ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PIERRE-YVES GAILLARD

Les p-extensions entre représentations simples de $SL(3,\mathbb{R})$ au voisinage du caractère trivial, et leurs cup-produits

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 2, n^o 2 (1993), p. 233-251

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1993_6_2_2_233_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. II, n° 2, 1993

Les p-extensions entre représentations simples de SL(3,IR) au voisinage du caractère trivial, et leurs cup-produits(*)

PIERRE-YVES GAILLARD(1)

RÉSUMÉ. — On calcule l'algèbre E_χ des p-extensions entre SL(3,IR)-modules de Harish-Chandra simples de caractère χ pour tout χ assez proche du caractère trivial, noté 0. On répond à une question de Beilinson et Ginsburg [BS, 5.10] en montrant que E_0 n'est pas quadratique, bien qu'elle soit engendrée par des éléments de degré 0 et 1, conformément à une conjecture de Guichardet [Gu, p. 159].

ABSTRACT. — We compute the algebra E_χ of p-extensions between simple SL(3,IR)-Harish-Chandra modules with character χ for χ close enough to the trivial character, denoted 0. We answer a question of Bellinson and Ginsburg [BS, 5.10] by showing that E_0 is not quadratic; even though it is generated by its degree 0 and 1 elements, as predicted by a conjecture of Guichardet [Gu, p. 159].

Le but de cette note est de calculer l'algèbre E_χ des p-extensions entre SL(3,IR)-modules de Harish-Chandra simples de caractère χ pour tout χ assez proche du caractère trivial, noté 0. (Par "caractère trivial" on entend "caractère infinitésimal du module trivial $\mathbb{C}$".) Les seuls groupes pour lesquels tous les cup-produits ont été calculés sont $\mathrm{Spin}(n,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$ [G1]. (Dans le cas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \approx \mathrm{Spin}(2,1) \approx \mathrm{SU}(1,1)$, les p-extensions avaient déjà été complètement décrites par Guichardet [Gu, II.12] mais les cup-produits n'avaient pas été donnés.) Une conjecture pour le caractère trivial des groupes de rang 1 est proposée dans [G2].

Rappelons le contexte dans lequel se situent ces résultats. Soit G un groupe semi-simple connexe de centre fini. On sait qu'il n'existe pas de

(*) Reçu le 18 janvier 1993

(1) Département de Mathématiques, Université de Nancy I, B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, Cedex (France)

p-extension non triviale entre modules de Harish-Chandra simples de caractères infinitésimaux distincts, et que, si χ est un tel caractère, il n'y a (à isomorphisme près) qu'un nombre fini de modules simples de caractère χ, soient $V_1, \ldots, V_k$. Rappelons qu'un (g, K)-module (où $g = \mathbb{C} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G)$ et $K \subset G$ est un sous-groupe compact maximal) est une somme directe de K-modules lisses de dimension finie munie d'une action de g qui étend celle de $k = \mathbb{C} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(K)$; et qu'un module de Harish-Chandra est un (g, K)-module de longueur finie (vu comme g-module). L'étude des p-extensions entre modules de Harish-Chandra simples et de leurs cup-produits se réduit donc à celle des algèbres $E_\chi = \bigoplus_{ijp} \mathrm{Ext}^p_{g,K}(V_i, V_j)$ qui sont de dimension finie. D'après Bernstein, Gelfand et Gelfand [BGG, th.1, p. 495], E_χ est "génériquement" un produit direct d'algèbres extérieures sur r générateurs (de degré 1), où r est le rang réel de G (on trouvera une preuve plus détaillée d'un résultat légèrement plus fort dans Delorme [D, th.2]).

Des résultats impressionnants sur le problème analogue dans la catégorie O ont été obenus par Beilinson, Ginsburg et Soergel [BGS], qui montrent en particulier que les algèbres E_χ (de la catégorie O) sont de Koszul, et demandent [BG, 5.10] si c'est aussi le cas pour la catégorie, notée $\mathcal{H}$, des modules de Harish-Chandra. La réponse est affirmative pour $\mathrm{Spin}(n, 1)$ et $\mathrm{SU}(n, 1)$ [G1]; mais on montre ici qu'elle est négative pour le caractère trivial de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ (elle est cependant vraie pour les autres caractères proches du trivial). Une propriété plus faible que celle d'être de Koszul avait été conjecturée par [Gu, p. 159] pour E_χ, à savoir que cette algèbre serait engendrée par ses éléments de degré 0 et 1. On prouve ici cette conjecture pour les caractères proches du caractère trivial de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$. En résumé on a le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Identifions les caractères du centre de l'algèbre enveloppante de* $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ *aux points de* $\mathbb{C}^2$ *; le caractère trivial correspond au point* 0. *Alors* E_0 *n'est pas quadratique. Plus précisément, il existe un voisinage* D *de* 0 *dans* $\mathbb{C}^2$ *tel que l'on ait pour tout* $\chi \in D$ *:*

a) E_χ *est engendrée par ses éléments de degré* 0 *et* 1*;*

b) E_χ *est quadratique si et seulement si* $\chi \neq 0$ *;*

c) E_χ *est de Koszul si (et seulement si)* $\chi \neq 0$.

Passons maintenant au résultat essentiel, à savoir la description explicite des algèbres E_χ ci-dessus, en commençant par le cas $\chi = 0$. Soit $\mathbb{C} = V_1, V_2, \ldots, V_6, W$ un système de représentants des classes d'isomorphisme de modules simples de caractère trivial tel que les V_i soient les

modules simples du bloc de la représentation triviale, et correspondent respectivement aux symboles γ_1^0, γ^1, γ^2, γ^3, $\gamma^0_{-1,-1,-1}$, $\gamma^0_{1,-1,-1}$ de Vogan [V, 16.2], où les paramètres de Langlands sont indiqués. En particulier, V_4 est le module tempéré. Posons

$$E = \bigoplus_p E^p = \bigoplus_{ijp} \mathrm{Ext}^p_{g,K}(V_i, V_j)$$

et

$$F = \bigoplus_p \mathrm{Ext}^p_{g,K}(W, W)\,.$$

Soit $e_i \in E^0$ l'identité de V_i, d'où $e_j E^p e_i \approx \mathrm{Ext}^p_{g,K}(V_i, V_j)$. Rappelons que la *série de Poincaré* de E est la matrice

$$m_{ij} = \sum_p (\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}}\, e_j E^p e_i) t^p\,.$$

