ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.-J. STIELTJES

Recherches sur les fractions continues

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 4, n° 1 (1995), p. J1-J35

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1995_6_4_1_J1_0>

© Université Paul Sabatier, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RECHERCHES

SUR

LES FRACTIONS CONTINUES,

PAR M. T.-J. STIELTJES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude de la fraction continue

$$(1)\qquad \cfrac{1}{a_1 z+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3 z+\ddots+\cfrac{1}{a_{2n}+\cfrac{1}{a_{2n+1}z+\ddots}}}}},$$

dans laquelle les a_i sont des nombres réels et positifs, tandis que z est une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

En désignant par $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite qui ne dépend que des n premiers coefficients a_i, nous chercherons dans quels cas cette réduite tend vers une limite pour $n=\infty$ et nous aurons à approfondir la nature de cette limite considérée comme une fonction de z.

Nous allons résumer le résultat le plus essentiel de cette étude. Il y a deux cas à distinguer.

Premier cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est convergente.

Dans ce cas, on a, pour toute valeur finie de z,

$$\lim P_{2n}(z) = p(z),$$
$$\lim Q_{2n}(z) = q(z),$$
$$\lim P_{2n+1}(z) = p_1(z),$$
$$\lim Q_{2n+1}(z) = q_1(z),$$

$p(z), q(z), p_1(z), q_1(z)$ étant des fonctions holomorphes dans tout le plan qui satisfont à la relation

$$q(z)p_1(z) - q_1(z)p(z) = +1.$$

Ces fonctions sont du genre zéro et n'admettent que des zéros simples qui sont réels et négatifs.

Les réduites d'ordre pair et les réduites d'ordre impair tendent donc chacune vers une limite, mais ces limites sont différentes et peuvent se mettre aussi sous la forme d'une série de fractions simples

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\mu_1}{z+\lambda_1} + \frac{\mu_2}{z+\lambda_2} + \ldots + \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} + \ldots,$$
$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \frac{\nu_1}{z+\theta_1} + \frac{\nu_1}{z+\theta_2} + \ldots + \frac{\nu_k}{z+\theta_k} + \ldots,$$

$\mu_k, \lambda_k, \nu_k, \theta_k$ étant des nombres réels et positifs.

Second cas. — La série $\sum_1^\infty a_n$ est divergente.

Dans ce cas, les réduites tendent vers une limite finie quelle que soit la valeur de z; il faut excepter seulement les valeurs réelles et négatives de z, et considérer ainsi la partie négative de l'axe réel comme une coupure. Cette limite est une fonction analytique de z qui peut se mettre sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(u)\,du}{(z+u)^2} = \int_0^\infty \frac{d\Phi(u)}{z+u}.$$

Ici $\Phi(u)$ est une fonction réelle et croissante (non analytique, en général) qui croît de $\Phi(0) = 0$ jusqu'à $\Phi(\infty) = \frac{1}{a_1}$. Cette fonction $\Phi(u)$ peut d'ailleurs présenter des sauts brusques en nombre fini ou infini. La coupure sera ainsi une ligne de singularités essentielles dans le cas où $\Phi(u)$

présente des discontinuités dans tout intervalle (ce qu'il faut considérer comme le cas général) ou même lorsqu'elle est seulement non analytique.

On rencontre souvent sous des formes un peu différentes des fractions continues qui rentrent réellement dans le type (I) et auxquelles on peut ainsi appliquer nos théorèmes. D'abord, en posant

$$b_0 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}},$$

la fraction continue (I) peut s'écrire

$$(I^a) \qquad \cfrac{b_0}{z+\cfrac{b_1}{1+\cfrac{b_2}{z+\cfrac{b_3}{1+\cfrac{b_4}{z+\ddots}}}}},$$

et pour $tz = 1$

$$(I^b) \qquad \cfrac{b_0 t}{1+\cfrac{b_1 t}{1+\cfrac{b_2 t}{1+\cfrac{b_3 t}{1+\ddots}}}}$$

A l'aide de l'identité

$$z+\cfrac{b_1}{1+\cfrac{b_2}{\lambda}} = z+b_1-\frac{b_1 b_2}{b_2+\lambda},$$

la fraction continue (I^a) pourra se transformer en (I^c)

$$(I^c) \qquad \cfrac{b_0}{z+b_1-\cfrac{b_1 b_2}{z+b_2+b_3-\cfrac{b_3 b_4}{z+b_4+b_5-\ddots}}};$$

la $n^{\text{ième}}$ réduite de (I^c) est identique avec la $2n^{\text{ième}}$ réduite de (I) ou de (I^a). Cette fraction (I^c) est de la forme

$$(I^d) \qquad \cfrac{\lambda_0}{z+\alpha_1-\cfrac{\lambda_1}{z+\alpha_2-\cfrac{\lambda_2}{z+\alpha_3-\cfrac{\lambda_3}{z+\alpha_4-\ddots}}}},$$

avec des valeurs positives des λ_i, α_i. Cette forme (I^d) se rencontre assez

souvent; dès lors, il y a de l'intérêt à savoir si elle peut se mettre sous la forme (1^c) avec des valeurs *positives* des b_i, en sorte que nos théorèmes soient applicables. En identifiant on a

$$\begin{aligned} b_0 &= \lambda_0, & b_1 &= \alpha_1, \\ b_1 b_2 &= \lambda_1, & b_2 + b_3 &= \alpha_2, \\ b_3 b_4 &= \lambda_2, & b_4 + b_5 &= \alpha_3, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots\dots, & \end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement b_0, b_1, b_2, ..., et généralement

$$b_{2n} = \cfrac{\lambda_n}{\alpha_n - \cfrac{\lambda_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \cdots - \cfrac{\lambda_1}{\alpha_1}}},$$

puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$.

Cependant, il peut arriver que le calcul de ces b_i devienne compliqué et, puisqu'il s'agit seulement de savoir si ces quantités sont toutes positives ou non, on pourra quelquefois avec avantage se servir de la proposition suivante.

Les quantités b_i sont certainement toutes positives si l'on peut trouver une fonction positive de n, P_n ($P_1 = 0$), telle que

$$P_n < \alpha_n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}.$$

En effet, $b_2 = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}$ est positif et ne surpasse pas $\frac{\lambda_1}{\alpha_1 - P_1} \leqq P_2$. Or, si b_{2n-2} est compris entre 0 et P_n, on en conclura à cause de

$$b_{2n} = \frac{\lambda_n}{\alpha_n - b_{2n-2}},$$

que b_{2n} est positif, plus petit que $\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leqq P_{n+1}$.

Donc on aura généralement

$$0 < b_{2n} \leqq P_{n+1},$$

et puis $b_{2n-1} = \lambda_n : b_{2n}$ est aussi positif.

En particulier les b_i sont tous positifs dans les deux cas suivants :

1° Lorsque $\alpha_n \geqq 1 + \lambda_n$, puisque la proposition énoncée s'applique alors en prenant $P_n = 1$;

2° Lorsque $\alpha_{n+1} \geqq 1 + \lambda_n$, il suffit alors de prendre $P_n = \lambda_{n-1}$.

