ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

CHRISTOPHE BAVARD

Disques extrémaux et surfaces modulaire

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 5, n° 2 (1996), p. 191-202

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1996_6_5_2_191_0>

© Université Paul Sabatier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol V, n° 2, 1996

Disques extrémaux et surfaces modulaires(*)

CHRISTOPHE BAVARD(1)

À Sophie,
pour son 0-ième anniversaire

RÉSUMÉ. — Soit X une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 munie de sa métrique de Poincaré. On détermine la taille maximale des disques métriques plongés dans X, ainsi que la taille minimale des disques recouvrant X. Un disque extrémal est un disque plongé (resp. recouvrant) de rayon maximal (resp. minimal). On montre que les surfaces de Riemann portant un disque extrémal sont nécessairement modulaires et on construit pour chaque genre un exemple de telle surface. On étudie aussi le cas des surfaces hyperboliques non orientables.

ABSTRACT. — Les X be a compact Riemann surface of genus ≥ 2 equipped with its Poincaré metric. We determine the maximal radius of an embedded metric disk in X and the minimal radius of a disk covering X. An extremal disk is an embedded (resp. covering) disk of maximal (resp. minimal) radius. We show that a surface which carries an extremal disk has to be modular and we construct for each genus an example of such a surface. We also study the case of non orientable hyperbolic surfaces.

1. Introduction

Soit X une surface de Riemann compacte de genre ≥ 2 munie de "sa métrique de Poincaré" à courbure constante -1. On détermine la taille maximale des disques métriques *plongés* dans X, c'est-à-dire homéomorphes à un vrai disque, ainsi que la taille minimale des disques *recouvrant* X.

(*) Reçu le 08 juin 1994

(1) Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux, Université de Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex (France)

THÉORÈME . — *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. On pose $\beta_g = \pi/(12\,g - 6)$.*

1) Si un disque ouvert de rayon R est plongé dans X alors

$$\cosh R \leq \frac{1}{2\sin\beta_g}. \tag{1}$$

2) Si un disque fermé de rayon R recouvre X alors

$$\cosh R \geq \frac{1}{\sqrt{3}\tan\beta_g}. \tag{2}$$

3) Si l'une de ces deux bornes est atteinte par un certain disque, l'autre l'est aussi par un disque concentrique. Dans ce cas X est une surface modulaire.

4) Pour tout genre $g \geq 2$ ces bornes sont atteintes (simultanément) par certaines surfaces modulaires.

Comme conséquence, on a une estimation de deux invariants globaux de X : la systole $\ell(X)$ et le diamètre $d(X)$. La *systole*, en courbure négative, est la longueur minimale d'une géodésique fermée.

COROLLAIRE . — *Pour toute surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, on a :*

$$\cosh\frac{\ell(X)}{2} \leq \frac{1}{2\sin\beta_g} \quad \textit{et} \quad \cosh d(X) \geq \frac{1}{\sqrt{3}\,\tan\beta_g}.$$

Pour tout point x de X, notons $r(x)$ le rayon maximal d'un disque ouvert centré en x et plongé (rayon d'injectivité, sect. 2); notons de même $R(x)$ le rayon minimal d'un disque fermé centré en x qui recouvre X (rayon de recouvrement). La systole de X est alors donnée par $2\min_{x\in X} r(x)$ (grâce à la courbure négative) et dualement le diamètre de X vaut $\max_{x\in X} R(x)$.

Remarques

1. Les inégalités du corollaire ne sont pas optimales car les disques extrémaux sont en nombre fini (§ 3.2).

2. Il y a un énoncé analogue en genre 1 ; par homogénéité, l'estimation porte directement sur la systole et le diamètre : pour tout tore plat X d'aire 1 on a les inégalités optimales

$$\ell(X) \leq (2/\sqrt{3})^{1/2} \quad \text{et} \quad d(X) \geq (2/\sqrt{27})^{1/2}.$$

Les égalités sont réalisées simultanément par le tore plat équilatéral d'aire 1 (voir § 3.1 pour sa description comme surface modulaire).

