ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN-PIERRE DEDIEU

L'image de la limite supérieure d'une famille d'ensembles est-elle égale à la limite supérieure de la famille des images ?

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série, tome 11, n° 2 (1990), p. 91-103

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_91_0>

© Université Paul Sabatier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

L'image de la limite supérieure d'une famille d'ensembles est-elle égale à la limite supérieure de la famille des images?

JEAN-PIERRE DEDIEU[1]

ABSTRACT. — Let X, Y be Hausdorff topological vector spaces. Let I be a set of indices and let $\mathcal{F}$ be a filter in I. With each family $(A_i)_{i\in I}$ of subsets of X is associated its upper-limit :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{i\in F} A_i} \right).$$

Let $(\Gamma_j)_{j\in J}$ a family of set-valued maps from X to Y and let $\mathcal{G}$ a filter in J. We give various conditions which ensure the inclusion :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}} \Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}} \Gamma_j \right) \left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i \right).$$

Applications are given to optimization and mathematical morphology.

1. Introduction

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques et séparés sur $\mathbb{R}$. Soient I un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ un filtre sur I. À toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X nous associons sa limite supérieure :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\overline{\bigcup_{i\in F} A_i} \right)$$

[1] Jean-Pierre Dedieu, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier, 31062 Toulouse Cedex (France)

([1] chap. VI, §5). Donnons-nous une famille $(\Gamma_j)_{j\in J}$, J filtré par $\mathcal{G}$, de multiapplications de X dans Y. Quand peut-on affirmer que l'inclusion suivante est satisfaite :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}} \Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}} \Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right) ?$$

Afin de répondre à cette question, nous introduisons une version paramétrique des notions de cône asymptote et d'ensemble asymptotiquement compact tels qu'ils sont décrits dans [2] et [3]. Nous montrons que l'inclusion précédente a lieu chaque fois que la suite (A_i) est asymptotiquement compacte (c'est toujours le cas si X est de dimension finie) et sous la condition qu'il n'existe pas de direction asymptotique commune aux familles $(A_i \times \{O_Y\})_{i\in I}$ et $(\Gamma_j)_{j\in J}$ (théorème 1). Nous étudions aussi (corollaire 3) l'égalité :

$$\overline{\lim} A_i + \overline{\lim} B_j = \overline{\lim} A_i + B_j$$

ainsi que (théorème 2) :

$$\overline{\lim} T(A_i) = T(\overline{\lim} A_i)$$

lorsque T est un homomorphisme linéaire surjectif dont le noyau est de dimension finie. Ces résultats sont appliqués à l'étude d'un problème d'optimisation ainsi qu'à l'étude de la continuité de certaines applications pour la topologie "en tout ou rien" sur les fermés de $\mathbb{R}^m$.

2. Définitions

Les deux définitions suivantes ont été introduites par l'auteur dans [2] et [3]. Les définitions 3 et 4 sont des versions paramétriques de 1 et 2. Autrement dit 3 et 4 redonnent 1 et 2 pour des familles constantes.

DÉFINITION 1. — *Une partie A de X est asymptotiquement compacte lorsqu'il existe un voisinage V de O_X pour lequel :*

$$(]0,1]A) \cap V$$

est relativement compact.

DÉFINITION 2. — *Le cône asymptote d'une partie A de X est l'ensemble :*

$$A_\infty = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{]0,\epsilon]A}.$$

DÉFINITION 3. — *Une famille* $(A_i)_{i\in I}$, *I filtré par* $\mathcal{F}$, *est asymptotiquement compacte s'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *et un voisinage* V *de* O_X *pour lesquels :*

$$\left(]0,1] \bigcup_{i\in F} A_i\right) \cap V$$

est relativement compact.

DÉFINITION 4. — *Le cône asymptote de* (A_i) *est l'ensemble :*

$$(A_i)_\infty = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \left(\bigcup_{i\in F} A_i\right)_\infty .$$

Remarques

1. Comme $\overline{\lim} A_i \subset \overline{\bigcup_{i\in F} A_i}$, si (A_i) est asymptotiquement compacte au sens de la définition 3, alors $\overline{\lim} A_i$ est asymptotiquement compact au sens de de la définition 1. La réciproque est fausse.
2. Il est clair que $\left(\overline{\lim} A_i\right)_\infty \subset (A_i)_\infty$. Cette inclusion peut être stricte.
3. Nous identifierons une multiapplication à son graphe. Ainsi nous noterons $\Gamma_\infty = (\text{graphe}\,\Gamma)_\infty \ldots$, etc.