Considérons, par exemple, la fraction continue étudiée par Laguerre qui est de la forme (I^d) avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = n^2 \qquad (n \geq 1),$$
$$\alpha_n = 2n - 1.$$

Le calcul des b_i n'offre ici aucune difficulté et l'on trouve

$$b_0 = 1,$$
$$b_{2n-1} = b_{2n} = n \qquad (n \geq 1),$$

puis

$$a_{2n-1} = 1, \qquad a_{2n} = \frac{1}{n}.$$

Laguerre, en supposant z réel positif, a montré que la fraction continue est convergente et égale à

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}.$$

Il résulte maintenant de notre théorie que cette proposition s'étend à toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, en faisant exception pour les valeurs réelles et négatives.

Considérons, en second lieu, la fraction continue que nous avons rencontrée dans ces *Annales*, t. III, et qui est encore de la forme I^d, abstraction faite du changement de z en z^2. On a

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = (2n-1)(2n)^2(2n+1)\,k^2,$$
$$\alpha_n = (2n-1)^2(1+k^2),$$

k^2 étant une quantité positive. Le calcul des b_i se complique ici. Mais si l'on prend

$$P_n = \frac{n-1}{2n-1}\alpha_n, \qquad \alpha_n - P_n = \frac{n}{2n-1}\alpha_n,$$

l'inégalité

$$\frac{\lambda_n}{\alpha_n - P_n} \leq P_{n+1}$$

se réduit à

$$4k^2 \leq (1+k^2)^2,$$

et se trouve donc satisfaite. La fraction continue considérée appartient donc encore au type que nous avons étudié.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES POLYNOMES $P_n(z)$, $Q_n(z)$.

1. Considérons une suite de nombres $N, N_1, N_2, \ldots$, liés par les relations

$$\begin{aligned} N &= a_1 N_1 + N_2, \\ N_1 &= a_2 N_2 + N_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ N_{k-1} &= a_k N_k + N_{k+1}. \end{aligned}$$

On pourra exprimer successivement N par N_1 et N_2, par N_2 et N_3, par N_3 et N_4, etc.

$$N = (a_1 a_2 + 1) N_2 + a_1 N_3 = (a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3) N_3 + (a_1 a_2 + 1) N_4 + \ldots.$$

Introduisons un symbole

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k],$$

déterminé par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} [a_1] = a_1, \qquad [a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1, \\ [a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] a_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-2}], \end{cases}$$

on aura

$$(2) \qquad N = [a_1, a_2, \ldots, a_k] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+1}.$$

Il est clair que N, N_k, N_{k+l} sont liés par une relation linéaire et homogène. Il est facile d'obtenir cette relation. Multiplions (2) par a_{k+1} et remplaçons $a_{k+1} N_{k+1}$ par $N_k - N_{k+2}$, on aura

$$[a_{k+1}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}] N_k - [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+2};$$

multiplions par a_{k+2} et ajoutons, membre à membre, à (2), il vient

$$[a_{k+1}, a_{k+2}] N = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}] N_k + [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+3},$$

et il est clair qu'on aura généralement

$$(3) \qquad \begin{aligned} &[a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+l-1}] N \\ &\quad = [a_1, a_2, \ldots, a_{k+l-1}] N_k + (-1)^{l+1} [a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}] N_{k+l}. \end{aligned}$$

De là, nous allons déduire une identité dont nous aurons besoin dans la suite. En remplaçant k par α, l par $\beta+\gamma+1$, on a

$$(4)\quad [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]N = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]N_\alpha + (-1)^{\beta+\gamma}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1}.$$

D'autre part, en éliminant $N_{\alpha+\beta+1}$ entre les formules

$$[a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}]N = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]N_\alpha + (-1)^{\beta}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+1},$$

$$[a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]N = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]N_{\alpha+\beta+1} + (-1)^{\gamma+1}[a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

on obtient la relation entre N, N_α, $N_{\alpha+\beta+\gamma+1}$ sous la forme

$$(5)\quad \Delta N = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}]\{[a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}]N_\alpha + (-1)^{\beta+\gamma}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1}\},$$

où

$$\Delta = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}] + (-1)^{\beta+1}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

La comparaison de (4) et (5) montre qu'on a identiquement

$$\Delta = [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].$$

Nous avons donc cette relation

$$(A)\quad \begin{aligned}&[a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \\ &= [a_1, \ldots, a_{\alpha+\beta}] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}] \\ &\quad + (-1)^{\beta}[a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+\beta+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta+\gamma}].\end{aligned}$$

Il est utile de noter certains cas particuliers. Pour $\beta = 0$, on a

$$(B)\quad [a_1, \ldots, a_{\alpha+\gamma}] = [a_1, \ldots, a_\alpha] \times [a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+\gamma}] + [a_1, \ldots, a_{\alpha-1}] \times [a_{\alpha+2}, \ldots, a_{\alpha+\gamma}],$$

et pour $\alpha = \gamma = 1$,

$$(C)\quad [a_1, \ldots, a_{\beta+2}] \times [a_2, \ldots, a_{\beta+1}] = [a_1, \ldots, a_{\beta+1}] \times [a_2, \ldots, a_{\beta+2}] + (-1)^{\beta}.$$

Pour $\gamma = 1$, la relation (B) reproduit la loi de récurrence (1); pour $\alpha = 1$, il vient

$$(6)\quad [a_1, \ldots, a_{\gamma+1}] = a_1[a_2, \ldots, a_{\gamma+1}] + [a_3, \ldots, a_{\gamma+1}].$$

On en conclut facilement

$$\frac{[a_1, \ldots, a_k]}{[a_2, \ldots, a_k]} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}},$$

tandis que, d'après (1),

$$\frac{[a_1, \ldots, a_k]}{[a_1, \ldots, a_{k-1}]} = a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \ddots + \frac{1}{a_1}}.$$

D'après ce qui précède, cette dernière fraction continue est aussi égale à $\frac{[a_k, \ldots, a_1]}{[a_{k-1}, \ldots, a_1]}$, d'où il est facile de conclure

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k] = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1]. \tag{7}$$

Il est clair que le symbole $[a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n]$ est linéaire par rapport à un quelconque des éléments a_k et, à l'aide de (B), on trouve facilement

$$[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-1}] \times [a_{k+1}, \ldots, a_n] a_k + \mathfrak{R}, \tag{8}$$

où $\mathfrak{R}$ est indépendant de a_k et peut se mettre sous les formes

$$\mathfrak{R} = [a_1, \ldots, a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n] = [a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1} + a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n].$$

Enfin, on s'assure encore facilement des relations suivantes, où m est un nombre quelconque,

$$\begin{cases} \left[ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \frac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}\right] = [a_1, a_2, \ldots, a_{2n}], \\ \left[ma_1, \frac{a_2}{m}, ma_3, \frac{a_4}{m}, \ldots, ma_{2n-1}, \frac{a_{2n}}{m}, ma_{2n+1}\right] = m \times [a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}], \end{cases} \tag{9}$$

2. Il est clair, d'après ce qui précède, que les numérateurs et les dénominateurs des réduites de notre fraction continue s'expriment de la façon suivante à l'aide du symbole $[a_1, \ldots, a_n]$ que nous avons introduit

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots a_{2n-1} z, a_{2n}], \\ Q_{2n}(z) &= [a_1 z, a_2, a_3 z, \ldots, a_{2n}], \\ P_{2n+1}(z) &= [a_2, a_3 z, a_4, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1} z], \\ Q_{2n+1}(z) &= [a_1 z, a_2, \ldots, a_{2n+1} z]. \end{aligned}$$