3. Il y a également un résultat analogue pour les surfaces non orientables : voir section 4.

2. Preuve des inégalités

Les deux inégalités du théorème résultent d'estimations sur la densité des empilements et des recouvrements dans le plan hyperbolique. La preuve de ces résultats est rappelée en appendice.

Dans toute la suite, le revêtement universel de X est identifié au demi-plan de Poincaré H muni de la métrique hyperbolique (à courbure -1).

Soit $D(R)$ un disque de centre x et de rayon R plongé dans X. Tout point de $D(R)$ est joint au centre du disque par une géodésique, et celle-ci est unique à cause de la courbure négative. Les disques de rayon R centrés aux relevés de x dans le revêtement universel H forment donc un empilement de disques. À chaque centre p d'un tel empilement on associe classiquement une *cellule de Dirichlet-Voronoï*; il s'agit des points du plan dont la distance à l'ensemble de tous les centres est atteinte en p. Le plan est ainsi décomposé en cellules de Dirichlet-Voronoï (fig. 1). Ici la décomposition est invariante par l'action du groupe fondamental de X et chaque cellule est un domaine fondamental.

La densité des empilements de disques de même rayon R dans le plan hyperbolique est estimée de façon optimale par un théorème de K. Böröczky : la densité de chaque disque dans sa cellule de Dirichlet-Voronoï est majorée par la densité δ_R de trois disques mutuellement tangents dans le triangle engendré par leurs centres (voir [Bo] ou l'appendice). De plus cette densité maximale n'est atteinte que si la cellule est un polygone régulier d'angle $2\pi/3$ (ce qui est possible seulement pour un ensemble discret de valeurs de R). La densité δ_R s'exprime en fonction de l'angle α_R du triangle équilatéral de côté $2R$ par

$$\delta_R = \frac{3\alpha_R(\cosh R - 1)}{\pi - 3\alpha_R}\,.$$

L'aire de $D(R)$ vaut $2\pi(\cosh R - 1)$ tandis que l'aire de la cellule vaut $4\pi(g-1)$ $(= \operatorname{Aire} X)$; d'où l'inégalité :

$$\alpha_R \geq \frac{\pi}{6g-3}\,.$$

Comme α_R est déterminé par la relation $2\cosh R \sin(\alpha_R/2) = 1$, on obtient finalement la première assertion du théorème. En cas d'égalité, les cellules doivent être des polygones réguliers à $12g-6$ côtés, d'angle $2\pi/3$, et doivent donc former un pavage $\{12g-6\,,\,3\}$ du plan hyperbolique. Un pavage $\{p,q\}$ du plan est un pavage par des p-gones réguliers, avec q pavés autour de chaque sommet.

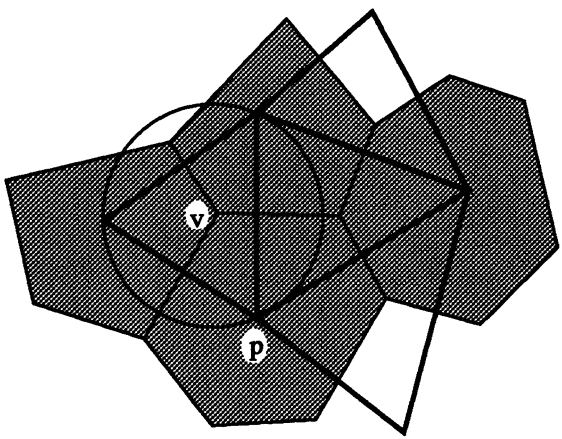

Fig. 1 Cellules de Dirichlet-Voronoï et de Delaunay.