THÉORÈME 2. — *On a $E_0 = E \times F$ et $F \approx \wedge\mathbb{C}^2$ (l'algèbre extérieure de $\mathbb{C}^2$). De plus E est, en tant qu'algèbre graduée, entièrement caractérisée par les propriétés suivantes :*

a) la série de Poincaré de E est donnée par le tableau ci-dessous ;

b) il existe des éléments $e^p_{ji} \in E$ tels que

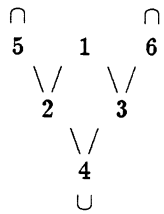
$$e_j E^p e_i = \mathbb{C} e^p_{ji} \quad \text{et} \quad e^p_{ab} e^p_{ji} = \delta_{bj} e^{p+q}_{ai}\,,$$

où δ est le symbole de Kronecker (on a bien sûr $e^p_{ji} = 0$ chaque fois que $e_j E^p e_i = 0$) ; en particulier, E_0 est engendrée par ses éléments de degré 0 et 1 ;

c) E_0 n'est pas quadratique.

i, j	1	2	3	4	5	6
1	$1+t^5$	$t+t^4$	$t+t^4$	t^2+t^3	t^2+t^3	t^2+t^3
2	$t+t^4$	$1+t^3$	t^2+t^3	$t+t^2$	$t+t^2$	0
3	$t+t^4$	t^2+t^3	$1+t^3$	$t+t^2$	0	$t+t^2$
4	t^2+t^3	$t+t^2$	$t+t^2$	$1+t$	0	0
5	t^2+t^3	$t+t^2$	0	0	$1+t$	0
6	t^2+t^3	0	$t+t^2$	0	0	$1+t$

Afin de mieux visualiser cet algèbre, on peut remarquer que E est un quotient de l'algèbre des chemins dans le graphe ci-dessous, obtenu en liant les sommets i et j si $e^1_{ij} \neq 0$ (*i.e.* $\mathrm{Ext}^1_{g,K}(V_i, V_j) \neq 0$, ce qui implique que $e^1_{ji} \neq 0$):



où les symboles $\cap$ et $\cup$ représentent des boucles.

THÉORÈME 3. — *Soit D le voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ du théorème 1. Pour tout $\chi \in D - \{0\}$, on a*

$$E_\chi \approx F \times \wedge\mathbb{C}^2 \times \wedge\mathbb{C}^2$$

où l'algèbre graduée F est engendrée par $\{e_1, e_2\}$ en degré 0,

$$\{a_{ij} \mid 1 \leq i\,,\ j \leq 2\}$$

en degré 1, avec les relations $1 = e_1 + e_2$, $e_i e_j = \delta_{ij} e_j$, $a_{ij} = e_i a_{ij} e_j$, $a^2_{ii} = 0$ et $a_{ii} a_{ij} = a_{ij} a_{jj}$ pour $i \neq j$. En particulier F est de Koszul et sa série de Poincaré de F est

$i,\ j$	1	2
1	$1+t^2$	$t+t^2$
2	$t+t^2$	$1+t^2$

Le graphe correspondant est alors : $\subset$ 1—2 $\supset$. Les théorème 1, 2 et 3 sont prouvés à la fin de cette note.

Cet article repose largement sur un résultat de [BGG], à partir duquel le calcul de E_χ au voisinage du caractère trivial se réduit facilement à la résolution explicite de systèmes d'équations linéaires sur $\mathbb{C}[x\,,\,y]$. Ne sachant résoudre ces systèmes en général, on introduit, exclusivement pour les besoins de la cause, une classe de tels systèmes qualifiés de *bons*, qui permet d'effectuer à moindre frais tous les calculs apparaissant ici. Moralement, les bons systèmes sont ceux qu'on peut résoudre per la méthode des éliminations de Gauss.

1. Rappel du résultat de [BGG]

Rappelons que notre groupe G est SL(3,$\mathbb{R}$). Identifions une fois pour toutes l'algèbre $Z = \mathbb{C}[x, y]$ au centre de l'algèbre enveloppante, et les caractères de Z au points de $\mathbb{C}^2$ (le caractère trivial correspondand au point 0).

DÉFINITION 4. — (des algèbres A et de B) *Posons $B = A \times Z$ où A est l'ensemble des triplets de matrices $(a, b, c) \in \left(M_6(Z)\right)^3$ tels que :*

$$a_{21}, a_{41}, a_{23}, a_{43}, b_{25}, b_{45}, a_{22}-b_{22}, a_{42}-b_{42}, a_{24}-b_{24}, a_{44}-b_{44} \in (x),$$
$$a_{31}, a_{41}, a_{32}, a_{42}, c_{36}, c_{46}, a_{33}-c_{33}, a_{43}-c_{43}, a_{34}-c_{34}, a_{44}-c_{44} \in (y),$$
$$b_{45}, b_{42}, c_{46}, c_{43}, b_{44}-c_{44} \in (x+y),$$

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ ou } j \in \{5, 6\}, \\ b_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ ou } j \in \{1, 3, 6\}, \\ c_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ ou } j \in \{1, 2, 5\}, \end{cases}$$

où, comme d'habitude, $(z_1, \ldots, z_k)$ désigne l'idéal engendré par les z_i. On vérifie que c'est une Z-sous-algèbre de la Z-algèbre des triplets de matrices 6×6 (pour le produit composante par composante).

[Faute d'avoir trouvé une façon brève d'expliquer d'où sort cette étrange algèbre, on se contentera de renvoyer à [BGG] pour de plus amples développements à se sujet.]