Nous désignerons par $P_n^k(z)$, $Q_n^k(z)$ ce que deviennent $P_n(z)$, $Q_n(z)$ lorsqu'on remplace partout a_i par a_{i+k}. Les formules du n° 1 donneront ainsi des relations identiques entre ces polynomes en changeant a_i en $a_i z$,

lorsque i est impair. On a ainsi les formules

$$Q_{2n}(z) = a_{2n}Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z),$$
$$Q_{2n+1}(z) = a_{2n+1}zQ_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z).$$

On s'aperçoit facilement qu'on a généralement

$$P_{2n}(z) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 z + \ldots + \mathfrak{A}_{n-1}z^{n-1},$$
$$Q_{2n}(z) = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 z + \ldots + \mathfrak{B}_n z^n,$$
$$P_{2n+1}(z) = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 z + \ldots + \mathfrak{C}_n z^n,$$
$$Q_{2n+1}(z) = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1 z + \ldots + \mathfrak{D}_{n+1}z^{n+1},$$

les coefficients étant des polynomes des a_i. La loi générale de ces coefficients est un peu compliquée; elle ne nous serait d'ailleurs d'aucune utilité, mais on reconnaît facilement les quelques expressions suivantes qui nous seront utiles.

$$\mathfrak{A}_0 = a_2 + a_4 + \ldots a_{2n},$$
$$\mathfrak{A}_{n-2} = \mathfrak{A}_{n-1}\left(\frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right),$$
$$\mathfrak{A}_{n-1} = a_2a_3 \ldots a_{2n},$$
$$\mathfrak{B}_0 = 1,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \sum_1^n (a_1 + a_3 + \ldots a_{2k-1})a_{2k},$$
$$\mathfrak{B}_{n-1} = \mathfrak{B}_n\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right),$$
$$\mathfrak{B}_n = a_1a_2 \ldots a_{2n},$$
$$\mathfrak{C}_0 = 1,$$
$$\mathfrak{C}_1 = \sum_1^n (a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k})a_{2k+1},$$
$$\mathfrak{C}_{n-1} = \mathfrak{C}_n\left(\frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}\right),$$
$$\mathfrak{C}_n = a_2a_3 \ldots a_{2n+1},$$
$$\mathfrak{D}_0 = 0,$$
$$\mathfrak{D}_1 = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$
$$\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_{n+1}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}\right),$$
$$\mathfrak{D}_{n+1} = a_1a_2 \ldots a_{2n+1}.$$

A cause de la relation identique

$$Q_{2n}(z)P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n+1}(z) = 1,$$

on a

$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{D}_1.$$

3. Nous allons établir maintenant quelques propositions sur les racines des équations qu'on obtient en annulant les polynomes P et Q. Les polynomes P, du reste, ne diffèrent pas essentiellement des polynomes Q, et nous insisterons surtout sur ces derniers. Dans la relation (A) du n° 1, posons

$$\alpha = 2n - 3, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

il viendra, en changeant toujours a_i en $a_i z$ lorsque i est impair,

$$a_{2n-2}Q_{2n}(z) = [a_{2n-2}, a_{2n-1}z, a_{2n}]Q_{2n-2}(z) - a_{2n}Q_{2n-4}(z);$$

on voit que

$$Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), Q_{2n-4}(z) \ldots Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Pour $z = -\infty$, cette suite présente n variations de signe, pour $z = 0$ il n'y a aucune variation. On en conclut que les n racines de

$$Q_{2n}(z) = 0,$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $Q_{2n-2}(z) = 0$. Lorsque z passe en croissant par une racine de $Q_{2n}(z) = 0$, le rapport $Q_{2n-2}(z) : Q_{2n}(z)$ saute de $= -\infty$ à $+\infty$.

Posons maintenant dans la relation (A),

$$\alpha = 2n - 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2,$$

on aura

$$a_{2n-1}\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = [a_{2n-1}, a_{2n}z, a_{2n+1}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - a_{2n+1}\frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm. Les n racines de

$$\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = 0$$

sont réelles, inégales, négatives et séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Le rapport $Q_{2n-1}(z) : Q_{2n+1}(z)$ saute toujours de $-\infty$ à $+\infty$. Prenons maintenant

$$\alpha = 2n-2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

on aura

$$a_{2n-1} Q_{2n}(z) = [a_{2n-1}z, a_{2n}] \frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \frac{Q_{2n-3}(z)}{z};$$

donc

$$Q_{2n}(z), \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-3}(z)}{z}, \ldots, \frac{Q_1(z)}{z} = a_1$$

forment une suite de Sturm : les racines des $Q_{2n}(z) = 0$ sont séparées par celles de $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = 0$. Posons enfin

$$\alpha = 2n-1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1,$$

il viendra

$$a_{2n} Q_{2n+1}(z) = [a_{2n}, a_{2n+1}z] Q_{2n}(z) - Q_{2n-2}(z);$$

donc

$$Q_{2n+1}(z), Q_{2n}(z), Q_{2n-2}(z), \ldots, Q_2(z), Q_0(z) = 1$$

forment une suite de Sturm. Les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$ sont séparées par celles de $Q_{2n}(z) = 0$.

Nous venons de voir que les racines de

$$\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} = [a_1, a_2 z, a_3, \ldots, a_{2n-2}z, a_{2n-1}] = 0$$

séparent les racines de

$$Q_{2n}(z) = [a_1, a_2 z, a_3, \ldots a_{2n-1}, a_{2n}z] = 0.$$

Donc aussi les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1}z, a_{2n-2} \ldots a_3 z, a_2] = 0$$

sépareront les racines de

$$[a_{2n}, a_{2n-1}z, a_{2n-2}, \ldots a_3 z, a_2, a_1 z] = 0,$$

ce qui revient à dire que les racines de $P_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n}(z) = 0$.

De même, on verra que la proposition que les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$ ne diffère pas au fond de celle-ci : les racines de $P_{2n+1}(z) = 0$ séparent les racines de $Q_{2n+1}(z) = 0$.

Il résulte de là que dans les décompositions en fractions simples

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \frac{N_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n};$$

les quantités M_i, N_i sont toutes positives. (Il va sans dire que les x_i ne sont pas les mêmes dans les deux formules.)

4. Les racines de l'équation $Q_n(z) = 0$ sont évidemment des fonctions des n premiers nombres a_i. Peut-il arriver cependant qu'une telle racine ne dépende point d'un de ces a_i? C'est ce que nous allons examiner. On a d'après la formule (B) du n° 1, en employant la notation que nous avons expliquée au commencement du n° 2,

$$(1) \qquad Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\, Q^{2n}_{2n'}(z) + Q_{2n-1}(z)\, P^{2n}_{2n'}(z),$$

$$(2) \qquad Q_{2n+2n'+1}(z) = Q_{2n}(z)\, Q^{2n}_{2n'+1}(z) + Q_{2n-1}(z)\, P^{2n}_{2n'+1}(z).$$

Nous savons que les deux polynomes $Q_n(z)$, $P_n(z)$ ne s'annulent jamais pour une même valeur de z, de même $Q_n(z)$ et $Q_{n-1}(z)$. Cela étant, il est facile de conclure de la formule (1) :

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P^{2n}_{2n'}(z)$, cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Si $x = a$ annule deux des fonctions $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$, $Q^{2n}_{2n'}(z)$ cette valeur $x = a$ annulera aussi la troisième de ces fonctions.