Passons maintenant à la preuve de l'inégalité (2). L'idée est analogue et consiste à utiliser une densité de recouvrement. Soit v un sommet de la décomposition de Dirichlet-Voronoï associée à un recouvrement du plan hyperbolique par des disques de même rayon R. Les centres des cellules contenant v sont tous situés sur un cercle centré en v ; leur enveloppe convexe est appelée *cellule de Delaunay* associée à v (fig. 1). La décomposition "de Delaunay" ainsi définie est duale de celle de Dirichlet-Voronoï et permet d'estimer la densité du recouvrement. Soit T_R un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon R et soit Δ_R la densité dans T_R de trois disques de rayon R centrés aux sommets de T_R. D'après un théorème de L. Fejes Tóth, la densité du recouvrement dans chaque cellule de Delaunay est minorée par Δ_R ; de plus il y a égalité si et seulement si la cellule de Delaunay est isométrique à T_R (voir [FT] ou l'appendice).

Si un disque (fermé) $D(R)$ recouvre X, ses relevés recouvrent le plan hyperbolique et la décomposition de Delaunay correspondante est invariante par l'action du groupe fondamental de X. Il existe donc une réunion finie de cellules de Delaunay $C_1, \ldots, C_k$ formant un domaine fondamental. Notons θ_i la somme des angles de C_i $(i = 1, \ldots, k)$; on a donc pour chaque i :

$$\theta_i(\cosh R - 1) \geq \Delta_R \operatorname{Aire} C_i \,.$$

Mais comme tous les sommets des cellules (i.e. les centres des disques relevés) sont identifiés dans X, la somme totale des angles de $C_1, \ldots, C_k$ vaut 2π. D'où l'inégalité :

$$2\pi(\cosh R - 1) \geq 4\pi(g-1)\Delta_R \,,$$

équivalente à une majoration de l'angle α'_R de T_R :

$$\alpha'_R \leq \frac{\pi}{6g-3} \,.$$

On conclut en exprimant α'_R en fonction de R :

$$\sqrt{3}\cosh R \tan\left(\frac{\alpha'_R}{2}\right) = 1 \,.$$

L'égalité implique que toutes les cellules de Delaunay sont des triangles équilatéraux d'angle $\pi/(6g-3)$. En conséquence, les cellules de Dirichlet-Voronoï forment un pavage $\{12\,g - 6\,, 3\}$ comme pour le premier cas d'égalité, tandis que celles de Delaunay forment un pavage dual $\{3\,, 12\,g-6\}$. Nous verrons au paragraphe 3.1 que la surface X est nécessairement modulaire.

Nous dirons qu'une surface X réalisant l'égalité dans (1) et (2) est *optimale*. À chaque disque extrémal est associé un graphe géodésique (l'image du bord de la cellule de Dirichlet-Voronoï) comprenant $4g - 2$ sommets de même valence 3 et $6g - 3$ arêtes de même longueur.

Remarque. — La même preuve s'applique en genre 1 pour les tores plats. Le cas d'égalité correspond au tore plat équilatéral.

3. Construction d'exemples

3.1 Exemples de surfaces optimales

Ce paragraphe est essentiellement algébrique. On montre en particulier que pour tout genre $g \geq 2$, il existe une surface modulaire réalisant l'égalité dans (1) et (2).

Soit X une surface optimale de genre g. On pose $N = 12g - 6$ et on note Π le groupe fondamental de X agissant par isométries sur H. Ce qui précède montre que Π est contenu dans le groupe d'isométries d'un pavage $\{N, 3\}$, c'est-à-dire dans un groupe triangulaire $T_{2,3,N}$. Rappelons que $T_{2,3,N}$ est engendré par les rotations d'angles respectifs π, $2\pi/3$, $2\pi/N$ autour des sommets d'un triangle d'angles $\pi/2$, $\pi/3$ et π/N. Mais $T_{2,3,N}$ est un quotient du groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (par la relation $t^N = 1$, où t est la translation $t(\tau) = \tau + 1$ agissant sur H) et il existe une application de $H^* = H \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ sur H équivariante pour les actions de Γ et de $T_{2,3,N}$. On voit donc que X est nécessairement une surface modulaire (quotient de H^* par un sous-groupe de Γ).