Notons O le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^2$ et $O(E)$ l'algèbre des sections de O au-dessus de E. En particulier, $O(\chi)$ est l'algèbre locale des séries convergentes au voisinage de $\chi \in \mathbb{C}^2$, d'idéal maximal $I(\chi)$. Si $E \subset \mathbb{C}^2$ est un sous-ensemble, on pose

$$B(E) = B \bigotimes_Z O(E).$$

Pour $\chi \in \mathbb{C}^2$, on désigne par $\widehat{B(\chi)}$ la complétée de $B(\chi)$ en $I(\chi)$ et par $B(\chi)_0$ le quotient de $\widehat{B(\chi)}$ par son radical. On note $\operatorname{supp} V$ le support [B2, II.4.4] d'un Z-module V. Si V est somme de Z-modules de dimension finie, par exemple si $V \in \mathcal{H}$, alors $\operatorname{supp} V$ est l'ensemble des zéros communs à tous les éléments de Z qui annulent V ; et V est de caractère généralisé $\chi \in \mathbb{C}^2$ si et seulement si $\operatorname{supp} V \subset \{\chi\}$ (avec $\operatorname{supp} V = \{\chi\}$ si $V \neq 0$).

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Z-modules et E une partie de $\mathbb{C}^2$, on note $\mathcal{C}_E$ la sous-catégorie pleine des objets de $\mathcal{C}$ à support dans E. Tous les modules considérés sont *à droite* et, pour toute $\mathbb{C}$-algèbre Λ, on note df-Λ la catégorie des Λ-modules de dimension finie. On distinguera entre les équivalences (notées $\sim$) et les isomorphismes (notés $\approx$) de catégories. Le résultat suivant est essentiellement dû à [BGG].

PROPOSITION 5. — *Il existe un voisinage D de 0 dans $\mathbb{C}^2$ tel que*

$$\mathcal{H}_\chi \sim \text{df-}B(\chi) \approx \text{df-}\widehat{B(\chi)} \quad \textit{et} \quad E_\chi \approx \operatorname{Ext}_{\widehat{B(\chi)}}\big(B(\chi)_0\,,\, B(\chi)_0\big)$$

pour tout $\chi \in D$, où $\mathcal{H}_\chi$ et E_χ sont définis comme dans l'introduction.

Notre but étant de calculer E_χ, le reste de cette note sera consacrée, une fois la proposition 5 démontrée, à l'étude des algèbres

$$\operatorname{Ext}_{\widehat{B(\chi)}}\big(B(\chi)_0\,,\, B(\chi)_0\big)$$

pour $\chi \in D$. Le point crucial consistera à remarquer (prop. 7) que B admet une graduation qui en fait simultanément une algèbre graduée et un Z-module gradué libre (de rang fini).

Preuve de la proposition 5. — D'après le théorème 1 et la remarque 6(c) de [BGG, pp. 436 et 497], il existe un voisinage D de 0 dans $\mathbb{C}^2$ et une équivalence de Z-catégories $\mathcal{H}_D \sim \big(\text{df-}B\big)_D$, et donc une équivalence de $\mathbb{C}$-catégories

$$\mathcal{H}_\chi \sim \big(\text{df-}B\big)_\chi\,. \tag{a}$$

Montrons l'isomorphisme naturel

$$\big(\text{df-}B\big)_\chi \approx \text{df-}B(\chi)\,. \tag{b}$$

Soit $V \in \text{df-}B(\chi)$. Par restriction, on peut le voir comme un objet de df-B. Soient $a \in \operatorname{supp} V$ et I_a l'idéal des polynômes nuls en a. On a $VI_a \neq V$, d'où $I_a \subset I(\chi)$ et donc $a = \chi$, c'est-à-dire $V \in \big(\text{df-}B\big)_\chi$. Soit maintenant $W \in \big(\text{df-}B\big)_\chi$. Définissons une action de $B(\chi)$ sur W qui étend celle de B. Pour cela, il suffit de donner une action de $O(\chi)$ qui étend celle de Z. Soit donc $f \in O(\chi)$ et $f = \sum f_k$, $f_k \in I_\chi^k$ son développement en série de Taylor en χ. Comme $WI_\chi^k = 0$ pour k assez grand, on peut poser $wf = \sum wf_k$. On a donc bien $W \in \text{df-}B(\chi)$, et (b) est prouvé.

Montrons l'isomorphisme naturel

$$\text{df-}B(\chi) \approx \text{df-}\widehat{B(\chi)}\,. \tag{c}$$

Vu que $B(\chi)I(\chi)$ est contenu dans le radical de $B(\chi)$, la complétion n'affecte pas la catégorie des modules de dimension finie. Plus précisément, df-$\widehat{B(\chi)}$ s'identifie à la catégorie des $B(\chi)$-modules de dimension finie annulés par une certaine puissance de $B(\chi)I(\chi)$. D'autre part, dire que $B(\chi)I(\chi)$ est contenu dans le radical de $B(\chi)$, c'est-à-dire que $B(\chi)I(\chi)$ annule les modules simples, et, par suite, que tout $B(\chi)$-module de dimension finie est annulé par une certaine puissance de $B(\chi)I(\chi)$. Cela prouve (c). La première assertion de la proposition 5 découle de (a), (b) et (c). Quant à la seconde, elle se démontre comme dans [BW, I.5.5]. □

Remarque. — Une petite erreur semble s'être glissée dans [BGG, rem 1, p. 495], où il est dit que, pour toute Z-algèbre B de type fini sur Z et tout ouvert connexe $D \subset \mathbb{C}^2$, on a une équivalence $(\text{df-}B)_D \sim \text{df-}B(D)$. On obtient un contre-exemple en prenant D un ouvert connexe U privé d'un point a et $B = Z$, car on a alors $O(D) = O(U)$ par le théorème de Hartog, et pourtant il existe des $O(D)$-modules de dimension finie de support $\{a\}$.

