KY, & S(K) = K^{-1} \\ \varepsilon(X) = 0, & \varepsilon(Y) = 0, & \varepsilon(K) = 1. \end{array}$$

Nous supposerons que q est un nombre complexe générique (c'est-à-dire non racine de l'unité) ou bien une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, où r est un entier, $r \geqslant 3$. On définit $\tilde{J} = \tilde{J}(q)$ comme l'ensemble des entiers $\geqslant 0$ si q est générique et comme l'ensemble fini $\{0, \ldots, r-2\}$ si q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité. Pour tout entier $n \in \tilde{J}$ il existe un $U_q(sl_2)$-module simple V_n de dimension $n+1$, isomorphe à son dual. Lorsque q est générique, tout $U_q(sl_2)$-module simple est isomorphe à un module V_n, au produit tensoriel par un module de dimension 1 près, *cf.* [17, 21]. Lorsque q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, tout module simple de dimension $n < r$ est isomorphe à V_n, au produit tensoriel par un module de dimension 1 près. En outre, il n'y a pas de module simple de dimension $n > r$ (*cf.* par exemple [4, 9]).

Notons $\mathcal{R}(q)$ la sous-catégorie pleine des $U_q(sl_2)$-modules de dimension finie dont les objets sont les produits tensoriels des modules simples V_n. Notre but est de décrire topologiquement la catégorie rubanée $\overline{\mathcal{R}}(q)$ associée à $\mathcal{R}(q)$ par la procédure de purification décrite au §1.3. On notera que, si q est générique, alors $\overline{\mathcal{R}}(q) = \mathcal{R}(q)$. En effet, lorsque q est générique, la catégorie des $U_q(sl_2)$-modules de dimension finie est semisimple. Par conséquent, d'après [24], chap. XI, il n'y a pas de morphisme négligeable non nul entre $U_q(sl_2)$-modules de dimension finie. Nous appelerons *sous-catégorie paire* de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$) dont les objets sont les produits tensoriels $V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_p}$ tels que $n_1 + \cdots + n_p \equiv 0 \bmod 2$.

2. Énoncé du théorème principal

Le but de ce paragraphe est de définir la catégorie $\mathcal{V}(a)$ de Turaev et d'énoncer le théorème qui la relie aux catégories $\mathcal{R}(q)$ et $\overline{\mathcal{R}}(q)$ introduites précédemment.

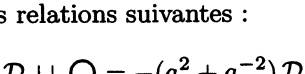
2.1. Diagrammes

Soient k et ℓ deux entiers positifs. Un *diagramme* de type (k, ℓ) consiste en un nombre fini d'arcs et de cercles immergés dans la bande $\mathbb{R} \times [0,1]$. On suppose que l'immersion n'admet que des points doubles ordinaires et que

les extrémités des arcs sont k points distincts fixés sur la droite $\mathbb{R} \times 0$ (les "entrées") et ℓ points distincts fixés sur la droite $\mathbb{R} \times 1$ (les "sorties"). A chaque croisement on distingue un brin passant dessus et un brin passant dessous. De plus, les diagrammes sont considérés à isotopie de $\mathbb{R} \times [0;1]$ fixant les bords près et conservant les croisements et les passages supérieurs et inférieurs.

Fixons un nombre complexe a non nul. On définit alors $E_{k,\ell}$ comme l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par les classes d'isotopie des diagrammes de type (k,ℓ) modulo les relations suivantes :

$$\mathcal{D} \cup \bigcirc = -(a^2 + a^{-2})\,\mathcal{D}, \tag{2.1}$$



(2.2)

Dans la première relation, $\mathcal{D} \cup \bigcirc$ est la classe d'isotopie de l'union disjointe du diagramme $\mathcal{D}$ et d'un cercle. La deuxième relation lie trois diagrammes qui sont égaux sauf dans un disque du plan où ils sont comme indiqué. Cette relation s'appelle la *relation de Kauffman*. Il est connu (*cf.* [11]) que l'espace $E_{k,\ell}$ a pour base l'ensemble des classes d'isotopie des diagrammes *simples*, c'est-à-dire ceux qui ne contiennent ni croisements, ni cercles.

2.2. La catégorie de Temperley-Lieb

Nous sommes maintenant en mesure de définir la catégorie de Temperley-Lieb $\mathcal{S}(a)$. Ses objets sont les entiers naturels. Un morphisme $k \to \ell$ est un élément de $E_{k,\ell}$. Lorsque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des diagrammes de type respectif (ℓ, m) et (k,ℓ), la composition $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$ est le diagramme de type (k,m) obtenu en posant $\mathcal{D}_1$ au-dessus de $\mathcal{D}_2$ et en collant chaque sortie de $\mathcal{D}_2$ à l'entrée correspondante de $\mathcal{D}_1$. Cette opération s'étend par linéarité à tous les morphismes. Le morphisme identité de l'objet k est la classe d'isotopie du diagramme simple à k brins verticaux.

On munit $\mathcal{S}(a)$ d'une structure de catégorie monoïdale de la manière suivante. Le produit tensoriel de deux objets k, ℓ est leur somme : $k \otimes \ell = k + \ell$. L'objet unité est 0. Le produit tensoriel de deux diagrammes $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$ est donné par la juxtaposition de ces deux diagrammes, $\mathcal{D}_1$ étant placé à gauche de $\mathcal{D}_2$. Cette opération est étendue à tous les morphismes par linéarité. La catégorie $\mathcal{S}(a)$ est tensorielle car $E_{0,0}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Elle est munie d'une structure rubanée pour laquelle tout objet est autodual : $k^* = k$, et les morphismes de structures $c_{n,m}$, θ_n, b_n et d_n sont définis par les diagrammes de la figure 1.

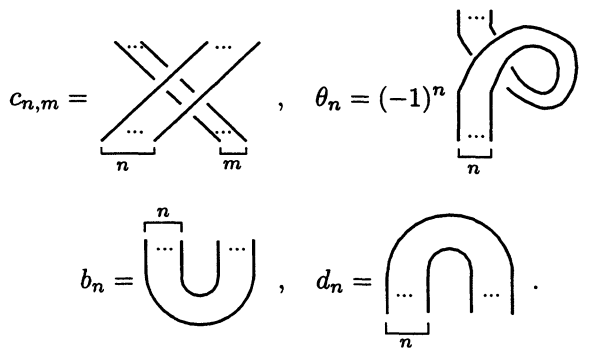


Figure 1.

2.3. Les idempotents de Jones-Wenzl

Il est bien connu (*cf.* [24], XII.3 et XII.4, [25]) que, pour $k \geqslant 1$, l'algèbre de Temperley-Lieb $E_k = E_{k,k}$ est engendrée par les $k-1$ éléments $e_1, \ldots,$ e_{k-1} où e_i est le diagramme simple défini par la figure 2. Pour chaque k strictement inférieur à l'ordre de a^4, l'algèbre E_k contient un idempotent central particulier, appelé l'idempotent de Jones-Wenzl : il est défini comme l'unique élément $f_k \in E_k$ tel que $f_k - 1_k$ soit un polynôme non commutatif sans terme constant en $e_1, \ldots, e_{k-1}$ et tel que $f_k e_i = e_i f_k = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k-1$.

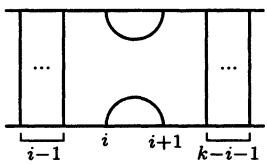


Figure 2.

2.4. La catégorie de Turaev

Nous supposons que le nombre complexe a est générique ou qu'il est une racine $4r^{\text{ème}}$ de l'unité où $r \geqslant 3$. L'ensemble $J = J(a)$ est défini comme l'ensemble des entiers $\geqslant 1$ si a est générique et comme l'ensemble fini $\{1, 2, \ldots, r-2\}$ si a est une racine $4r^{\text{ème}}$ de l'unité.

Dans [24], chap. XII, Turaev a construit une catégorie $\mathcal{V}(a)$ dont les objets sont les suites finies $s = (n_1, \ldots, n_m)$ d'éléments de J, y compris la

suite vide $\emptyset$. Pour une telle suite, on pose $|s| = n_1 + \cdots + n_m$ et

$$f_s = f_{n_1} \otimes \cdots \otimes f_{n_m} \in E_{|s|}. \tag{2.3}$$

On convient que $f_\emptyset = 1 \in E_0$. Les morphismes de $\mathcal{V}(a)$ sont des morphismes particuliers de $\mathcal{S}(a)$. Soient s et s' des objets de $\mathcal{V}(a)$. Pour tout morphisme $g \in E_{|s|,|s'|}$, on pose

$$\widehat{g} = f_{s'} g f_s \in E_{|s|,|s'|}. \tag{2.4}$$

On obtient ainsi un endomorphisme idempotent $g \mapsto \hat{g} : E_{|s|,|s'|} \to E_{|s|,|s'|}$. Nous définissons alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$ comme l'image de cet endomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s') = \widehat{E}_{|s|,|s'|} = \{\widehat{g},\ g \in E_{|s|,|s'|}\}. \tag{2.5}$$

La composition des morphismes dans $\mathcal{V}(a)$ est induite par celle dans $\mathcal{S}(a)$.