La discussion précédente est valable pour le genre 1, à condition de remplacer le plan hyperbolique par le plan euclidien. L'égalité est alors réalisée par le tore plat équilatéral qui, du point de vue conforme, s'identifie à la surface modulaire $\Gamma' \backslash H^*$, où Γ' est le groupe dérivé de $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Nous obtenons des exemples en genre supérieur en "ramifiant" ce cas particulier grâce à un lemme topologique.

LEMME . — *Pour tout $g \geq 2$ il existe un revêtement de degré $2g - 1$ du tore par la surface compacte orientable de genre g, revêtement ramifié en un seul point.*

Preuve. — Notons Σ_g la surface (topologique) compacte orientable de genre g à bord connexe non vide. Il s'agit de prouver l'existence d'un revêtement de Σ_1 par Σ_g, qui sera forcément de degré $2g - 1$. Et pour cela, il suffit de donner une action du groupe fondamental $\Pi_1(\Sigma_1) = \langle a, b, c \mid c = [a\,,\, b] \rangle$ sur l'ensemble $\{1, \ldots, 2g-1\}$, pour laquelle l'élément c (qui représente le bord de Σ_1) agit transitivement; la suspension d'une telle action sera un revêtement de degré $2g - 1$ de Σ_1 par une surface compacte orientable, connexe et à bord connexe, c'est-à-dire Σ_g. On remarque, pour

achever la preuve du lemme, que le cycle $(1, \ldots, 2g-1)$ est le commutateur des deux cycles $(1, g+1, \ldots, 2g-1)$ et $(1, 2, \ldots, g)$.

Revenons à la construction d'exemples géométriques. Le tore plat équilatéral, quotient d'un hexagone régulier (par identification des côtés opposés), est la réunion de 6 triangles plats équilatéraux. Le genre $g \geq 2$ étant fixé, on remplace chacun de ces 6 triangles par un triangle hyperbolique d'angles $\pi/3$, $\pi/3$ et $2\pi/N$, $N = 12\,g - 6$, le sommet d'angle $2\pi/N$ étant situé au centre O de l'hexagone. Le revêtement donné par le lemme (de degré $2g-1$ et ramifié en O) de cet objet géométrique est une surface X optimale avec des disques extrémaux centrés au point de ramification. Du point de vue conforme, X est une surface modulaire associée à un sous-groupe d'indice $2g-1$ de $\Gamma' \simeq \Pi_1(\Sigma_1)$.

Remarque. — L'entier $N = 12\,g - 6$ est précisément le nombre maximal de côtés des polygones convexes fondamentaux des surfaces de Riemann compactes de genre g.

3.2 Questions d'unicité

Il n'y a pas unicité des surfaces optimales (sauf si $g = 1$), et pour une surface optimale il n'y a pas unicité des disques extrémaux.

Considérons un polygone régulier P d'angle $2\pi/3$ à 18 côtés numérotés cycliquement. Soit X la surface de genre 2 obtenue par l'identification suivante des côtés par paires : $(1,15)\,(2,8)\,(3,10)\,(4,13)\,(5,16)\,(6,18)\,(7,11)$ $(9,14)\,(12,17)$. Si le disque extrémal correspondant était unique, son centre serait un point de Weierstrass (point fixe par l'involution hyperelliptique de X) ; vu la forme des identifications, il est clair que le centre de P n'est pas le relevé d'un point de Weierstrass.

Voici une deuxième surface optimale, notée Y, définie comme quotient de P par les identifications : $(1,10)\,(2,11)\,(3,18)\,(4,13)\,(5,8)\,(6,15)\,(7,16)$ $(9,12)\,(14,17)$. Cette fois le centre p de P est un point de Weierstrass. Montrons que le disque extrémal est unique (donc X et Y ne sont pas isomorphes). Supposons qu'il existe un autre pavage $\{18,3\}$ invariant par le groupe fondamental Π de Y. L'un des pavés est centré dans P en un point p' distinct de p. La distance entre deux centres distincts d'un pavage $\{18,3\}$ vaut $d_1 \simeq 3,438$, $d_2 \simeq 4,746$ ou est plus grande que $d_3 \simeq 5,496$. Il y a 5 éléments de Π dont les axes passent par p (correspondant aux 5 paires de côtés opposés identifiés), et le point p' est situé à une distance inférieure à $1,228$ de l'axe de l'un d'entre eux, disons γ. Rappelons par ailleurs que