3. Énoncé des résultats principaux

La notion de compacité asymtotique joue ici un rôle fondamental. Si un ensemble A possède cette propriété et si (x_i) est une suite de points de A (ou plus généralement un filtre sur A) alors, soit (x_i) possède une valeur d'adhérence $x \in \overline{A}$, soit (x_i) "s'enfuit à l'infini" le long d'une (ou plusieurs) direction(s) asymptotique(s) de A ([3], prop. 3.8). Dans le lemme qui suit nous donnons une version paramétrique de ce résultat.

LEMME 1. — *Soit* $(A_i)_{i\in I}$, *une famille asymptotiquement compacte de parties de* X, I *filtré par* $\mathcal{F}$. *Soit* $\mathcal{B}$ *un filtre sur* X *plus fin que le filtre* $\mathcal{A}$ *de base* $\bigcup_{i\in F} A_i$, $F \in \mathcal{F}$. *Soit* $\mathcal{B}$ *possède un point adhérent* $b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i$, *soit le filtre de base* $]0,\epsilon]B$, $\epsilon > 0$ *et* $B \in \mathcal{B}$, *possède un point adhérent* $b_\infty \in (A_i)_\infty$, $b_\infty \neq O_X$.

Démonstration. — Si $\mathcal{B}$ possède un point adhérent b, il est clair que $b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i$ puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ ne possède pas de point adhérent. La famille (A_i) étant asymptotiquement compacte, il existe $F_0 \in \mathcal{F}$, et un voisinage V de O_X, absorbant, équilibré et fermé pour lesquels :

$$A = \left( ]0,1] \bigcup_{i \in F_0} A_i \right) \cap V$$

soit relativement compact.

Montrons que pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $n \geq 1$ on a :

$$B \setminus nV \neq \emptyset. \tag{1}$$

Si cela n'est pas le cas, il existe $B_1 \in \mathcal{B}$ et $n_1 \geq 1$ pour lesquels $B_1 \subset n_1 V$. L'ensemble $B_1 \cap \bigcup_{i \in F_0} A_i$ est contenu dans $\mathcal{B}$ puisque ce filtre est plus fin que $\mathcal{A}$. De plus cet ensemble est relativement compact puisqu'il est contenu dans $n_1 V \cap \bigcup_{i \in F_0} A_i$. Ceci prouve que le filtre $\mathcal{B}$ possède un point adhérent contrairement à l'hypothèse et démontre la relation (1). Cette relation peut aussi s'écrire :

$$(]0,\epsilon]B) \cap V \neq \emptyset,$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $0 < \epsilon \leq 1$, de sorte que :

$$(]0,\epsilon]B) \cap A \neq \emptyset \tag{2}$$

puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$. Notons C l'intersection de A et du complémentaire de l'intérieur de $\frac{1}{2}V$. Cet ensemble est relativement compact et rencontre toute demi-droite issue de l'origine et contenant un point de A. Plus précisément, il existe $\lambda_0 \geq 1$ tel que $([1,\lambda_0]a) \cap C \neq \emptyset$ pour tout $a \in A$. Ceci résulte du fait que A est relativement compact. La relation (2) devient :

$$(]0,\epsilon]B) \cap C \neq \emptyset$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$ et $0 < \epsilon \leq \lambda_0^{-1}$. Ces ensembles, qui sont relativement compacts, constituent la base d'un filtre qui possède un point adhérent x_∞. Ce point est, bien sûr, adhérent aux ensembles $]0,\epsilon]B$. On a $x_\infty \in (A_i)_\infty$ puisque $\mathcal{B}$ est plus fin que $\mathcal{A}$ et $x_\infty \neq O_X$ puisque $O_X \notin \overline{C}$. □

THÉORÈME 1. — *Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille asymptotiquement compacte de parties de X et $(\Gamma_j)_{j \in J}$ une famille de multiapplications de X dans Y. Si :*

$$(\Gamma_j)_\infty \cap ((A_i)_\infty \times \{O_Y\}) = \{O_{X \times Y}\}$$

alors

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\,\Gamma_j(A_i) \subset \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\,\Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i\right).$$

De plus, ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration. — La deuxième assertion résulte des remarques 1 et 2. On a en effet $\overline{\lim}_{\mathcal{F}}\,A_i$ asymptotiquement compact et :

$$\left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}}\,\Gamma_j\right)_\infty \cap \left(\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i\right)_\infty \times \{O_Y\}\right) = \{O\}.$$

On peut appliquer [2] (théorème 3.1) ou [3] (corollaire 4.3).