La catégorie $\mathcal{V}(a)$ est une catégorie rubanée au sens du §1.2. Le produit tensoriel de deux objets s, s' est la concaténation ss' des suites. L'objet unité est la suite vide. Le produit tensoriel des morphismes est induit par celui des morphismes de $\mathcal{S}(a)$. Si s et s' sont des objets de $\mathcal{V}(a)$, le tressage $c_{s,s'} : s \otimes s' \to s' \otimes s$ est donné par

$$c_{s,s'} = \widehat{c}_{|s|,|s'|} = (f_{s'} \otimes f_s) c_{|s|,|s'|} (f_s \otimes f_{s'}). \tag{2.6}$$

Le dual s^* d'un objet $s = (n_1, \ldots, n_m)$ est $s^* = (n_m, \ldots, n_1)$. Les morphismes $b_s : \mathbb{C} \to s \otimes s^*$, $d_s : s^* \otimes s \to \mathbb{C}$ et la torsion $\theta_s : s \to s$ sont définis par

$$b_s = \widehat{b}_{|s|} = (f_s \otimes f_{s^*}) b_{|s|}, \tag{2.7}$$

$$d_s = \widehat{d}_{|s|} = d_{|s|} (f_{s^*} \otimes f_s), \tag{2.8}$$

$$\theta_s = \widehat{\theta}_{|s|} = f_s \theta_{|s|} f_s. \tag{2.9}$$

Nous noterons $\overline{\mathcal{V}}(a)$ la catégorie rubanée obtenue à partir de $\mathcal{V}(a)$ en annulant les morphismes négligeables comme au §1.3. Turaev introduit également la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) qui est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) dont les objets sont les suites s telles que $|s|$ soit paire. Nous énonçons maintenant le résultat principal de l'article. C'est une réponse au problème 24 soulevé par Turaev dans [24], p. 572.

THÉORÈME 2.1. — *Soit a un nombre complexe et $q = a^2$. Alors*

1. *si a et q sont génériques, il existe un équivalence de catégories $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \to \mathcal{R}(q)$;*

2. *si a est une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geqslant 3$ et q une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, il existe une équivalence de catégories $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \to \overline{\mathcal{R}}(q)$.*

Les foncteurs $\widetilde{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ réalisant les équivalences conservent les structures rubanées, et l'image de la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ (resp. $\overline{\mathcal{V}}(a)$) est la sous-catégorie paire de $\mathcal{R}(q)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}(q)$).

La première partie du théorème sera démontrée au §5, la seconde au §6.

3. Construction d'un foncteur $\mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathcal{R}(q)$

Nous fixons pour toute la suite deux nombres complexes a et q tels que $q = a^2$. Nous supposons en outre que a est soit générique, soit une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geqslant 3$. En reprenant les notations des §1.4 et §2.4, nous avons $\tilde{J} = J \cup \{0\}$. Nous noterons U_q-Mod la catégorie des $U_q(sl_2)$-modules de dimension finie.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés du *module fondamental* V_1 de dimension 2, que nous noterons V.

3.1. Le module fondamental de $U_q(sl_2)$

Le module fondamental admet une base (v_0, v_1) telle que

$$\begin{array}{lll} Kv_0 = qv_0, & Xv_0 = 0, & Yv_0 = v_1, \\ Kv_1 = q^{-1}v_1, & Xv_1 = v_0, & Yv_1 = 0. \end{array}$$

Soit (v^0, v^1) la base duale de (v_0, v_1). Nous faisons le choix d'une racine carrée $q^{1/2}$ de q. Le tressage $c_{V,V} \in \mathrm{End}_{\mathcal{R}(q)}(V \otimes V)$ est donné dans la base (v_0, v_1) par

$$c_{V,V}(v_0 \otimes v_0) = q^{1/2}\, v_0 \otimes v_0, \quad c_{V,V}(v_0 \otimes v_1) = q^{-1/2}\, v_1 \otimes v_0, \tag{3.1}$$

$$\begin{array}{l} c_{V,V}(v_1 \otimes v_1) = q^{1/2}\, v_1 \otimes v_1, \\ c_{V,V}(v_1 \otimes v_0) = q^{-1/2}\, v_0 \otimes v_1 + q^{-1/2}(q - q^{-1})\, v_1 \otimes v_0. \end{array} \tag{3.2}$$

Les morphismes $b_V : \mathbb{C} \to V \otimes V^*$ et $d_V : V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ sont donnés par

$$b_V(1) = v_0 \otimes v^0 + v_1 \otimes v^1 \quad \text{et} \quad d_V(v^i \otimes v_j) = \delta_{ij}. \tag{3.3}$$

Enfin la torsion $\theta_V : V \to V$ est donnée par

$$\theta_V = q^{3/2}\, \mathrm{id}_V\,. \tag{3.4}$$

Au §3.2, nous construisons un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \longrightarrow U_q$-Mod conservant les structures rubanées. La catégorie $\mathcal{S}(a)$ étant auto-duale, alors que la catégorie U_q-Mod ne l'est pas (mais tout module est isomorphe à son dual), nous devons faire le choix d'un isomorphisme entre le module fondamental V et son dual. On définit le morphisme de $U_q(sl_2)$-modules $\alpha : V \to V^*$ par

$$\alpha(v_0) = v^1 \quad \text{et} \quad \alpha(v_1) = -q^{-1}v^0. \tag{3.5}$$

Il est aisé de voir que α est un isomorphisme. Posons également $d = d_V(\alpha \otimes \mathrm{id}_V) : V \otimes V \to \mathbb{C}$ et $b = (\mathrm{id}_V \otimes \alpha^{-1})b_V : \mathbb{C} \to V \otimes V$, qui vérifient

$$\begin{array}{cc} b(1) = v_1 \otimes v_0 - q\, v_0 \otimes v_1, & d(v_0 \otimes v_0) = d(v_1 \otimes v_1) = 0, \\ d(v_0 \otimes v_1) = 1, & d(v_1 \otimes v_0) = -q^{-1}. \end{array} \tag{3.6}$$

Des calculs élémentaires montrent alors que

$$db = -(q + q^{-1}), \tag{3.7}$$

$$c_{V,V} = q^{1/2}\, \mathrm{id}_{V^{\otimes 2}} + q^{-1/2}\, bd. \tag{3.8}$$

3.2. Un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \longrightarrow U_q$-Mod

Nous voulons définir un foncteur $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \to \mathcal{R}(q)$, conservant les structures tensorielles et les structures rubanées. Pour cela, nous rappelons la construction bien connue d'un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \longrightarrow U_q$-Mod (prop. 3.1), conservant les structures tensorielles, ainsi que les structures rubanées.

PROPOSITION 3.1. — *Il existe un unique foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \longrightarrow U_q$-Mod conservant les structures tensorielles tel que*

$$\mathcal{F}(1) = V, \quad \mathcal{F}\left(\bigcup\right) = b \quad et \quad \mathcal{F}\left(\bigcap\right) = d.$$

En outre, pour tout couple (n, m) d'objets de $\mathcal{S}(a)$, on a

$$\mathcal{F}(c_{n,m}) = c_{\mathcal{F}(n),\mathcal{F}(m)},$$

$$\mathcal{F}(b_n) = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{F}(n)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes n}\right) b_{\mathcal{F}(n)} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(d_n) = d_{\mathcal{F}(n)}\left(\alpha^{\otimes n} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}(n)}\right),$$
$$\mathcal{F}(\theta_n) = \theta_{\mathcal{F}(n)}.$$

Démonstration. — La construction d'un foncteur sur $\mathcal{S}(a)$ conservant les structures tensorielles est bien connue. Nous la rappelons brièvement. On définit $\mathcal{F}$ sur les objets par $\mathcal{F}(n) = V^{\otimes n}$. D'après le §2.1, pour définir $\mathcal{F}$ sur les morphismes, il suffit de connaître sa valeur sur les diagrammes simples.

La valeur de $\mathcal{F}(\bigcup)$ et $\mathcal{F}(\bigcap)$ étant donnée, (nécessairement $\mathcal{F}(\mathsf{I}) = \mathrm{id}_V$ car $\mathcal{F}$ est un foncteur), l'image par $\mathcal{F}$ de tout diagramme simple est définie par compositions et produits tensoriels. Par construction, $\mathcal{F}$ conserve les structures tensorielles. Il reste à vérifier (2.1), ce qui est immédiat par (3.7) lorsque $q = a^2$.