Dans le second membre de (1), c'est le polynome $Q^{2n}_{2n'}(z)$ seul qui dépend de a_{2n+1} ; en mettant en évidence ce coefficient, il vient

$$(3) \qquad Q_{2n+2n'}(z) = a_{2n+1} z\, Q_{2n}(z)\, P^{2n}_{2n'}(z) + R(z),$$

où $R(z)$ est un polynome qui ne dépend point de a_{2n+1}. Il est clair maintenant que les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui ne dépendent point de a_{2n+1}

doivent satisfaire aux équations

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z) = 0,$$
$$R(z) = 0.$$

Une telle racine doit donc annuler l'un des deux polynomes $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{2n}(z)$, mais, d'après ce qu'on vient de voir, elle annule alors aussi l'autre. Réciproquement, une valeur $z = a$ qui annule $Q_{2n}(z)$ et $P_{2n'}^{2n}(z)$ annulera aussi $Q_{2n+2n'}(z)$ d'après la formule (1), puis aussi R d'après la formule (3), et sera par conséquent une racine de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui est indépendante de a_{2n+1}. Ainsi les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z) = 0, \qquad P_{2n'}^{2n}(z) = 0.$$

Et il est clair que ces équations peuvent, en effet, avoir des racines communes, car la première ne dépend que des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, la seconde des paramètres $a_{2n+2}, a_{2n+3}, \ldots, a_{2n+2n'}$. Mais on voit aussi qu'en général, c'est-à-dire lorsque les a_i ne satisfont pas à certaines conditions particulières, ces racines n'existent pas.

On établira de la même façon que les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z) = 0, \qquad Q_{2n'}^{2n}(z) = 0.$$

La formule (2) donne lieu à des conclusions analogues qu'il suffira d'énoncer.

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) = 0$ qui sont indépendantes de a_{2n} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n-1}(z) = 0, \qquad Q_{2n'+1}^{2n}(z) = 0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) = 0$ qui sont indépendantes de a_{2n+1} coïncident avec les racines communes des deux équations

$$Q_{2n}(z) = 0, \qquad P_{2n'+1}^{2n}(z) = 0.$$

5. Nous allons établir maintenant les propositions suivantes qui complètent celles obtenues au n° 3.

Les racines de $Q_{2n+2n'}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z) = 0,$$

et également par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) : z = 0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) : z = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n'+1}^{2n}(z) : z^2 = 0.$$

Les racines de $Q_{2n+2n'+1}(z) = 0$ sont séparées par celles de

$$Q_{2n}(z)\,P_{2n'+1}^{2n}(z) = 0.$$

Pour $n' = 0$ ou $= 1$ on retrouve les propositions du n° 3.

Il suffira de développer la démonstration de la première proposition.

Reprenons la relation

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)\,Q_{2n'}^{2n}(z) + Q_{2n-1}(z)\,P_{2n'}^{2n}(z),$$

et désignons les racines de $Q_{2n}(z) = 0$ rangées par ordre de grandeur croissante par

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \alpha''' < \ldots;$$

de même les racines de $P_{2n'}^{2n}(z) = 0$ par

$$\beta < \beta' < \beta'' < \ldots$$

et l'ensemble des racines α et β par

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n+n'-1}.$$

Cela étant, la proposition énoncée revient à ceci : la suite des quantités

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n+n'),$$

où $x_0 = -\infty$ et $x_{n+n'} = 0$, ne présente que des variations de signe.

D'abord $Q_{2n+2n'}(x_0)$ a le signe de $(-1)^{n+n'}$; quant à $Q_{2n+2n'}(x_1)$ deux cas sont à distinguer selon qu'on a $x_1 = \alpha$ ou $x_1 = \beta$.

Dans le premier cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n-1}(\alpha)\,P_{2n'}^{2n}(\alpha);$$

dans le second cas,

$$Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n}(\beta)\, Q^{2n}_{2n'}(\beta).$$

Or, on voit facilement que dans le premier cas $Q_{2n-1}(\alpha)$ a le signe de $(-1)^n$ et $P^{2n}_{2n'}(\alpha)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car α est plus petit que la plus petite racine de $Q_{2n-1}(z) = 0$ et aussi plus petit que β.

Dans le second cas, on voit de même que $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $(-1)^n$, $Q^{2n}_{2n'}(\beta)$ le signe de $(-1)^{n'+1}$, car β est compris dans l'intervalle des deux plus petites racines de $Q^{2n}_{2n'}(z) = 0$. On voit que, dans tous les cas, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ a le signe de $(-1)^{n+n'+1}$; ainsi $Q_{2n+2n'}(x_0)$, $Q_{2n+2n'}(x_1)$ présentent une variation.

Supposons maintenant que, dans la suite des x_i, deux racines consécutives x_k et x_{k+1} soient des racines α. On aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P^{2n}_{2n'}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha')\, P^{2n}_{2n'}(\alpha'). \end{aligned}$$

Or, α et α' étant deux racines consécutives de $Q_{2n}(z) = 0$ comprennent une racine et une seule de $Q_{2n-1}(z) = 0$: donc $Q_{2n-1}(\alpha)$ et $Q_{2n-1}(\alpha')$ ont des signes contraires.

D'autre part, entre α et α' il n'y a par hypothèse aucune racine β de $P^{2n}_{2n'}(z) = 0$. Donc $P^{2n}_{2n'}(\alpha)$ et $P^{2n}_{2n'}(\alpha')$ ont même signe, et il s'ensuit que $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation. Dans le cas où $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \beta'$, on aura

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\, Q^{2n}_{2n'}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta')\, Q^{2n}_{2n'}(\beta'). \end{aligned}$$

$Q_{2n}(\beta)$ et $Q_{2n}(\beta')$ ont même signe, $Q^{2n}_{2n'}(\beta)$ et $Q^{2n}_{2n'}(\beta')$ ont des signes contraires; $Q_{2n+2n'}(x_k)$ et $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

On arrive à la même conclusion dans les deux cas qui restent à discuter, $x_k = \alpha$, $x_{k+1} = \beta$ et $x_k = \beta$, $x_{k+1} = \alpha$; dans le premier cas,

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P^{2n}_{2n'}(\alpha), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n}(\beta)\, Q^{2n}_{2n'}(\beta). \end{aligned}$$

$Q_{2n-1}(z) : z$ a par rapport à $Q_{2n}(z)$ les propriétés de la dérivée $Q'_{2n}(z)$; ensuite $Q_{2n}(\beta)$ a le signe de $Q_{2n}(\alpha+\varepsilon)$, $Q_{2n-1}(\alpha)$ le signe de $Q_{2n-1}(\alpha+\varepsilon)$ (ε positif très petit).