2. Préliminaires

Vu qu'on peut considérer séparément les deux facteurs de $B = A \times Z$ (voir définition 4) et que le traitement de Z revient essentiellement à invoquer le théorème des syzygies de Hilbert, on se propose de trouver une description plus opératoire de A, et, armé de cette description, de calculer une résolution minimale au sens de Eilenberg [E] de $A(\chi)_0$ pour tout χ assez proche de 0. On commence par préparer le terrain pour ces calculs par quelques considérations générales —illustrées à l'aide d'un exemple numérique (voir preuve de la proposition 7)— sur les Z-modules gradués. Une application homogène de degré 0 entre Z-modules gradués sera simplement dite *graduée*. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les applications Z-linéaires graduées $\varphi : V \to W$ entre Z-modules libres gradués de rang fini, les morphismes étant les carrés Z-linéaires gradués évidents. D'après le théorème des syzygies de Hilbert, le noyau de φ est aussi libre (de rang fini). Pour chaque choix de bases graduées (*i.e.* de bases dont les éléments sont homogènes), φ est représentée par une matrice $a = (a_{ij})$ graduée, c'est-à-dire qu'un entier appelé degré est attribué à chaque ligne et

chaque colonne et que chaque entrée est homogène de degré le degré de sa ligne moins celui de sa colonne. On peut aussi penser en termes d'équations linéaires à coefficients dans Z en considérant le système

$$\sum_{1\leq j\leq n} a_{ij}\xi_j = b_i\,, \quad 1\leq i\leq m\,, \tag{S}$$

où les a_{ij}, b_i et ξ_j sont dans Z; les a_{ij} et b_i étant supposés connus, on cherche tous les $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in Z^n$ satisfaisant le système.

On dira que le morphisme φ (la matrice a ou le système (S)) est *bon* s'il est représentable par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où 1 est la matrice identité $r \times r$ et d est une matrice $p \times q$ (p, q, $r \geq 0$) à coefficients dans $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y$ de rang au plus 1 sur $\mathbb{C}(x, y)$. Une application $\mathbb{C}$-linéaire graduée $h : W \to V$ sera appelée une *homotopie* de φ si $\varphi h \varphi = \varphi$. (En d'autres termes h fournit une solution $h(b)$ de l'équation $\varphi(\xi) = b$ pour tout $b \in \operatorname{Im}\varphi$.)

On se propose de décrire un algorithme qui réalise le programme suivant :

(P1) décider si φ est bon,

et si c'est le cas :

(P2) construire une Z-base de $\operatorname{Ker}\varphi$,

(P3) construire une homotopie de φ.

On pourra alors résoudre $\varphi(\xi) = b$ comme suit. Si $\varphi\big(h(b)\big) \neq b$, il n'y a pas de solution. Si $\varphi\big(h(b)\big) = b$ alors $\varphi^{-1}(b) = h(b) + \operatorname{Ker}\varphi$, et le membre de droite est connu explicitement.

Par *opération sur la $i^{ème}$ ligne* de a, on entend le remplacement de cette ligne par une combinaison Z-linéaire graduée (dans le sens évident) des lignes, combinaison dont le $i^{ème}$ coefficient est un nombre complexe non nul. Par *opération sur les lignes* de a, on entend soit une opération du type précédent, soit une permutation des lignes. Les *opérations sur les colonnes* sont définies de façon similaire. Ces opérations reviennent à faire des changements de bases graduées (au but dans le premier cas, à la source dans le second), et transforment donc matrices graduées en matrices graduées. Une opération sur les lignes (resp. colonnes) multiplie a à

gauche (resp. droite) par la matrice graduée inversible obtenue en effectuant ladite opération sur la matrice identité. En termes de systèmes, opérer sur les lignes, c'est permuter des combinaisons linéaires graduées d'équations; opérer sur les colonnes, c'est effectuer des changements de variables linéaires gradués. Par de telles opérations en appliquant la méthode d'élimination de Gauss aux lignes et aux colonnes, on peut mettre a sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où 1 est la matrice identité $r \times r$ et d est une matrice $p \times q$ (p, q, $r \geq 0$) à coefficients dans l'idéal $I = (x, y)$ de Z (plus précisément dès qu'on aperçoit une entrée inversible, on la rend égale à 1 et on annule toutes les autres entrées de la même ligne et celles de la même colonne; et on recommence jusqu'à épuisement; puis, on permute lignes et colonnes afin d'obtenir la forme désirée). Manifestement φ et bon si et seulement si d l'est, ce qui est facile à tester. La mission (P1) et donc remplie.

LEMME 6. — *Si φ est bon, alors on peut, au moyen d'un algorithme, l'écrire comme une somme directe d'objets de $\mathcal{C}$ chacun isomorphe à l'un des six morphismes suivants (on identifie applications Z-linéaires de Z^n dans Z^m et $m \times m$-matrices) :*

$$\begin{aligned} Z \to 0\,; \quad 0 \to Z\,; \\ (1) : Z \to Z\,; \\ (ax + by) : Z \to Z\,, \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\,; \\ (x, y) : Z^2 \to Z\,; \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : Z \to Z^2\,. \end{aligned}$$

Preuve. — On peut supposer que, dans les notations ci-dessus, φ est représenté par la matrice d (en d'autres termes $r = 0$), et que d est de rang 1 sur $\mathbb{C}(x, y)$. Considérons d'abord le cas où d possède au moins deux lignes et deux colonnes. soit

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

une sous-matrice de d. On a $\alpha\delta = \beta\gamma$; par factorialité de Z, on déduit que les lignes ou les colonnes de s sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$,

et la même conclusion s'applique aussitôt à d. Disons que les lignes sont $\mathbb{C}$-proportionnelles mais que les colonnes ne le sont pas. On peut donc (par des opérations sur les lignes) annuler toutes les lignes de d sauf la dernière, qu'on peut (par des opérations sur les colonnes) mettre sous la forme $(x \quad y \quad 0 \quad \dots \quad 0)$. Les autres cas sont analogues. □

Pour achever le programme, il suffit d'accomplir les tâches (P2) et (P3) pour les six morphismes figurant dans le lemme 6, ce qui est un exercice facile laissé au lecteur.