Vérifions alors les quatre égalités annoncées. Celles concernant $\mathcal{F}(b_n)$ et $\mathcal{F}(d_n)$ sont immédiates. Montrons que $\mathcal{F}(c_{n,m}) = c_{\mathcal{F}(n),\mathcal{F}(m)}$, relation qu'il suffit de vérifier pour $n = m = 1$ grâce aux propriétés des tressages. Puisque dans $\mathcal{S}(a)$ le morphisme $c_{1,1}$ est donné par (2.2), il suffit de vérifier que dans $\mathcal{R}(q)$, on a $c_{V,V} = a\,\mathrm{id}_{V^{\otimes 2}} + a^{-1}\,bd$, ce qui résulte de (3.8) lorsque $q = a^2$. La dernière relation se montre de la même manière. □

3.3. Le foncteur $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \longrightarrow \mathcal{R}(q)$

A partir du foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{S}(a) \to U_q$-Mod nous définissons un foncteur $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \to U_q$-Mod comme suit :

1. $\widetilde{\mathcal{F}}(s) = \mathcal{F}(f_s)V^{\otimes|s|}$ pour tout objet s de $\mathcal{V}(a)$;
2. $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g}) = \mathcal{F}(\widehat{g})$ pour tout morphisme $\widehat{g}$ de $\mathcal{V}(a)$.

Il est clair que $\widetilde{\mathcal{F}}$ conserve les structures tensorielles.

PROPOSITION 3.2. — *Le foncteur $\widetilde{\mathcal{F}}$ est à valeurs dans $\mathcal{R}(q)$. Comme foncteur $\mathcal{V}(a) \to \mathcal{R}(q)$, il est essentiellement surjectif.*

Démonstration. — Si $n \in J$, alors on a $\widetilde{\mathcal{F}}(n) \cong V_n$. En effet, soit $p_n \in \mathrm{End}_{\mathcal{R}(q)}(V^{\otimes n})$ l'idempotent déterminé par

$$p_n(w) = \begin{cases} w & \text{si } w \text{ est de plus haut poids } n, \\ 0 & \text{si } w \text{ est de plus haut poids } p < n. \end{cases}$$

Nous avons alors l'isomorphisme $p_n(V^{\otimes n}) \cong V_n$. Or, d'après [19], on a $\mathcal{F}(f_n) = p_n$. Par conséquent, $\widetilde{\mathcal{F}}(n) = p_n(V^{\otimes n}) \cong V_n$. Ceci prouve que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est essentiellement surjectif. En effet, si $M \cong V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_m}$ est un objet de $\mathcal{R}(q)$, alors, comme $\widetilde{\mathcal{F}}$ conserve les structures tensorielles, l'image de la suite $s = (n_1, \ldots, n_m) = n_1 \otimes \cdots \otimes n_m$ est $\widetilde{\mathcal{F}}(n_1) \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(n_m) \cong V_{n_1} \otimes \cdots \otimes V_{n_m} \cong M$. □

Nous déduisons de cette proposition le dernier point du théorème 2.1, *i.e.* que l'image de la sous-catégorie paire de $\mathcal{V}(a)$ est la sous-catégorie paire de $\mathcal{R}(q)$. En effet, l'objet (n) de $\mathcal{V}(a)$ a pour image l'objet V_n de $R(q)$. Pour montrer que $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit un foncteur $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \to \overline{\mathcal{R}}(q)$ sur les catégories purifiées, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 3.3. — *Pour tout couple d'objets (s, s') de $\mathcal{V}(a)$, on a*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(c_{s,s'}) = c_{\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(s')},$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(b_s) = \left(\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes|s|}\right) b_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{F}}(d_s) = d_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \left(\alpha^{\otimes|s|} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}\right),$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\theta_s) = \theta_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}.$$

Pour tout morphisme g de $\mathcal{V}(a)$, nous avons

$$\mathrm{tr_q}(\widetilde{\mathcal{F}}(g)) = \widetilde{\mathcal{F}}(\mathrm{tr_q}(g)).$$

Démonstration. — Nous laissons le soin au lecteur de vérifier les quatre premières relations qui découlent de la proposition 3.1. Nous vérifions la cinquième. Soit s un objet de $\mathcal{V}(a)$, $g \in \mathrm{End}_{\mathcal{S}(a)}(|s|)$ et $\widehat{g}$ l'élément correspondant de $\mathrm{End}_{\mathcal{V}(a)}(s)$. Par définition de la trace quantique, on a

$$\mathrm{tr_q}(\widehat{g}) = d_s c_{s,s} (\theta_s \widehat{g} \otimes \mathrm{id}_s) b_s.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}}(\mathrm{tr_q}(\widehat{g})) &= \widetilde{\mathcal{F}}(d_s)\widetilde{\mathcal{F}}(c_{s,s})(\widetilde{\mathcal{F}}(\theta_s)\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g}) \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(\mathrm{id}_s))\widetilde{\mathcal{F}}(b_s) \\
&= d_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}(\alpha^{\otimes|s|} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) c_{\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(s)} (\theta_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g}) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) \\
&\qquad (\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes|s|}) b_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \\
&= d_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}(\alpha^{\otimes|s|} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) c_{\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(s)} (\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes|s|}) \\
&\qquad (\theta_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g}) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) b_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \\
&= d_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}(\alpha^{\otimes|s|} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)})((\alpha^{-1})^{\otimes|s|} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) \\
&\qquad (\theta_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g}) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)}) b_{\widetilde{\mathcal{F}}(s)} \\
&= \mathrm{tr_q}(\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{g})).
\end{aligned}$$

L'avant dernière égalité provient de la naturalité du tressage. □

COROLLAIRE 3.4. — *Le foncteur $\widetilde{\mathcal{F}}$ induit un foncteur fidèle $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \to \overline{\mathcal{R}}(q)$.*

Démonstration. — L'existence du foncteur induit est une conséquence immédiate de la dernière égalité du lemme précédent.

Démontrons la fidélité de $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \to \overline{\mathcal{R}}(q)$. Soit $h : s \to s'$ un morphisme de $\mathcal{V}(a)$ dont l'image dans $\overline{\mathcal{V}}(a)$ est notée $\overline{h}$. Si $\overline{\mathcal{F}}(\overline{h}) = 0$ dans $\overline{\mathcal{R}}(q)$, alors $\widetilde{\mathcal{F}}(h)$ est négligeable dans $\mathcal{R}(q)$. En particulier, pour tout morphisme

$g : s' \to s$ de $\mathcal{V}(a)$, on a $\mathrm{tr_q}(\widetilde{\mathcal{F}}(h)\widetilde{\mathcal{F}}(g)) = 0$. Le lemme 3.3 implique que $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathrm{tr_q}(hg)) = 0$. Comme l'application

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{End}_{\mathcal{V}(a)}(\emptyset) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{R}(q)}(V_0)$$

applique le diagramme vide sur l'identité de V_0, c'est un isomorphisme. On en déduit que $\mathrm{tr_q}(hg) = 0$ ce qui prouve que h est négligeable dans $\mathcal{V}(a)$, donc que $\overline{h} = 0$. □

4. Préliminaires techniques

Au §4.1 nous exhibons une base simple pour chaque espace de morphismes dans la catégorie $\mathcal{V}(a)$ du §2.4. Au §4.2, nous donnons quelques rappels sur la formule de Clebsch-Gordan pour $U_q(sl_2)$.

4.1. Les morphismes de $\mathcal{V}(a)$

Etant donné deux objets $s = (n_1, \ldots, n_m)$ et $s' = (n'_1, \ldots, n'_{m'})$ de $\mathcal{V}(a)$, on dit qu'un diagramme simple $\mathcal{D}$ est *du bon type* (s, s') s'il est du type $(|s|, |s'|)$ et si

$$\widehat{\mathcal{D}} = f_{s'} \mathcal{D} f_s \neq 0.$$

LEMME 4.1. — *Les éléments $\widehat{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ est du bon type (s, s'), forment une base de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, s')$.

Démonstration. — Ce lemme découle des égalités $f_n e_i = e_i f_n = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$. En effet, pour tout $k \geqslant 1$, il existe un diagramme P_k tel que $f_k = 1_k + P_k$ et $f_k P_k = P_k f_k = 0$. Nous en déduisons que

$$f_s = 1_{|s|} + \sum_j Q_j, \quad f_{s'} = 1_{|s'|} + \sum_{j'} Q'_{j'},$$

où les Q_j (resp. les $Q'_{j'}$) sont des diagrammes vérifiant $f_s Q_j = Q_j f_s = 0$ (resp. $f_{s'} Q'_{j'} = Q'_{j'} f_{s'} = 0$). Par conséquent,

$$\widehat{\mathcal{D}} = f_{s'} \mathcal{D} f_s = \mathcal{D} + \sum_i \lambda_i \widetilde{\mathcal{D}}_i,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et où tous les $\widetilde{\mathcal{D}_i}$ sont des diagrammes simples du type $(|s|, |s'|)$ tels que $f_s \widetilde{\mathcal{D}_i} f_{s'} = 0$, donc tous distincts de $\mathcal{D}$ si $\widehat{\mathcal{D}} \neq 0$. □

Remarque. — Un diagramme est donc du bon type si on ne peut pas factoriser $1^{(n_1+\cdots+n_{k-1})} \otimes e_i \otimes 1^{(n_{k+1}+\cdots+n_m)}$ en entrée ou $1^{(n'_1+\cdots+n'_{k'-1})} \otimes$

$e_i \otimes 1^{(n'_{k'+1}+\cdots+n'_{m'})}$ en sortie. La figure 3 donne un exemple d'un diagramme du bon type (s, s'), où $s = (3,3,3,4)$ et $s' = (2,2)$.