On en conclut aisément que le rapport $Q_{2n-1}(\alpha) : Q_{2n}(\beta)$ est négatif. Ensuite $P_{2n'}^{2n}(z)$ a par rapport à $Q_{2n'}^{2n}(z)$ les propriétés de la dérivée; $P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ a le signe de $P_{2n'}^{2n}(\beta - \varepsilon)$; $Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ le signe de $Q_{2n'}^{2n}(\beta - \varepsilon)$. Le rapport $P_{2n'}^{2n}(\alpha) : Q_{2n'}^{2n}(\beta)$ a donc le signe de

$$P_{2n'}^{2n}(\beta - \varepsilon) : Q_{2n'}^{2n}(\beta - \varepsilon),$$

et ce signe est $+$, si l'on remarque que β est une racine de $P_{2n'}^{2n}(z) = 0$ qui est comprise entre deux racines consécutives de $Q_{2n'}^{2n}(z) = 0$. Ainsi $Q_{2n+2n'}(x_k)$, $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ présentent encore une variation.

Enfin, si l'on a

$$\begin{aligned} Q_{2n+2n'}(x_k) &= Q_{2n}(\beta)\ Q_{2n'}^{2n}(\beta), \\ Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) &= Q_{2n-1}(\alpha)\, P_{2n'}^{2n}(\alpha), \end{aligned}$$

on constate que $Q_{2n}(\beta) : Q_{2n-1}(\alpha)$ est positif, puis $Q_{2n'}^{2n}(\beta) : P_{2n'}^{2n}(\alpha)$ est négatif.

Les $n + n'$ premiers termes de la suite

$$Q_{2n+2n'}(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n + n')$$

ne présentent donc que des variations et l'avant-dernier terme est donc négatif, tandis que le dernier terme est positif. La proposition énoncée se trouve ainsi établie.

Nous avons supposé dans ce raisonnement qu'aucune racine α n'est égale à une racine β. C'est ce qui arrive en général, mais la nature même de la proposition montre qu'il peut en être autrement dans des cas exceptionnels. En effet, d'après notre proposition, chacun des $n + n' - 1$ intervalles formés par les racines de

$$Q_{2n+2n'}(z) = 0,$$

renferme une racine α ou bien une racine β. Mais on ne saurait dire *a priori* quels sont les intervalles qui renferment une racine α et quels sont ceux qui contiennent une racine β. En effet, cette distribution des racines α et β dans les différents intervalles varie d'un cas à l'autre selon les valeurs des a_i.

Les coefficients a_i variant d'une façon continue (tout en restant positifs), il doit donc arriver des cas exceptionnels, au moment où la distribution des racines α et β dans les intervalles subit un changement. Et il est clair que

cela ne peut arriver que de la façon suivante : deux intervalles consécutifs renfermant le premier une racine α, le second une racine β, la racine α peut passer dans le second intervalle, tandis qu'en même temps la racine β entre dans le premier intervalle. Au moment critique, les racines α et β sont confondues avec une racine de

$$Q_{2n+2n'}(z) = 0.$$

C'est, on le voit, le cas exceptionnel étudié au n° 4.

6. Nous pouvons établir maintenant, très facilement, la proposition suivante. Soit x_k une racine de

$$Q_n(z) = 0.$$

x_k peut être considérée comme une fonction de a_i et *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_i}$$

ne peut jamais être négative.

Pour la démonstration, il faut distinguer quatre cas selon la parité de n et de i : il suffira de développer le raisonnement dans un seul cas. Supposons

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = a_{2n+1} x_k Q_{2n}(x_k) P^{2n}_{2n'}(x_k) + R(x_k) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial x_k}{\partial a_{2n+1}} = - \frac{x_k Q_{2n}(x_k) P^{2n}_{2n'}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}.$$

Or, nous avons démontré que $Q_{2n}(z) P^{2n}_{2n'}(z)$ a par rapport à $Q_{2n+2n'}(z)$ les propriétés de la dérivée; donc

$$\frac{Q_{2n}(x_k) P^{2n}_{2n'}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)}$$

est positif et, puisque x_k n'est pas positif, la propriété énoncée se trouve démontrée dans le cas de n pair, i impair. Exceptionnellement, la dérivée peut être nulle.

CHAPITRE II.

LE DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DESCENDANTES DE z.

7. La formule

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)},$$

où $Q_n(z)\,Q_{n+1}(z)$ est un polynome du degré $n+1$, montre qu'en développant les réduites

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \qquad \frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)},$$

suivant les puissances descendantes de z, les n premiers termes de ces développements sont les mêmes. En écrivant

$$(1)\quad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n\frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}} + \ldots,$$

on définira donc une suite de quantités

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots$$

qui sont parfaitement déterminées et qu'on pourra prolonger aussi loin que l'on voudra. Les c_i sont évidemment des fonctions rationnelles des a_i, et, si l'on introduit les b_i (*voir* l'Introduction), les c_i sont des polynomes à coefficients entiers et positifs des b_i.

La manière la plus élégante pour obtenir les expressions des c_i par les b_i nous paraît être la suivante, que nous avons obtenue dans le Mémoire publié dans le tome III de ces *Annales*.

On calcule d'abord les quantités $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ par les formules

$$\alpha_{0,0} = 1, \qquad \alpha_{i,0} = 0 \text{ lorsque } i > 0;$$

$$\begin{aligned}
\beta_{0,k} &= \alpha_{0,k} + b_2\alpha_{1,k},\\
\beta_{1,k} &= \alpha_{1,k} + b_4\alpha_{2,k},\\
\beta_{2,k} &= \alpha_{2,k} + b_6\alpha_{3,k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\beta_{i,k} &= \alpha_{i,k} + b_{2i+2}\alpha_{i+1,k};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,k+1} &= b_1 \beta_{0,k}, \\
\alpha_{1,k+1} &= b_3 \beta_{1,k} + \beta_{0,k}, \\
\alpha_{2,k+1} &= b_5 \beta_{2,k} + \beta_{1,k}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
\alpha_{i,k+1} &= b_{2i+1} \beta_{i,k} + \beta_{i-1,k}.
\end{aligned}$$

Il en résulte qu'on a $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = 0$ lorsque $i > k$.

Les expressions $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$ obtenues, on peut calculer un coefficient c_n quelconque de plusieurs manières par l'une ou l'autre des formules

$$\begin{aligned}
c_{i+k} &= b_0 \alpha_{0,i} \alpha_{0,k} + b_0 b_1 b_2 \alpha_{1,i} \alpha_{1,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 \alpha_{2,i} \alpha_{2,k} + \ldots, \\
c_{i+k+1} &= b_0 b_1 \beta_{0,i} \beta_{0,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 \beta_{1,i} \beta_{1,k} + b_0 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \beta_{2,i} \beta_{2,k} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les coefficients c_n étant définis, nous considérons la série infinie

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots,$$

et nous dirons que c'est là le *développement de la fraction continue suivant les puissances descendantes de z*. C'est une définition purement formelle; nous verrons bientôt que la série est souvent divergente quelle que soit la valeur de z : aussi ne faut-il l'envisager pour le moment que sous le point de vue purement formel.

Les c_n sont des fonctions rationnelles des a_n; nous donnerons un peu plus loin les formules qui expriment réciproquement les a_n au moyen des c_n. A l'aide de ces formules, on pourra donc réduire *formellement* une série procédant suivant les puissances descendantes de z en une fraction continue.