la distance de déplacement d d'un point par un élément hyperbolique est donnée par

$$\sinh(d/2) = \sinh(\lambda/2)\cosh\delta$$

où λ est le déplacement sur l'axe et δ la distance du point à l'axe. Cette formule montre que la distance entre p' et $\gamma(p')$ vaut nécessairement d_1. D'où l'on conclut que p' est situé sur l'un des axes, qui ne peut être que l'axe $(4, 13)$. Soit m le milieu du côté 13; on peut supposer que p' est sur le segment $[p, m]$. Le déplacement d'un point de $[p, m]$ par l'élément $(9, 12)$ est insuffisant sauf aux extrémités p et m où il vaut d_1. On a donc $p' = m$, ce qui est absurde car m n'est pas correctement déplacé par l'élément $(2, 11)$.

Bien qu'une surface optimale puisse contenir plusieurs disques extrémaux, ceux-ci sont toujours *en nombre fini* ($g \geq 2$). En effet, l'ensemble des centres des disques extrémaux (qui est fermé) est discret. Vérifions-le pour les centres relevés dans le plan hyperbolique. Soit p un centre et γ un élément du groupe fondamental qui envoie p sur un centre voisin du pavage $\{12g-6, 3\}$ associé. On voit comme plus haut que tout centre assez proche de p doit se trouver à la même distance de l'axe de γ que p. Il en résulte que p est isolé dans l'ensemble des centres.

4. Le cas des surfaces non orientables

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux surfaces hyperboliques fermées non orientables. Elles vérifient des inégalités analogues à (1) et (2), où le rayon des disques est estimé en fonction de la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de la surface. Si l'on pose $\gamma_\chi = \pi/(6-6\chi)$, le rayon R d'un disque ouvert plongé est majoré par

$$\cosh R \leq \frac{1}{2\sin\gamma_\chi}\,, \tag{1'}$$

tandis que le rayon R d'un disque fermé recouvrant est minoré :

$$\cosh R \geq \frac{1}{\sqrt{3}\tan\gamma_\chi}\,. \tag{2'}$$

Ces relations s'étendent aux bouteilles de Klein plates d'aire 1 en remplaçant (1') et (2') par

$$R \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad R \geq \left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right)^{1/2}.$$

Si une surface atteint l'une de ces deux bornes, elle atteint forcément l'autre. Comme corollaire de (1′) et (2′) on a également une majoration de la systole et une minoration du diamètre.

La preuve de ces estimations géométriques est évidemment identique à celle du cas orientable. En revanche, la construction de surfaces optimales s'avère plus délicate.

THÉORÈME . — *Pour tout entier $\chi \leq 0$ il existe une surface hyperbolique (ou plate si $\chi = 0$) fermée non orientable de caractéristique d'Euler-Poincaré χ, qui est optimale pour (1′) et (2′) ci-dessus.*

Preuve. — Si $\chi = 0$, l'existence d'une surface optimale est déjà moins évidente que dans le cas orientable. Cependant une telle surface existe : c'est la *bouteille de Klein plate hexagonale*. On voit sur la figure 2 deux domaines fondamentaux dans le plan euclidien, l'un hexagonal et l'autre rectangulaire ; on voit aussi l'identification des côtés de l'hexagone par des symétries-translations (axes en pointillés) ainsi que les deux classes de sommets. Le rapport des côtés du rectangle fondamental vaut $2/\sqrt{3}$. Contrairement au cas du tore, cette bouteille n'est optimale ni pour la systole, ni pour le diamètre.

