ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JOSÉ EDUARDO SOUZA DE CURSI

# Un problème issu de l'étude numérique d'un fil sans raideur soumis au frottement sec

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5^e série*, tome 11, n° 2 (1990), p. 137-186

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1990_5_11_2_137_0>

© Université Paul Sabatier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XI, n° 2, 1990

# Un problème issu de l'étude numérique d'un fil sans raideur soumis au frottement sec

JOSÉ EDUARDO SOUZA DE CURSI[1]

**RÉSUMÉ.** — On étudie l'équilibre d'un fil parfaitement flexible en contact unilatéral avec frottement contre un obstacle, en tenant compte de la particularité que seuls des efforts intérieurs de traction dans la direction tangentielle sont possibles (caractère unilatéral du fil). On se place dans une situation analogue à celle dite de "petites perturbations autour d'un état de référence" (ou "aux déplacements infinitésimaux"), ce qui élimine les difficultés liées à la définition de l'effort de frottement et à une éventuelle non convexité de la région admissible (cependant, si les déplacements ne sont pas infinitésimaux, les résultats peuvent être étendus à des situations où l'obstacle est un plan). En utilisant des méthodes d'optimisation, on montre que les configurations minimisant des fonctionnelles du type énergie, prenant en compte le frottement, sont solutions du problème.

**MOTS-CLÉS :** Fil sans raideur; Problèmes unilatéraux; Frottement sec; Inéquations variationnelles; Optimisation non-convexe; Mécanique des milieux continus

**ABSTRACT.** — We consider the problem of the equilibrium of a string under unilateral contact and friction against an obstacle. This paper is restrained to a situation of large practical interest, analogous to the one which is usually refered as being the problem of "small perturbations from a given state" (or the problem of the "infinitesimal displacements"). This assumption eliminates all difficulties about the definition of the normal reaction of the bottom and an eventual not-convexity of the admissible region. (However, if the displacements are not supposed to be infinitesimal, the results may be extended to some situations where the obstacle is a plane). We take into account the internal constraint which defines strings (their internal efforts are always traction efforts in the tangent direction). The results are extended to a situation issue from the numerical analysis of strings, which implicitely does a hypothesis of infinitesimal displacements. By using optimal control methods, we show

[1] José Eduardo Souza de Cursi, ENSM, 1, rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex

that the configurations which minimise energy – like functionals, taking into account friction, are solutions of the problem.

KEY-WORDS : Strings, Unilateral problems, Coulomb's friction, Variational inequalities, Non-convex optimisation, Continuum mechanics

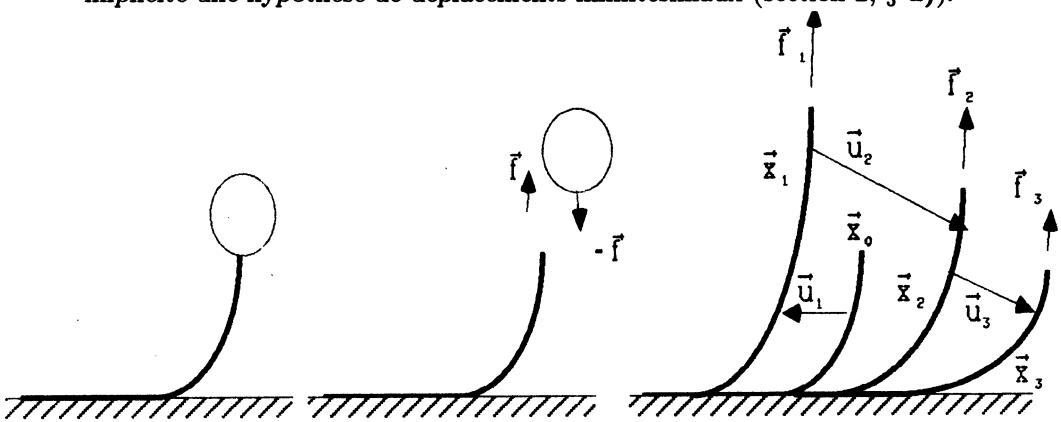
## 1. Introduction

Les fils élastiques sans raideur sont des milieux continus unidimensionnels présentant la particularité suivante : seuls des efforts intérieurs de traction dans la direction tangente à la fibre moyenne sont possibles [1]. La réaction du milieu a un caractère géométrique important : sa configuration s'adapte aux forces appliquées de manière que tous les efforts intérieurs représentent des tractions. C'est dans ce sens que l'on dit couramment qu'une corde ne "sait" pas pousser. Cette caractéristique unilatérale a été envisagée dans des travaux précédents [5], [6], [7], (cf. aussi [12] pour des efforts visant à la prise en compte de cette particularité dans le calcul numérique). Dans [6], nous avons étudié l'équilibre d'un fil parfaitement flexible, soumis à l'action de forces dérivant d'un potentiel et en contact unilatéral *sans frottement* avec un obstacle. Toutefois, dans les problèmes d'ancrage, le frottement avec le fond est largement sollicité : nous nous proposons, ici, de prendre en compte — outre la particularité décrite ci-dessus — la situation où le contact entre le câble et le fond a lieu avec frottement.

Nous nous limitons à une situation particulière d'intérêt pratique, que nous appelons "petites perturbations autour d'un état de référence". Cette formulation est notamment justifiée par l'approche numérique "pas à pas" (ainsi que par les méthodes itératives de solution de problèmes non linéaires), qui consiste, au fond, à supposer les déplacements infinitésimaux. Cependant, cette formulation n'est pas une théorie "consistante" au premier ordre.

Dans le but d'illustrer notre propos, considérons un problème d'amarrage typique consistant en l'évolution du système formé d'une amarre, modélisée par un fil sans raideur, et d'un solide rigide (figure 1.a)). Dans plusieurs situations d'intérêt pratique, les mouvements de l'amarre sont assez lents pour qu'un modèle quasistatique soit une représentation acceptable de son évolution, même lorsqu'on envisage celle du solide comme étant plus rapide (i.e., vraiment dynamique). Alors, pour l'amarre, le temps est un simple

paramètre : le fil est en équilibre à chaque instant. L'étude numérique de ce problème est effectuée en introduisant la force de liaison entre le solide et le câble (i.e., un multiplicateur de Lagrange, cf. figure 1.b)) et en discrétisant dans le temps, ce qui conduit à déterminer une suite de configurations du fil $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_N}$, où $\overrightarrow{x_0}$ est donnée et, pour $i \geq 1$, chaque configuration $\overrightarrow{x_i}$ est obtenue de $\overrightarrow{x_{i-1}}$ par un "petit" déplacement $\overrightarrow{u}_i$ (figure 1.c)). En outre, on impose que le frottement suive la loi de Coulomb et le calcul utilise une donnée mécanique (plus précisement, la composante normale de la réaction du fond) de la configuration $\overrightarrow{x_{i-1}}$ pour obtenir $\overrightarrow{x_i}$, *en faisant de manière implicite une hypothèse de déplacements infinitésimaux* (section 2, § **d**)).




a) un problème d'amarrage typique — b) introduction d'un effort de liaison — c) résolution numérique pour le câble

**Fig. 1.**— L'étude numérique d'un problème d'amarrage conduisant à une suite de problèmes de "petites perturbations".

Ainsi, pour chaque $i \in \{1, \ldots, N\}$, nous nous trouvons dans la situation-modèle suivante (figure 2.) :

- sont données : une configuration de référence $\overrightarrow{x_R}$ et, donc, les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette configuration, telles la partie du fil au contact (notée $D(\overrightarrow{x_R})$ dans la figure 2) et la force exercée par le fond sur le fil dans cette même configuration; la force $\overrightarrow{f}$ appliquée à l'extrémité soulevée du câble.
- sont inconnnues et à déterminer : la nouvelle configuration d'équilibre $\overrightarrow{x}$ (i.e., le déplacement $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_R}$), la tension dans le fil et la réaction du fond (donc le frottement) dans cette nouvelle configuration.
- on suppose que le frottement suit la loi de Coulomb et on utilise une grandeur (la composante normale de la réaction du fond) calculée sur la configuration de référence pour approximer cette même grandeur sur la

configuration $\vec{x}$ (ce genre d'approximation correspond tant à la discrétisation évoquée ci-dessus qu'aux méthodes itératives d'approximations successives), ce qui revient à faire une hypothèse de déplacements infinitésimaux.

- le comportement du fil a un caractère unilatéral : cette difficulté ne disparaît pas avec l'hypothèse de déplacements infinitésimaux (section 2, § c)).

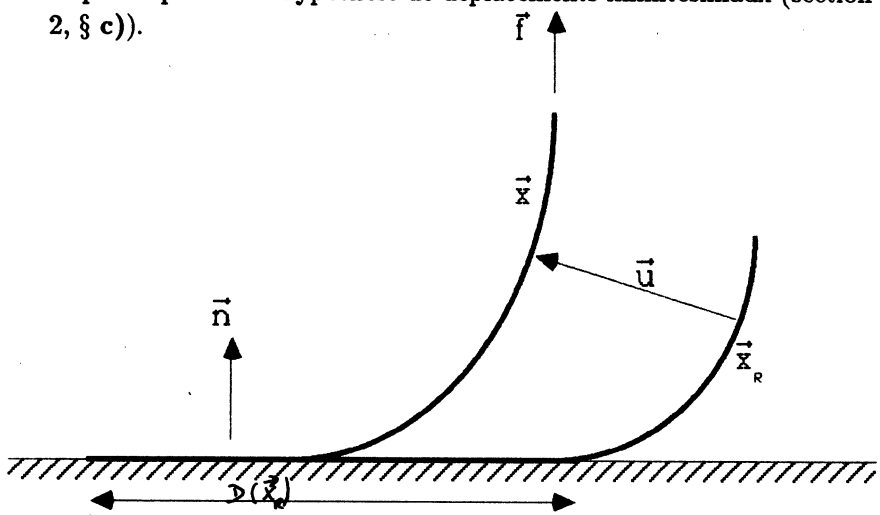



**Fig. 2.** — La situation-modèle : la donnée de la configuration de référence permet de déterminer la partie $D(\vec{x_R})$ au contact, la composante normale de la réaction du fond au contact et la normale intérieure à la région admissible *sur la configuration de référence*. Ces valeurs sont utilisées pour le calcul de la configuration $\vec{x}$.

D'une façon générale, la démarche suivie est analogue à celle utilisée dans [6] : après avoir formulé le problème mécanique sous la forme d'un problème d'équations différentielles, nous considérons des problèmes du type "minimisation de l'énergie" et nous étudions l'équivalence entre ces derniers et le premier. Les résultats sont donnés d'abord dans la section 4, puis avec une formulation précise en annexe.

Enfin, signalons que :

- lorsque le déplacement *n'est pas* supposé infinitésimal, les résultats s'étendent, au moyen d'une théorie analogue, à certaines situations où l'obstacle est un plan [14];

- le problème de petites perturbations au premier ordre, i.e., une formulation consistante, peut conduire à un problème sans solution (annexe 5).

## 2. Formulation du problème

Nous formulons ci-dessous le problème-modèle de la figure 2 de manière à prendre en compte les deux aspects mentionnés dans l'introduction :

- d'une part, le contact unilatéral avec frottement entre le câble et le fond;
- d'autre part, le fait que seuls des efforts intérieurs de traction sont possibles.

La formulation exposée se limite à la situation où le câble est soumis à l'action de la seule pesanteur et d'une force *donnée* à l'extrémité non amarrée. Ces restrictions sur les efforts appliqués sont simplement destinées à faciliter la lecture et mettre en relief les difficultés essentielles du problème : les théorèmes des annexes sont énoncés de manière à prendre en compte des efforts extérieurs dépendants de la position (toutefois, une telle situation est académique, compte tenu de l'hypothèse *implicite* de déplacements infinitésimaux). D'autres situations, telles le cas d'un fil inextensible et d'autres conditions aux limites sont envisagées dans les remarques.

Comme nous l'avons déjà observé, la formulation en "petites perturbations" élimine toute difficulté liée à la forme de l'obstacle, *mais n'élimine pas la difficulté liée au caractère unilatéral de la loi de comportement du fil* (section 2, § **c)** et **d)**). Remarquons, enfin que :

- La terminologie "petite perturbations" est utilisée ici pour décrire une méthode de calcul numérique et non pas une formulation de petites perturbations au premier ordre. L'utilisation de cette terminologie se justifie par le fait que cette méthode fait, de façon implicite, une hypothèse de déplacements infinitésimaux pour approcher les seules conditions liées à la présence de l'obstacle.
- Le problème "consistant" de petites perturbations autour d'un état de référence peut ne pas être bien posé (annexe 5).

### a) Description du milieu

Le câble est décrit en représentation lagrangienne : l'abscisse curviligne (variable de Lagrange) est la longueur d'arc naturelle du fil (i.e., sa longueur d'arc sur une configuration non déformée), notée $a$, qui varie dans l'intervalle $[0, \ell]$, où $\ell$ est la longueur naturelle de l'amarre.

La position du milieu est définie par une application $\overrightarrow{x} : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, associant à la particule $a$ le vecteur position $\overrightarrow{x}(a)$.

La déformation est donnée par l'allongement unitaire $\epsilon$ :

$$\epsilon = |\overrightarrow{x}'| - 1 \quad \left(\overrightarrow{x}' = \mathrm{d}\overrightarrow{x}/\mathrm{d}a\right). \tag{1}$$

La longueur d'arc sur la configuration déformée est notée $s$ et est reliée à la longueur d'arc naturelle $a$ par :

$$\mathrm{d}s = (1 + \epsilon)\,\mathrm{d}a\,. \tag{2}$$

La longueur du câble dans cette même configuration est :

$$L = \int_0^\ell (1 + \epsilon)\,\mathrm{d}a\,.$$

On note $\overrightarrow{t}$ le vecteur unitaire de la tangente orienté le long de la configuration déformée :

$$\overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{x}'}{|\overrightarrow{x}'|}\,. \tag{3}$$

Enfin, $\rho$ et $\rho_0$ désignent les masses linéiques, respectivement dans les configurations déformées et naturelle. La loi de conservation de la masse s'écrit, sous la forme locale :

$$\rho_0 = \rho(1 + \epsilon)\,. \tag{4}$$

## b) Les efforts intérieurs, extérieurs, l'équation d'équilibre et les conditions aux limites

On suppose que le fil est parfaitement flexible : les efforts intérieurs sont caractérisés par la seule tension $T$ et sont définis par $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{t}$.