3. La structure de A

PROPOSITION 7. — *L'algèbre A (définition 4) admet une graduation qui en fait simultanément une algèbre graduée et un Z-module gradué libre (de rang fini). De plus, il existe un algorithme pour construire une Z-base de A et calculer les constantes de structures correspondantes.*

Preuve. — (En fait la preuve fournira des renseignements plus précis sur A qui seront utilisés par la suite.) Il faut d'abord se convaincre que les équations définissant l'algèbre A peuvent se mettre sous la forme d'un système gradué. Faisons-le dans le cas le plus compliqué, à savoir pour les équations concernant les polynômes a_{44}, b_{44} et c_{44}, qu'on désigenera respectivement par ξ_1, ξ_2 et ξ_3. Les équations sont alors $\xi_1 - \xi_2 \in (x)$, $\xi_1 - \xi_3 \in (y)$, $\xi_2 - \xi_3 \in (x+y)$. Soit S le Z-module des solutions. Formons les polynômes inconnus $\xi_4 = (\xi_1 - \xi_2)/x$, $\xi_5 = (\xi_1 - \xi_3)/y$ et $\xi_6 = (\xi_2 - \xi_3)/(x+y)$. Le système devient

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & & -x\xi_4 & & \\ \xi_1 & & -\xi_3 & & -y\xi_5 & \\ & \xi_2 & -\xi_3 & & & -(x+y)\xi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on vérifie facilement qu'il est bon. Si V désigne le Z-module des solutions, on obtient S en prenant les trois premières composantes des vecteurs de V.

Exemple. — À titre d'illustration, faisons-le explicitement. Notons (1), (2) et (3) les équations du système. On commence par éliminer ξ_1 et ξ_2 en passant au système (1′), (2′), (3′) où

$$(1') = (1) - (2) + (3) = \big(-x\xi_4 + y\xi_5 - (x+y)\xi_6 = 0\big)$$
$$(2') = (2), \quad (3') = (3)\ ;$$

système qui est manifestement bon. En notant η_1 et η_2 les membres de gauche de (2) et (3), et η_i les autres ξ_i, on aboutit au système

$$\begin{aligned}(1'') - x\eta_4 + y\eta_5 - (x+y)\eta_6 &= 0\,,\\ (2'')\eta_1 &= 0\,,\\ (3'')\eta_2 &= 0\,.\end{aligned}$$

On effectue alors un dernier changement de variables en posant

$$\zeta_4 = -\eta_4 - \eta_6\,,\quad \zeta_5 = \eta_5 - \eta_6 \quad \text{et} \quad \zeta_i = \eta_i\,,\quad i \neq 4,\,5\,,$$

pour parvenir à la forme

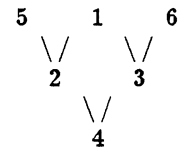
$$\begin{aligned}(1''')x\zeta_4 + y\zeta_5 &= 0\,,\\ (2''')\zeta_1 &= 0\,,\\ (3''')\zeta_2 &= 0\,.\end{aligned}$$

Pour trouver la solution générale, il suffit alors de donner des valeurs arbitraires à ζ_3, ζ_6 et φ, et à poser $\zeta_4 = y\varphi$, $\zeta_5 = -x\varphi$. On a ainsi un isomorphisme explicite $S \approx Z^3$. Pour exprimer la solution en terme des ξ_i, on effectue les changements de variables inverses, et on tombe sur la base suivante de S :

$$(1,1,1,0,0,0)\,,\ (x,x+y,0,-1,1,1)\,,\ (-xy,0,0,-y,-x,0)\,,$$

d'où la base $(1,1,1)$, $(x,x+y,0)$, $(xy,0,0)$ de V.

On traite les autres équations définissant A de façon similaire, et on vérifie que tous ces systèmes sont bons. Il s'ensuit que A est une Z-algèbre libre de rang fini, et qu'on peut en trouver une base explicite. Plus précisément, pour tout couple (i,j), $1 \leq i,\, j \leq 6$, on a un système, dont on note S_{ij} le Z-module des solutions. L'algorithme fournit alors une Z-base de $S_{ij} \subset Z^3$ dont les vecteurs s'avèrent avoir trois composantes homogènes de même degré. De plus, les degrés sont tous distincts pour i et j fixes. En particulier chaque fois que $S_{ij} \neq 0$, le vecteur de base de plus petit degré est bien défini à un multiple par un nombre complexe non nul près. Soit $d(i,j)$ la distance des sommets i et j dans le graphe ci-dessous :



Pour tout couple (i,j) avec $d(i,j) \leq 1$ on a $S_{ij} \neq 0$, et on note u_{ij} le vecteur de plus petit degré de notre base. On vérifie que la Z-algèbre A est engendrée par $E = \{u_{ij} \mid d(i,j) \leq 1\}$, ou, ce qui revient au même, que la $\mathbb{C}$-algèbre A est engendrée par $E \cup \{x, y\}$. On montre alors facilement qu'il existe une (unique) graduation de A telle que u_{ij} soit de degré $d(i,j)$ et x et y de degré 2. □

Dorénavant A sera munie de cette graduation, notée $A = \bigoplus_{p\geq 0} A^p$ (la graduation induite sur $B = A \times Z$ sera notée de façon similaire). En particulier,

$$A^0 = \bigoplus \mathbb{C} u_{ii} \approx \mathbb{C}^6 ,$$

et si J désigne l'idéal $\bigoplus_{p\geq 1} A^p$, on a $A^0 \approx A/J$. Il est donc clair que, dans les notations du début, pour $\chi = 0 \in \mathbb{C}^2$ les $\mathbb{C}[\![x, y]\!]$-algèbres $\widehat{A(0)}$ et $\prod_{p\geq 0} A^p$ sont isomorphes et $\mathbb{C}[\![x, y]\!]$-libres de rang fini, que :

$$\operatorname{rad} \widehat{A(0)} = \prod_{p\geq 1} A^p , \quad A(0)^0 = \widehat{A(0)}/\operatorname{rad} \widehat{A(0)} \approx A^0 ,$$

et que, d'après [E], les auto-extensions de A^0 vues comme A-modules ou comme $\widehat{A(0)}$-modules sont les mêmes (la résolution minimale de $\widehat{A(0)}$-module A^0 étant obtenue en complétant celle du A-module A^0). Il sera plus commode de travailler sur la Z-algèbre graduée A. Posons $V_i = u_{ii}A/u_{ii}J$. Tout A-module gradué simple est alors isomorphe à un unique V_i.