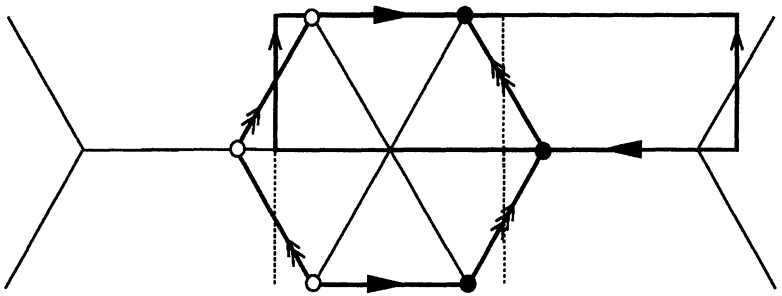

Fig. 2 La bouteille plate hexagonale.

On obtient ensuite une première famille d'exemples à partir d'une version non orientable du lemme (§ 3.1). Montrons que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un revêtement de degré impair $2k + 1$ de la bouteille de Klein par une surface non orientable, revêtement ramifié en un seul point. Considérons la bouteille de Klein privée d'un disque ouvert et notons $\Pi_1 = \langle a, b, c \mid c = a^2b^2 \rangle$ son groupe fondamental (le point base est pris sur le bord qui est représenté par c). On remarque que le cycle $\alpha = (1, \ldots, 2k+1)$ est un carré car il est d'ordre impair ; en envoyant a sur α^{-k} et b sur l'identité

on définit une action de Π_1 sur $\{1, \ldots, 2k+1\}$, action dont la suspension donne le revêtement S cherché (voir la preuve du lemme § 3.1). La caractéristique d'Euler-Poincaré de S vaut $-2k$ et on ne peut conclure immédiatement que S n'est pas orientable. Mais on peut choisir la présentation de Π_1 pour que les générateurs a et b soient les âmes de rubans de Möbius; comme par construction le revêtement est trivial au-dessus d'un voisinage de b, la surface S contient des rubans de Möbius. Enfin, pour obtenir une métrique optimale sur S, il suffit de remplacer les 6 triangles de la bouteille plate hexagonale (fig. 2) par des triangles hyperboliques *ad hoc*.

Il reste à prouver l'existence de surfaces optimales pour toute caractéristique *impaire*. Pour cela nous utilisons des revêtements triples du plan projectif P combinés avec certaines décompositions de P. Étant donné un entier $k \geq 1$, il existe un revêtement triple de P ramifié en $k+1$ points (preuve facile par suspension); ce revêtement n'est pas orientable puisque sa caractéristique vaut $1-2k$. D'autre part, pour chaque k, le plan projectif est le quotient d'un polygone $\mathcal{P}_k$ à $4k$ côtés, avec k classes à 3 sommets et k classes à un sommet; on définit par récurrence $\mathcal{P}_{k+1}$ à partir de $\mathcal{P}_k$ en remplaçant une paire d'arêtes identifiées (quelconque) $u \cdots u$ par $xzz^{-1}y \cdots xy$ (voir fig. 3). On a donc une décomposition de P en $4k$ triangles, que l'on identifie à des triangles hyperboliques d'angles $\pi/3$, $\pi/3$ et $\pi/6k$ pour le sommet au centre du polygone (fig. 3). Un revêtement triple de P ramifié aux $k+1$ points d'angle total $2\pi/3$ est une surface optimale de caractéristique $1-2k$.

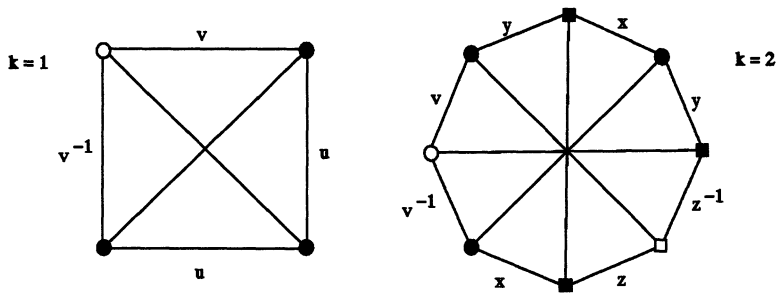

Fig. 3 Décompositions du plan projectif.