Les efforts extérieurs distribués sont décrits par une densité linéique sur la configuration actuelle $\overrightarrow{c} = \left\{\overrightarrow{c}(s),\ 0 < s < L\right\}$ ; signalons dès maintenant que nous avons à prendre en compte la pesanteur $\rho\overrightarrow{g} = \rho g\overrightarrow{e_3}$ et des efforts de liaison $\overrightarrow{\mathfrak{r}}$, engendrés par la présence du fond :

$$\overrightarrow{c} = \rho\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\mathfrak{r}}\,. \tag{5}$$

Les efforts de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sont définis à partir du potentiel $G$ par :

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,G \quad ; \quad G(\overrightarrow{\xi}) = -g\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{\xi} = -g\,\xi_3 \tag{6}$$

et l'*équation d'équilibre* s'écrit, en variables de Lagrange et en variables actuelles :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}a} + (1+\epsilon)\vec{c} = \vec{0}\,,\ (0 < a < \ell)\ ;\ \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} + \vec{c} = \vec{0}\,,\ (0 < s < L)\,. \quad (7)$$

Les conditions aux limites envisagées consistent en un amarrage en $a = 0$ et en un effort imposé *donné* $\vec{f}$, dérivant du potentiel $F$, à l'extrémité $a = \ell$ :

$$\vec{x}(0) = \vec{0} \quad (8)$$

$$\vec{T}(\ell) = \vec{f}\ \ (\vec{f} \in \mathbb{R}^3) \quad (9)$$

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}F\,,\quad F(\vec{\xi}) = -\vec{f}\cdot\vec{\xi}\,. \quad (10)$$

L'*énergie potentielle* des efforts extérieurs donnés est :

$$U(\vec{x}) = \int_0^\ell \rho_0 G\big(\vec{x}(a)\big)\,\mathrm{d}a + F\big(\vec{x}(\ell)\big)\,. \quad (11)$$

En introduisant la notation :

$$(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \int_0^\ell \vec{u}(a)\cdot\vec{v}(a)\,\mathrm{d}a$$

l'équilibre peut encore être formulé à l'aide du principe des puissances virtuelles suivant :

$$\begin{aligned}(\vec{T}\,,\,\vec{y}\,') &= \big((1+\epsilon)\vec{c}\,,\,\vec{y}\big) + \vec{f}\cdot\vec{y}(\ell)\,,\\ &\forall\ \vec{y} = \big(\vec{y}(a)\,,\,0 \le a \le \ell\big) \text{ tel que } \vec{y}(0) = \vec{0}\,.\end{aligned} \quad (12)$$

### c) La loi de comportement

Le câble réagit élastiquement aux efforts de traction mais ne peut pas exercer des efforts intérieurs de compression; l'élasticité étant supposée linéaire, le comportement de l'amarre est caractérisé par :

$$\epsilon = \frac{T}{K} \quad \text{et} \quad T \ge 0 \quad (13)$$

où $K > 0$ est la rigidité du câble. Ainsi, $\epsilon$ reste non négatif, soit encore :

$$\big|\vec{x}\,'(a)\big| \ge 1\,,\quad \forall\, a \in (0\,,\,\ell)\,. \quad (14)$$

Cette condition constitue l'une des originalités du travail qui suit : la longueur de toute partie du fil est au minimum égale à la longueur naturelle de cette même partie. On envisage (14) comme étant, en quelque sorte, une liaison interne, satisfaite sans mettre en œuvre un multiplicateur de Lagrange (i.e., avec un multiplicateur indentiquement nul (remarque 2.3.1)).

En outre, cette condition est essentielle et doit être traitée quelles que soient les linéarisations et approximations effectuées par ailleurs : il s'agit d'une non linéarité du premier ordre en $\epsilon$.

Dans ce qui suit, nous nous référons au champ de tension $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{t}$, avec $T$ donnée par (1), (3) et (13), comme étant "le champ de tension engendré par $\overrightarrow{x}$".

L'*énergie de déformation élastique* du fil est :

$$W(\overrightarrow{x}) = \int_0^\ell \frac{K}{2} \left(|\overrightarrow{x}'(a)| - 1\right)^2 \, da \,. \tag{15}$$

### d) Contact unilatéral avec le fond

Le câble est gêné par la présence du fond, dont le contact, *unilatéral*, met en jeu des efforts normaux à l'obstacle *et des efforts de frottement*. Le frottement au contact constitue la seconde originalité de cette étude.

*(i) La difficulté de la prise en compte du frottement pour un obstacle régulier arbitraire.* — La situation générale conduit à définir l'obstacle par une équation de la forme $\psi(\overrightarrow{\xi}) = 0$ ($\overrightarrow{\xi} \in \mathbb{R}^3$). Le câble est donc confiné dans un des côtés de l'obstacle, par exemple, la région $\psi \geq 0$, de manière qu'on impose à la configuration $\overrightarrow{x}$ de satisfaire à l'une des conditions équivalentes :

$$\begin{aligned} &\psi(\overrightarrow{x}(a)) \geq 0 \,, \quad \forall\, a \in [0\,,\ell] \\ &\overrightarrow{x}(a) \in B = \left\{ \overrightarrow{\xi} \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(\overrightarrow{\xi}) \geq 0 \,,\ \forall\, a \in [0\,,\ell] \right\} \\ &\overrightarrow{x} \in C \,; \quad C = \left\{ \overrightarrow{y} : [0\,,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{y}(a) \in B \,,\ \forall\, a \in [0\,,\ell] \right\} . \end{aligned} \tag{16}$$

On se limite à des obstacles réguliers : $\psi$ est de classe $C^1$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\psi \neq \overrightarrow{0}$ lorsque $\psi = 0$ (i.e., la normale unitaire intérieure $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\psi / |\overrightarrow{\text{grad}}\psi|$ est définie sur le fond). On suppose, bien évidemment, que l'origine $\overrightarrow{0}$ se trouve dans la région admissible.

Les efforts de contact $\vec{\tau} = (\vec{\tau}(s), 0 < s < L)$ sont décomposés en un effort normal à l'obstacle $\mathcal{R}\vec{n}$ et un effort de frottement $\vec{\Phi}$. L'effort normal est dirigé vers l'intérieur de la région admissible $B$ et s'annule s'il n'y a pas contact, alors que le frottement est tangent à l'obstacle et satisfait à la loi de frottement sec :

$$\vec{\tau} = \mathcal{R}\vec{n} + \vec{\Phi} \; ; \quad \vec{\Phi} \cdot \vec{n} = 0 \tag{17}$$

$$\mathcal{R}(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(a) = 0 \text{ si } \psi(\vec{x}(a)) > 0 \tag{18}$$

$$|\vec{\Phi}| \leq \mathcal{A} \; ; \quad \mathcal{A} = \mu\mathcal{R} \text{ sur } (0, \ell) \tag{19}$$

où $\mu$ le coefficient de frottement statique entre le fil et l'obstacle.

Cette dernière relation est la loi usuelle définissant la réaction parfaite associée à un contact unilatéral (remarque 2.3.2), de sorte que le contact entre le fil et le fond *n'est pas une liaison parfaite, lorsque* $\vec{\Phi} \neq \vec{0}$. Nous nous référons au terme $\mathcal{R}\vec{n}$ comme étant "la partie (ou composante) normale de la réaction du fond". En posant :

$$R = (1+\epsilon)\mathcal{R} \; ; \quad \vec{r} = (1+\epsilon)\vec{\tau} \; ; \quad \vec{\phi} = (1+\epsilon)\vec{\Phi} \; ; \quad A = (1+\epsilon)\mathcal{A}$$

et en utilisant (4), on réécrit l'équation d'équilibre (7) en coordonnées de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}a} + \rho_0 \vec{g} + \vec{r} = \vec{0}, \quad 0 < a < \ell. \tag{20}$$

De même, la formulation équivalente (12) (principe des puissances virtuelles) devient :

$$\begin{aligned} (\vec{T}, \vec{y}') &= ((\rho_0 \vec{g} + \vec{r}), \vec{y}) + \vec{f} \cdot \vec{y}(\ell), \\ \forall\, \vec{y} &= (\vec{y}(a), 0 \leq a \leq \ell), \quad \vec{y}(0) = \vec{0}. \end{aligned} \tag{21}$$

Le quadruplet $(\vec{r}, R, \vec{\phi}, A)$ définit, respectivement, la réaction du fond, sa composante normale, l'effort de frottement et la fonction $A = \mu R$ en coordonnées de Lagrange. Ce quadruplet vérifie (17) et (19).

Notons qu'*en général* $R$ *est inconnue et les valeurs de* $\vec{\phi}$ *pour un même* $R$ *sont multiples*, ce qui fait la difficulté de tous les vrais problèmes de frottement. Nous nous intéressons ici à une situation particulière, issue de l'étude numérique des câbles, où la fonction $A = (A(a), 0 < a < \ell)$ est déterminée a priori : nous nous référons à cette situation comme étant le problème "petites perturbations autour d'un état de référence", car le calcul de $A$ suppose des déplacements infinitésimaux. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué, *il ne s'agit pas* de linéariser les équations dans un voisinage d'une configuration d'équilibre : le problème ainsi obtenu peut ne pas être bien posé (annexe 5).

*(ii) Le problème de petites perturbations autour d'un état de référence* correspond à une situation issue de la résolution numérique des problèmes d'évolution quasistatique (introduction) : en effet, la solution pas à pas d'un problème quasistatique consiste en la détermination d'une suite de configurations du câble $\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N}$ à partir d'une configuration initiale $\overrightarrow{x_0}$. Chaque $\overrightarrow{x_i}$ est déduit de $\overrightarrow{x_{i-1}}$ par un "petit" déplacement $\overrightarrow{u_i}$ (i.e., $\overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_{i-1}}$). Le calcul utilise la réaction normale $R_{i-1}$ calculée sur la configuration $\overrightarrow{x_{i-1}}$ pour approximer la valeur inconnue de $A_i$ par $A_i = \mu R_{i-1}$ et obtenir la nouvelle configuration $\overrightarrow{x_i}$. Ce genre de calcul suppose, de manière implicite, un déplacement infinitésimal. En outre, pour qu'une partie du fil en contact avec le fond subisse un déplacement dans une direction autre que la normale à l'obstacle, il faut que les efforts appliqués sur cette même partie soient suffisants pour vaincre le frottement : on impose, donc, la loi usuelle de Coulomb à chaque pas (ci-après, formules (25) et (26) pour l'expression de cette loi).

Une telle étude numérique consiste, donc, en résoudre $N$ problèmes du même type : à chaque étape, *on dispose d'une configuration d'équilibre* $\overrightarrow{x_R}$, *ainsi que des données mécaniques de la réaction de l'obstacle pour cette même configuration et il s'agit de décrire les configurations d'équilibre* $\overrightarrow{x}$ *obtenues à partir de* $\overrightarrow{x_R}$ *par un déplacement* $\overrightarrow{u}$, en supposant que :

- $\overrightarrow{u}$ est "suffisamment petit" pour que $A$ puisse être calculée dans la configuration $\overrightarrow{x_R}$ (à la place de la configuration $\overrightarrow{x}$). Ceci suppose, notamment, qu'il est possible d'identifier les parties au contact dans ces deux configurations.
- Le frottement $\overrightarrow{\phi}$ suit la loi de Coulomb (ci-après, formules (25) et (26) : pas de déplacement dans une direction non normale à l'obstacle si les efforts appliqués ne sont pas suffisants pour vaincre le frottement).

Cette méthode de calcul repose sur les approximations suivantes :

*1) Approximation de C.* — Le déplacement de la particule est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_R}$, supposé infinitésimal. Ainsi :

$$\psi\big(\overrightarrow{x}(a)\big) \cong \psi\big(\overrightarrow{x_R}(a)\big) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\psi\big(\overrightarrow{x_R}(a)\big) \cdot \overrightarrow{u}(a)$$

et la condition "$\psi\big(\overrightarrow{x}(a)\big) \geq 0$" est approchée par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\psi\big(\overrightarrow{x_R}(a)\big) \cdot \overrightarrow{u}(a) \geq 0 & \text{si } \psi\big(\overrightarrow{x_R}(a)\big) = 0 \\ \overrightarrow{u}(a) \text{ quelconque} & \text{si } \psi\big(\overrightarrow{x_R}(a)\big) > 0. \end{cases}$$

*Cela revient à approcher $C$ :*

$$C \cong \left\{ \overrightarrow{y} : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \left(\overrightarrow{y}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\right) \cdot \overrightarrow{n_R}(a) \geq 0 \,,\ \forall\, a \in D(\overrightarrow{x_R}) \right\}$$

où $D(\overrightarrow{x_R})$ est la partie du fil se trouvant au contact dans la configuration $\overrightarrow{x_R}$ et $\overrightarrow{n_R}(a)$ est la normale unitaire intérieure pour la configuration de référence :

$$D(\overrightarrow{x_R}) = \left\{ a \in [0, \ell] \mid \psi(\overrightarrow{x_R}(a)) = 0 \right\}$$
$$\overrightarrow{n_R}(a) = \overrightarrow{\text{grad}}\psi / |\overrightarrow{\text{grad}}\psi| \quad \text{calculé en } \overrightarrow{x_R}(a) \,.$$

*2) Approximation de $A$.* — La valeur de $A$ est approchée d'une façon analogue : on note $\overrightarrow{T_R}$ le champ de tension dans la configuration de référence, i.e.,

$$\overrightarrow{T_R} = K \epsilon_R \overrightarrow{t_R} \,; \quad \epsilon_R = |\overrightarrow{X_R}'| - 1 \,; \quad \overrightarrow{t_R} = \frac{\overrightarrow{x_R}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} \,,$$

La connaissance de $\overrightarrow{x_R}$ permet de déterminer la composante normale $R_R$ de la réaction du fond (on rappelle que $\overrightarrow{\phi_R} \cdot \overrightarrow{n_R} = 0$)

$$R_R(a) = -\left( \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T_R}}{\mathrm{d}a}(a) + \rho_0 \overrightarrow{g} \right) \cdot \overrightarrow{n_R}(a) \quad \text{pour } 0 < a < \ell \,.$$

La fonction $A_R(a) = \mu R_R(a)$ est donc connue. *On approche* :

$$A(a) \cong A_R(a) \,.$$

*3) Approximation de la réaction de l'obstacle.* — Compte tenu des approximations précédentes pour $C$ et $A$, on pose

$$\overrightarrow{n} \cong \overrightarrow{n_R} \quad \text{sur} \quad D(\overrightarrow{x_R})$$

et la composante normale $R$ de la réaction $\overrightarrow{r}$ associée à la liaison (16) vérifie, pour $a \in D(\overrightarrow{x_R})$ :

$$\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{n} \,; \ R(a) \geq 0 \ \text{et} \ R(a) = 0 \ \text{si} \ \left(\overrightarrow{y}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\right) \cdot \overrightarrow{n}(a) > 0 \,, \quad (22)$$

alors que $R = 0$ sur le reste du câble. Nous avons donc :

$$\left(\overrightarrow{R} \,,\, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right) \geq 0 \,, \quad \forall\, \overrightarrow{y} \in C \qquad (23)$$

de manière que (21) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\left(\overrightarrow{T}\,,\,\overrightarrow{y'}-\overrightarrow{x'}\right)\geq\left((\rho_0\,\overrightarrow{g}+\overrightarrow{\phi}),\,\overrightarrow{y}-\overrightarrow{x}\right)+\overrightarrow{f}\cdot(\overrightarrow{u}(\ell)-\overrightarrow{x}(\ell))$$
$$\forall\,\overrightarrow{y}\in\mathbb{C},\ \overrightarrow{y}(0)=\overrightarrow{0}$$

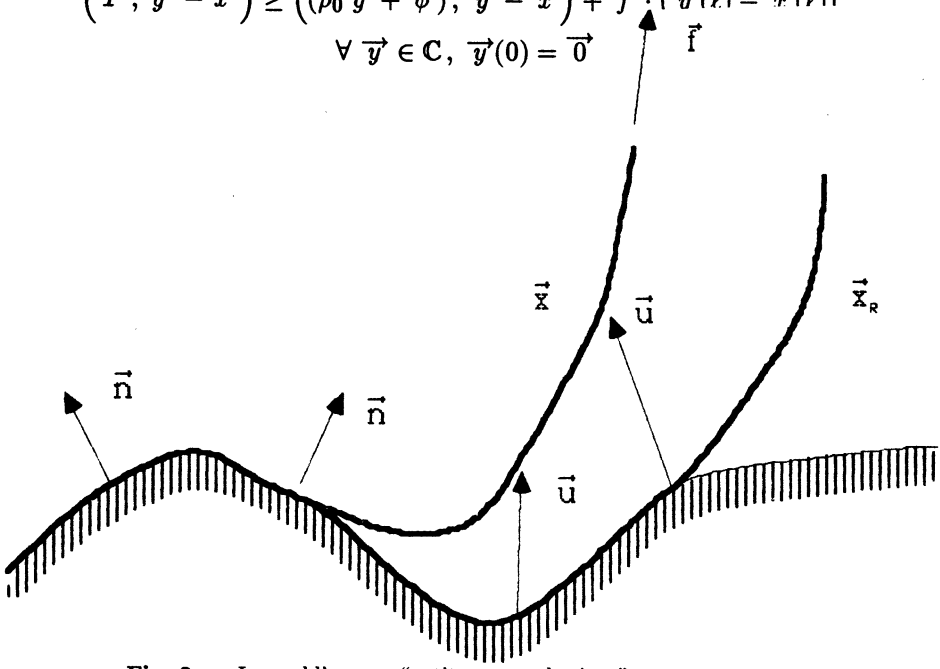



**Fig. 3.** — Le problème en "petites perturbations"

Le frottement $\overrightarrow{\phi}$ suit la loi de Coulomb ([13], chap. 3, sect. 5.1.1 et 5.1.2) : sur $D(\overrightarrow{x_R})$,

$$|\overrightarrow{\phi}|<A\Rightarrow\overrightarrow{u_T}(a)=\overrightarrow{0} \tag{25}$$
$$|\overrightarrow{\phi}|=A\Rightarrow\exists\,\lambda\geq 0\quad\text{tel que}\quad\overrightarrow{u_T}(a)=-\lambda\,\overrightarrow{\phi} \tag{26}$$

où $\overrightarrow{u_T}$ est le "déplacement tangentiel à l'obstacle" :

$$\overrightarrow{u_T}=\overrightarrow{u}-(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n})\overrightarrow{n}\,. \tag{27}$$

On remarque que cette formulation n'a aucun effet sur les difficultés liées au caractère unilatéral du fil (§ **c**)), mais élimine celles liées à :

- d'une part, l'indétermination de la valeur de $A$ : cette fonction est calculée sur la configuration $\overrightarrow{x_R}$;
- d'autre part, à la non convexité de la région admissible $B$ (cf. [6] pour les difficultés typiques) : la condition " $\psi(\overrightarrow{x}(a))\geq 0$ " est remplacée par " $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x_R})\cdot\overrightarrow{n}\geq 0$ ".