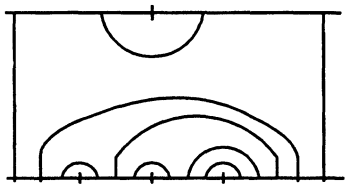


Figure 3.

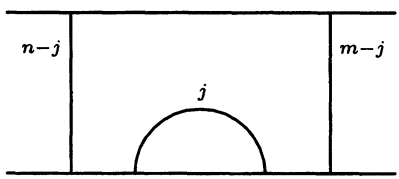


Figure 4.

Pour terminer ce paragraphe, nous définissons des diagrammes du bon type particuliers. Soit j un entier vérifiant $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$. On définit $\mathcal{D}_{n,m,j} \in E_{n+m,n+m-2j}$ comme la classe d'isotopie du diagramme simple de la figure 4 où, par convention, un entier p coloriant un arc signifie p arcs parallèles.

4.2. Clebsch-Gordan

Le produit tensoriel des deux modules V_n et V_m $(n, m \in \tilde{J})$ vérifie la formule de Clebsch-Gordan

$$V_n \otimes V_m \cong \bigoplus_{\substack{k=|n-m| \\ k\equiv n+m \bmod 2}}^{n+m} V_k \tag{4.1}$$

si $n+m \in \tilde{J}$. Si $n+m \notin \tilde{J}$ (ce qui n'arrive que si q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité et $n+m > r-2$), alors

$$V_n \otimes V_m \cong \bigoplus_{\substack{k=|n-m| \\ k\equiv n+m \bmod 2}}^{2r-4-n-m} V_k \oplus Z \tag{4.2}$$

où Z est un module négligeable. Une telle décomposition étant unique à isomorphisme près, nous parlerons des parties semisimple et négligeable de $V_n \otimes V_m$. (*cf.* [1, 2, 3, 20]).

En itérant 4.1, on obtient, pour tout entier $n \in J$, une décomposition de la forme

$$V^{\otimes n} \cong V_n \oplus \bigoplus_{k_i<n} V_{k_i}. \tag{4.3}$$

Nous rappelons également la forme générale des vecteurs de plus haut poids d'un produit tensoriel $W \otimes W'$ de deux modules. Soient $w \in W$ un

vecteur de plus haut poids n, $w' \in W'$ un vecteur de plus haut poids m et p un entier $\geqslant 0$. Posons

$$v(w,w',p) \tag{4.4}$$
$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \frac{[m-p+i]_q![n-i]_q!}{[i]_q![p-i]_q![m-p]_q![n]_q!} q^{-i(m-2p+i+1)} (Y^i w) \otimes (Y^{p-i} w'),$$

où $[k]! = [k][k-1]\cdots[1]$ si k est un entier $\geqslant 1$ et $[0]! = 1$ par convention. Nous avons alors les résultats qui suivent (*cf.* [9], p.157).

1. Lorsque q est générique, un vecteur de $W \otimes W'$ est de plus haut poids k si et seulement s'il est égal à un vecteur $v(w,w',p)$, avec $0 \leqslant p \leqslant \inf(n,m)$ et $n+m-2p = k$.
2. Lorsque q est une racine primitive $2r^{\text{ème}}$ de l'unité, supposons, en outre, que W et W' se décomposent en sommes directes d'une partie semisimple et négligeable, i.e.

$$W \cong P \oplus Z, \quad W' \cong P' \oplus Z',$$

où Z et Z' sont des modules négligeables et P et P' sont sommes directes de modules V_n, $n \in J$. Dans ce cas, un vecteur de la partie semisimple de $W \otimes W'$ est de plus haut poids k si et seulement s'il est égal à un vecteur $v(w,w',p)$, avec $0 \leqslant p \leqslant \inf(n,m)$, $n+m-2p = k$ et $k \leqslant \inf(n+m, 2r-4-n-m)$.

5. Pleine fidélité : cas générique

Nous fixons un nombre complexe a générique et posons $q = a^2$. Pour démontrer le premier point du théorème 2.1, il suffit, au vu de la proposition 3.2, d'établir la pleine fidélité du foncteur $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{V}(a) \to \mathcal{R}(q)$ défini au 3.3. Il s'agit de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Pour tout couple (s,t) d'objets de $\mathcal{V}(a)$, l'application*

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(t))$$

est un isomorphisme.

Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur la longueur de t. Les propositions 5.4 et 5.9 concernent le cas où t est de longueur 1 et le §5.3 traite le cas général.

Remarquons que le théorème est vrai lorsque s et t sont de longueur 0 ou 1. En effet, les considérations du §4.1 impliquent que, dans ce cas,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,t) = \begin{cases} \mathbb{C}\,\mathrm{id}_s & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le lemme de Schur, il en est de même de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(t))$.

Dans toute la suite de l'article, nous conviendrons que la suite (0) représente la suite vide de $\mathcal{V}(a)$, ce qui permet de la traiter comme un objet de longueur 1.

5.1. Cas de $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}((n,m)), \widetilde{\mathcal{F}}(k))$

On fixe deux entiers n et $m > 0$ et un entier $k \geqslant 0$. Si $j \geqslant 0$ est un entier, on note id_j le morphisme identité de $V^{\otimes j}$. Le but du §5.1 est de démontrer le théorème 5.1 pour $s = (n,m)$ et $t = (k)$.

LEMME 5.2. — *Si $0 \leqslant k < |n-m|$, ou bien $n+m < k$, ou bien $k \not\equiv n+m \bmod 2$, alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k)) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(n,m), \widetilde{\mathcal{F}}(k)) = 0.$$

Sinon,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k)) = \mathbb{C}\,\widehat{\mathcal{D}}_{n,m,j},$$

(où j est l'unique entier vérifiant $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$ et $n+m-2j = k$) et

$$\dim_{\mathbb{C}} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(n,m), \widetilde{\mathcal{F}}(k)) \right) = 1.$$

Démonstration. — Le calcul de la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(n,m), \widetilde{\mathcal{F}}(k))$ provient de la formule 4.1 et du lemme de Schur. La détermination de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k))$ est immédiate dès que l'on a remarqué que s'il existe un diagramme du bon type $((n,m),(k))$, alors c'est le diagramme $\mathcal{D}_{n,m,j}$, où j vérifie les conditions de l'énoncé. □

Nous avons maintenant besoin de la formule 4.4 et des notations qui y sont rattachées. Pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$, définissons

$$v_{n,m}^{(j)} = v(v_0^{\otimes n}, v_0^{\otimes m}, j) \in \widetilde{\mathcal{F}}(n,m) \tag{5.1}$$

et

$$b_{n,m,j} = q^{-m+j-1}\, \frac{[n+m-j+1]_q}{[n]_q}. \tag{5.2}$$

D'après les rappels subordonnés à 4.4, les vecteurs $v_{n,m}^{(j)}$ sont des vecteurs de plus haut poids $n+m-2j$, et pour tout vecteur v de plus haut poids ℓ de $\widetilde{\mathcal{F}}(n,m)$, il existe un (unique) j avec $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$, tel que v soit proportionnel à $v_{n,m}^{(j)}$.

LEMME 5.3. — *Pour $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ et $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$, l'application $g = \mathrm{id}_{n-1} \otimes d \otimes \mathrm{id}_{m-1} : \widetilde{\mathcal{F}}(n,m) \to \widetilde{\mathcal{F}}(n-1,m-1)$ vérifie*

$$g(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j}\, v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$$

où, par convention, $v_{n-1,m-1}^{(-1)} = 0$.

Démonstration. — Rappelons que l'application $d : V \otimes V \to \mathbb{C}$ est définie par (3.6). On remarque que $g(v_{n,m}^{(j)}) \in \widetilde{\mathcal{F}}(n-1,m-1)$ et est de plus haut poids $n+m-2j = (n-1)+(m-1)-2(j-1)$. On peut alors utiliser la remarque précédant l'énoncé: on a $g(v_{n,m}^{(j)}) = \gamma\, v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$, où γ est un certain nombre complexe. Pour calculer γ, il suffit par exemple de comparer les coefficients devant $v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)}$ dans $g(v_{n,m}^{(j)})$ et $v_{n-1,m-1}^{(j-1)}$. Comme

$$\Delta(Y^i) = \sum_{s=0}^{i} q^{s(i-s)} \frac{[i]_q!}{[s]_q![i-s]_q!} (Y^s K^{s-i}) \otimes Y^{i-s}$$

(*cf.* par exemple [9]), nous avons

$$g\left(Y^i v_0^{\otimes n} \otimes Y^j v_0^{\otimes m}\right)$$
$$= \delta_{i0}[j]_q Y^i v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)} - \delta_{j0}[i]_q q^{i-j-n-1} Y^{i-1} v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^j v_0^{\otimes(m-1)},$$

où δ_{kl} est le symbole de Kronecker. Posons alors

$$c_{j,i}^{n,m} = (-1)^i \frac{[m-j+i]_q![n-i]_q!}{[i]_q![j-i]_q![m-j]_q![n]_q!} q^{-i(m-2j+i+1)}.$$