4. Résolutions minimales

Rappelons qu'une résolution projective graduée $\{\partial_j : P_j \to P_{j-1}\}_{j\geq 1}$ d'un A-module gradué V est dite *minimale* si $\partial_j P_j \subset P_{j-1}J$ et que, si c'est le cas, on a $\operatorname{Ext}^j_A(V, W) \approx \operatorname{Hom}_{A^0}(P_j/P_jJ , W)$ pour tout A-module gradué simple W (voir [E]). On va donner explicitement une résolution minimale $P_{i*} \to V_i$ de V_i pour chaque i. En fait, tous les P_{ij} sont des sous-modules de A. Comme on travaille avec des modules à droite, cela signifie qu'il existe un idempotent e_{ij} de A tels que $P_{ij} = e_{ij}A$, et que ces résolutions sont entièrement caractérisées par les éléments

$$d_{ij} = \partial_{ij} e_{ij} \in e_{i,j-1} J e_{ij}$$

où $\partial_{ij} : P_{ij} \to P_{i,j-1}$ est le morphisme de bord. Pour donner ces d_{ij}, on introduit quelques notations. On commence par définir l'involution $\theta : (a,b,c) \mapsto (a',b',c')$ de $\big(M_6(Z)\big)^3$ comme suit. Notant σ la permutation $(2,3)(5,6)$ de $\{1, 2, \ldots, 6\}$, on pose

$$\begin{aligned} a'_{ij}(x,y) &= a_{\sigma i,\sigma j}(y,x)\,, \\ b'_{ij}(x,y) &= c_{\sigma i,\sigma j}(y,x)\,, \\ c'_{ij}(x,y) &= b_{\sigma i,\sigma j}(y,x)\,. \end{aligned}$$

On vérifie que θ préserve A. Puis, on désigne par (α,β,γ) la base canonique de Z^3 et par e_{ij} les unités matricielles de $M_6(Z^3)$. Enfin, on pose pour abréger $e_i = e_{ii}$ et $z = x + y$.

PROPOSITION 8 (Résolution minimale de A/J). — *Dans les notations ci-dessus, les d_{ij} non nuls définissant les résolutions minimales $P_{i*} \to V_i$ peuvent être choisis comme suit.*

$$\begin{aligned}
d_{11} &= \alpha e_{12} + \alpha e_{13}\,, \\
d_{12} &= \beta x e_{25} - (\alpha+\beta) e_{24} + (\alpha+\gamma) e_{34} + \gamma y e_{36}\,, \\
d_{13} &= \beta z e_5 + \beta e_{54} + \beta x z e_{45} + (\beta x - \gamma y) e_4 + \gamma y z e_{46} - \gamma z e_6\,, \\
d_{14} &= \beta e_{52} - (\alpha x + \beta z) e_{42} + (\alpha x + \gamma z) e_{43} + \gamma e_{63}\,, \\
d_{15} &= \alpha x e_{21} + \alpha y e_{31}\,, \\
d_{21} &= \alpha x e_{21} - (\alpha+\beta) e_{24} + \beta x e_{25}\,, \\
d_{22} &= \alpha e_{13} + (\alpha x + \gamma z) e_{43} + (\beta x - \gamma y) e_4 + \beta x z e_{45} + \beta e_{54} + \beta z e_5\,, \\
d_{23} &= \gamma y e_3 - (\alpha x + \gamma z) e_{43} + (\alpha y + \beta z) e_{42} - \beta e_{52}\,, \\
d_{24} &= \alpha y e_{31} + \alpha x e_{21}\,, \\
d_{41} &= (\alpha y + \beta z) e_{42} + (\gamma y - \beta x) e_4 - (\alpha x + \beta z) e_{43}\,, \\
d_{42} &= \beta x e_2 + \alpha x e_{21} + (\alpha y + \beta z) e_{42} + (\alpha x + \gamma z) e_{43} + \alpha y e_{31} + \gamma y e_3\,, \\
d_{43} &= \alpha x e_{21} - \alpha y e_{31}\,, \\
d_{51} &= \beta e_{52} + \beta e_5\,, \\
d_{52} &= \alpha x e_{21} - (\alpha+\beta) y e_2 + \beta e_{52}\,, \\
d_{53} &= \alpha y e_1 + \alpha x e_{21}\,, \\
d_{3j} &= \theta d_{2j}\,, \quad d_{6j} = \theta d_{5j} \text{ pour } 1 \le j \le 5\,.
\end{aligned}$$

Preuve.— Soit $P_{i*} \to V_i$ une résolution minimale *quelconque* de V_i. Oublions un instant la structure de A-module pour ne considérer que la structure sous-jacente de Z-modules gradués. On a alors une résolution projective de type fini, donc libre de rang fini, du module trivial. D'après [E], P_i est de la forme $Q_i \oplus (R_i \otimes_{\mathbb{C}} Z)$ où Q_{i*} est le complexe de Koszul de Z, c'est-à-dire la suite d'applications

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} : Z \to Z^2 \,,\ \partial_1 = x \quad y : Z^2 \to Z \,,$$

et R_{i*} est un complexe acyclique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Réciproquement, tout A-complexe projectif gradué P_{i*} sur V_i, qui satisfait $\partial P_{ij} \subset P_{i,j-1}J$ (où rappelons-le, J est le radical gradué de A) et dont la restriction à Z est de la forme ci-dessus, est une résolution minimale.

Soit maintenant $P_{i*} \to V_i$ le A-complexe projectif sur V_i (on vérifie aisément que c'en est un) défini par les d_{ij} de l'énoncé. On s'assure sans peine que l'inclusion ci-dessus a effectivement lieu. Il ne reste plus qu'à prouver l'exactitude. Pour cela, on suppose qu'on a construit, à l'aide de la recette exposée dans le section 2, une Z-base graduée de A compatible avec la décomposition $A = \bigoplus e_p A e_q$, et qu'on a calculé les constantes de structure correspondant à cette base. On rappelle que $I \subset Z$ et $J \subset A$ sont les radicaux gradués.