## e) Formulation du problème-modèle (synthèse des équations)

Nous résumons ici l'ensemble des informations des paragraphes **a)** à **d)**.

*(i) Géométrie, déformation et loi de comportememt*

$$\vec{T} = T\vec{t}\,, \quad \vec{t} = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|}\,, \tag{28}$$

$$\epsilon = |\vec{x}'| - 1\,, \quad T = K\epsilon \quad \text{et} \quad T \geq 0 \quad (\text{i.e., } \epsilon \geq 0)\,. \tag{29}$$

*(ii) Chargement extérieur, contact avec le fond, conditions aux limites, équation d'équilibre*

$$\vec{x}(0) = \vec{0}\,, \tag{30}$$

$$\vec{x} \in C\,, \tag{31}$$

$$(\vec{T}\,,\ \vec{y}' - \vec{x}') \geq \big((\rho_0 \vec{g} + \vec{\phi})\,,\ \vec{y} - \vec{x}\big) + \vec{f} \cdot \big(\vec{y}(\ell) - \vec{x}(\ell)\big)\,,$$
$$\forall\ \vec{y} \in C \quad \text{tel que} \quad \vec{y}(0) = \vec{0} \tag{32}$$

$$\vec{\phi} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad |\vec{\phi}| \leq A = \mu R \text{ sur } (0\,,\ell)\,. \tag{33}$$

Le problème de "petites perturbations de l'équilibre du fil" se formule donc :

*Problème P2.1.* — Étant donnée la configuration de référence $\vec{x_R}$ :

- calculer $A(a) = \mu R(a)$ sur $\vec{x_R}$ et trouver la partie du fil au contact dans cette même configuration :

$$D(\vec{x_R}) = \{a \in [0\,,\ell] \mid \psi(\vec{x_R}(a)) = 0\}\ ;$$

- poser :

$$\vec{n}(a) = \overrightarrow{\text{grad}\psi}/|\overrightarrow{\text{grad}\psi}| \quad \text{calculé en } \vec{x_R}(a)\,, \tag{34}$$

$$C = \Big\{\vec{y} : [0\,,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \big(\vec{y}(a) - \vec{x_R}(a)\big) \cdot \vec{n}(a) \geq 0\,,\ \forall\, a \in D(\vec{x_R})\Big\}\ ; \tag{35}$$

- puis déterminer $(\vec{x}, \vec{T}, \vec{\phi})$ satisfaisant aux conditions (28)-(33) avec $\vec{n}$ et $C$ définis par (34)-(35) *et vérifiant, de plus*, pour tout $a \in (0\,,\ell)$ tel que $A(a) \neq 0$ :

$$|\overrightarrow{\phi}| < A \Rightarrow \overrightarrow{u_T}(a) = \overrightarrow{0}\,, \tag{36}$$

$$|\overrightarrow{\phi}| = A \Rightarrow \exists\, \lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{u_T}(a) = -\lambda\,\overrightarrow{\phi}\,, \tag{37}$$

où $\overrightarrow{u_T}$ est le "déplacement tangentiel à l'obstacle" :

$$\overrightarrow{u_T}(a) = \left(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\right) - \left[\left(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\right) \cdot \overrightarrow{n}(a)\right] \overrightarrow{n}(a).\ \square \tag{38}$$

*Remarque* 2.2. — L'écriture de P2.1 établit, en quelque sorte, une distinction entre, d'une part, les conditions (28)-(33) et, d'autre part, (34)-(38). En effet, lorsqu'on s'intéresse au cas général des problèmes de frottement (§ **d)** *(i)*), seules les conditions (28)-(33) interviennent. Lors de la formulation en "petites perturbations", on introduit (34)-(35) comme des approximations (ou des procédures de calcul) et (36)-(38) comme des conditions supplémentaires.

En outre, P2.1 n'est pas un vrai problème de frottement lorsque $\overrightarrow{u}$ n'est pas infinitésimal (annexe 6).

*Remarque 2.3*

1) Nous ne supposons pas que le fil est toujours tendu : nous devons donc établir que le multiplicateur de Lagrange associé à la condition (14) est identiquement nul, car le contraire entraîne que (32) n'est pas vérifiée.

2) Lorsque $C$ est un convexe (i.e., lorsque la région admissible $B$ est convexe), le terme $R\overrightarrow{n}$ défini par (18) est la réaction convexe parfaite associée à la liaison " $\overrightarrow{x} \in C$ " ([2]).

3) La condition (16) comprend des situations unilatérales plus générales que la seule présence d'un obstacle. Nous pouvons écrire :

$$C_1 = \left\{\overrightarrow{y} : [0\,,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{y}(a) \in B\,,\ \forall\, a \in [0\,,\ell]\right\}$$

$$\overrightarrow{r_1} = R\overrightarrow{n} + \overrightarrow{\phi}$$

où $R\overrightarrow{n}$ est la partie normale de la réaction $\overrightarrow{r_1}$. D'autres liaisons, convexes parfaites, peuvent alors être prises en compte en écrivant :

$$C = C_1 \operatorname{cap} C_2 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}\,.$$

$C_2$ est le convexe associé aux liaisons convexes parfaites et $\overrightarrow{r_2}$ est la réaction convexe parfaite associée à la liaison " $\overrightarrow{x} \in C_2$ ". Ceci permet d'envisager, par exemple, le cas d'un fil inextensible en définissant :

$$C_2 = \left\{ \overrightarrow{y} : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid |\overrightarrow{y}'(a)| \leq 1, \ \forall\, a \in [0, \ell] \right\}.$$

Dans ce cas, (14) et (16) entraînent l'inextensibilité du fil et la tension n'est pas définie par (13) mais par le multiplicateur de Lagrange associé à $C_2$ ($\overrightarrow{r_2}$ définit un champ de tractions tangentielles).

4) Le problème à déplacement imposé en $a = \ell$ peut être obtenu comme indiqué dans le 3) ci-dessus, en prenant :

$$C_2 = \left\{ \overrightarrow{y} : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{y}(\ell) = \overrightarrow{\xi_\ell} \right\}.$$

Pour d'autres conditions aux limites, cf. [5].

5) Le cas d'une chaîne extensible aux maillons infinitésimaux peut être envisagé en modifiant la loi de comportement comme ci-dessous :

$$T = K\epsilon \quad \text{si } \epsilon \geq 0\,; \quad T = 0 \quad \text{si } \epsilon \leq 0$$

à la place de (13). Dans ce cas, $T \geq 0$ pour tout $\epsilon$ et on n'a pas (14). L'énergie de déformation élastique d'une telle chaîne est :

$$W^{**}(\overrightarrow{x}) = \int_0^\ell \frac{K}{2} \left\{ \left( |\overrightarrow{x}'(a)| - 1 \right)^+ \right]^2 \right\} da$$

avec $\alpha^+$ défini par

$$\alpha^+ = \alpha \quad \text{si } \alpha > 0\,; \quad \alpha^+ = 0 \quad \text{si } \alpha \leq 0.$$

Nous avons $W^{**}(\overrightarrow{x}) = W(\overrightarrow{x})$ pour les configurations telles que

$$|\overrightarrow{x}'(a)| \geq 1 \quad \text{sur} \quad [0, \ell].$$

## 3. Un principe du minimum de l'énergie adapté au problème

Nous allons à présent formuler le problème sous la forme d'un principe de minimisation, analogue à celui du minimum de l'énergie.

*a) L'objectif* de cette reformulation est la construction de solutions par la mise en œuvre, notamment au niveau de l'étude numérique, de procédures d'optimisation classiques.

*b) Les difficultés* sont :

- d'une part, le caractère unilatéral du fil, i.e, la condition "$T \geq 0$" dans la loi de comportement du câble. Cette condition se traduit par l'inégalité "$|\overrightarrow{x}'(a)| \geq 1, \forall\, a \in [0\,,\,\ell]$". En posant

$$V = \left\{ \overrightarrow{y} : [0\,,\,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{0} \right\},$$

  l'ensemble des configurations statiquement admissibles est

$$\text{Kin} = V_+ \cap C\,; \quad V_+ = \left\{ \overrightarrow{y} \in V \mid |\overrightarrow{y}'(a)| \geq 1\,,\ \forall\, a \in [0\,,\,\ell] \right\} \tag{39}$$

  et Kin *n'est pas convexe*. Cette difficulté est surmontée en faisant appel à la technique de [4] (section 4).

- D'autre part, la présence du frottement : il faut adapter le principe du minimum de l'énergie usuel à la situation exposée. En effet, l'énergie totale du câble est donnée par

$$J(\overrightarrow{x}) = W(\overrightarrow{x}) + U(\overrightarrow{x}) \tag{40}$$

  où $W$ est l'énergie de déformation élastique et $U$ est le potentiel des efforts extérieurs donnés (section 2). En général, *les configurations d'équilibre du fil ne minimisent pas son énergie potentielle totale sur* Kin, car le contact entre le câble et l'obstacle n'est pas une liaison parfaite, alors que l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle $J$ ne compte aucun terme de frottement : puisque la définition de $J$ ne prend pas en compte ce dernier, elle ne peut pas à elle seule permettre la formulation du problème.

*c) L'idée* est d'introduire les efforts de frottement dans une seconde fonctionnelle $j$ de sorte que la configuration d'équilibre $\overrightarrow{x}$ minimise $J + j$

sur Kin. Cette démarche est effectivement possible et conduit aux résultats suivants :

(i) on pose

$$j(\vec{x}) = \int_0^\ell A(a) \left| (\vec{x}(a) - \vec{x}_R(a))_T \right| \, da \tag{41}$$

et on établit que, lorsque le potentiel des efforts extérieurs donnés $U$ est convexe, $(\vec{x}, \vec{T}, \vec{\phi})$ est solution du problème de "petites perturbations" (P2.1) *si et seulement si* $\vec{x} \in$ Kin et $\vec{x}$ minimise $J + j$ sur Kin (résultats 4.1 et théorème 6.1).

(ii) Ainsi, le problème P2.1 *équivaut* au problème suivant.

*Problème P3.1.* — Déterminer $\vec{x} \in$ Kin telle que :

$$J(\vec{x}) + j(\vec{x}) = \inf_{\vec{y} \in \text{Kin}} \{J(\vec{y}) + j(\vec{y})\} .$$

(iii) On construit une méthode pour la résolution numérique de P3.1.

*Remarques* 3.2

1) Comme nous l'avons déjà observé dans la remarque 2.3.1, il est implicite dans l'équation d'équilibre et, donc, dans les problèmes-modèles que le multiplicateur de Lagrange associé à cette condition est identiquement nul. *Il n'en est pas de même pour le problème P3.1*, où aucune équation différentielle n'est imposée et, par conséquent, cette propriété doit être établie.

2) Pour la chaîne aux maillons infiniment petits de la remarque 2.3.5, nous avons

$$\text{Kin} = C \quad \text{et} \quad J = W^{**} + U .$$

3) Si les déplacements ne sont pas supposés infinitésimaux, mais l'obstacle est plan, une démarche analogue est possible, mais nous avons une infinité de solutions; on détermine une classe $\mathcal{F}$ de fonctionnelles $j$ ayant la propriété suivante : à chaque $j$ correspond un ensemble de solutions $(\vec{x}, \vec{T}, \vec{\phi})$ du problème de l'obstacle plan et réciproquement [14].

## 4. Les résultats

Dans le but de faciliter le travail du lecteur non intéressé par les démonstrations, nous donnons ci-dessous les résultats obtenus pour les problèmes considérés dans les sections 2 et 3. Le cadre formel et les énoncés des théorèmes sont donnés en annexe.

Les résultats ci-dessous sont valables tant pour le problème-modèle que pour les extensions envisagées dans les remarques.

Nous nous limitons au cas où le potentiel des efforts extérieurs donnés $U$ est convexe.

RÉSULTAT 4.1. — *$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\phi})$ est solution du problème de "petites perturbations" (P2.1) si et seulement si $\overrightarrow{x}$ est solution de P3.1, $\overrightarrow{T}$ est son champ de tensions, et $\overrightarrow{\phi}$ est déterminé en dérivant $j$ au point $\overrightarrow{x}$.*

Ce résultat entraîne que :

- d'une part, le multiplicateur de Lagrange associé à la condition "$|\overrightarrow{x}'(a)| \geq 1, \forall\, a \in [0, \ell]$" (i.e., (14)) est identiquement nul.
- d'autre part, nous avons les assertions formulées dans la section 3, paragraphe *c)*.

La démonstration est faite en relâchant la condition (14) : on considère la convexifiée $W^{**}$ de $W$,

$$W^{**}(\overrightarrow{x}) = \int_0^\ell \frac{K}{2} \left[ \left( |\overrightarrow{x}'(a)| - 1 \right)^+ \right]^2 \mathrm{d}a \,. \tag{42}$$

La valeur de $\alpha^+$ est définie, pour $\alpha \in R$, par

$$\alpha^+ = \alpha \quad \text{si } \alpha > 0 \,; \quad \alpha^+ = 0 \quad \text{si } \alpha \leq 0 \tag{43}$$

et on pose :

$$J^{**}(\overrightarrow{x}) = W^{**}(\overrightarrow{x}) + U(\overrightarrow{x}) \,. \tag{44}$$

les fonctionnelles $J^{**}$ et $W^{**}$ sont des fonctionnelles convexes qui coïncident avec $J$ et $W$, respectivement, sur Kin (remarques 4.6). On considère alors le problème suivant (à comparer avec P3.1).

*Problème P4.2.* — Déterminer $\overrightarrow{\overline{x}} \in C$ telle que :

$$J^{**}(\overrightarrow{\overline{x}}) + j(\overrightarrow{\overline{x}}) = \inf_{\overrightarrow{\overline{y}} \in C} \{J^{**}(\overrightarrow{\overline{y}}) + j(\overrightarrow{\overline{y}})\} .$$

Nous avons alors le résultat suivant.