Nous avons donc

$$g(v_{n,m}^{(j)}) = (c_{j,0}^{n,m}[j]_q - c_{j,1}^{n,m} q^{-j-n+1})\, v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1} v_0^{\otimes(m-1)} + v,$$

où v est une combinaison linéaire de $Y^i v_0^{\otimes(n-1)} \otimes Y^{j-1-i} v_0^{\otimes(m-1)}$ avec $i \neq 0$. Or

$$c_{j,0}^{n,m}[j]_q - c_{j,1}^{n,m} q^{-j-n+1}$$
$$= \frac{[m-j]_q![n]_q![j]_q}{[j]_q![m-j]_q![n]_q!} + \frac{[m-j+1]_q![n-1]_q!}{[j-1]_q![m-j]_q![n]_q!} q^{-m+2j-2-n-j+1}$$
$$= \frac{[n]_q + [m-j+1]_q q^{-m-n+j-1}}{[j-1]_q![n]_q} = b_{n,m,j}\, c_{j-1,0}^{n-1,m-1},$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

PROPOSITION 5.4. — *L'application*

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n,m),(k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}((n,m),(k)))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Au vu du lemme 5.2, il nous reste à traiter le cas

$$|n-m| \leqslant k \leqslant n+m \ \text{ et } \ k \equiv n+m \bmod 2,$$

i.e. le cas où il existe un entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant \inf(n,m)$ et $n+m-2j=k$. D'après ce même lemme, les deux espaces sont de dimension 1; donc il suffit de montrer que $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{n,m,j}) \neq 0$. Comme

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j}) = (\mathrm{id}_{n-j} \otimes d \otimes \mathrm{id}_{m-j}) \cdots (\mathrm{id}_{n-1} \otimes d \otimes \mathrm{id}_{m-1})$$

et $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,0}) = \mathrm{id}_{n+m}$, on obtient, en appliquant le lemme 5.3,

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j} \cdots b_{n-j+1,m-j+1,1}\, v_{n-j,m-j}^{(0)}.$$

Or, pour $\widehat{\mathcal{D}}_{n,m,j} = f_k\, \mathcal{D}_{n,m,j}(f_n \otimes f_m)$, on a

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}_{n,m,j}) = f_k \mathcal{F}(\mathcal{D}_{n,m,j})(f_n \otimes f_m),$$
$$(f_n \otimes f_m)(v_{n,m}^{(j)}) = v_{n,m}^{(j)},$$
$$f_k(v_0^{\otimes k}) = v_0^{\otimes k},$$
$$v_{n-j,m-j}^{(0)} = v_0^{\otimes k},$$

car $v_{n,m}^{(j)} \in \widetilde{\mathcal{F}}(n,m)$ et $v_0^{\otimes k} \in \widetilde{\mathcal{F}}(k)$. Comme tous les $b_{n,m,j}$ sont non nuls, $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) \neq 0$. □

5.2. Cas de $\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,(k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(k))$

Nous allons maintenant établir la pleine fidélité dans le cas où s est une suite de longueur quelconque. Fixons un entier $m \geqslant 3$ et des entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_m$. Nous notons s la suite $(n_1, \ldots, n_m)$ et s' la suite tronquée $(n_1, \ldots, n_{m-1})$. Nous fixons également un entier positif k. Nous appellerons *espace de plus haut poids* j d'un module W le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs de W de plus haut poids j.

Soit $\{b_1, \ldots, b_N\}$ l'ensemble des entiers tel que pour tout $j = 1, \ldots, N$, la dimension p_j de l'espace de plus haut poids b_j de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$ soit strictement positive et tel qu'il existe un entier ℓ_j vérifiant $0 \leqslant \ell_j \leqslant \inf(b_j, n_m)$ et $b_j + n_m - 2\ell_j = k$. (Les notations ne signifient pas que cet ensemble est non vide). Les deux lemmes suivants justifient la donnée de cet ensemble.

LEMME 5.5. — *Supposons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Alors l'ensemble $\{b_1, \ldots, b_N\}$ est non vide.*

Démonstration. — Soit v un vecteur de plus haut poids k dans $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous avons

$$\widetilde{\mathcal{F}}(s) \cong \widetilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(n_m).$$

D'après la formule 4.4, il existe un vecteur w de plus haut poids b et un entier ℓ tel que $v = v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell)$, avec $0 \leqslant \ell \leqslant \inf(b, n_m)$ et $b + n_m - 2\ell = k$. □

Pour tout $j = 1, \ldots, N$, soit $w_1^j, \ldots, w_{p_j}^j$ une base de l'espace de plus haut poids b_j de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$.

LEMME 5.6. — *Supposons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Alors la famille $(v_p^j) = v(w_p^j, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)$, $j = 1, \ldots, N$ et $p = 1, \ldots, p_j$, forme une base de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que ces vecteurs sont bien dans $\widetilde{\mathcal{F}}(s) = \widetilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(n_m)$ puisque $w_p^j \in \widetilde{\mathcal{F}}(s')$ et $v_0^{\otimes n_m} \in \widetilde{\mathcal{F}}(n_m)$. Avec les notations rattachées à la formule (4.4), posons $W = \widetilde{\mathcal{F}}(s')$ et $W' = \widetilde{\mathcal{F}}(n_m)$. Puisque $0 \leqslant j \leqslant \inf(b_j, n_m)$ et $k = b_j + n_m - 2\ell_j$, les vecteurs v_p^j sont des vecteurs de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Ils sont linéairement indépendants car les vecteurs $(Y^i w_p^j)$ (où $i = 1, \ldots, \ell_j$, $p = 1, \ldots, p_j$ et $j = 1, \ldots, N$) le sont par construction.

Soit alors $v \in \widetilde{\mathcal{F}}(s)$ un vecteur de plus haut poids k. Puisque $W' \cong V_{n_m}$, tous ses vecteurs de plus haut poids sont proportionnels à $v_0^{\otimes n_m}$ et de poids n_m, et donc, d'après la formule (4.4), il existe $w \in W$ de plus haut poids b tel que $v = v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell)$ et tel que $0 \leqslant \ell \leqslant \inf(b, n_m)$ et $k = b + n_m + \ell$. Donc $b = b_j$ et $\ell = \ell_j$ pour un certain j; donc $w = \sum_{p=1}^{p_j} \lambda_p w_p^j$, $\lambda_p \in \mathbf{C}$, et $v = \sum_{p=1}^{p_j} \lambda_p v_p^j$, ce qui prouve que les vecteurs v_p^j forment une base de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. □

Pour tout $j = 1, \ldots, N$, on note $\{\mathcal{D}_{j,p}\}_{p=1,\ldots,p'_j}$ l'ensemble des diagrammes du bon type $(s', (b_j))$. On pose

$$\overline{\mathcal{D}_{j,p}} = \mathcal{D}_{b_j, n_m, l_j}(\mathcal{D}_{j,p} \otimes 1_{n_m}), \tag{5.3}$$

$j = 1, \ldots N$, $p = 1, \ldots, p'_j$, où $\mathcal{D}_{b_j, n_m, l_j}$ est défini par la figure 4.

PROPOSITION 5.7. — *Soit $k \geqslant 0$. Alors l'ensemble des diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$, $j = 1, \ldots N$, $p = 1, \ldots, p'_j$ forme une base de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k))$.

Démonstration. — Nous allons montrer que les diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ sont distincts et du bon type $(s,(k))$ et que tout diagramme du bon type $(s,(k))$ est égal à un diagramme $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$. On conclura par le lemme 4.1.

Soit $\mathcal{D}$ un diagramme du bon type $(s,(k))$. Nous allons le transformer de la manière suivante : on remonte tous les brins s'attachant au bloc n_m des entrées (et uniquement ceux-ci), puis on divise $\mathcal{D}$ en deux diagrammes $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2$, qui sont uniquement déterminés par $\mathcal{D}$. La figure 5 donne l'idée de la construction.

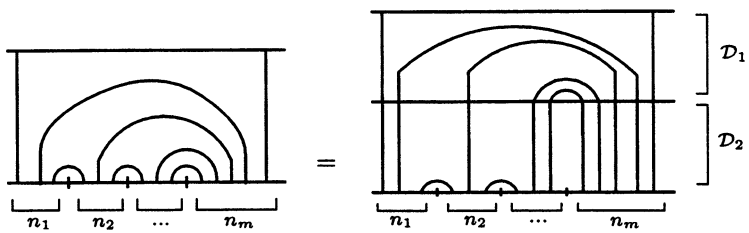


Figure 5.