8. On a

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{1}{Q_0(z) Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(z) Q_2(z)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z) Q_n(z)},$$

et, en développant suivant les puissances descendantes de z les termes du second membre :

$$\frac{1}{Q_0(z)\,Q_1(z)} = \frac{\varepsilon_1^1}{z},$$

$$-\frac{1}{Q_1(z)\,Q_2(z)} = -\frac{\varepsilon_2^2}{z^2} + \frac{\varepsilon_3^2}{z^3} - \frac{\varepsilon_4^2}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^2}{z^5} - \ldots,$$

$$+\frac{1}{Q_2(z)\,Q_3(z)} = +\frac{\varepsilon_3^3}{z^3} - \frac{\varepsilon_4^3}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^3}{z^5} - \ldots,$$

$$-\frac{1}{Q_3(z)\,Q_4(z)} = -\frac{\varepsilon_4^4}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^4}{z^5} - \ldots,$$

$$+\frac{1}{Q_4(z)\,Q_5(z)} = +\frac{\varepsilon_5^5}{z^5} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En ajoutant les n premières séries, on obtient le développement de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$. Or, si l'on remarque que

$$Q_{n-1}(z)\,Q_n(z) = cz(z+x_1)(z+x_2)\ldots(z+x_{n-1}),$$

où c, x_1, x_2, ..., x_{n-1} sont des nombres *positifs*, on voit facilement que tous les coefficients ε_k^i sont *positifs*, et l'on en conclut que, dans le développement (1) de

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)},$$

les n premiers coefficients c_0, c_1, ..., c_{n-1} sont *positifs*, et que les coefficients suivants α_n^n, α_{n+1}^n, α_{n+2}^n, ... sont *plus* petits que c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, ... respectivement.

On peut obtenir le développement d'une réduite en la décomposant d'abord en fractions simples. Posons, comme au n° 3,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n},$$

on en conclura

$$c_k = \sum_1^n M_i x_i^k \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots (2n-1)].$$

Ensuite, en considérant une réduite d'ordre impair

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+x_1} + \frac{N_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+x_n},$$

d'où

$$c_k = \sum_0^n N_i x_i^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)\,(x_0 = 0),$$

ces expressions donnent lieu à la conséquence suivante :

La forme quadratique

$$\sum_0^{m-1}\sum_0^{m-1} c_{p+i+k} X_i X_k$$

est une forme *définie* et *positive*, en sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \ldots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & c_{p+3} & \ldots & c_{p+m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{p+m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

est *positif*.

En effet, si nous prenons un nombre n tel que

$$p + 2m - 2 \leqq 2n - 1,$$

il est clair que la forme quadratique considérée peut s'écrire

$$\sum_1^n M_i x_i^p (X_0 + X_1 x_i + X_2 x_i^2 + \ldots + X_{m-1} x_i^{m-1})^2.$$

9. D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}},$$

c'est-à-dire le rapport $c_{n+1} : c_n$ croît avec n. Deux cas peuvent donc se présenter : ou bien ce rapport croît au delà de toute limite, et alors la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

est toujours divergente ; ou bien ce rapport tend vers une limite finie λ, et alors la série est convergente pour $|z| > \lambda$.

D'autre part, nous savons que la plus grande racine de

$$Q_n(-z) = 0$$

croît aussi avec n. Nous allons montrer que, dans le premier cas, cette racine croît aussi au delà de toute limite, et, dans le second cas, elle tend vers la limite λ.

Posons, sans distinguer les valeurs paires ou impaires de n,

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_1^{n'} \frac{m_i}{z + x_i},$$

$n' = \frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ et $x_{n'}$ étant la plus grande racine, on aura

$$\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} = \frac{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-1}}{\sum_1^{n'} m_i x_i^{n-2}} < x_{n'}.$$

Donc, si $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ croît au delà de toute limite, il en sera de même de $x_{n'}$. Mais supposons

$$\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda;$$

la limite de $x_{n'}$ ne pourra pas être $< \lambda$: je dis qu'elle est égale à λ. Pour cela, il suffira de montrer que $x_{n'}$ ne peut pas devenir plus grand que λ. Supposons en effet $x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, ε étant positif, et considérons les deux séries

$$(1) \qquad \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots,$$

$$(2) \qquad \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n^n}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{\alpha_{n+1}^n}{z^{n+2}} + \ldots.$$

Nous savons que la série (2) est convergente pour $|z| > x_{n'} = \lambda + \varepsilon$, mais *divergente* pour $|z| < x_{n'}$, et donc en particulier pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

Or, puisque $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda$, la série (1) est convergente pour $|z| > \lambda$ et, puisqu'on a $\alpha_n^n < c_n$, $\alpha_{n+1}^n < c_{n+1}$, ..., la série (2) sera aussi *convergente* pour les mêmes valeurs de z et, en particulier, pour

$$\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon.$$

La même série (2) serait donc en même temps convergente et divergente pour $\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon$. Cette contradiction montre que la supposition que $x_{n'}$ peut croître au delà de λ est inadmissible et l'on a bien

$$\lim x_{n'} = \lambda \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Mais la fraction continue étant donnée, comment peut-on reconnaître si $c_{n+1} : c_n$ croît au delà de toute limite ou tend vers une limite finie? La réponse est très simple. Considérons les nombres

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si ces nombres ne sont pas limités supérieurement, $c_{n+1} : c_n$ croîtra au delà de toute limite. Mais, si ces nombres ont une limite supérieure l, le rapport $c_{n+1} : c_n$ tendra vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

Les nombres b_n n'ayant pas de limite supérieure, cela veut dire, quelque grand que soit un nombre M, on pourra trouver toujours un entier m tel que

$$b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}} > \mathrm{M}.$$

Posons, selon le cas, $m = 2n$ ou $m = 2n + 1$, et rangeons par ordre de grandeur croissante les racines des équations

$$Q_{2n}(-z) = 0, \qquad Q_{2n+2}(-z) = 0,$$

en les désignant par

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_{n+1}, \end{array}$$

on aura, d'après le n° 2,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1}, \\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1} &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\beta_{n+1} - (\alpha_n - \beta_n) - (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}) - \ldots - (\alpha_1 - \beta_1) = b_{2n} + b_{2n+1}.$$

Les différences $\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n$ étant positives, il est clair que

$$\beta_{n+1} > b_{2n} + b_{2n+1} > \mathrm{M}.$$

On voit donc que la plus grande racine de $Q_{2n}(-z)=0$, et, par conséquent, aussi le rapport $c_{n+1} : c_n$, croît au delà de toute limite.

Si les nombres $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ont une limite supérieure l, choisissons un nombre C tel que $Cl > b_0$ et considérons la fraction continue

$$\cfrac{Cl}{z+\cfrac{l}{1+\cfrac{l}{z+\cfrac{l}{1+\ddots}}}}$$

Les c_n étant des polynomes à coefficients positifs des b_n, il est clair que si l'on réduit en série cette fraction continue, les coefficients seront plus grands que les coefficients correspondants de la série

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots.$$

Or, on s'assure facilement que la série obtenue est identique à celle qu'on obtient en développant la fonction algébrique

$$\frac{C}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4l}{z}}-1\right\},$$

qui est convergente pour $|z|>4l$. Donc le développement

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots$$

sera aussi convergent pour $|z|>4l$, d'où l'on conclut que le rapport $c_{n+1} : c_n$ tend vers une limite finie qui ne peut pas surpasser $4l$.