Exactitude en P_{i0}

On a $P_{i0} = e_i A$ et $\mathrm{Ker}(P_{i0} \to V_i) = e_i J$. L'élément d_{i1} apparaît dans l'énoncé comme une somme de k termes $t_1, \ldots, t_k \in e_i J$. Il suffit de voir que les $t_k = d_{i1} e_k$, $1 \leq k \leq 6$, engendrent, $e_i J$. Identifions A à Z^n au moyen de notre base. On a donc

$$e_i J = Z^n J$$

(Z^n est un A-module à droite). Soient

$$p : Z^n J \to Z^n J / Z^n J^2 \quad \text{et} \quad q : Z^n J \to Z^n J / Z^n I^2$$

les projections canoniques. D'après [E], il suffit de voir que les $p(t_k)$ engendrent $Z^n J / Z^n J^2$ et donc, vu l'inclusion $AI \subset J$, que les $q(t_k)$ engendrent $Z^n J / Z^n I^2$. Par suite, on peut travailler dans $A \mid AI^2$, qui est une $\mathbb{C}$-algèbre graduée de dimension finie, et où ce genre de calcul ne presente pas de difficulté.

Exactitude en P_{i1}

La suite $P_{i2} \to P_{i1} \to P_{i0}$, dont on désire vérifier l'exactitude, est donnée par deux matrices a et b satisfaisant $ab = 0$. On peut effectuer des opérations sur les lignes et colonnes de ces matrices à condition que chaque opération sur les colonnes de a soit accompagnée de l'opération inverse sur les lignes de b. À chaque étape, on note encore a et b les nouvelles matrices. On vérifie qu'on peut mettre a sous la forme $\mathrm{diag}\big((x,y),\,0,\,1\big)$ où 0 et 1 désignent respectivement une matrice rectangulaire nulle et une matrice identité; et on le fait. On se convainc aisément qu'on peut remplacer a par $\mathrm{diag}\big((x,y),\,0\big)$; et on le fait. Soient $m \times n$ et $n \times p$ les formats respectifs de a et b. On a $n \geq 2$, et on vérifie que $p \geq n-2$ et qu'on peut faire apparaître dans b, en opérant sur ses colonnes, les colonnes suivantes :

$$(-y, x, 0, \ldots, 0)\,,\ (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ (0, 0, 0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ (0, \ldots, 0, 1)\,.$$

L'exactitude est alors claire.

Exactitude en P_{i2}

En procédent comme ci-dessus, avec le décalage d'indices évident, on vérifie qu'on peut mettre a sous la forme

$$\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},\, 0\right),$$

où 0 est une matrice rectangulaire nulle, et qu'on peut ensuite faire apparaître dans b les colonnes

$$(0, 1, 0, \ldots, 0)\,,\ (0, 0, 1, 0, \ldots, 1)\,,\ \ldots\,,\ (0, \ldots, 0, 1)\,.$$

Exactitude en P_{ij}

Pour $j \geq 3$. On vérifie que les exactitudes voulues ont lieu après réduction modulo I (réduction qui produit des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie). Elles avaient donc déjà lieu avant. □

5. Preuve des théorèmes 1, 2 et 3

Preuve du théorème 2

Preuve de 2.a). — Cette assertion résulte immédiatement de la proposition 8. □

Preuve de 2.b). — Rappelons que E_0 est l'algèbre des p-extensions entre modules de Harish-Chandra simples de caractères triviaux et qu'on a les isomorphismes

$$\begin{aligned} E_0 &\approx \mathrm{Ext}_B(B_0, B_0) \approx \mathrm{Ext}_A(A_0, A_0) \times \mathrm{Ext}_Z(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ &\approx \mathrm{Ext}_A(A_0, A_0) \times \wedge\mathbb{C}^2 \approx E \times \wedge\mathbb{C}^2 . \end{aligned}$$

On calcule l'algèbre

$$E \approx \bigoplus_p \mathrm{Ext}_A^p(A_0, A_0)$$

en procédant comme suit. Soient $\Phi \in \mathrm{Ext}_A^p(V_i, V_j)$, $\Psi \in \mathrm{Ext}_A^n(V_j, V_k)$ représentés par

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P_{in}, V_j), \quad \psi \in \mathrm{Hom}_A(P_{jm}, V_k),$$

et

$$\varepsilon : P_{j0} \to V_j$$

l'augmentation. À l'aides des homotopies, on construit successivement des morphismes

$$\varphi_q : P_{i,n+q} \to P_{jq}, \quad 0 \leq q \leq m,$$

tels que $\varphi = \varepsilon\varphi_0$ et

$$\partial_{j,q-1}\varphi_q = (-1)^n \varphi_{q-1}\partial_{i,n+q+1} \quad \text{pour } 1 \leq q \leq m.$$

Le cup-produit $\Psi\Phi$ est alors représenté par $\psi\varphi_m$ (voir [B1, XX.7.2]). À partir de cette observation, la preuve est réduite à une suite de calculs fastidieux mais élémentaires. □

Preuve de 2.c). — Il s'agit de montrer que E n'est pas quadratique. Dans cette preuve, on utilisera des exposants entre parenthèses pour indiquer les graduations; on écrira par exemple $E = \bigoplus E^{(p)}$. Soient

$$e_i = u_{ii} \in E^{(0)} = A_0\,, \quad V = E^{(1)}\,,$$

et

$$T = \bigoplus_{p \geq 0} T^{(p)}$$

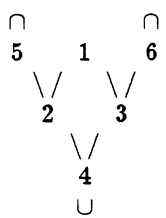
l'algèbre tensorielle de V sur A_0. On a donc

$$E \approx T/I\,, \quad \text{où } I = \bigoplus_{p \geq 2} I^{(p)}\,,$$

est un idéal bilatère gradué. Posons $W = I^{(2)}$ et notons Q le quotient de T par l'idéal bilatère $J = \bigoplus_{p \geq 2} J^{(p)}$ engendré par W. On pose

$$S = \{1, 2, \ldots, 6\}\,, \quad V(i,j) = e_i V e_j\,,$$

et on vérifie les faits suivants. Pour tout $(i,j) \in S^2$ tel que i et j sont adjacents dans le graphe ci-dessous