Celle-ci implique tout d'abord que $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}' \otimes 1_{n_m}$. Le diagramme $\mathcal{D}'$ est du bon type $(s',(b))$ où $b \geqslant 0$ est un entier non encore déterminé. En effet, les entrées de $\mathcal{D}'$ sont celles de $\mathcal{D}$. En ce qui concerne les sorties, il faut montrer qu'il n'y a pas d'arc les reliant. Or les brins s'attachant aux sorties de $\mathcal{D}'$ proviennent soit d'un brin reliant une entrée et une sortie de $\mathcal{D}$, soit d'un arc reliant une entrée de $\mathcal{D}$ à une entrée du bloc n_m, arc que l'on a remonté par la construction précédente. Dans les deux cas, ces brins ne peuvent relier deux sorties de $\mathcal{D}'$. De la même manière, on montre que $\mathcal{D}_1$ est du bon type $((b,n_m),(k))$. D'après le lemme 5.2, on sait alors que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_{b,n_m,\ell}$ où ℓ est un entier vérifiant $b+n_m-2\ell = k$ et $0 \leqslant \ell \leqslant \inf(b,n_m)$. Par définition des b_j, il existe j tel que $b = b_j$ et $\ell = \ell_j$.

Il reste à prouver que $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ et $\overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$ sont distincts dès que $j \neq j'$ ou $p \neq p'$. Notons t (resp. t') le nombre de brins du bloc d'entrées n_m de $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ (resp. $\overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$) reliant des sorties. Alors $t = n_m - j$ et $t' = n_m - j'$; donc si $j \neq j'$, alors $\overline{\mathcal{D}_{j,p}} \neq \overline{\mathcal{D}_{j',p'}}$. Si $j = j'$, alors $p \neq p'$ et donc $\mathcal{D}_{j,p} \neq \mathcal{D}_{j,p'}$, ce qui prouve la proposition. □

Nous allons maintenant démontrer deux propositions qui prouvent le théorème 5.1 dans le cas où t est de longueur 1. Rappelons pour cela que tout morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$ est uniquement déterminé par ses valeurs sur les vecteurs de plus haut poids de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$, et qu'il envoie tout vecteur de plus haut poids $k' \neq k$ sur 0. En particulier, la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$ est égale à la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$.

PROPOSITION 5.8. — *Pour tout entier $k \geqslant 0$, on a*

$$\dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,(k))\right) = \dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))\right).$$

Démonstration. — D'après la remarque précédente et le lemme 4.1, il suffit de démontrer que le nombre de diagramme du bon type $(s,(k))$ est égal à la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous allons démontrer ceci par récurrence sur la longueur m de s. Le cas $m = 2$ est l'objet du lemme 5.2. Supposons alors que pour tout $\widetilde{m} < m$, tout entier $\widetilde{k} \geqslant 0$ et tout objet $\widetilde{s}$ de longueur $\widetilde{m}$, le nombre de diagramme du bon type $(\widetilde{s},(\widetilde{k}))$ est égal à la dimension de l'espace de plus haut poids $\widetilde{k}$ de $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{s})$.

Montrons d'abord que l'existence d'un diagramme $\mathcal{D}$ du bon type $(s,(k))$ implique l'existence d'un vecteur de plus haut poids k dans $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous savons d'après la proposition 5.7 que $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ pour un unique couple (j,p), et donc il existe un diagramme $\mathcal{D}_{j,p}$ du bon type $(s',(b_j))$. Puisque s' est de longueur $m-1$, nous savons qu'il existe un vecteur $w \in \widetilde{\mathcal{F}}(s')$ de plus haut poids b_j par hypothèse de récurrence. Alors le vecteur $v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)$ est de plus haut poids $b_j + n_m - 2\ell_j = k$ d'après (4.4).

Réciproquement, si $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ admet un vecteur v de plus haut poids k, il existe, d'après la formule (4.4), un vecteur $w \in \widetilde{\mathcal{F}}(s')$ de plus haut poids b et un entier ℓ tel que $b + n_m - 2\ell = k$, tels que $v = v(w, v_0^{\otimes n_m}, \ell)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un diagramme $\mathcal{D}'$ du bon type $(s',(b))$. Puisque le diagramme $\mathcal{D}_{b,n_m,\ell}$ est bien défini (car $b + n_m - 2\ell = k$), le diagramme $\mathcal{D}_{b,n_m,\ell}(\mathcal{D}' \otimes 1_{n_m})$ également et est du bon type $(s,(k))$.

Nous venons de montrer qu'il n'y a pas de diagramme du bon type $(s,(k))$ si et seulement si la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ est nulle. Supposons maintenant cette dimension > 0. Reprenons les notations que nous avons utilisées pour définir les diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$. D'après la proposition 5.7 le nombre de diagrammes du bon type $(s,(k))$ est $p'_1 + \cdots + p'_q$. D'après le lemme 5.6, la dimension de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ est $p_1 + \cdots + p_q$. Or, par hypothèse de récurrence, nous avons $p'_j = p_j$, $1 \leqslant j \leqslant q$ puisque p_j est la dimension de l'espace de plus haut poids b_j de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$, ce qui prouve le lemme. □

Le théorème 5.1 est donc démontré lorsque t est de longueur 1 et si $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ ne contient pas de vecteur de plus haut poids k. Nous supposerons donc jusqu'à la fin du §5 que $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ contient un vecteur de plus haut poids k.

PROPOSITION 5.9. — *L'application*

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,(k)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Notons g la dimension commune de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,(k))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$. D'après la remarque précédant la proposition 5.8, il suffit de prouver qu'il existe une base $v_1,\dots,v_g$ de l'espace de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ telle que, si $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_g$ sont les diagrammes du bon type $(s,(k))$, il existe des nombres complexes $\alpha_1,\dots,\alpha_g$, tous non nuls tels que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_1)(v_1) = \alpha_1 v_0^{\otimes k}, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_{p'}) = 0 \quad \text{si } 1 \leqslant p' < p \leqslant g, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_p) = \alpha_p v_0^{\otimes k} \quad \text{si } p \leqslant g, \tag{5.6}$$

où $v_0^{\otimes k} \in V^{\otimes k}$. Nous démontrons ceci par récurrence sur la longueur m de s. Le cas $m = 2$ est l'objet du §5.1 où nous avons montré que $q = 1$, $p_1 = 1$, $g = 1$ et que

$$\mathcal{F}(D_{n,m,j})(v_{n,m}^{(j)}) = b_{n,m,j}\cdots b_{n-j+1,m-j+1,1} v_0^k.$$

Supposons $m \geqslant 3$. Pour tout $j = 1,\dots N$, nous choisissons une base w_p^j, $1 \leqslant p \leqslant p_j$, de l'espace de plus haut poids b_j de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$ telle que, pour tout $j = 1,\dots,N$, il existe, par hypothèse de récurrence, des nombres complexes $\alpha_{j,p}$ tous non nuls $(1 \leqslant p \leqslant p_j)$ tels que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,1})(w_1^j) = \alpha_{j,1} v_0^{\otimes b_j}, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^j) = 0 \quad \text{si } 1 \leqslant p' < p \leqslant p_j, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_p^j) = \alpha_{j,p} v_0^{\otimes b_j}, \quad \text{si } p \leqslant p_j. \tag{5.9}$$

Fixons alors un j et soient p et p' des entiers tel que $1 \leqslant p, p' \leqslant p_j$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v_{p'}^j) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j,n_m,\ell_j})\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p}\otimes 1_{n_m})(v_{p'}^j)\\ &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j,n_m,\ell_j})\left(\sum_{i=0}^{\ell_j} c_{\ell_j,i}^{b_j,n_m}\,(Y^i\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w_{p'}^j))\otimes(Y^{\ell_j-i}v_0^{\otimes n_m})\right)\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de la formule (4.4) et de la définition du vecteur $v_{p'}^j$ (*cf.* lemme 5.6). Si $p' < p$, la formule (5.8) implique que

$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v^j_{p'}) = 0$. Si $p = p'$, on a, d'après (4.4) et (5.9),

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v^j_{p'}) &= \mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j,n_m,\ell_j})\left(\alpha_{j,p}\sum_{i=0}^{\ell_j} c^{b_j,n_m}_{\ell_j,i}\,(Y^i v_0^{\otimes b_j})\otimes(Y^{\ell_j-i}v_0^{\otimes n_m})\right)\\ &= \alpha_{j,p}\,\mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j,n_m,\ell_j})\left(v(v_0^{\otimes b_j}, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)\right),\end{aligned}$$

qui est donc un vecteur de plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Or, d'après le §5.1 et le lemme 5.2, il existe $\gamma_j \neq 0$ tel que

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_{b_j,n_m,\ell_j})\left(v(v_0^{\otimes b_j}, v_0^{\otimes n_m}, \ell_j)\right) = \gamma_j v_0^{\otimes k}.$$

On en déduit que

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{D}_{j,p}})(v^j_{p'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p' < p,\\ \alpha_{j,p}\gamma_j\, v_0^{\otimes k} & \text{si } p' = p.\end{cases}$$

De plus, on peut toujours supposer $b_1 > \cdots > b_N$. Par conséquent, $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w^{j'}_{p'}) = 0$, pour tous $j' < j$, $1 \leqslant p \leqslant p_j$ et $1 \leqslant p' \leqslant p_{j'}$. En effet, rappelons tout d'abord que $w^{j'}_{p'} \in \widetilde{\mathcal{F}}(s')$ $(1 \leqslant j' \leqslant N,\ 1 \leqslant p' \leqslant p_{j'})$ et que $\mathcal{D}_{j,p} \in E_{|s'|,b_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant N,\ 1 \leqslant p \leqslant p_j)$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w^{j'}_{p'})$ a bien un sens. Ensuite, remarquons que $w^{j'}_{p'}$ est de plus haut poids $b_{j'} > b_j$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w^{j'}_{p'}) \in V^{\otimes b_j}$ l'est également. Mais rappelons (*cf.* (4.3)) que tous les vecteurs de plus haut poids de $V^{\otimes b_j}$ ont un poids inférieur à b_j, ce qui prouve que $\mathcal{F}(\mathcal{D}_{j,p})(w^{j'}_{p'}) = 0$.