RÉSULTAT 4.3. — *$\overrightarrow{\overline{x}}$ est solution de P3.1 si et seulement si $\overrightarrow{\overline{x}} \in$ Kin et $\overrightarrow{\overline{x}}$ est solution de P4.2.*

Si $\overrightarrow{\overline{x}}$ est une solution de P4.2, on définit le champ de tension $\overrightarrow{\overline{T}}$ engendré par $\overrightarrow{\overline{x}}$ comme étant donné par :

$$\overrightarrow{\overline{T}} = \overline{T}\,\overrightarrow{t}\,; \quad \overline{T} = K\epsilon^{+}\,; \quad \epsilon = \left|\overrightarrow{\overline{x}}'\right| - 1\,; \quad \overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{\overline{x}}'}{\left|\overrightarrow{\overline{x}}'\right|}. \qquad (45)$$

Cette définition vérifie $\overline{T} \geq 0$ et coïncide avec celle du champ de tension du câble lorsque $\left|\overrightarrow{\overline{x}}'(a)\right| \geq 1$.

RÉSULTAT 4.4

*(i) Toutes les solutions de P4.2 engendrent le même champ de tension $\overrightarrow{\overline{T}}$ donné par (45).*

*(ii) La solution de P4.2 n'est unique que si $\overline{T} > 0$ sur $[0, \ell]$.*

*(iii) Une configuration admissible $\overrightarrow{\overline{x}}$ du câble (i.e., $\overrightarrow{\overline{x}} \in$ Kin) minimise l'"énergie" $J + j$ sur* Kin *si et seulement si $\overrightarrow{\overline{x}}$ engendre ce même champ de tension et $(\overrightarrow{\overline{x}} - \overrightarrow{x_R})_T = (\overrightarrow{\overline{x}} - \overrightarrow{x_R})_T$ lorsque $A(a) \neq 0$.*

Par conséquent, la résolution *complète* du problème de "petites perturbations" (P2.1) peut être effectuée de la manière suivante :

- on détermine une solution $\overrightarrow{\overline{x}}$ de P4.2. Ce dernier est un problème régulier, ayant les propriétés convenables pour la résolution numérique : $C$ est un convexe, $J^{**}$ est une fonction convexe;
- le résultat 4.4 (iii) permet alors de déterminer, à partir de $\overrightarrow{\overline{x}}$, toutes les solutions de P3.1;
- compte tenu du résultat 4.1, ceci revient à déterminer toutes celles de P2.1.

*Remarques 4.6*

1) *Les fonctionnelles $J$ et $J^{**}$ :*

On peut visualiser les conséquences du remplacement de $J$ par $J^{**}$ en considérant la situation plus élémentaire d'un point matériel dont l'énergie totale est

$$J(\alpha) = \frac{K(|\alpha| - 1)^2}{2} + \alpha .$$

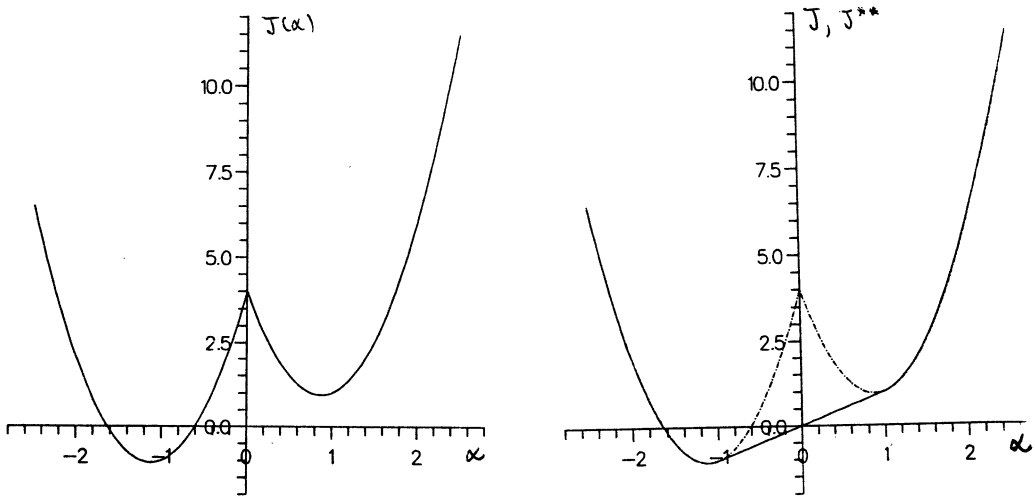
Le minimum de $J$ est atteint pour $\alpha_0 = -(1 + {}^1/_K)$ et vaut

$$J(\alpha_0) = -\left(1 + \frac{1}{2K}\right) .$$

En prenant

$$J^{**}(\alpha) = \frac{K\left[(|\alpha| - 1)^+\right]^2}{2} + \alpha$$

le minimum de $J$ est atteint en ce même point et a la même valeur. Cette situation est illustrée dans la figure 4.




a) La fonctionnelle $J$ b) La fonctionnelle $J^{**}$

**Fig.4.** — Comparaison entre $J$ et $J^{**}$ dans la remarque 4.6.1 ($K = 8$).

2) La résolution de P4.2 consiste à minimiser l'énergie potentielle totale de la chaîne aux maillons infiniment petits des remarques 2.3.5 et 3.2.2.

## 5. Essais numériques

Nous présentons ci-dessous quelques résultats d'essais numériques effectués en utilisant la méthode décrite dans la section précédente (rappellons que $U$ est supposé convexe). La résolution numérique du problème se fait en deux étapes.

*Première étape*

Puisque $j$ *n'est pas* différentiable pour certaines configurations, on régularise la fonctionnelle de frottement $j$ en introduisant :

$$j_\delta(\vec{x}) = \int_0^\ell A(a)\,\theta_\delta\left((\vec{x}(a) - \vec{x}_{\vec{R}}(a))_T\right)\,da \quad ; \quad \theta_\delta(\vec{\xi}) = \sqrt{\delta^2 + |\vec{\xi}|^2}\,.$$

On considère alors le problème régularisé suivant.

*Problème P5.1.* — Déterminer $\vec{x}_\delta \in \text{Kin}$ telle que :

$$J(\vec{x}_\delta) + j_\delta(\vec{x}_\delta) = \inf_{\vec{y} \in \text{Kin}} \{J(\vec{y}) + j_\delta(\vec{y})\}\,.$$

Nous avons le résultat 5.2.

RÉSULTAT 5.2. — *Tout point d'accumulation dans $V$ de la suite $\{\vec{x}_\delta\}_{\delta>0}$ est solution du problème relâché P4.2. Par conséquent, la suite des champs de tension engendrés par $\vec{x}_\delta$, notée $\{\vec{T}_\delta\}_{\delta>0}$, converge vers le champ de tension $\vec{T}$ de l'équilibre et nous pouvons déterminer les solutions de P3.1 en utilisant le résultat 4.4 (iii).*

*Deuxième étape*

Le problème P5.1 est du type étudié en [6]. Nous utilisons alors la même méthode numérique développée dans cette référence, dont nous donnons ici un résumé :

*a)* Pour éliminer la difficulté introduite par d'éventuelles solution multiples de P4.2, on considère un fil avec une raideur évanescente; on pose :

$$I_n(\vec{x}) = \frac{1}{n}\,\|\vec{x}''\|^2_{(L^2(0,\ell))^3} + J(\vec{x}) + j_\delta(\vec{x})$$

$$B = C \cap E\,; \quad E = \left\{\vec{y} : [0,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \vec{y}(0) = \vec{0} \text{ et } \vec{y}'(0) = \vec{0}\right\}.$$

Nous avons alors le problème suivant.

*Problème P5.3.* — Déterminer $\overrightarrow{x_n} \in B$ telle que :

$$I_n(\overrightarrow{x_n}) = \inf_{\overrightarrow{y} \in B} I_n(\overrightarrow{y}).$$

Dans ce qui suit, on note $\overrightarrow{T_n}$ le champ de tension engendré par $\overrightarrow{x_n}$.

*b)* On relâche la condition $\overrightarrow{x_n} \in B$ à l'aide d'un opérateur de pénalisation $\overrightarrow{\eta}$ attaché à $C$; on note $j'_\delta$ la différentielle de $j_\delta$, $\overrightarrow{T_{n,\lambda}}$ le champ de tension engendré par $\overrightarrow{x_{n,\lambda}}$ et on considère le problème suivant.

*Problème P5.4.* — Déterminer $\overrightarrow{x_{n,\lambda}} \in E$ telle que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{x_{n,\lambda}}'', \overrightarrow{y}''\right) + \left(\overrightarrow{T_{n,\lambda}}, \overrightarrow{y}'\right) \\ = (\rho_0 \overrightarrow{g}, \overrightarrow{y}) - \left(j'_\delta(\overrightarrow{x_{n,\lambda}}), \overrightarrow{y}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{x_{n,\lambda}}), \overrightarrow{y}\right) + \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{y}(\ell), \quad (46) \\ \forall\, \overrightarrow{y} \in E.\end{aligned}$$

*c)* On discrétise (46) en considérant des approximations externes $\overrightarrow{x}^{(h)}$ de $\overrightarrow{x_{n,\lambda}}$; on pose :

$$h = \frac{\ell}{N} \quad ; \quad a_i = ih \, ;$$

$$\chi_i = \text{fonction caractéristique de } \left(a_i - \frac{h}{2}, a_i + \frac{h}{2}\right) \cap (0, \ell) \, ;$$

$$\overrightarrow{u}^{(h)} = \sum_{i=1}^{i=N} \overrightarrow{u_i} \chi_i \quad (47)$$

$$\overrightarrow{x}^{(h)}(a) = \int_0^a \overrightarrow{u}^{(h)}(s)\, \mathrm{d}s \quad (48)$$

$$E^{(h)} = \left\{ \overrightarrow{x}^{(h)} : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{x}^{(h)} \text{ et défini par (47) et (48)} \right\}.$$

Pour $\overrightarrow{x}^{(h)} \in E^{(h)}$, on définit

$$\delta\overrightarrow{u_i} = \frac{\overrightarrow{u_i} - \overrightarrow{u_{i-1}}}{h} \quad ; \quad \delta\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{i=N} \delta\overrightarrow{u_i} \chi_i \quad (\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{0}).$$

On note $\overrightarrow{T}^{(h)}$ le champ de tension engendré par $\overrightarrow{x}^{(h)}$. Nous avons le problème suivant.

*Problème P5.5.* — Déterminer $\overrightarrow{x}^{(h)} \in E^{(h)}$ telle que :

$$\frac{1}{n}\left(\delta\overrightarrow{u}^{(h)}, \delta\overrightarrow{v}^{(h)}\right) + \left(\overrightarrow{T}^{(h)}, \overrightarrow{v}^{(h)}\right) = \\ = \left(\rho_0\overrightarrow{g}, \overrightarrow{y}^{(h)}\right) - \left(j'_\delta(\overrightarrow{x}^{(h)}), \overrightarrow{y}^{(h)}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{\eta}(\overrightarrow{x}^{(h)}), \overrightarrow{y}^{(h)}\right) \\ + \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{y}(\ell),$$

pour tout $\overrightarrow{v}^{(h)} \in E^{(h)}$.

Ce dernier est un problème en *dimension finie*.

*d)* Nous avons alors le résultat suivant.

RÉSULTAT 5.6

*(i) La suite* $\left\{\overrightarrow{x}^{(h)}\right\}_{h>0}$ *converge vers* $\overrightarrow{x_{n,\lambda}}$ *et la suite* $\left\{\overrightarrow{T}^{(h)}\right\}_{h>0}$ *converge vers* $\overrightarrow{T_{n,\lambda}}$.

*(ii) La suite* $\left\{\overrightarrow{x_{n,\lambda}}\right\}_{\lambda>0}$ *converge, pour* $\lambda \to \infty$, *vers* $\overrightarrow{x_n}$ *et la suite* $\left\{\overrightarrow{T_{n,\lambda}}\right\}_{\lambda>0}$ *converge vers* $\overrightarrow{T_n}$.

*(iii) Tout point d'accumulation dans V de la suite* $\left\{\overrightarrow{x_n}\right\}_{n\in N}$ *est solution de P4.2. Par conséquent, la suite* $\left\{\overrightarrow{T_n}\right\}_{n>0}$ *converge vers le champ de tension dans l'équilibre.*

*Exemple 5.7.* — On considère un fil de longueur $\ell = 6,28$ m, masse linéique $\rho_0 = 1,0$ kg/m et constante d'élasticité $K = 10$ N/m. La pesanteur est $\overrightarrow{g} = -9,81\overrightarrow{e_3}$ (en m/s$^2$). L'obstacle est plan horizontal, d'équation $\psi(\overrightarrow{\xi}) = \xi_3 = 0$. Le coefficient de frottement est $\mu = 0,0255$ et, donc, la valeur de $A$ pour les parties au contact est $A(a) = 0,25$ N (et, bien entendu, $A(a) = 0$ pour le reste du fil). Le câble a été arbitrairement découpé en 800 éléments (les calculs étant effectués réellement sur la seule partie "utile" du fil, estimée a priori par le programme de résolution et formée des seuls éléments susceptibles de subir un déplacement). On étudie ici le problème d'évolution quasistatique (donc, la situation de "petites perturbations") où le fil est soumis à la seule pesanteur, le contact avec l'obstacle et une force $\overrightarrow{f}$ appliquée à l'extrémité $a = \ell$. La configuration initiale est la courbe $Y1$ et nous déterminerons $Y2$, $Y3$, $Y4$, $Y5$. La force prend, dans l'ordre, les valeurs $0.5(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3})N$ (courbe $Y2$), $1.0\overrightarrow{e_3}$ N (courbe $Y3$), $0.5\overrightarrow{e_3}$ N (courbe $Y4$) et puis s'annule (courbe $Y5$). Les résultats sont présentés dans les figures 5 à 12. On remarque que le câble ne revient pas à sa configuration initiale.

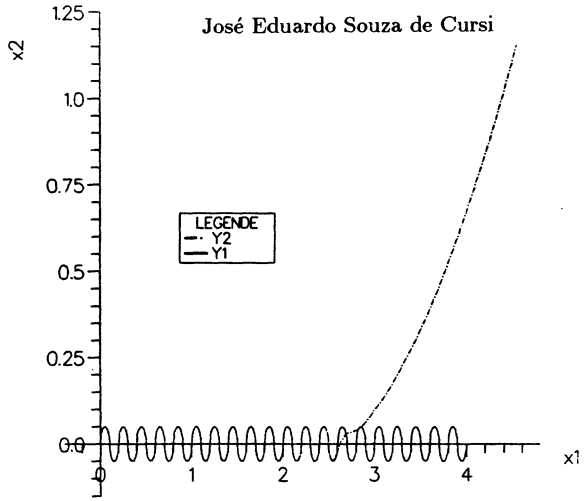



**Fig. 5.** — Projection dans le plan $(x_1, x_2)$ de la solution pour $\vec{f} = 0.5(\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3})$.