Prouvons maintenant la première assertion. Soit $y \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}\,\Gamma_j(A_i)$. Pour $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et le voisinage W de O_Y, il existe $i \in F$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(y + W) \cap \Gamma_j(A_i) \neq \emptyset.$$

Autrement dit, l'ensemble :

$$B_{F,G,W} = \{x \in X \mid \exists\, i \in F,\ \exists\, j \in G,\ x \in A_i \text{ et } y \in \Gamma_j x - W\}$$

est non vide. Ceci prouve que ces ensembles constituent la base d'un filtre $\mathcal{B}$ sur X plus fin que le filtre $\mathcal{A}$ de base $\bigcup_{i\in F} A_i$, $F \in \mathcal{F}$. Deux cas peuvent alors se présenter.

1^er cas : $\mathcal{B}$ possède un point adhérent x

C'est aussi un point adhérent à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire,

$$x \in \overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i.$$

D'autre part, pour tout voisinage U de O_X, on a :

$$(x + U) \cap B_{F,G,W} \neq \emptyset,$$

de sorte que :

$$((x,y) + U \times W) \cap \left(\bigcup_{j\in G} \Gamma_j\right) \neq \emptyset.$$

Comme U, W et G sont quelconques, on obtient :

$$(x,y) \in \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\,\Gamma_j$$

et ceci prouve que :

$$y \in \left(\overline{\lim_{\mathcal{G}}} \Gamma_j\right)\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right)$$

et démontre le théorème 1 dans ce cas.

2ième cas : $\mathcal{B}$ ne possède pas de point adhérent

D'après le lemme 1, on peut trouver $x_\infty \in (A_i)_\infty$, $x_\infty \neq O_X$, qui soit adhérent aux ensembles $]0, \epsilon] B_{F,G,W}$. Remarquons que pour tout $x \in B_{F,G,W}$ on a :

$$(x, y) \in \left(\bigcup_{j \in G} \Gamma_j\right) - \{O_X\} \times W$$

de sorte que :

$$]0, \epsilon] (B_{F,G,W} \times \{y\}) \subset]0, \epsilon] \left(\bigcup_{j \in G} \Gamma_j - \{O_X\} \times W\right).$$

Passons aux adhérences et prenons l'intersection pour W voisinage de O_Y, $\epsilon > 0$ et $G \in \mathcal{G}$. Le premier membre contient (x_∞, O_Y) et le second est égal à $(\Gamma_j)_\infty$, ce qui prouve que :

$$(x_\infty, O_Y) \in (\Gamma_j)_\infty .$$

On a donc :

$$(\Gamma_j)_\infty \cap ((A_i)_\infty \times \{O_Y\}) \neq \{O\}$$

contrairement à l'hypothèse. Ce second cas ne se présente donc pas et ceci prouve le théorème 1. □

COROLLAIRE 1. — *S'il existe $F \in \mathcal{F}$ pour lequel $\bigcup_{i \in F} A_i$ soit relativement compact alors les conclusions du théorème 1 sont satisfaites.*

Démonstration. — En effet, la famille (A_i) est alors asymptotiquement compacte et $(A_i)_\infty = \{O_X\} \ldots$ □

COROLLAIRE 2. — *Si Γ est une multiapplication de graphe fermé, (A_i) une famille asymptotiquement compacte de parties de X telle que :*

$$\Gamma_\infty \cap ((A_i)_\infty \times \{O_Y\}) = \{O_{X \times Y}\},$$

alors :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,\Gamma(A_i) \subset \Gamma\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i\right)$$

et ce dernier ensemble est fermé dans Y.

Démonstration. — On applique le théorème 1 à la famille constante égale à Γ. On a $\Gamma = \overline{\lim}_{\mathcal{G}}\,\Gamma$ puisque Γ est de graphe fermé. □

COROLLAIRE 3. — *Si $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ sont deux familles de parties de X, I et J filtrés par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, supposons l'une d'entre-elles asymptotiquement compacte et :*

$$(A_i)_\infty \cap -(B_j)_\infty = \{O_X\}\,.$$

On a :

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}}\,A_i + \overline{\lim_{\mathcal{G}}}\,B_j = \overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\,A_i + B_j\,.$$

Démonstration. — L'inclusion $\supset$ s'obtient à partir du théorème 1 appliqué à la famille (A_i) (asymptotiquement compacte) et aux multiapplications $\Gamma_j x = x + B_j$. Il suffit de remarquer que $(x, O_Y) \in (\Gamma_j)_\infty$ si et seulement si $-x \in (B_j)_\infty$.