Appendice : les théorèmes de densité dans le plan hyperbolique

Nous rappelons ici la preuve des estimations de densité des empilements et des recouvrements dans le plan hyperbolique. Soit R un réel strictement positif. On note δ_R la densité de trois disques de rayon R mutuellement tangents dans le triangle équilatéral engendré par leurs centres. Cette densité dépend du rayon.

THÉORÈME [Bo]. — *Pour tout empilement de disques de même rayon R dans le plan hyperbolique, la densité de chaque disque dans sa cellule de Dirichlet-Voronoï est majorée par δ_R.*

En fait le résultat est valable en toute dimension ainsi qu'en géométrie euclidienne ou sphérique. Nous avons extrait de la preuve de [Bo] le cas du plan qui est considérablement plus simple qu'en dimension supérieure.

On note $h = h(R)$ le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral de côté $2R$. La première observation est que la distance entre les centres des disques et les sommets des cellules de Dirichlet-Voronoï est minorée par h; en effet, si l'on se place en un sommet d'une cellule, l'un des disques de l'empilement est vu sous un angle inférieur ou égal à $2\pi/3$. Soit D un disque de l'empilement, C sa cellule de Dirichlet-Voronoï et B le disque de rayon h concentrique à D. L'idée clé de la preuve consiste à remplacer C par $C \cap B$. La densité du disque D dans C est évidemment majorée par sa densité dans $C \cap B$. D'autre part $C \cap B$ se décompose en secteurs sphériques et en triangles rectangles (fig. 4). La densité de D dans chaque secteur vaut $(\cosh R - 1)/(\cosh h - 1)$ qui est strictement inférieur à δ_R. Il reste donc à estimer la densité δ d'un disque de rayon R centré en O dans un triangle OEF rectangle en E avec $OF = h$ et $OE \geq R$ (fig. 4). Une vérification élémentaire montre alors que δ est majorée par δ_R, avec égalité si et seulement si $OE = R$ (et l'angle (FE, FO) vaut $\pi/3$).

L'analyse précédente prouve aussi que la densité maximale n'est atteinte que si la cellule est un polygone régulier d'angle $2\pi/3$.

Passons au cas des recouvrements du plan hyperbolique par des disques de même rayon. Soit T_R un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon R, et Δ_R la densité dans T_R de trois disques de rayon R centrés aux sommets de T_R.

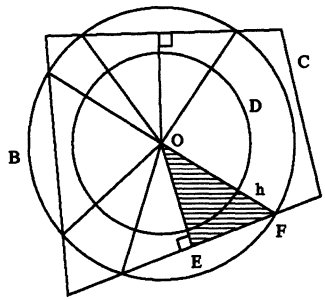

Fig. 4 Densité des empilements.

THÉORÈME [FT]. — *La densité de tout recouvrement du plan hyperbolique par des disques de même rayon R dans chaque cellule de Delaunay est minorée par Δ_R.*

Considérons une cellule de Delaunay C associée à un sommet v de la décomposition de Dirichlet-Voronoï (fig. 1). Les sommets de C sont situés sur un cercle de rayon inférieur ou égal à R centré en v. On subdivise au besoin C en triangles, sans rajouter de sommets. Il suffit alors d'estimer la densité pour chaque triangle T ainsi défini. La densité du recouvrement dans T est minorée par celle de trois disques centrés aux sommets de T; or cette dernière est proportionnelle à $(\pi/\operatorname{Aire} T) - 1$ (R étant fixé). Mais l'aire d'un triangle inscrit dans un cercle donné est maximale pour un triangle équilatéral, et cette aire maximale est fonction strictement croissante du rayon du cercle. On conclut que la densité du recouvrement dans la cellule de Delaunay C est minorée par Δ_R, avec égalité si et seulement si C est isométrique à T_R.

Bibliographie

[Bo] BÖRÖCZKY (K.) . — *Packing of spheres in spaces of constant curvature*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), pp. 243-261.

[FT] FEJES TÓTH (L.) . — *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **4** (1953), pp. 111-114.