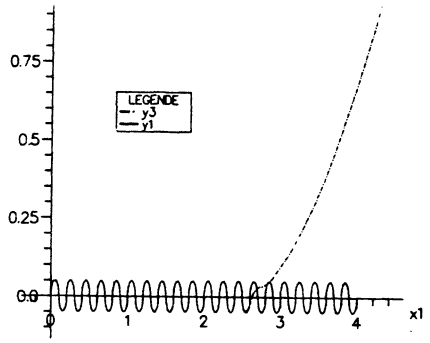



**Fig. 6.** — Projection dans le plan $(x_1, x_2)$ de la solution pour $\vec{f} = 1.0\vec{e_3}$.

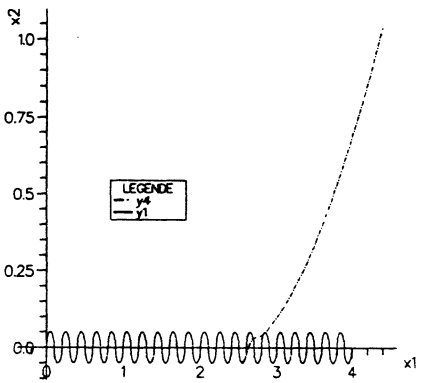



**Fig. 7.** — Projection dans le plan $(x_1, x_2)$ de la solution pour $\vec{f} = 0.5\vec{e_3}$.

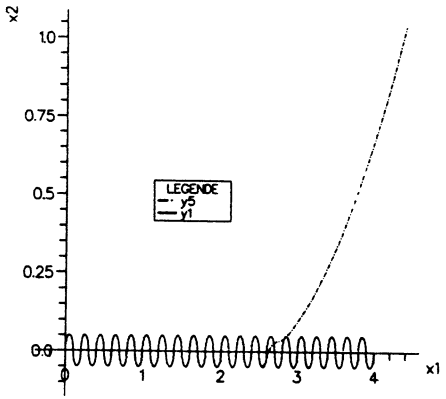



**Fig. 8.** — Projection dans le plan $(x_1, x_2)$ de la solution pour $\overrightarrow{f}$ nulle : le câble ne revient pas à sa configuration initiale.

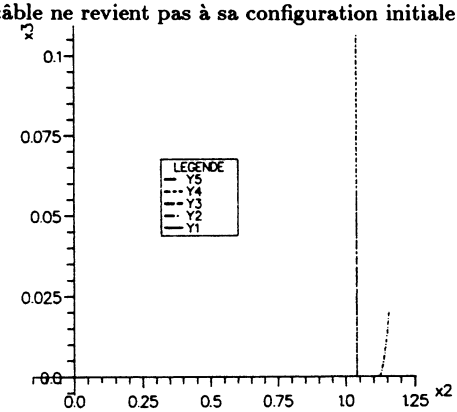



**Fig. 9.** — Projection des solutions dans le plan $(x_2, x_3)$ : $Y5$, correspondant à $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, et la configuration de départ $Y1$ sont horizontales.

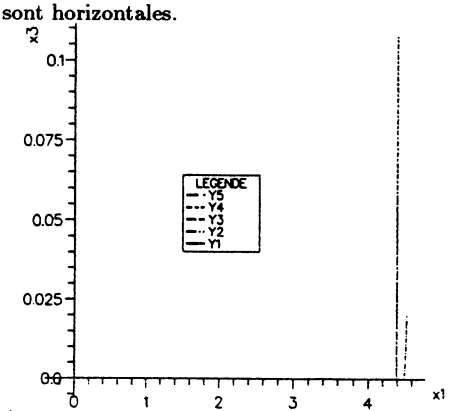



**Fig. 10.** — Projection des solutions dans le plan $(x_1, x_3)$ : $Y5$, correspondant à $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, et la configuration de départ $Y1$ sont horizontales.

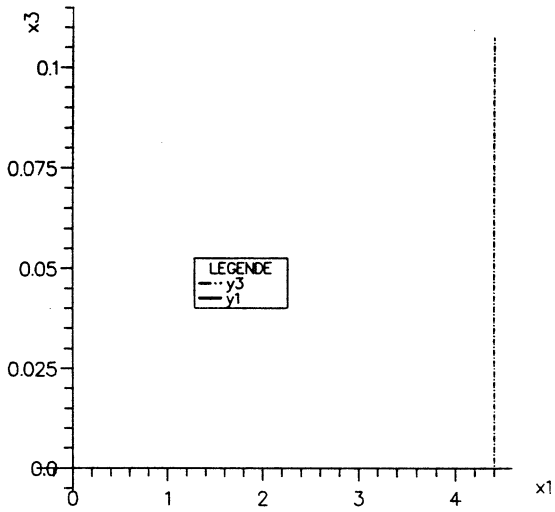



**Fig. 11.** — Projection dans le plan $(x_1, x_3)$ des solutions pour $\overrightarrow{f} = 1.0\overrightarrow{e_3}$. La configuration de départ $Y1$ est horizontale.

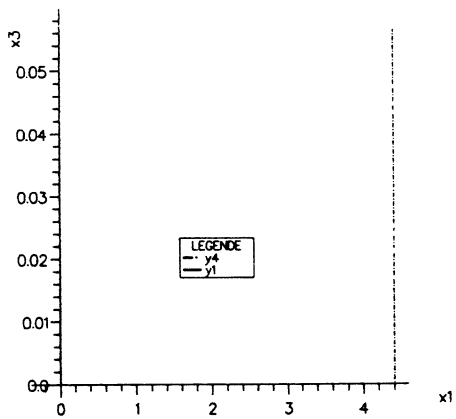



**Fig. 12.** — Projection dans le plan $(x_1, x_3)$ de la solution pour $\overrightarrow{f} = 0.5\overrightarrow{e_3}$. La configuration de départ $Y1$ est horizontale.

## Conclusion

L'étude de l'équilibre d'un fil élastique sans raideur soumis au contact unilatéral avec frottement contre un obstacle présente les difficultés suivantes :

- le caractère unilatéral au fil : son comportement *n'est pas* déterminé par la seule loi de Hooke, mais par celle-ci *et* une condition unilatérale (13), laquelle peut être envisagée comme étant, en quelque sorte, une liaison interne (i.e. (14)) devant être satisfaite avec un multiplicateur de Lagrange identiquement nul.
- le contact avec le fond introduit une liaison unilatérale qui *n'est pas* une liaison parfaite, car la réaction de l'obstacle possède une composante tangentielle non nulle : l'effort de frottement $\overrightarrow{\phi}$. Par conséquent, le principe du minimum de l'énergie n'est pas applicable au problème et la méthode utilisée pour l'étude des problèmes sans frottement [6] ne peut être directement utilisée ici.
- le frottement $\overrightarrow{\phi}$ est relié à la composante normale $\overrightarrow{R}$ par l'inégalité (19) et la difficulté essentielle des vrais problèmes de frottement réside en ce que, d'une part, $R = |\overrightarrow{R}|$ ne peut être déterminée a priori et, d'autre part, $R$ et $\overrightarrow{\phi}$ peuvent, en général, prendre une infinité de valeurs.

Le présent travail considère une situation d'intérêt pratique, issue du calcul numérique : un problème que nous appellons celui de "petites perturbations". Dans cette situation, la valeur de $R$ est calculée sur une configuration donnée $\overrightarrow{x_R}$ et cette valeur est utilisée pour la détermination de la configuration d'équilibre $\overrightarrow{x}$ : la difficulté du calcul a priori de $R$ disparaît. Il en est de même pour la difficulté liée à une éventuelle non convexité de la région admissible pour le fil. En outre, on impose la loi de Coulomb, ce qui se traduit par des conditions *supplémentaires* à la loi définissant le frottement sec.

Nous avons établi que, lorsque le potentiel extérieur agissant sur le fil est convexe, il est possible d'adapter le principe du minimum de l'énergie à cette situation, de manière à résoudre entièrement le problème : dans ce cas, l'équilibre est caractérisé par le champ de tensions correspondant. Alors, on peut en construire toutes les solutions en utilisant la méthode exposée dans la section 5.

Les résultats obtenus permettent d'envisager, sous certaines conditions, un modèle correspondant à certaines situations d'amarrage : le couplage

d'un fil sans raideur en évolution quasistatique et d'un solide rigide en évolution dynamique (cependant, ce genre d'étude présente des difficultés supplémentaires).

## 6. Annexe I
## Énoncé des théorèmes correspondant aux résultats de la section 4

On considère l'espace $V$ muni du produit scalaire $((\cdot,\cdot))$ définis par :

$$V = \left\{ \overrightarrow{y} \in \left(H^1(0,\ell)\right)^3 \mid \overrightarrow{y}(0) = \overrightarrow{0} \right\} ;$$

$$((\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})) = \int_0^\ell \overrightarrow{v}'(a) \cdot \overrightarrow{w}'(a)\, da .$$

La norme qui en dérive est notée $\| \cdot \|$. On note $V'$ le dual topologique de $V$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $V$ et $V'$ (par commodité, nous n'identifierons pas $V$ et $V'$). Nous avons alors :

$$\text{Kin} = V_+ \cap C \quad ; \quad V_+ = \left\{ \overrightarrow{y} \in V \mid |\overrightarrow{y}'(a)| \geq 1 \text{ p.p. sur } (0,\ell) \right\} .$$

On utilise les notations classiques $L^*$ et $\overline{L}$ pour désigner, respectivement, la polaire (ou conjuguée) et la régularisée semi-continue inférieurement (s.c.i.) d'une fonctionnelle $L$. On note l'épigraphe de $L$, la différentielle de $L$ au point $\overrightarrow{y}$, le sous-différentiel de $L$ au point $\overrightarrow{y}$ et le domaine de $L$ par $\text{épi}\, L$, $L'(\overrightarrow{y})$, $\partial L(\overrightarrow{y})$ et $\text{dom}\, L$, respectivement. Si $S$ est une partie de $V$, on note $\partial L(S)$ la réunion des sous-différentiels des éléments de $S$ :

$$\partial L(S) = \bigcup_{\overrightarrow{y} \in S} \partial L(\overrightarrow{y}) .$$

Pour l'application $\left(a, \overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\right) \to \psi(a, \overrightarrow{\xi})$, on note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} \right) .$$

HYPOTHÈSE H1.— *$A \in L^\infty(0,\ell)$ et $A \geq 0$ p.p.; $\overrightarrow{y} \to U(\overrightarrow{y})$ est convexe et faiblement continue sur $V$.*

HYPOTHÈSE H2

*1)* $C = \{\vec{x} \in V \mid \psi(a, \vec{x}(a)) \geq 0$, *p.p. sur* $D(\vec{x}_R)\}$ *est une partie convexe de* $V$.

*2) Il existe* $\zeta > 0$ *tel que : si* $\vec{x} \in C$ *et* $|\vec{x}(\alpha)| \leq \zeta$, *alors il y a une courbe* $C(\vec{x}(\alpha))$ *de* $C \cap V_+$ *passant par* $\vec{x}(\alpha)$, *i.e., il existe une courbe* $a \to C(\vec{x}(\alpha))(a) \in C \cap V_+$ *telle que* $C(\vec{x}(\alpha))(a) = \vec{x}(a)$.

*3) Les applications* $\psi : [0, \ell] \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ *est deux fois continûment différentiable et* $\overrightarrow{\text{grad}}\,\psi \neq \vec{0}$ *en tout point.*

L'hypothèse H1 est vérifieé pour les problèmes posés, les exemples et les remarques, car la définition des efforts extérieurs autres que la réaction du fond entraîne que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont continues (puisque différentiables). H2 est satisfaite pour le problème formulé dans la section 2, mais n'est pas vérifiée dans la situation de la remarque 2.3.3; cette dernière est abordée dans la remarque 7.10. Signalons que H2.2 correspond à une condition usuelle de la théorie de Pontryagin, dite "d'admissibilité" (cf. par exemple [11], p. 304).

Notre objectif est celui d'établir les résultats suivants.

THÉORÈME 6.1. — *Soient* $\vec{x} \in V_+$, $\vec{T}$ *le champ de tension engendré par* $\vec{x}$. *Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $\vec{x}$ *est solution de P3.1;*

*(ii)* $\vec{x}$ *est solution de P4.2;*

*(iii)* $(\vec{x}, \vec{T}, \vec{\phi})$ *est solution de P2.1 (alors,* $-\vec{\phi} \in \partial j(\vec{x})$*).*

Ce théorème établit les résultats 4.1 et 4.3.

THÉORÈME 6.3. — *Soit* $\vec{\bar{x}}$ *une solution de P4.2. Alors* $\vec{x}$ *est solution de P3.1 si et seulement si* $\vec{x} \in \text{Kin}$, $\vec{x}$ *engendre le même champ de tension que* $\vec{\bar{x}}$ *et* $\vec{x} \in \partial U^*(\partial U(\vec{\bar{x}})) \cap \partial j^*(\partial j(\vec{\bar{x}}))$.

Ce théorème correspond au résultat 4.4.

COROLLAIRE 6.4. — *La solution de P3.1 est unique si et seulement si P4.2 admet une solution avec le fil entièrement tendu. Dans ce cas, la solution de ce dernier est unique et coïncide avec celle de P3.1.*

*Remarque* 6.5. — Les problèmes P4.2 et P3.1 sont, donc, *mal posés* en configurations (peuvent admettre plusieurs solutions $\overrightarrow{x}$) et *bien posés* en tensions (le champ de tension est le même pour toutes les solutions).

Nous rappelons les trois difficultés essentielles du problème.

1) La prise en compte du caractère unilatéral du fil, lequel se traduit, d'une part, par la non convexité de l'ensemble Kin et, d'autre part, par le fait que $J$ n'est pas convexe sur $V$, même si elle coïncide avec une fonctionnelle convexe sur Kin.

2) La présence du frottement, laquelle entraîne que les configurations d'équilibre ne minimisent pas l'énergie $J$ sur Kin.

3) La formulation en "petites perturbations". Cette dernière élimine des difficultés relatives au calcul a priori de la fonction $A$ et à une éventuelle non convexité de la région admissible (i.e. de $C$), *mais introduit des conditions supplémentaires* : alors que les vrais problèmes de frottement ne font intervenir que (28)-(33), nous devons traiter (28)-(38) (i.e., il s'agit, en quelque sorte, d'obtenir des solutions *particulières*, vérifiant *de plus* les conditions de la loi de Coulomb).

Comme nous l'avons déjà remarqué, ces difficultés sont surmontées

4) en introduisant la fonctionnelle supplémentaire $j$ définie par (41) et en étudiant le problème de minimisation de $J + j$ (section 3),

5) puis la convexifiée $J^{**}$ et le problème relâché P4.2.

Compte tenu de ces observations, nous allons effectuer la démonstration de ces résultats en deux étapes.

*Première étape*

Dans un premier temps, nous allons établir, d'une part, l'équvalence entre le problème relâché P4.2 et P3.1 et, d'autre part, le théorème 6.3. Il en résulte que, *si $j$ satisfait certaines propriétés, énoncées dans la proposition 7.1*, alors P3.1 est équivalent à P2.1 et nous avons les théorèmes 6.1, 6.2 et 6.3.

*Deuxième étape*

On établit que $j$ satisfait la proposition 7.1, ce qui complète la preuve.

Les démonstrations et résultats obtenus dans la première étape sont détaillés dans l'annexe 2, alors que la deuxième est effectuée dans l'annexe 3.

## 7. Annexe II
## Démonstration des théorèmes

La démonstration est faite à l'aide de la technique de [4] (cf. aussi [8], [9], [10]).

On utilise la proposition suivante, établie dans l'annexe 3.