Prouvons maintenant l'inclusion $\subset$. Soient U un voisinage de O_X, $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et $x = a + b \in \overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i + \overline{\lim}_{\mathcal{G}} B_j$.

Il existe $i \in F$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(a + U) \cap A_i \neq \emptyset\,,$$
$$(b + U) \cap B_j \neq \emptyset\,,$$

de sorte que :

$$(x + U + U) \cap (A_i + B_j) \neq \emptyset\,.$$

Comme U, F, G sont quelconques, on a :

$$x \in \overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}}\,A_i + B_j\,.\ \square$$

COROLLAIRE 4. — *Soit $(T_j)_{j\in J}$ une famille équicontinue d'applications linéaires de X dans Y (qu'il n'est pas nécessairement de supposer continues).*

Supposons que (T_j) *converge vers une application linéaire et continue* T. *Si* $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille asymptotiquement compacte de parties de* X *et si :*

$$\ker T \cap (A_i)_\infty = \{O_X\},$$

alors

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}\times\mathcal{G}}} T_j(A_i) = T\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right).$$

Démonstration. — L'inclusion $\subset$ résulte du théorème 1. En effet :

$$T = \overline{\lim_{\mathcal{G}}} T_j \text{ et } (x, O_Y) \in (T_j)_\infty \text{ si et seulement si } T(x) = O_Y,$$

c'est-à-dire $x \in \ker T$. Il suffit pour le voir de remarquer que

$$(T_j)_\infty = \overline{\lim_{\mathcal{G}}} T_j = \text{graphe}(T)$$

puisque ce sont des variétés linéaires.

Prouvons l'inclusion inverse. Soit $y \in T(\overline{\lim} A_i)$, $y = Tx$ avec $x \in \overline{\lim} A_i$. Donnons-nous $F \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{G}$ et un voisinage W de O_Y. Puisque la famille (T_j) est équicontinue, il existe un voisinage U de O_X tel que pour tout $j \in J$ on ait :

$$T_j(U) \subset W. \tag{3}$$

Puisque $(x, y) \in \overline{\lim} T_j$, il existe $u_1 \in U_1$, $w \in W$ et $j \in G$ pour lesquels :

$$(x, y) + (u_1, w) \in T_j. \tag{4}$$

D'autre part, puisque $x \in \overline{\lim} A_i$, il existe $u_2 \in U$ et $i \in F$ tels que :

$$x + u_2 \in A_i. \tag{5}$$

Les relations (3), (4) et (5) prouvent que :

$$y + w = T_j(x + u_2) + T_j(u_1 - u_2),$$

d'où, en supposant W symétrique :

$$y \in T_j(A_i) + W + W + W.$$

Comme F, G et W sont quelconques, on en déduit que :

$$y \in \overline{\lim} T_j(A_i)$$

et ceci prouve le corollaire 4. □

THÉORÈME 2. — *Soit T une application linéaire ouverte de X sur Y. Si* $\ker T$ *est de dimension finie et si :*

$$(A_i)_\infty \cap \ker T = \{O_X\},$$

alors :

$$T\left(\overline{\lim_{\mathcal{F}}} A_i\right) = \overline{\lim_{\mathcal{F}}} T(A_i).$$

Démonstration. — L'inclusion $\subset$ résulte aisément de la continuité de T. Montrons que :

$$Y \setminus T\left(\overline{\lim} A_i\right) \subset Y \setminus \overline{\lim}(T(A_i)).$$

Soit $y \in Y \setminus T\left(\overline{\lim} A_i\right)$. Puisque T est surjective, on a :

$$y = Tx \quad \text{et} \quad x \notin \left(\overline{\lim} A_i\right) + \ker T.$$