11. Le développement

$$\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots,$$

et celui de $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ ne diffèrent que par les termes en

$$\frac{1}{z^{n+1}}, \quad \frac{1}{z^{n+2}}, \quad \ldots.$$

On en conclut que le développement de

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z}-\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}-\ldots\right)$$

ne diffère de $P_n(z)$ que par des termes en

$$\frac{1}{z^{n-n'+1}}, \quad \frac{1}{z^{n-n'+2}}, \quad \ldots,$$

n' étant le degré de $Q_n(z)$. Par conséquent, dans le produit

$$Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right),$$

les termes en

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z^{n-n'}}$$

manquent. Cette condition détermine $Q_n(z)$, à un facteur constant près. Supposons d'abord n pair et posons

$$Q_{2n}(-z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_n z^n;$$

en écrivant que les termes en

$$\frac{1}{z}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{z^n}$$

manquent dans le produit par

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots,$$

il vient

$$\alpha_0 c_k + \alpha_1 c_{k+1} + \ldots + \alpha_n c_{k+n} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1), \tag{1}$$

et, si l'on remarque que $Q_{2n}(0) = 1$, on obtient

$$Q_{2n}(-z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Pour exprimer plus simplement les formules (1), nous introduirons un symbole $Sf(u)$ dont voici la définition : $f(u)$ étant un polynome, $Sf(u)$ sera le résultat obtenu en remplaçant dans $f(u)$ les diverses puissances de u, u^0, u^1, u^2, ... par c_0, c_1, c_2, ... respectivement. On aura donc

$$S\{u^k Q_{2n}(-u)\} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Dans le cas de n impair, soit

$$Q_{2n+1}(-z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_{n+1} z^{n+1},$$

il viendra

$$S\{u^k Q_{2n+1}(-u)\} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1). \tag{4}$$

Le terme constant dans le produit de $Q_{2n+1}(-z)$ par

$$\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots$$

est égal au terme constant de $-P_{2n+1}(-z)$, c'est-à-dire $= -1$, donc

$$S\left\{\frac{Q_{2n+1}(-u)}{u}\right\} = -1. \tag{5}$$

Cette relation détermine le facteur constant que les formules (4) laissaient indéterminé et

$$Q_{2n+1}(-z) = -\begin{vmatrix} z & z^2 & \ldots & z^{n+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Les coefficients des plus hautes puissances de z dans $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ sont connus d'après les formules du n° 2.

La comparaison avec (2) et (6) donne dès lors

$$a_1 a_2 \ldots a_{2n} = A_n : B_n,$$
$$a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} = B_n : A_{n+1};$$

si nous introduisons les notations

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (A_0 = B_0 = 1),$$

on en conclut

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}}, \qquad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}. \tag{7}$$

Ce sont les formules qui expriment les a_i par les c_i.

Le coefficient de z dans $Q_{2n+1}(z)$ étant $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$ (*voir* n° 2), il vient, d'après la formule (6),

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} = \frac{C_n}{A_{n+1}}, \tag{8}$$

en posant

$$C_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}, \qquad C_0 = 1.$$

12. Les expressions des numérateurs $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ sont un peu plus compliquées, mais s'obtiennent encore aisément par cette remarque que la partie entière de

$$f(z)\left\{\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots\right\}$$

s'exprime par

$$S\left\{\frac{f(z) - f(u)}{z - u}\right\}.$$

Il suffit de vérifier cela dans le cas $f(z) = z^k$.

On aura ainsi

$$P_n(-z) = -S\left\{\frac{Q_n(-z) - Q_n(-u)}{z - u}\right\}.$$

Des formules (2) et (6) on déduit alors facilement les expressions suivantes. Posons

$$\begin{aligned} R_0 &= c_0, \\ R_1 &= c_0 z + c_1, \\ R_2 &= c_0 z^2 + c_1 z + c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_k &= c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k, \end{aligned}$$

on aura

$$P_{2n}(-z) = -\begin{vmatrix} 0 & R_0 & R_1 & \ldots & R_{n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n, \tag{9}$$

$$(10)\qquad P_{2n+1}(-z)=\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix} : A_{n+1}.$$

Pour $z=0$, on conclut de la formule (9)

$$(11)\qquad a_2+a_4+\dots+a_{2n}=-\begin{vmatrix} 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : B_n.$$

A l'égard du symbole S, nous ferons cette remarque à peu près évidente que, $V_n(u)$ étant un polynome du degré n, la valeur de

$$S\{V_n(u)\}$$

est égale au coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de

$$V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)},$$

en supposant $m \geqq n+1$, ce que nous écrirons

$$S\{V_n(u)\}=\text{Rés.}\left\{V_n(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)}\right\}.$$

D'après cela, on a, par exemple,

$$\begin{aligned} S\{Q_{2n}^2(-u)\} &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}^2(u)\frac{P_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{Q_{2n}(u)\frac{1+P_{2n}(u)\,Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\} \\ &= \text{Rés.}\left\{\frac{Q_{2n}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right\}=\frac{1}{a_{2n+1}}. \end{aligned}$$

Nous rassemblons ici quelques formules de ce genre

$$S\{Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}},$$

$$S\{u\,Q_{2n}^2(-u)\} = \frac{1}{a_{2n+1}}\left(\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}} + \frac{1}{a_{2n+1}a_{2n+2}}\right),$$

$$S\left\{\frac{1}{u}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = \frac{1}{a_{2n+2}},$$

$$S\left\{\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$

$$S\left\{\frac{[Q_{2n}(-u)-1]^2}{u}\right\} = -S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$

Voici enfin une dernière remarque : supposons

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_1^n \frac{M_i}{z + x_i},$$

on aura

$$S\{V_n(u)\} = \sum_1^n M_i V_n(x_i),$$

d'où l'on voit que, si le polynome $V_n(u)$ ne devient pas négatif pour $u > 0$, la valeur du symbole

$$S\{V_n(u)\}$$

est toujours *positive*.

CHAPITRE III.

OSCILLATION ET CONVERGENCE D'UNE FRACTION CONTINUE. CAS OU LA PARTIE RÉELLE DE z EST POSITIVE.

13. Supposons $z=1$ et écrivons P_n, Q_n au lieu de $P_n(1)$, $Q_n(1)$. Les relations

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2},$$
$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

montrent que l'on a

$$P_1 < P_3 < P_5 < \ldots,$$
$$P_0 < P_2 < P_4 < \ldots,$$
$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < \ldots,$$
$$Q_0 < Q_2 < Q_4 < \ldots,$$

en sorte que dans le second membre de

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \frac{1}{Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n},$$

les termes vont en diminuant.

On en conclut que les réduites d'ordre impair vont en diminuant, sans devenir jamais plus petites qu'une réduite quelconque d'ordre pair. Les réduites d'ordre pair vont en augmentant sans surpasser jamais une réduite quelconque d'ordre impair. Ainsi les réduites d'ordre impair tendront toujours vers une limite finie, et il en est de même des réduites d'ordre pair.

$$\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1,$$
$$\lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L,$$

et

$$L_1 \geqq L.$$

Si la quantité croissante $Q_{n-1} Q_n$ croît au delà de toute limite, on aura

$$L_1 = L;$$

si, au contraire, $Q_{n-1}Q_n$ tend vers une limite λ, on aura

$$L_1 = L + \frac{1}{\lambda}.$$

Or on voit facilement que $Q_{2n} > 1$, donc

$$Q_{2n+1} = a_{2n+1}Q_{2n} + Q_{2n-1} > Q_{2n-1} + a_{2n+1},$$

d'où

$$Q_{2n+1} > a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}.$$

Ensuite on conclura

$$Q_{2n} = a_{2n}Q_{2n-1} + Q_{2n-2} > Q_{2n-2} + a_1 a_{2n},$$

d'où

$$Q_{2n} > a_1(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}).$$

Donc, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente*, l'une au moins des quantités Q_{2n}, Q_{2n+1} croîtra au delà de toute limite et

$$L_1 = L.$$

Nous dirons, dans ce cas, que la fraction continue est *convergente*.