PROPOSITION 7.1. — *La fontionnelle* $j : V \mapsto \mathbb{R}$ *a les propriétés suivantes :*

$$j : V \mapsto \mathbb{R} \text{ est convexe, propre et faiblement continue.} \tag{50}$$

*Si* $\overrightarrow{x} \in V$ *et* $\overrightarrow{p} \in \partial j(\overrightarrow{x})$ *alors les propriétés suivantes sont vérifiées p.p. sur* $(0, \ell)$

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \tag{51}$$

$$|\overrightarrow{p}| \leq A \tag{52}$$

*Si* $A \neq 0$ *sur un intervalle* $(\alpha, \beta)$ *alors, sur ce même intervalle,*

$$|\overrightarrow{p}| < A \Rightarrow \overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{0} \tag{53}$$

$$|\overrightarrow{p}| = A \Rightarrow \exists\, \lambda \geq 0 \text{ tel que } \overrightarrow{u_T} = \lambda \overrightarrow{p}\,. \tag{54}$$

En outre, nous utilisons le résultat auxiliaire suivant :

PROPOSITION 7.2. — *Si* $\overrightarrow{x}$ *est solution de P3.1, alors :*

$$J^{**}(\overrightarrow{x}) + j(\overrightarrow{x}) = \inf_{\overrightarrow{y} \in C} \{J^{**}(\overrightarrow{y}) + j(\overrightarrow{y})\}$$

*où* $J^{**} = W^{**} + U$,

$$W^{**}(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 \frac{K}{2} \left[(|\overrightarrow{x}'(a)| - 1)^+\right]^2 \mathrm{d}a$$

*(*$J^{**}$ *et* $W^{**}$ *sont les convexifiées de* $J$ *et* $W$, *respectivement).*

*Remarques 7.3*

1) On a :

$$W^{**}(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 \frac{K}{2} \epsilon^2 \,\mathrm{d}a \quad ; \quad \epsilon = (|\overrightarrow{x}'(a)| - 1)^+$$

et, puisque l'application $\overrightarrow{x}'(a) \to \epsilon$ est convexe alors que $\epsilon \to (\epsilon^+)^2$ est strictement convexe et *croissante*, la valeur de $\epsilon$ est la même pour toutes les solutions de P4.2.

2) Toujours dans P4.2 : puisque $|\overrightarrow{\overline{T}}| = \epsilon^+/K$, un argument analogue montre l'unicité du champ de tension $\overline{T}$ (cf. aussi la proposition 7.4 ci-dessous).

3) L'existence d'une solution $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$ pour P4.2, peut être obtenue à partir de conditions de croissance de $J$ à l'infini, telles la coercivité.

Enfin, le théorème 6.3 est une conséquence immédiate du résultat suivant.

PROPOSITION 7.4. — *Soit $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$ une solution de P4.2. alors $\overrightarrow{x}$ est solution de P4.2 si et seulement si $\overrightarrow{x} \in C$, $\overrightarrow{x}$ engendre le même champ de tension que $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$ et $\overrightarrow{x} \in \partial U^*(\partial U(\overrightarrow{\overrightarrow{x}})) \cap \partial j^*(\partial j(\overrightarrow{\overrightarrow{x}}))$.*

*Remarques 7.5*

1) Le résultat montre que, pour P3.1 ou P4.2, nous avons l'unicité du champ de tension dans l'équilibre et, par conséquent, de la longueur d'arc.

2) Lorsque les efforts extérieurs sont des forces indépendantes de la position, on a $\partial U^*(\partial U(\overrightarrow{x})) = V, \forall\ \overrightarrow{x} \in V$.

3) Si $J + j$ est coercive sur $C$, alors ses suites minimisantes ont pour points d'accumulation les points de minimum de $J^{**} + j$.

4) Pour construire *toutes les solutions de P3.1*, il suffit donc de considérer les configurations $\overrightarrow{x}$ définies par

$$\overrightarrow{x}(a) = \int_0^a \left(1 + \frac{\overline{T}(a)}{K}\right) \overrightarrow{t}(a)\, da \tag{55}$$

où $\overrightarrow{\overline{T}}$ est le champ de tension engendré par $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$ et

$$\overrightarrow{t} \in (L^\infty(0, \ell))^3 \quad ; \quad |\overrightarrow{t}| = 1 \text{ p.p.} \quad ; \quad \overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{\overline{T}}}{|\overrightarrow{\overline{T}}|} \text{ si } \overrightarrow{\overline{T}} \neq \overrightarrow{0}$$

($\overrightarrow{t}$ arbitraire si $\overrightarrow{\overline{T}} = \overrightarrow{0}$). (55) définit toutes les configurations engendrant le même champ de tension que $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$. □

On note l'adhérence et l'enveloppe convexe fermée de $V_+$ par $\overline{V_+}$ et $\overline{\text{co}}V_+$, respectivement.

LEMME 7.6. — *Lorsque $V$ est muni de la topologie faible, on a :*

$$\overline{V_+} = \overline{\text{co}}\, V_+ = V\,.$$

*Démonstration.* — Ce lemme suit des résultats de [4].

1) Soit $I : \left(L^2(0\,,\,\ell)\right)^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$I(\vec{u}) = \int_0^\ell \theta\big(\vec{u}(a)\big)\,\mathrm{d}a\,;$$

avec $\theta = \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ donnée par $\theta(\vec{\xi}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |\vec{\xi}| < 1 \\ 0 & \text{si } |\vec{\xi}| \geq 1. \end{cases}$

De [4] p. 217, nous avons que $\theta$ est une intégrande normale positive. Nous avons $\theta^{**}(\vec{\xi}) = 0$, $\forall\ \vec{\xi}$, de façon que les propositions 1.2 (p. 249) et 2.3 (p. 255) de [4] entraînent que, lorsque $\left(L^2(0\,,\,\ell)\right)^3$ est muni de sa topologie faible $\overline{I}(\vec{u}) = I^{**}(\vec{u}) = 0$, $\forall\ \vec{u}$.

2) On note $M : V \to \left(L^2(0\,,\,\ell)\right)^3$ l'application linéaire, continue et bijective, définie par $M(\vec{x}) = \vec{x}'$. Soit $\varphi$ l'indicatrice de $V_+$. On a $\varphi(\vec{x}) = I\big(M(\vec{x})\big)$ et, compte tenu de 1) ci-dessus, $\overline{\varphi}(\vec{x}) = \varphi^{**}(\vec{x}) = 0$, $\forall\ \vec{x}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} V \times [\,0\,,\,+\infty\,[ = \overline{\text{épi}}\,\varphi &= \overline{V_+ \times [\,0\,,\,+\infty\,[} \\ &= \overline{\text{co}}\ \text{épi}\,\varphi = \overline{\text{co}}\,\{V_+ \times [\,0\,,\,+\infty\,[\} \end{aligned}$$

et nous avons le résultat énoncé. □

*Remarque 7.7.* — ce résultat peut être comparé au théorème de Krein-Milman ([15], p. 13).

LEMME 7.8. — *On considère $V$ muni de la topologie forte et on pose*

$$C^\alpha = \big\{\vec{x} \in V \mid \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \psi\big(a\,,\,\vec{x}(a)\big) \geq \alpha a \text{ sur } D(\vec{x}_R) \cap [\,\delta\,,\,\ell\,] \\ |\vec{x}'| \geq 1 \text{ sur } (0\,,\,\delta)\big\}\,.$$

*Alors* $\bigcup_{\alpha>0} C_\alpha$ *est dense dans* $C$.

*Démonstration*

1) Tout d'abord, on remarque que les élements de $V$ peuvent être identifiés à des fonctions continues (cf. par exemple, [15], p.122). Ainsi,

les applications $a \to \vec{x}(a)$ et $a \to \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi\left(a, \vec{x}(a)\right)$ sont continues sur $[0, \ell]$.

2) Il existe $\eta > 0$ tel que $\left|\overrightarrow{\text{grad}}\psi\left(a, \vec{x}(a)\right)\right| \geq \eta$, $\forall\, a \in [0, \ell]$ : il résulte de 1) que $a \to \left|\overrightarrow{\text{grad}}\psi\left(a, \vec{x}(a)\right)\right|$ est continue sur $[0, \ell]$. Cette application atteint, donc, sa borne inférieure sur ce même intervalle. Par conséquent, cette borne est strictement positive : $\overrightarrow{\text{grad}}\psi$ ne s'annulle jamais (H2). De plus, il existe deux constantes réelles $M$ et $\beta > 0$ telles que :

$$\forall\, a \in [0, \ell] : \left|\vec{\xi} - \vec{x}(a)\right| \leq 1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{\text{grad}}\psi(a, \vec{\xi})\right| \leq M,$$

$$\forall\, a \in [0, \ell] : \left|\vec{\xi} - \vec{x}(a)\right| \leq \beta \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\psi(a, \vec{\xi}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\psi(a, \vec{x}(a)) \geq \frac{\eta^2}{2}.$$

3) Soit $\vec{x} \in C$. On définit, pour $\tau > 0$, $\vec{x_\tau} \in V$, par

$$\vec{x_\tau}(a) = \vec{x}(a) + a\tau\, \overrightarrow{\text{grad}}\,\psi\left(a, \vec{x}(a)\right).$$

Alors, pour $\tau \to 0$, $\vec{x_\tau} \to \vec{x}$ fortement dans $V$. Or, pour $\tau < \beta/2\ell M$, la formule des accroissements finis et 2) entraînent que :

$$\psi\left(a, \vec{x_\tau}(a)\right) \geq a\tau\frac{\eta^2}{2} \quad \text{sur} \quad D(\vec{x_R}).$$

Il en résulte que la famille :

$$D_\beta = \left\{\vec{x} \in V \mid \psi\left(a, \vec{x}(a)\right) \geq \beta a \text{ sur } D(\vec{x_R})\right\}$$

est telle que $\bigcup_{\beta>0} D_\beta$ est dense dans $C$. Ainsi, il suffit d'établir que $\bigcup_{\alpha>0} C_\alpha$ est dense dans $C_\beta$ pour tout $\beta > 0$. Soit à présent $\vec{x} \in D_\beta$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que $a \leq \delta \Rightarrow |\vec{x}(a)| \leq \zeta$ et $|\vec{x}'(a)| = c$. Soit $n \geq 1/\delta$. On définit $\vec{x_n}$ par

$$\vec{x_n}(a) = \mathcal{C}\left(\vec{x}\left(\frac{1}{n}\right)\right)(a) \quad \text{sur} \quad [0, 1/n];$$
$$\vec{x_n}(a) = \vec{x}(a) \quad \text{sur} \quad [1/n, \ell].$$

Alors $\vec{x_n} \in C_{1/n}$ et $\vec{x_n} \to \vec{x}$ fortement dans $V$. Nous avons, donc, le résultat énoncé. □

COROLLAIRE 7.9. — *On considère $V$ muni de la topologie faible. Alors $V_+ \cap C$ est dense dans $C$.*

*Démonstration.* — Compte tenu du lemme 7.8, il suffit d'établir que $C_\alpha \subset \overline{V_+ \cap C}$ pour tout $\alpha > 0$.

1) Le lemme 7.6 montre qu'il existe une suite $\{\overrightarrow{x_n}\}_{n>0} \subset V_+$ telle que $\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x}$ faiblement dans V. Puisque $|\overrightarrow{x}'| \geq 1$ sur $(0, \delta)$, cette suite peut être choisie de manière que $\overrightarrow{x_n} = \overrightarrow{x}$ sur $[0, \delta]$. Il suffit d'établir que, pour $n$ suffisamment grand, cette suite reste dans $C$. Comme dans la démonstration précédente, on considère $M > 0$ tel que

$$\forall\, a \in [0, \ell] : \left|\overrightarrow{\xi} - \overrightarrow{x}(a)\right| \leq 1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{\text{grad}}\psi(a, \overrightarrow{\xi})\right| \leq M .$$

2) Or, $\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x}$ *uniformément* sur $[0, \ell]$. Par conséquent, il existe un indice $p > 0$ tel que :

$$n \geq p \Rightarrow \overrightarrow{x_n}(a) = \overrightarrow{x}(a) \text{ sur } [0, \delta] \,;\; |\overrightarrow{x_n}(a) - \overrightarrow{x}(a)| \leq \frac{\alpha\delta}{2M} \text{ sur } [\delta, \ell] .$$

Ainsi, la formule des accroissements finis entraîne que

$$n \geq p \Rightarrow \psi\big(a, \overrightarrow{x_n}(a)\big) \geq \frac{\alpha\delta}{2} \geq 0 \text{ sur } [\delta, \ell]$$

alors que $\psi\big(a, \overrightarrow{x_n}(a)\big) = \psi\big(a, \overrightarrow{x}(a)\big)$ sur $[0, \delta]$.

Par conséquent $n \geq p \Rightarrow \overrightarrow{x_n} \in C$. □

*Démonstration de la proposition 7.2.* — On note les indicatrices de $V_+$, Kin et $C$ par $\varphi$, $\varphi_{\text{Kin}}$ et $\varphi_C$ respectivement. Il suffit de montrer que $\partial(j + \varphi_{\text{Kin}})(\overrightarrow{x}) = \partial j(\overrightarrow{x}) + \partial\varphi_C(\overrightarrow{x})$. Or, la proposition 5.6 p. 26 de [4] montre que $\partial(j + \varphi_C)(\overrightarrow{x}) = \partial j(\overrightarrow{x}) + \partial\varphi_C(\overrightarrow{x})$, de façon qu'il nous suffit d'établir que $\partial(j + \varphi_{\text{Kin}})(\overrightarrow{x}) = \partial(j + \varphi_C)(\overrightarrow{x})$. Compte tenu du lemme 7.6, on a $\partial\varphi(\overrightarrow{x}) = \{\overrightarrow{0}\}$ et il est immédiat que :

$$\partial(j + \varphi_C)(\overrightarrow{x}) =$$
$$= \partial(j + \varphi_C)(\overrightarrow{x}) + \partial\varphi(\overrightarrow{x}) \subset \partial(j + \varphi + \varphi_C)(\overrightarrow{x}) = \partial(j + \varphi_{\text{Kin}})(\overrightarrow{x}) .$$

L'inclusion réciproque résulte du corollaire 7.9 : si $\overrightarrow{p} \in V'$ est un élément tel que

$$\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \rangle \leq j(\overrightarrow{y}) - j(\overrightarrow{x}), \quad \forall\, \overrightarrow{y} \in \text{Kin},$$

ce même corollaire entraîne que

$$\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \rangle \leq j(\overrightarrow{y}) - j(\overrightarrow{x}), \quad \forall\, \overrightarrow{y} \in C$$

et par conséquent, $\overrightarrow{p} \in \partial(j + \varphi_C)(\overrightarrow{x})$. □

*Démonstration de la proposition 7.4*

1) Puisque $U$ et $j$ sont convexes faiblement continues,

$$\forall\ \vec{x} \in V : \partial(U+j)(\vec{x}) = \partial U(\vec{x}) + \partial j(\vec{x})$$

([4], proposition 5.6, p. 26). Ainsi, pour tout $\vec{x} \in V$ :

$$\forall\ \vec{p} \in \partial(U+j)(\vec{x}) : \exists\ \vec{p_1} \in \partial U(\vec{x}) \text{ et } \vec{p_2} \in \partial j(\vec{x}) \text{ tels que } \vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2}\,. \tag{57}$$

2) Montrons l'affirmation directe : soit $\vec{x}$ une solution de P4.2. On note $\vec{T}$ le champ de tension engendré par $\vec{x}$.

*a)* Nous avons :

$$\begin{aligned} m = J^{**}(\vec{x}) + j(\vec{x}) &= J^{**}(\vec{\bar{x}}) + j(\vec{\bar{x}}) \\ &= \inf_{\vec{y} \in C} \{J^{**}(\vec{y}) + j(\vec{y})\}\,. \end{aligned}$$

Si $\vec{T} \neq \vec{\bar{T}}$, alors, en posant $\vec{x_\theta} = \theta\vec{x} + (1-\theta)\vec{\bar{x}}$,

$$W^{**}(\vec{x_\theta}) < \theta W^{**}(\vec{x}) + (1-\theta) W^{**}(\vec{\bar{x}}), \quad \forall\ \theta \in (0,1)$$

et par conséquent $\forall\ \theta \in (0,1)$,

$$J^{**}(\vec{x_\theta}) + j(\vec{x_\theta}) < \theta\left(J^{**}(\vec{x}) + j(\vec{x})\right) + (1-\theta)\left(J^{**}(\vec{\bar{x}}) + j(\vec{\bar{x}})\right),$$

de manière que la convexité de $C$ entraîne que $\vec{x_\theta} \in C$ et $J^{**}(\vec{x_\theta}) < m$, ce qui est absurde.