En renumérotant alors les vecteurs $\{v^j_p\}_{\substack{p=1,\dots p_j\\ j=1,\dots,N}}$ et les diagrammes $\{\overline{\mathcal{D}_{j,p}}\}_{\substack{p=1,\dots p_j\\ j=1,\dots,N}}$ selon l'ordre

$$v^1_1,\ v^1_2,\dots,v^1_{p_1},\ v^2_1,\dots,v^2_{p_2},\dots,\dots,v^j_p,\ v^j_{p+1},\dots,v^N_1,\dots,v^N_{p_N},$$

(et l'ordre correspondant pour les diagrammes), nous obtenons deux familles satisfaisant aux conditions de l'énoncé. □

5.3. Démonstration du théorème 5.1

D'après [9], XIV.2.2, pour tout triplet d'objets (U, V, W) d'une catégorie rubanée, l'application $\sharp : \mathrm{Hom}(U\otimes V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W\otimes V^*)$ donnée par

$$f^\sharp = (f\otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_U \otimes b_V),$$

et l'application $\flat : \mathrm{Hom}(U, W \otimes V^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U \otimes V, W^*)$ donnée par

$$g^\flat = (\mathrm{id}_W \otimes b_V)(g \otimes \mathrm{id}_V),$$

sont des bijections inverses l'une de l'autre. Dans le cas des catégories $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{R}(q)$, ce sont en outre des isomorphismes d'espaces vectoriels. Soit alors s et t deux objets quelconques de $\mathcal{V}(a)$. On suppose que t est de longueur > 1. Soit $k > 0$ l'entier et $\tilde{s}$ la suite tels que $t = \tilde{s} \otimes (k)$. Nous allons démontrer le théorème 5.1 par récurrence sur la longueur de la suite t. Le cas où t est de longueur 1 (ou 0) a été démontré au §5.2. D'après l'hypothèse de récurrence, l'application

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s \otimes (k), \tilde{s}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s \otimes k), \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})\right)$$

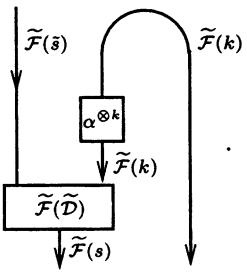
est un isomorphisme. Par conséquent, l'application qui à $\widehat{\mathcal{D}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, t)$ associe

$$\left(\widetilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat)\right)^\sharp \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(k)^*\right)$$

est un isomorphisme. Or

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat) &= \left(\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{d}_k)\right)\left(\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(k)}\right) \\ &= \left(\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (d_{\widetilde{\mathcal{F}}(k)}(\alpha^{\otimes k} \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(k)}))\right)\left((\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(k)})\right),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du lemme 3.3. En utilisant la représentation graphique des morphismes dans une catégorie rubanée (donnée, par exemple, dans [9], chap. XIV, ou [24], chap. I), nous obtenons

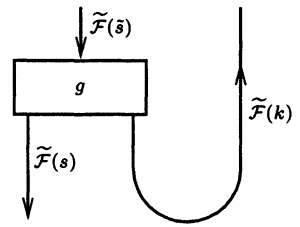
$\widetilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat) =$ 

.

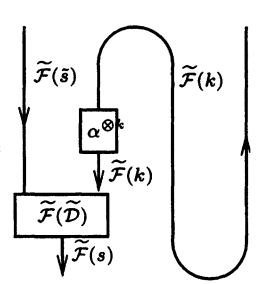
Or, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s \otimes k), \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})\right)$, alors

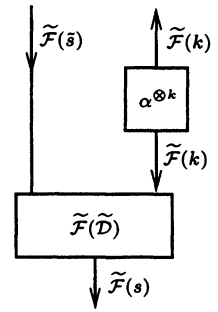
$$g^\sharp \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(k)^*\right)$$

et

$g^\sharp =$ 

On en déduit que

$\left(\widetilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat)\right)^\sharp =$ 

$=$ 

$= (\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes \alpha^{\otimes k})\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}).$

Or

$$(\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes k}) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s}) \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(k)^*\right) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(t)\right)$$

est un isomorphisme, donc l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,t) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}(q)}\left(\widetilde{\mathcal{F}}(s), \widetilde{\mathcal{F}}(t)\right)$$

qui envoie $\widehat{\mathcal{D}}$ sur $\widetilde{\mathcal{F}}(\widehat{\mathcal{D}}) = (\mathrm{id}_{\widetilde{\mathcal{F}}(\tilde{s})} \otimes (\alpha^{-1})^{\otimes k})\left(\widetilde{\mathcal{F}}((\widehat{\mathcal{D}})^\flat)\right)^\sharp$ est un isomorphisme. □

6. Pleine fidélité : cas d'une racine de l'unité

Nous fixons un nombre complexe a qui une racine primitive $4r^{\text{ème}}$ de l'unité avec $r \geqslant 3$. Posons $q = a^2$. Rappelons que l'ensemble $J = J(a)$ défini au §2.4 est l'ensemble $\{1, \ldots, r-2\}$. Nous allons démontrer que le foncteur $\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{V}}(a) \to \overline{\mathcal{R}}(q)$ est pleinement fidèle. D'après le corollaire 3.4, il ne nous reste qu'à démontrer la surjectivité de l'application

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s,s') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(s')) \tag{6.1}$$

pour toute paire (s,s') d'objets de $\overline{\mathcal{V}}(a)$, ce qui achèvera la démonstration du théorème 2.1.

Remarquons qu'il suffit de vérifier que, pour tout objet s de $\overline{\mathcal{V}}(a)$ et tout entier $k \geqslant 0$, le foncteur $\overline{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s,(k)) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, la démonstration donnée au §5.3 s'étend mot pour mot au cas d'une racine de l'unité. Or nous savons que si P, Z et W sont des $U_q(sl_2)$-modules de dimension finie avec Z négligeable, alors

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{R}(q)}(P \oplus Z, W) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{R}(q)}(P, W),$$

(les notations sont celles de §1.3). Il suffit donc de considérer les cas où la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ contient un vecteur de plus haut poids k, puisque dans le cas contraire, $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(s),\widetilde{\mathcal{F}}(k)) = 0$, ce qui entraîne $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{V}}(a)}(s,(k)) = 0$ d'après le corollaire 3.4.

Nous sommes donc réduits à montrer la surjectivité de l'application

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s,(k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s),\overline{\mathcal{F}}(k)) \tag{6.2}$$

pour toute suite s et pour tout plus haut poids k de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous allons procéder par récurrence sur la longueur m de s. Si $m = 1$, on procède comme dans le cas générique. Au §6.1, nous considérons le cas $m = 2$.

6.1. Cas m = 2

Fixons deux entiers $n_1, n_2 \in J$ et k un entier $\geqslant 0$ tel que la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(n_1,n_2)$ contienne un vecteur de plus haut poids k. D'après 4.1 et 4.2, ceci équivaut à

$$k \leqslant \inf(n_1+n_2, 2r-4-n_1-n_2) \quad \text{et} \quad k = n_1+n_2-2j,$$

pour un certain entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant \inf(n_1,n_2)$.

PROPOSITION 6.1. — *L'application*

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}((n_1,n_2),(k)) \to \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\widetilde{\mathcal{F}}(n_1,n_2),\widetilde{\mathcal{F}}(k))$$

est surjective.

Démonstration. — Au vu du §5.1, il suffit d'établir que le scalaire $b_{n_1-i,n_2-i,j-i} \neq 0$ pour tout $i = 0,\ldots,j-1$. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de le prouver pour $i = 0$. En effet, le triplet $(n_1-i, n_2-i, j-i)$ vérifie les conditions imposées à (n_1,n_2,j) pour tout $i = 0,\ldots,j-1$. Rappelons que

$$b_{n_1,n_2,j} = q^{-n_2+j-1}\frac{[n_1+n_2-j+1]_q}{[n_1]_q}.$$

Nous devons montrer que $[n_1 + n_2 - j + 1]_q \neq 0$. Comme $[n]_q = 0$ si et seulement si $n \equiv 0 \bmod r$, il suffit de montrer que $0 < n_1 + n_2 - j + 1 < r$. Or, $j \leqslant \inf(n_1, n_2)$, donc $n_1 + n_2 - j + 1 > 0$. De plus,

$$n_1 + n_2 - 2j \leqslant \inf(n_1 + n_2, 2r - 4 - n_1 - n_2),$$

donc $j \geqslant n_1 + n_2 - r + 2$ et par conséquent $n_1 + n_2 - j + 1 \leqslant r - 1$. □

6.2. Cas $\mathbf{m \geqslant 3}$

On part d'un objet s de longueur $m \geqslant 3$. Soit $s' = (n_1, \ldots, n_{m-1})$ l'objet de $\mathcal{V}(a)$ défini par $s = s' \otimes (n_m)$. Soit k un entier $\geqslant 0$ tel que la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ contienne un vecteur de plus haut poids k. Par récurrence, nous admettons que l'application 6.2 est surjective pour tout objet de longueur $< m$.