D'autre part, ayant

$$Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2},$$

on en conclut

$$Q_{n-1} + Q_n = (1 + a_n)Q_{n-1} + Q_{n-2} < (1 + a_n \quad Q_{n-2} + Q_{n-1}),$$

donc

$$Q_{n-1} + Q_n < (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

Or, si la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*, le produit

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots$$

l'est aussi et ne croît pas au delà d'une limite finie.

Dans ce cas donc, Q_{2n} et Q_{2n+1} tendront aussi vers des limites finies et l'on aura

$$L_1 > L.$$

La fraction continue, dans ce cas, est *oscillante*. Si l'on pose, dans ce cas,

$$s = \sum_{1}^{\infty} a_n,$$

on aura

$$Q_{n-1} + Q_n < e^s, \quad Q_{n-1} Q_n < \frac{1}{4} e^{2s},$$
$$L_1 - L > 4e^{-2s}.$$

Les propositions sur la convergence et l'oscillation de la fraction continue ont été obtenues depuis longtemps par M. Stern (*Journal de Crelle*, t. 37).

Dans le cas d'oscillation nous venons de voir que Q_{2n} et Q_{2n+1} tendent vers des limites finies; il est clair qu'il en est de même de P_{2n} et P_{2n+1}.

14. Supposons maintenant $z = x$ réel et positif. On aura, d'après ce qui précède,

$$\lim \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} = F_1(x),$$
$$\lim \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = F(x),$$
$$F_1(x) \geqq F(x).$$

Il y aura oscillation ou convergence selon que la série

$$a_1 x + a_2 + a_3 x + a_4 + \ldots$$

est convergente ou divergente. Mais il est clair que cela ne dépend en aucune façon de la valeur particulière de x, et l'on arrive à cette conclusion : si la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

est *convergente*, la fraction continue est *oscillante* pour toute valeur positive de x, et l'on a

$$F_1(x) > F(x);$$

si au contraire la série est *divergente*, la fraction continue est *convergente*, et l'on a

$$F_1(x) = F(x) = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}.$$

15. Passons aux valeurs imaginaires de z. Pour étudier séparément les

réduites d'ordre pair et celles d'ordre impair, nous remarquerons que

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{a_2}{Q_0(z)\,Q_2(z)} + \frac{a_4}{Q_2(z)\,Q_4(z)} + \ldots + \frac{a_{2n}}{Q_{2n-2}(z)\,Q_{2n}(z)},$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{a_1 z} - \frac{a_3 z}{Q_1(z)\,Q_3(z)} - \frac{a_5 z}{Q_3(z)\,Q_5(z)} - \ldots - \frac{a_{2n+1} z}{Q_{2n-1}(z)\,Q_{2n+1}(z)}.$$

Il s'agit donc de l'étude de la convergence des séries

$$(1) \qquad \sum_1^{\infty} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a_1 z} - \sum_1^{\infty} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\,Q_{2k+1}(z)}.$$

Supposons $z = x + yi$, la partie réelle de z étant positive, et considérons un domaine quelconque S dans lequel x admet une limite inférieure λ qui soit *positive*. Je dis que dans ce domaine la série (1) est uniformément convergente; en effet

$$\left| \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} \right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,|}.$$

Or il est clair que

$$Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z) = C(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_{2k-1}),$$

C et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k-1}$ étant des constantes *positives*. Pour $z = x + y_i$, x étant *positif*, on a évidemment

$$|z+\alpha_i| > x + \alpha_i,$$

donc

$$|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,| > Q_{2k-2}(x)\,Q_{2k}(x),$$

et puisque $x \geqq \lambda$, à plus forte raison

$$|\,Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)\,| > Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda);$$

donc

$$\left| \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\,Q_{2k}(z)} \right| < \sum_n^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda)}.$$

Or la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\,Q_{2k}(\lambda)} = F(\lambda) = \lim \frac{P_{2n}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)},$$

est *convergente;* par conséquent on peut déterminer un nombre ν tel que pour $n \geqq \nu$

$$\sum_{n}^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)\, Q_{2k}(\lambda)} < \varepsilon,$$

quel que soit n', ε étant aussi petit qu'on le voudra.

Pour les mêmes valeurs de n on aura donc aussi

$$\left| \sum_{n}^{n+n'} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\, Q_{2k}(z)} \right| < \varepsilon,$$

et puisque z est un point quelconque du domaine S, cela montre que la série (1) est *uniformément convergente* dans S. Comme, d'autre part, les termes de cette série sont holomorphes dans S, il s'ensuit, d'après un théorème connu, que

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{Q_{2k-2}(z)\, Q_{2k}(z)} = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

est aussi holomorphe dans S.

On voit facilement que les mêmes raisonnements s'appliquent presque sans modification à la série (2), et il suffira d'énoncer le résultat suivant. La série

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1 z} - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)\, Q_{2k+1}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

est *uniformément convergente* dans S et $F_1(z)$ est holomorphe dans ce même domaine.

Ainsi, dans toute la partie du plan où la partie réelle de z est positive, on a

$$\lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z), \qquad \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z),$$

$F(z)$, $F_1(z)$ étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions ne sont pas identiques dans le cas où la série

$$\sum_{1}^{\infty} a_n$$

est *convergente;* elles sont identiques dans le cas où cette série est *divergente.* Supposons $z = x$ réel positif, et faisons tendre x vers zéro, on con-

clut aisément des expressions de $F(x)$, $F_1(x)$ par les séries

$$\lim_{x=0} F(x) = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots,$$

$$\lim_{x=0} x F_1(x) = 1 : (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots).$$

Si la série

$$\Sigma a_{2n}$$

est divergente, $F(x)$ croît au delà de toute limite. Si la série

$$\Sigma a_{2n-1}$$

est divergente, $x F_1(x)$ tend vers zéro.

Remarquons que

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_1^n \frac{M_k}{x + x_k}$$

$$= \sum_1^n \left\{ \frac{M_k}{x} - \frac{M_k x_k}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{M_k x_k^{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{M_k x_k^p}{x^p (x + x_k)} \right\},$$

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1);$$

on aura donc aussi

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi < 1),$$

et de même

$$F_1(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi' c_p}{x^{p+1}} \qquad (0 < \xi' < 1).$$

16. Il faut étendre maintenant ces résultats au cas où la partie réelle de z est négative. On y arrive facilement à l'aide d'une proposition de la théorie des fonctions que nous établirons plus loin. Mais, avant d'aborder cette étude, nous allons examiner le cas où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *convergente*. On peut traiter ce cas par une méthode particulière, grâce à cette circonstance que les polynomes

$$P_{2n}(x), \quad Q_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(x), \quad Q_{2n+1}(x)$$

tendent vers des limites finies.