*b)* On pose :

$$\begin{aligned} L(\vec{y}, \vec{p}) &= W^{**}(\vec{y}) + \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle - \mathcal{L}^*(\vec{p})\,; \\ \mathcal{L}(\vec{y}) &= U(\vec{y}) + j(\vec{y})\,. \end{aligned} \tag{58}$$

$L$ est donc définie sur $V \times V'$ et, en prenant $\vec{p} \in \partial U(\vec{\bar{x}}) + \partial j(\vec{\bar{x}}) \subset V'$ (par exemple, définie par :

$$\langle \vec{p}, \vec{y} \rangle = -(\rho_0 \vec{g}, \vec{y}) - \vec{f} \cdot \vec{y}(\ell) = -(\vec{\bar{T}}, \vec{y}) + (\vec{r}, \vec{y})$$

où $\vec{r} = \bar{R}\vec{n} + \vec{\phi}$ est la réaction de l'obstacle pour la configuration $\vec{\bar{x}}$), nous avons ([4] p. 157) :

$$\begin{aligned} &(\vec{\bar{x}}, \vec{p}) \text{ est un point-selle de } L \text{ sur } C \times V' \\ &\text{et } L(\vec{\bar{x}}, \vec{p}) = J^{**}(\vec{\bar{x}}) + j(\vec{\bar{x}})\,. \end{aligned} \tag{59}$$

De plus, compte tenu de (57),

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,, \quad \vec{p}_1 \in \partial U(\vec{x})\,,\ \vec{p}_2 \in \partial j(\vec{x})\,. \tag{60}$$

*c)* D'une façon analogue, en prenant $\vec{p} \in \partial U(\vec{x}) + \partial j(\vec{x}) \subset V'$ :

$$(\vec{x}\,,\ \vec{p}) \text{ est un point-selle de } L \text{ sur } C \times V'\,. \tag{61}$$

*d)* De (59) et (61) il vient que $(\vec{x}\,,\ \vec{p})$ est *un point-selle de $L$ sur $C \times V'$* ([4], proposition 1.5, p. 157).

*e)* Nous avons donc $\vec{p} \in \partial(U + j)(\vec{x})$. En décomposant $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, il vient que $\vec{p}_1 \in \partial U(\vec{x})$, $\vec{p}_2 \in \partial j(\vec{x})$.

Donc $\vec{x} \in \partial U^*(\vec{p}_1) \cap \partial j^*(\vec{p}_2)$, d'où le résultat.

3) Pour établir la réciproque, on considère une configuration $\vec{x}$ de $C$ engendrant le même champ de tension que $\vec{\bar{x}}$, i.e.,

$$\vec{x} \in C \quad \text{et} \quad \vec{T} = \vec{\bar{T}}$$

et telle que :

$$\exists\, \vec{p}_1 \in \partial U(\vec{\bar{x}})\,,\ \vec{p}_2 \in \partial j(\vec{\bar{x}}) \text{ telles que } \vec{x} \in \partial U^*(\vec{p}_1) \cap \partial j^*(\vec{p}_2)\,. \tag{62}$$

*a)* En posant $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, il vient que $(\vec{\bar{x}}\,,\ \vec{p})$ est un point-selle de $L$ sur $C \times V'$. Donc :

$$L(\vec{\bar{x}}\,,\ \vec{p}) \le L(\vec{x}\,,\ \vec{p})\,.$$

D'autre part, si $\vec{x}$ engendre le même champ de tension que $\vec{\bar{x}}$, nous avons aussi :

$$L(\vec{x}\,,\ \vec{p}) = \inf_{\vec{y} \in C} L(\vec{y}\,,\ \vec{p}) \le L(\vec{\bar{x}}\,,\ \vec{p})\,.$$

Ces deux inégalités entraînent que :

$$L(\vec{\bar{x}}\,,\ \vec{p}) = L(\vec{x}\,,\ \vec{p})\,. \tag{63}$$

*b)* Or (62) entraîne que $\vec{p} \in \partial \mathcal{L}(\vec{x})$; nous avons donc :

$$\langle \vec{p}\,,\ \vec{x} \rangle - \mathcal{L}^*(\vec{p}) = \mathcal{L}^{**}(\vec{x}) = \mathcal{L}(\vec{x})\,.$$

Par conséquent,

$$L(\vec{x}\,,\,\vec{p}) = J^{**}(\vec{x}) + j(\vec{x})\,.$$

Donc, de (59) et (63) : $J^{**}(\vec{x}) + j(\vec{x}) = J^{**}(\vec{\bar{x}}) + j(\vec{\bar{x}})$ et $\vec{x}$ est solution de P4.2. □

*Démonstration de la proposition 6.2.* — Il résulte de la proposition 7.2 que les assertions (i) et (ii) sont effectivement équivalentes.

Par ailleurs, (ii) équivaut à (iii) : d'une part, (ii) entraîne (iii) de manière évidente (proposition 7.1) et, d'autre part, la convexité de $J^{**} + j$ et de $C$ montre que (iii) entraîne (i).

Nous avons donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). □

*Remarques 7.10*

1) Le cas d'un fil inextensible est strictement analogue : on remplace $V_+$ par $V_0 = \{\vec{x} \in V \mid |\vec{x}'(a)| = 1 \text{ p.p. sur } (0\,,\,\ell)\}$. On montre alors, de la même façon que dans le lemme 9.6, que $\overline{V_0} = \overline{\text{co}}V_0 = V_-$, ce dernier étant défini par $V_- = \{\vec{x} \in V \mid |\vec{x}'(a)| \leq 1 \text{ p.p. sur } (0\,,\,\ell)\}$.
2) La proposition 7.2 peut être établie à l'aide du principe du maximum de Pontryagin [6].
3) Remarquons que le résultat de la proposition 7.2 reste valable pour toute fonctionnelle $j$, convexe s.c.i. et telle que $\text{dom}\, j = V$.

## 8. Annexe III
## Démonstration de la proposition 7.1

On pose

$$P_a(\vec{\xi}) = \vec{\xi} - \left(\vec{\xi} \cdot \vec{n}(a)\right) \vec{n}(a) = \vec{\xi}_T\,;$$

alors, pour tout $a \in (0\,,\,\ell)$, $P_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un opérateur de projection sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$P_a\left(\vec{\xi} - \vec{x_R}(a)\right) \cdot \vec{n}(a) = 0\,, \quad \forall\, \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$$

(i.e., $P_a(\vec{\xi} - \vec{x_R}(a))$ est tangent à l'obstacle). On a :

$$j(\vec{y}) = \int_0^\ell A(a)\, \left|P_a(\vec{y}(a) - \vec{x_R}(a))\right|\, da\,.$$

La démonstration fait appel au lemme suivant.

LEMME 8.1.— *Si* $\Pi : V \mapsto \left(L^1(0,\ell)\right)^3$ *est linéaire continue et* $h : \left(L^1(0,\ell)\right)^3 \mapsto \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$h(\overrightarrow{y}) = \int_0^\ell |\overrightarrow{y}(a)|\, \mathrm{d}a\,.$$

*On pose* $j(\overrightarrow{y}) = h\big(\Pi(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x_R})\big)$ *et on note* $\Pi^t$ *la transposée de* $\Pi$. *Alors* $\overrightarrow{p} \in \partial j(\overrightarrow{x})$ *si et seulement s'il existe* $\overrightarrow{\eta} \in \left(L^\infty(0,\ell)\right)^3$ *telle que* $|\overrightarrow{\eta}| \leq 1$ *p.p. et* $\overrightarrow{p} = \Pi^t(\overrightarrow{\eta})$.

*Démonstration.* — $h$ est sous différentiable et

$$\bigcup_{\overrightarrow{y} \in Y} \partial h(\overrightarrow{y}) = \left\{ \overrightarrow{p} \in \left\{ \left(L^1(0,\ell)\right)^3 \right\}' = \left(L^\infty(0,\ell)\right)^3 ;\ |\overrightarrow{p}| \leq 1 \text{ p.p.} \right\}$$

et le résultat suit de [4], proposition 5.7, p.27. □

*Démonstration de la proposition 7.1.* — Compte tenu de sa définition, la fonctionnelle $j$ est convexe, propre et faiblement continue (d'où (50)). En choisissant

$$\Pi(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_R})(a) = A(a) P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)$$

et en utilisant le lemme 8.1, nous avons (51) et (52). Il reste à établir (53)-(54). Or, la fonctionnelle $j$ est de la forme :

$$j(\overrightarrow{y}) = \int_0^\ell f(a, \overrightarrow{y})\, \mathrm{d}a \quad ; \quad f(a, \overrightarrow{\xi}) = A(a) \left| P_a\big(\overrightarrow{\xi} - \overrightarrow{x_R}(a)\big) \right|$$

où $f(\cdot, \overrightarrow{\xi})$ est intégrable $\forall\ \overrightarrow{\xi} \in \mathbb{R}^3$; $f(a, \cdot)$ est convexe et continue $\forall\ a \in [0, \ell]$. Nous avons donc :

$$j^*(\overrightarrow{p}) = \int_0^\ell f^*(a, \overrightarrow{p})\, \mathrm{d}a \quad ; \quad f^*(a, \overrightarrow{\lambda}) = \sup_{\overrightarrow{\alpha} \in \mathbb{R}^3} \left\{ \overrightarrow{\lambda} \cdot \overrightarrow{\alpha} - f(a, \overrightarrow{\alpha}) \right\}.$$

On note $B_0$ la boule unité de $\mathbb{R}^3$ et $f_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $f_a(\overrightarrow{\xi}) = f(a, \overrightarrow{\xi})$.

Puisque :

$$f^*(a, \overrightarrow{\lambda}) < +\infty \Leftrightarrow \overrightarrow{\lambda} \in \Pi_a^t(B_0)\,, \tag{64}$$

nous avons :

$$\overrightarrow{p} \in \partial j(\overrightarrow{x}) \Rightarrow \overrightarrow{p}(a) \in \partial f_a\big(\overrightarrow{x}(a)\big) \text{ p.p. sur } (0\,,\,\ell)\,. \tag{65}$$

Donc :

$$A(a)\left|P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\right| = \overrightarrow{p}(a)\cdot\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big) \text{ p.p. sur } (0\,,\,\ell)\,. \tag{66}$$

Supposons alors que $|\overrightarrow{p}(a)| = A(a) > 0$ sur $(\alpha,\beta) \subset (0\,,\,\ell)$. Alors

$$A(a) = |\overrightarrow{p}(a)| = \left|\Pi_a^t\big(\overrightarrow{\eta}(a)\big)\right| \leq A(a)|\overrightarrow{\eta}(a)| \tag{67}$$

d'où $|\overrightarrow{\eta}(a)| \geq 1$. Mais $|\overrightarrow{\eta}| \leq 1$ p.p., car $\overrightarrow{\eta}$ appartient à la boule unité de $\big(L^\infty(0\,,\,\ell)\big)^3$. Ainsi, $|\overrightarrow{\eta}(a)| = 1$ p.p. sur $(\alpha,\beta)$ et (66) s'écrit :

$$\overrightarrow{\eta}(a)\cdot\big(A(a)P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\big) = A(a)\left|P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\right|\cdot|\overrightarrow{\eta}(a)|\,.$$

Donc, en utilisant que $P_a$ est autoadjoint,

$$\exists\ \lambda \geq 0 \text{ tel que } P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big) = \lambda\,\overrightarrow{p}(a)\,. \tag{68}$$

Supposons maintenant $|\overrightarrow{p}(a)| < A(a)$ sur $(\alpha,\beta) \subset (0\,,\,\ell)$. Puisque $P_a$ est autoadjoint (car projection sur un sous-espace) :

$$P_a\big(\overrightarrow{p}(a)\big) = P_a^t\left(A(a)P_a^t\big(\overrightarrow{\eta}(a)\big)\right) = A(a)P_a\big(\overrightarrow{\eta}(a)\big) = \overrightarrow{p}(a)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p}(a)\cdot\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big) &= P_a\big(\overrightarrow{p}(a)\big)\cdot\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\\ &= \overrightarrow{p}(a)\cdot P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\end{aligned}$$

et (66) entraîne que :

$$\overrightarrow{p}(a)\cdot P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big) = A(a)\left|P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big)\right| \tag{69}$$

avec $|\overrightarrow{p}| < A(a)$. Donc : $P_a\big(\overrightarrow{x}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\big) = 0$. □

## 9. Annexe IV
## La méthode numérique

Pour le problème régularisé P5.1, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 9.1. — *Tout point d'accumulation faible dans $V$ de la suite $\{\overrightarrow{x}_\delta\}_{\delta>0}$ est solution de P4.2.*

*Démonstration.* — Soit $\overrightarrow{x} \in V$ telle que, pour une sous-suite :

$$\overrightarrow{x_\delta} \to \overrightarrow{x} \text{ faiblement dans } V \text{ et uniformément sur } [0, \ell]. \qquad (70)$$

Alors, $j_\delta(\overrightarrow{x_\delta}) \to j(\overrightarrow{x})$. Or $\overrightarrow{x_\delta}$ est solution de P5.1 et, par la proposition 7.2,

$$\forall\ \overrightarrow{y} \in C : J^{**}(\overrightarrow{x_\delta}) + j_\delta(\overrightarrow{x_\delta}) \leq J^{**}(\overrightarrow{y}) + j_\delta(\overrightarrow{y}).$$

En passant à la limite et en utilisant (70),

$$\forall\ \overrightarrow{y} \in C : J^{**}(\overrightarrow{x}) + j(\overrightarrow{x}) \leq J^{**}(\overrightarrow{y}) + j(\overrightarrow{y})$$

car $J^{**}$ est convexe s.c.i. □

Nous allons donc appliquer les résultats de [6] section 6, d'où le théorème suivant.

THÉORÈME 9.2

*(i) La suite $\{\overrightarrow{x}^{(h)}\}_{h>0}$ converge faiblement dans $(H^2(0, \ell))^3$ vers $\overrightarrow{x_{n,\lambda}}$ et la suite $\{\overrightarrow{T}^{(h)}\}_{h>0}$ converge uniformément sur $[0, \ell]$ et fortement vers $\overrightarrow{T_{n,\lambda}}$ dans $(L^2(0, \ell))^3$.*

*(ii) La suite $\{\overrightarrow{x_{n,\lambda}}\}_\lambda$ converge, pour $\lambda \to +\infty$, faiblement vers $\overrightarrow{x_n}$ dans $(H^2(0, \ell))^3$ et la suite $\{\overrightarrow{T_{n,\lambda}}\}_{\lambda>0}$ converge uniformément sur $[0, \ell]$ et fortement dans $(L^2(0, \ell))^3$ vers $\overrightarrow{T_n}$ dans $(L^2(0, \ell))^3$.*

*(iii) La suite $\{\overrightarrow{x_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante de P4.2 et tout point d'accumulation faible dans $V$ de cette même suite est solution de P4.2. Par conséquent, la suite $\{\overrightarrow{T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers le champ de tension dans l'équilibre.*

*Remarque 9.3.* — Cette méthode n'est constructive que pour la suite des champs de tension (sauf si la solution de P5.1 et P4.2 est unique).