De nos hypothèses, appliquées au corollaire 3, on en déduit que :

$$\left(\overline{\lim} A_i\right) + \ker T = \overline{\lim}(A_i + \ker T),$$

de sorte que :

$$x \notin \overline{\lim}(A_i + \ker T).$$

Il existe donc $F \in \mathcal{F}$ et un voisinage U de O_X pour lesquels :

$$(x + U) \cap \bigcup_{i \in F} (A_i + \ker T) = \emptyset,$$

de sorte que :

$$T(x + U) \cap T\left(\bigcup_{i \in F} A_i + \ker T\right) = \emptyset.$$

Puisque T est ouverte et $Tx = y$, on obtient :

$$y \notin \overline{\bigcup_{i \in F} T(A_i)},$$

c'est-à-dire :

$$y \notin \overline{\lim} T(A_i),$$

et ceci démontre notre théorème 2. □

4. Exemple : un problème d'optimisation

Soient $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X, I filtré par $\mathcal{F}$. Posons $A = \overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i$.

Nous allons montrer que sous certaines conditions on a :

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

Considérons la multiapplication définie par :

$$\Gamma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

On a $\Gamma = \mathrm{epi}(f)$ et $\Gamma_\infty = \mathrm{epi}(f_\infty)$ où f_∞ est la fonctionnelle définie par :

$$f_\infty(x) = \sup_{\epsilon > 0} \underline{\lim}_{y \to x} \inf_{0 < \lambda \leq \epsilon} \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

(voir [4] lorsque f est convexe, [2] pour le cas général).

THÉORÈME 3. — *Supposons que $(A_i)_{i \in I}$ soit asymptotiquement compacte, f semi-continue inférieurement, continue sur son domaine et minorée sur A. Si pour tout $x \in (A_i)_\infty$, $x \neq 0$, on a $f_\infty(x) > 0$, alors :*

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \inf_{x \in A} f(x)$$

et l'infinimum de f sur A est un minimum.

Démonstration. — À l'aide du corollaire 2 du théorème 1 on obtient :

$$\overline{\lim}_{\mathcal{F}} \Gamma(A_i) \subset \Gamma\left(\overline{\lim}_{\mathcal{F}} A_i\right),$$

ainsi que la fermeture de ce dernier ensemble. Ceci prouve que :

$$\inf_{x \in A} f(x) \leq \underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x),$$

et que l'infinimum de f sur A est un minimum. Par ailleurs :

$$\underline{\lim}_{\mathcal{F}} \inf_{x \in A_i} f(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}} \inf_{x \in \bigcup_{i \in F} A_i} f(x),$$

et par continuité de f on a :

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in\bigcup_{i\in F} A_i} f(x) = \sup_{F\in\mathcal{F}} \inf_{x\in\bigcup_{i\in F} A_i} f(x) \leq \inf_{x\in A} f(x),$$

ce qui établit l'inégalité inverse et prouve le théorème 3. □

5. Le cas séquentiel

Les résultats précédents s'écrivent de façon plus familière lorsque les topologies de X et Y sont métrisables et lorsque les diverses familles de parties sont indexées par $\mathbf{N}$ filtré par le filtre de Fréchet (c'est-à-dire lorsque $i \to \infty$). Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de X. Les résultats qui suivent sont de démonstration immédiate. Nous ne faisons donc que les énoncer.

PROPOSITION 4. — $\overline{\lim} A_i$ *est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites* $a_i \in A_i$.

PROPOSITION 5. — *Si* A *est une partie de* X, $a \in A_\infty$ *si et seulement s'il existe des suites* (ϵ_i) *et* (a_i) *avec* $\epsilon_i > 0$, $\lim \epsilon_i = 0$, $a_i \in A$ *et* $a = \lim \epsilon_i a_i$.

PROPOSITION 6. — $a \in (A_i)_\infty$ *si et seulement s'il existe des suites* (ϵ_i) *et* (a_i) *avec* $\epsilon_i > 0$, $\lim \epsilon_i = 0$, $a_i \in A_i$ *et pour lesquelles* a *soit une valeur d'adhérence de la suite* $(\epsilon_i a_i)$.

PROPOSITION 7. — *Lorsque* $X = \mathbb{R}^m$ *toute partie* A *de* X *est asymptotiquement compacte, toute famille* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est asymptotiquement compacte.*

6. Continuité pour la topologie "en tout ou rien" sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^m$

Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^m$. La topologie "en tout ou rien" est engendrée par la base d'ouverts suivante :

$$\mathcal{F}^K_{p,G_1,\ldots,G_p} = \{F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \mid F \cap K = \emptyset \text{ et } \forall\, i = 1 \ldots p,\ F \cap G_i \neq \emptyset\},$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^m$, $G_1, \ldots, G_p$ des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour cette topologie, $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ est compact, séparé et séparable.