Par analogie avec le cas générique, soit $\{b_1, \ldots, b_N\}$ l'ensemble des entiers tel que pour tout $j = 1, \ldots, N$, la dimension p_j de l'espace de plus haut poids b_j de la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$ soit strictement positive et tel qu'il existe un entier ℓ_j vérifiant $0 \leqslant \ell_j \leqslant \inf(b_j, n_m)$ et $b_j + n_m - 2\ell_j = k$. Comme au §5.2, les deux lemmes suivant justifient la donnée de cet ensemble.

LEMME 6.2. — *Avec les notations précédente, l'ensemble* $\{b_1, \ldots, b_N\}$ *est non vide.*

Démonstration. — Décomposons $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$ en ses parties semisimples et négligeables : $\widetilde{\mathcal{F}}(s') \cong P' \oplus Z'$. Alors

$$\widetilde{\mathcal{F}}(s) \cong \widetilde{\mathcal{F}}(s') \otimes \widetilde{\mathcal{F}}(n_m) \cong (P' \otimes V_{n_m}) \oplus (Z' \otimes V_{n_m}).$$

Puisque $P' \cong \bigoplus_{i=1}^{d} V_{k_i}$ avec $0 \leqslant k_i \leqslant r - 2$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, nous avons

$$P' \otimes V_{n_m} \cong \bigoplus_{i=1}^{d} (V_{k_i} \otimes V_{n_m}).$$

Or, d'après (4.2),

$$V_{k_i} \otimes V_{n_m} \cong \bigoplus_{\substack{t = |n_m - k_i| \\ t \equiv k_i + n_m \bmod 2}}^{\inf(k_i + n_m,\, 2r - 4 - k_i - n_m)} V_t \oplus Z \tag{6.3}$$

où Z est un module négligeable. De plus, nous savons qu'il existe un vecteur de plus haut poids k dans la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$. Nous en déduisons

que pour un certain k_i, il existe un indice t dans (6.3) tel que $t = k$, et donc, d'après (4.4), des entiers i et ℓ tels que $k_i + n_m - 2\ell = k$ et $0 \leqslant \ell \leqslant \inf(k_i, n_m)$, ce qui prouve que l'ensemble $\{b_1, \ldots, b_N\}$ est non vide. □

Pour tout $j = 1, \ldots, N$, soit $w_1^j, \ldots, w_{p_j}^j$ une base de l'espace de plus haut poids b_j de la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s')$. En procédant comme pour le lemme 5.6, on établit le lemme suivant.

LEMME 6.3. — *La famille de vecteurs* $v_p^j = v(w_p^j, v_0^{n_m}, \ell_j)$ $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant p \leqslant p_j$, *forme une base de l'espace de plus haut poids* k *de la partie semisimple de* $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$.

Nous poursuivons comme dans le cas générique. Toutefois, remarquons que la proposition 5.8 n'est pas valable dans le cas d'une racine de l'unité.

PROPOSITION 6.4. — *L'application*

$$\widetilde{\mathcal{F}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(k))$$

est surjective.

Démonstration. — Etablissons cette proposition par analogie avec la proposition 5.9, *i.e.* montrons qu'il existe une base $v_1, \ldots, v_{g'}$ de l'espace de plus haut poids k de la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$, des diagrammes $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{g'}$ du bon type $(s, (k))$ et des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{g'}$, tous non nuls tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{D}_1)(v_1) &= \alpha_1 v_0^{\otimes k}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_{p'}) &= 0 \qquad \text{si } 1 \leqslant p' < p \leqslant g', \\ \mathcal{F}(\mathcal{D}_p)(v_p) &= \alpha_p v_0^{\otimes k} \quad \text{si } p \leqslant g', \end{aligned}$$

où $g' = \dim\left(\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{R}}(q)}(\overline{\mathcal{F}}(s), \overline{\mathcal{F}}(k))\right)$. Puisque la dimension de l'espace de plus haut poids k de la partie semisimple de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ dans le cas d'une racine de l'unité est inférieure à la dimension de l'espace de plus haut poids de $\widetilde{\mathcal{F}}(s)$ dans le cas générique, on a $g' \leqslant g = \dim\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}(a)}(s, (k))\right)$. La démonstration de la proposition 5.9 s'adapte donc au cas présent dès que l'on remplace les espaces de plus haut poids par les espaces de plus haut poids des parties semisimples et le lemme 5.6 par le lemme 6.3. Nous conservons la définition des diagrammes $\overline{\mathcal{D}_{j,p}}$ et la proposition 5.7. □

A partir de la proposition 6.4 nous procédons comme dans la démonstration du théorème 5.1 à la fin du §5.2 qui s'applique encore ici pour ce

qui est de la surjectivité. En conclusion, l'application 6.2 est surjective pour tout $m \geqslant 3$.

Remerciements. — Je remercie Christian Kassel qui m'a soumis le problème. Son aide a été décisive pour l'élaboration de cet article.

Bibliographie

[1] ANDERSEN (H.H.). — Tensor products of quantized tilting modules, *Comm. Math. Phys.*, 149 (1) (1992), pp. 149–159.

[2] ANDERSEN (H.H.) and PARADOWSKI (J.). — Fusion categories arising from semisimple Lie algebras, *Comm. Math. Phys.*, 169 (3) (1995), pp. 563–588.

[3] CHARI (V.) and PRESSLEY (A.). — *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[4] DE CONCINI (C.) and KAC (V.G.). — Representations of quantum groups at roots of 1. In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, pp. 471–506, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[5] GOODMAN (F.M.) and DE LA HARPE (P.) and JONES (V.F.R.). — *Coxeter graphs and towers of algebras.* Springer-Verlag, New York, 1989.

[6] JANTZEN (J.C.). — *Lectures on quantum groups.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[7] JONES (V.F.R.). — Index for subfactors. *Invent. Math.*, 72 (1) (1983), pp. 1–25.

[8] JONES (V.F.R.). — Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math. (2)*, 126 (2) (1987), pp. 335–388.

[9] KASSEL (C.). — *Quantum groups.* Graduated Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] KASSEL (C.), ROSSO (M.) and TURAEV (V.). — *Quantum groups and knot invariants.* Panoramas et Synthèses, vol. 5, Société Mathématique de France. Paris, 1997.

[11] KAUFFMAN (L.H.). — *Knots and physics.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, second edition, 1993.

[12] KAZHDAN (V.) and WENZL (H.). — Reconstructing monoidal categories, In *I. M. Gel'fand Seminar*, pp. 111–136, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[13] KERLER (T.). — *Quantum groups, quantum categories and quantum field theory.* Dissertation, ETH, Zürich, 1992.

[14] KIRBY (R.) and MELVIN (P.). — The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl_2(\mathbf{C})$. *Invent. Math.*, 105 (3) (1991), pp. 473–545.

[15] LICKORISH (W.B.R.). — Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra. *Math. Ann.*, 290 (4) (1991), pp. 657–670.

[16] LICKORISH (W.B.R.). — Calculations with the Temperley-Lieb algebra. *Comment. Math. Helv.*, 67 (4) (1992), pp. 571–591.

[17] LUSZTIG (G.). — Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras. *Adv. in Math.*, 70 (2) (1988), pp. 237–249.

[18] MACLANE (D.). — *Categories for the working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[19] MORTON (H.R.). — Invariants of links and 3-manifolds from skein theory and from quantum groups. In *Topics in knot theory (Erzurum, 1992)*, pp. 107–155, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[20] RESHETIKHIN (N.) and TURAEV (V.G.). — Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103 (3) (1991), pp. 547–597.

[21] ROSSO (M.). — Finite-dimensional representations of the quantum analog of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra. *Comm. Math. Phys.*, 117 (4) (1988), pp. 581–593.

[22] TEMPERLEY (H.N.V.) and LIEB (E.H.). — Relations between the "percolation" and "colouring" problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the "percolation" problem. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 322 (1549) (1971), pp. 251–280.

[23] TURAEV (V.G.). — Operator invariants of tangles and R-matrices. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53 (5) (1989), pp. 1073–1107. Traduit dans *Math. USSR-Izv.* 35 (1990), pp. 441–444.

[24] TURAEV (V.G.). — *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* W. de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[25] WENZL (H.). — On sequences of projections. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 9 (1) (1987), pp. 5–9.