(où les symboles $\cap$ et $\cup$ représentent des boucles), on peut choisir un vecteur non nul $\varepsilon_{ij} \in V(i,j)$. Ces vecteurs forment alors une base de V. Soient

$$\xi = \varepsilon_{12}\,\varepsilon_{25}\,\varepsilon_{55}\,\varepsilon_{52}\,\varepsilon_{21} \in T\,, \quad \eta = \varepsilon_{13}\,\varepsilon_{36}\,\varepsilon_{66}\,\varepsilon_{63}\,\varepsilon_{32} \in T\,.$$

On vérifie que ξ et η sont linéairement dépendant dans E. Montrons qu'ils ne le sont pas dans Q. Si $i, j \in S$, on écrit $W(i,j) = e_i W e_j$; et si $s = (s_1, \ldots, s_n)$ est une suite d'éléments de S. On pose

$$V(s) = V(s_1, s_2) \otimes V(s_2, s_3) \otimes \cdots \otimes V(s_{n-1}, s_n)$$

et

$$W[s\,,\,i] = V(s_1, \ldots, s_{i-1}) \otimes W(s_{i-1}, s_{i+1}) \otimes V(s_{i+1}, \ldots, s_n)\,.$$

Soient $s = (1,2,5,5,2,1)$ et $t = (1,3,6,6,3,1)$. On a $\xi \in V(s)$, $\eta \in V(t)$, et il suffit donc de prouver $\big(V(s) + V(t)\big) \cap J_5 = 0$. Or cette intersection est égale à $\sum_i \big(W[s\,,\,i] + W[t\,,\,i]\big)$, et on vérifie que chaque terme de cette somme est nul. Le théorème 2 est donc entièrement prouvé. □

Dans [GG, § 7], on prouve un léger raffinement : dans les notations ci-dessus l'idéal bilatère I est engendré par $I^{(2)}$ et $I^{(3)}$.

Preuve du théorème 3

En reprenant les notations du début, on fixe $\chi = (a,b) \in \mathbb{C}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$, et on se propose de décrire $\widehat{A(\chi)}$. Les calculs étant beaucoup plus faciles que pour $\chi = 0$, on se permettra quelques ellipses. On se ramène facilement aux trois valeurs suivantes de χ : $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,-1)$. Définissons Z' comme étant l'algèbre graduée $\mathbb{C}[x-a\,,\,y-b]$. Si A' et une Z'-algèbre, on définit les algèbres $A'(\chi)$ et $\widehat{A'(\chi)}$ de la façon analogue à $A(\chi)$ et $\widehat{A(\chi)}$. On trouve facilement un choix de A' qui rende $A'(\chi)$ et $\widehat{A'(\chi)}$ sobres (ou Morita réduites) et Morita équivalentes à $A(\chi)$ et $\widehat{A(\chi)}$ respectivement. On vérifie que A' est Z'-libre et admet une graduation naturelle qui donne le degré 2 à $x-a$ et $y-b$. On peut alors calculer les p-extensions dans la catégorie des A'-modules (à droite) gradués. On a

$$A' \approx C \times C \times Z'$$

où C est l'algèbre graduée engendrée par e_1, e_2 en degré 0,

$$\{a_{ij} \mid 1 \leq i,\ j \leq 2\}$$

en degré 1, avec les relations

$$1 = e_1 + e_2\,, \quad e_i e_j = \delta_{ij} e_j\,, \quad a_{ij} = e_i a_{ij} e_j\,, \quad a_{ii} a_{ij} = a_{ij} a_{jj}$$

pour tous $i,\ j \in \{1,2\}$. On vérifie que C est une algèbre de Koszul dont le dual est l'algèbre F du théorème 3. □

Preuve du théorème 1

Le théorème 1 découle maintenant des théorèmes 2 et 3. □

Remerciements

J'ai abondamment profité de conversations aussi agréables qu'intéressantes avec Alain Guichardet; conversations qui se sont d'ailleurs matérialisées sous la forme du manuscrit [GG] où la plupart des résultats du présent papier sont énoncés (voir aussi la remarque qui suit la preuve de la preuve de (2.c)). Je remercie également Roland Bacher, André Haefliger, Pierre de la Harpe et Pierre-Paul Grivel pour des remarques plus rédactionnelles mais non moins pertinentes.

Références

[B1] Bourbaki (N.) . — *Algèbre*, Masson, Paris, Chap 10, 1980.

[B2] Bourbaki (N.) . — *Algèbre commutative*, Masson, Paris, Chap. 1 à 4, 1985.

[BG] Beilinson (A.) et Ginsburg (V.) . — *Mixed categories, Ext-duality and representations*, prépublication (1986).

[BGG] Bernstein (I. N.), Gelfand (I. M.) et Gelfand (S. I.) . — *Structure locale des modules de Harish-Chandra*, C.R. Acad. Sc., Paris, **286** (1978), pp. 435-437 et 495-497.

[BGS] Beilinson (A.), Ginsburg (V.) et Soergel (W.) . — *Koszul duality patterns in representation theory*, manuscrit (1991).

[BW] Borel (A.) et Wallach (N.) . — *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive Lie groups*, Ann. Math. Study **94**, Princeton University Press, 1980.

[D] Delorme (P.) . — *Selfextensions de modules de Harish-Chandra et une question de I. M. Gelfand*, Astérique **124-125** (1985), pp. 31-48.

[E] Eilenberg (S.) . — *Homological dimension and syzygies*, Ann. of Math. **64** (1956), pp. 328-336; errata in **65** (1957), p. 593.

[G1] Gaillard (P.-Y.) . — *The p-extensions of simple representations of* Spin$(n,1)$ *and* SU$(n,1)$, *and their cup-products*, manuscrit (1991).

[G2] Gaillard (P.-Y.) . — *Une conjecture sur les p-extensions entre représentations simples des groupes de rang* 1, *et leurs cup-produits*, manuscrit (1992).

[GG] Gaillard (P.-Y.) et Guichardet (A.) . — *Extensions de représentations de* SL(3,$\mathbb{R}$), manuscrit disponible au Centre de Mathématique de l'Ecole Polytechnique de Paris (1992).

[Gu] Guichardet (A.) . — *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980.

[V] Vogan (D.) . — *Irreducible characters of semisimple Lie groups* VI, Duke Math. J. **49** (1982), pp. 943-1013.