DÉFINITION 6. — *Pour toute famille* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de parties de* $\mathbb{R}^m$ *on pose* $\underline{\lim} F_i$ *(limite inférieure) l'ensemble des limites des suites* $x_i \in F_i$.

Puisque la topologie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ *est séparable, elle est caractérisée par ses suites convergentes.*

THÉORÈME 8. — $F_i \to F$ *si et seulement si* $F = \underline{\lim} F_i = \overline{\lim} F_i$.

En ce qui concerne $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ muni de la topologie "en tout ou rien" nous renvoyons le lecteur à [5]. Cette topologie est utilisée en morphologie mathématique. À la différence de la topologie définie par la distance de Hausdorff sur les compacts de $\mathbb{R}^m$, une suite de compact (F_i) peut, pour la topologie en tout ou rien, converger vers un ensemble non borné.

THÉORÈME 9. — *Soient* (F_i) *et* (G_i) *des suites de fermés de* $\mathbb{R}^m$ *satisfaisant à :*

$$(F_i)_\infty \cap -(G_i)_\infty = \{0\}\,.$$

Si $F_i \to F$ *et* $G_i \to G$, *alors :*

$$F_i + G_i \to F + G$$

et ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration. — Par le corollaire 3 on a :

$$\overline{\lim} F_i + G_j = F + G$$

et cet ensemble est fermé. On en déduit que :

$$\overline{\lim} F_i + G_i \subset F + G\,.$$

De plus, on a :

$$F + G \subset \underline{\lim} F_i + G_i \subset \overline{\lim} F_i + G_i\,,$$

d'où le résultat. □

THÉORÈME 10. — *Soit* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *continue et* (F_i) *une suite de fermés de* $\mathbb{R}^m$. *Supposons que :*

$$f_\infty \cap \left((F_i)_\infty \times \{0\}\right) = \{0\}\,.$$

Si $F_i \to F$ *alors* $f(F_i) \to f(F)$. *En particulier ce dernier ensemble est fermé.*

Démonstration. — On sait, à cause du corollaire 2, que :

$$\overline{\lim} f(F_i) \subset f\left(\overline{\lim} F_i\right) = f(F)$$

et que ce dernier ensemble est fermé.

Par continuité de f on a clairement :

$$f(F) = f\left(\underline{\lim} F_i\right) \subset \underline{\lim} f(F_i).$$

À l'aide de l'inclusion :

$$\underline{\lim} f(F_i) \subset \overline{\lim} f(F_i),$$

on obtient :

$$f(F) = \underline{\lim} f(F_i) = \overline{\lim} f(F_i). \square$$

COROLLAIRE 4. — *Soient* (F_i) *une suite fermée de* $\mathbb{R}^m$ *et* proj *la projection qui oublie le dernier facteur. Si* $(F_i)_\infty$ *ne contient pas d'élément du type* $(0, \ldots, 0, x_m)$ *avec* $x_m \neq 0$, *et si* $F_i \to F$ *alors :*

$$\text{proj}(F_i) \to \text{proj}(F)$$

et ce dernier ensemble est fermé.

Démonstration. — La condition :

$$(\text{proj})_\infty \cap \left((F_i)_\infty \times \{0\}\right) = \{0\}$$

s'écrit ici $(0, \ldots, 0, x_m) \in (F_i)_\infty \Rightarrow x_m = 0$.

On conclut avec le théorème 10. $\square$

7. Bibliographie

[1] BERGÉ (C.) . — *Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques,* Dunod. Paris (1966)

[2] DEDIEU (J.P.) . — *Critères de fermeture pour l'image d'un fermé non convexe par une multiapplication,* C. R. Acad. Sci., Paris, **287** (1978) pp. 941-943

[3] DEDIEU (J.P.) . — *Fermeture de l'image d'un fermé par une multiapplication, Multigraphié,* Toulouse (1978)

[4] LAURENT (P.J.) . — *Approximation et Optimisation,* Hermann, Paris (1972)

[5] SCHMITT (M.) . — *Quelques exemples d'analyse d'algorithmes de géométrie combinatoire par des techniques de morphologie mathématiques,* Preprint (1988) (INRIA – BP 105 – 78153 Le Chesney Cedex (France))