## 10. Annexe V
## Un contre-exemple pour la formulation consistante

Comme nous l'avons déjà observé, le problème envisagé dans ce travail est celui correspondant aux méthodes numériques mentionnées dans l'introduction, lequel correspond à une formulation inconsistante : seules les conditions relatives à l'obstacle sont linéarisées. Que peut-on dire de la formulation cohérente où l'hypothèse "$\overrightarrow{u}$ infiniment petit" est utilisée pour linéariser toutes les équations dans un voisinage de la configuration de référence $\overrightarrow{x_R}$? Nous donnons ci-dessous un exemple d'une situation où une telle formulation conduit à un problème mathématique ne possédant aucune solution.

*a) La configuration de référence.* — On donne une configuration d'*équilibre* $\overrightarrow{x_R}$ : on note $\epsilon_R$, $\overrightarrow{t_R}$, $\overrightarrow{T_R}$ la déformation, la tangente unitaire et le champ de tension dans cette même configuration, respectivement, i.e.,

$$\epsilon_R = |\overrightarrow{x_R}'| - 1 \quad ; \quad \overrightarrow{t_R} = \frac{\overrightarrow{x_R}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} \quad ; \quad \overrightarrow{T_R} = K\epsilon_R \overrightarrow{t_R}. \tag{71}$$

On détermine ainsi $D(\overrightarrow{x_R})$, la partie du fil au contact avec l'obstacle dans la configuration de référence et la normale intérieure :

$$D(\overrightarrow{x_R}) = \{a \in [0,\ell] \mid \psi(\overrightarrow{x_R}(a)) = 0\} \quad ; \quad \overrightarrow{n}(a) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}\psi}}{|\overrightarrow{\text{grad}\psi}|} \text{ en } \overrightarrow{x_R}(a). \tag{72}$$

La connaissance de $\overrightarrow{x_R}$ permet de déterminer de la composante normale $R_R$ de la réaction du fond et le frottement $\overrightarrow{\phi_R}$ qui lui sont associés : cette configuration vérifie l'équation d'équilibre

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T_R}}{\mathrm{d}a} + \rho_0 \overrightarrow{g_R} + R_R \overrightarrow{n} + \overrightarrow{\phi_R} = \overrightarrow{0} \quad \text{pour } 0 < a < \ell. \tag{73}$$

La fonction $A_R(a) = \mu R_R(a)$ est donc connue.

En outre, nous avons les conditions aux limites :

$$\overrightarrow{T_R}(\ell) = \overrightarrow{f_R} \quad ; \quad \overrightarrow{x_R}(0) = \overrightarrow{0}. \tag{74}$$

*b) La perturbation.* — On perturbe les efforts extérieurs non dûs au contact avec l'obstacle : la densité $\overrightarrow{g_R}$ et la force $\overrightarrow{f_R}$ deviennent :

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_R} + \delta\overrightarrow{g} \quad ; \quad \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_R} + \delta\overrightarrow{f}. \tag{75}$$

*c) L'hypothèse de "petites perturbations".* — On note $\overrightarrow{x}$ la nouvelle configuration d'équilibre du fil et $\overrightarrow{u}$ le déplacement :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_R} + \overrightarrow{u} \,. \tag{76}$$

On suppose que $\overrightarrow{u}$ est *suffisamment petit* pour que les variables considérées puissent être approchées par des fonctions linéaires de $\overrightarrow{u}$ dans un voisinage de $\overrightarrow{x_R}$.

*d) L'approche des conditions liées à l'obstacle.* — se fait de la même manière que dans la section 2. On approche

$$C \cong \left\{ \overrightarrow{y} : [0\,,\ell] \mapsto \mathbb{R}^3 \mid \left(\overrightarrow{y}(a) - \overrightarrow{x_R}(a)\right) \cdot \overrightarrow{n}(a) \geq 0\,,\ \forall\, a \in D(\overrightarrow{x_R}) \right\}$$

de manière que la condition de non pénétration "$\psi(\overrightarrow{x}(a)) \geq 0$" devienne :

$$\overrightarrow{u} \in \mathcal{C}\,, \quad \mathcal{C} = \left\{ \overrightarrow{u} : [0\,,\ell] \to \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{u}(a) \cdot \overrightarrow{n}(a) \geq 0\,,\ \forall\, a \in D(\overrightarrow{x_R}) \right\} \tag{77}$$

D'une façon analogue,

$$A(a) \cong A_R(a) \quad \text{sur} \quad (0\,,\ell)\,. \tag{78}$$

Les termes $R$ et $\overrightarrow{\phi}$ vérifient, pour $a \in D(\overrightarrow{x_R})$ :

$$R(a) \geq 0\,, \quad R(a) = 0 \text{ si } \overrightarrow{u}(a) \cdot \overrightarrow{n}(a) > 0 \tag{79}$$

$$|\overrightarrow{\phi}| \leq A(a) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\phi} \cdot \overrightarrow{n} = 0\,, \tag{80}$$

alors que $R = |\overrightarrow{\phi}| = 0$ sur le reste du fil. En outre, le frottement suit la loi de Coulomb : pour $a \in D(\overrightarrow{x_R})$,

$$|\overrightarrow{\phi}| < A \Rightarrow \overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{0}\ ; \tag{81}$$

$$|\overrightarrow{\phi}| = A \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0 \text{ tel que } \overrightarrow{u_T} = -\lambda\,\overrightarrow{\phi} \tag{82}$$

avec $\overrightarrow{u_T}$ = "déplacement tangent à l'obstacle"

$$\overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n})\,\overrightarrow{n}\,. \tag{83}$$

*e) Approche des conditions géométriques.* — On approche chaque terme par son développement en fonction de $\overrightarrow{u}$, *limité au premier ordre* :

$$|\overrightarrow{x}'| = |\overrightarrow{x_R}' + \overrightarrow{u}'| \cong |\overrightarrow{x_R}'| + \overrightarrow{t_R} \cdot \overrightarrow{u}'\ ;$$

$$\epsilon = |\overrightarrow{x}'| - 1 \cong \epsilon_R + \overrightarrow{t_R} \cdot \overrightarrow{u}'\ ;$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{\overrightarrow{x}'}{|\overrightarrow{x}'|} \cong \overrightarrow{t_R} + \frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} - \left\{ \overrightarrow{t_R} \cdot \frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} \right\} \overrightarrow{t_R}\,.$$

*f) Approche des efforts intérieurs.* — Les efforts intérieurs sont donnés par le vecteur tension $\overrightarrow{T}$, où $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{t} = K\epsilon\overrightarrow{t}$, de façon que :

$$\overrightarrow{T} \cong K\left[\epsilon_R + \overrightarrow{t_R}\cdot\overrightarrow{u}' + \cdots\right]\left[\overrightarrow{t_R} + \frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} - \left\{\overrightarrow{t_R}\cdot\frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|}\right\}\overrightarrow{t_R} + \cdots\right].$$

En limitant le développement aux termes d'ordre 1,

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{T} \cong \overrightarrow{T_R} + K\epsilon_R\left[\frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} - \left\{\overrightarrow{t_R}\cdot\frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|}\right\}\overrightarrow{t_R}\right] + K(\overrightarrow{t_R}\cdot\overrightarrow{u}')\overrightarrow{t_R} \\ \text{i.e.,}\quad &\overrightarrow{T} \cong \overrightarrow{T_R} + \overrightarrow{\mathcal{T}}\ ; \\ &\overrightarrow{\mathcal{T}} = K\epsilon_R\frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|} + K\left\{\overrightarrow{t_R}\cdot\frac{\overrightarrow{u}'}{|\overrightarrow{x_R}'|}\right\}\overrightarrow{t_R}. \end{aligned} \tag{84}$$

*g) Approche de la condition (14).* — Puisque $\epsilon \cong \epsilon_R + \overrightarrow{t_R}\cdot\overrightarrow{u}'$ la condition "$\epsilon \geq 0$" est approchée par :

$$\overrightarrow{t_R}\cdot\overrightarrow{u}' \geq 0 \text{ si } \epsilon_R = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{t_R}\cdot\overrightarrow{u}' \text{ quelconque si } \epsilon_R > 0.$$

En posant :

$$\mathcal{D}(\overrightarrow{x_R}) = \{a \in [0,\ell] \mid \epsilon_R(a) = 0\} \tag{85}$$

nous écrivons cette condition sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{u} \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} = \left\{\overrightarrow{v} : [0,\ell] \to \mathbb{R}^3 \mid \overrightarrow{y_R}\cdot\overrightarrow{v}' \geq 0,\ \forall\, a \in \mathcal{D}(\overrightarrow{x_R})\right\}. \tag{86}$$

Remarquons que $\mathcal{K}$ est un convexe.

*h) Approche des conditions aux limites et de l'équation d'équilibre.* On a :

$$\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x_R}(0) + \overrightarrow{u}(0) \quad ; \quad \overrightarrow{T}(\ell) \cong \overrightarrow{T_R}(\ell) + \overrightarrow{\mathcal{T}}(\ell) = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{\mathcal{T}}(\ell)$$

de façon que les conditions aux limites sont approchées par

$$\overrightarrow{u}(0) = \overrightarrow{0} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathcal{T}}(\ell) = \delta\overrightarrow{f}. \tag{87}$$

En posant

$$\overrightarrow{h} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T_R}}{\mathrm{d}a} + \rho_0\overrightarrow{g_R} = -(R_R\overrightarrow{n} + \overrightarrow{\phi_R}), \tag{88}$$

l'équation d'équilibre est approchée par :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}a} + \rho_0\,\delta\vec{g} + \vec{h} + R\vec{n} + \vec{\phi} = \vec{0} \quad \text{pour } 0 < a < \ell \tag{89}$$

ou, en utilisant le principe des puissances virtuelles,

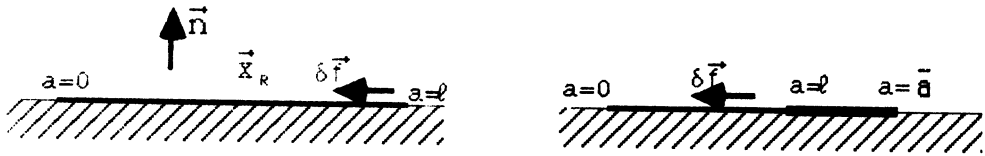
$$(\vec{T}\,,\ \vec{v}' - \vec{u}') \geq \left((\rho_0\,\delta\vec{g} + \vec{h} + \vec{\phi})\,,\ \vec{v} - \vec{u}\right) + \delta\vec{f}\cdot\left(\vec{v}(\ell) - \vec{u}(\ell)\right)$$
$$\forall\ \vec{v} \in \mathcal{C} \text{ tel que } \vec{v}(0) = \vec{0}\,. \tag{90}$$

*h) Le problème à résoudre.* — Compte tenu des approximations ci-dessus, la formulation consistante d'un problème de "petites perturbations autour de la configuration de référence $\overline{x_R}$" est la suivante.

*Problème P10.1.* — Étant données la configuration de référence $\overline{x_R}$ ainsi que les perturbations $\delta\vec{g}$ et $\delta\vec{f}$, calculer $\epsilon_R$, $\vec{t}_R$, $\vec{T}_R$, $D(\overline{x_R})$, $\vec{n}$, $\vec{h}$ et $A(a)$ à l'aide de (71), (72), (73), (78), (88), puis déterminer $(\vec{u}\,,\ \vec{T}\,,\ \vec{\phi})$ vérifiant (90) tels que $\vec{T}$ est donné par (87), $\vec{\phi}$ vérifie (80)-(82), $\vec{u} \in \mathcal{C}\cap\mathcal{K}$ ($\mathcal{C}$ est défini par (77) et $\mathcal{K}$ par (86)), $\vec{u}(0) = \vec{0}$.

*i) Un contre-exemple.* — Le problème ainsi formulé peut ne posséder aucune solution : considérons la situation où le fil est soumis à la seule pesanteur, au contact avec un obstacle plan horizontal d'équation $\xi_3 = 0$ et à la force $\vec{f}$. On suppose que $K = 1$, $\ell = 1$, $\vec{g} = g\vec{e_3}$, $\rho_0 g = -1$ et $\mu = 1$. On donne l'état de référence et les perturbations (cf. figure 13 a)

$$\overline{x_R}(a) = a\vec{e_1} \quad \text{et} \quad \delta\vec{g}(a) = \vec{0} \quad (0 < a < 1) \quad ; \quad \delta\vec{f} = -\eta\vec{e_1} \quad (\eta > 0)$$




a) La situation envisagée b) L'unique solution de P2.1

**Fig. 13.** — Une situation où P10.1 n'a pas de solution alors que P2.1 est bien posé

Nous avons donc, pour $0 < a < 1$ :

$$\epsilon_R(a) = 0 \quad ; \qquad \vec{t}_R(a) = \vec{e_1} \quad ; \quad \vec{T}_R(a) = \vec{0}$$
$$D(\overline{x_R}) = [0\,,\,1] \quad ; \quad \vec{n}(a) = \vec{e_3} \quad ; \quad \vec{h}(a) = -\vec{e_3} \quad ; \quad A(a) = 1.$$

Supposons que P10.1 admet une solution $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\phi})$ : on pose $u_1' = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{e_1}$. Mais (87) entraîne que $u_1'(1) = -\eta < 0$ alors que, par (86), $u_1'(1) \geq 1$ (dans cette situation, $\overrightarrow{T}$ est continue sur $(0,1)$). Ces conditions contradictoires conduisent à nier l'existence d'une solution pour P10.1.

Signalons que, dans le cadre de la théorie inconsistante, cette même situation est bien posée : P2.1 admet une et une seule solution, représentée dans le figure 16 b). En posant $\overline{a} = 1 - \eta$, cette solution est donnée par :

$$\overrightarrow{x}(a) = a\overrightarrow{e_1} \quad : \quad \overrightarrow{T}(a) = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{\phi}(a) = \overrightarrow{0}, \quad \text{pour } 0 \leq a \leq \overline{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{x}(a) = -\left[(a-\overline{a}) + \dfrac{(a-\overline{a})^2}{2}\right]\overrightarrow{e_1} + \overline{a}\,\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{T}(a) = (\overline{a} - a)\,\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{\phi}(a) = \overrightarrow{e_1} \end{array}\right\} \quad \text{pour } \overline{a} \leq a \leq 1\,.$$

## 11. Annexe VI
## Quelques contre-exemples

Dans cet annexe, nous construisons quelques contre-exemples destinés à établir que P2.1 peut ne pas être un vrai problème de contact unilatéral avec frottement lorsque le déplacement $\overrightarrow{u}$ n'est pas infiniment petit. En effet :

- d'une part, les solutions de P2.1 sont construites en utilisant la valeur de $A$ calculée dans la configuration de référence $\overrightarrow{x_R}$. Cette valeur peut être différente de celle effectivement trouvée sur la configuration $\overrightarrow{x}$ (i.e., $A \neq A_R$). De plus, les solutions de P2.1 peuvent ne pas satisfaire à la condition de non pénétration de l'obstacle par le fil, car l'inégalité "$\psi(\overrightarrow{x}(a)) \geq 0$" est remplacée par son approximation "$(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{n} \geq 0$" (cf. ci-dessous).
- d'autre part, dans certaines circonstances, le fil peut admettre une et une seule configuration d'équilibre, laquelle n'est pas solution de P2.1 (cf. le contre-exemple de 11.3 ci-dessous).

Dans tous les exemples, on considère le problème de "petites perturbations" pour un obstacle plan, i.e., on envisage P2.1 pour un fond d'équation $\psi(\overrightarrow{\xi}) = \xi_3 = 0$. Ainsi,

$$\vec{n}(a) = \vec{e_3} \quad \text{et} \quad C = \left\{ \vec{y} : [0\,,\,\ell] \to \mathbb{R}^3 \mid y_3(a) \geq 0\,,\ \forall\, a \in D(\vec{x_R}) \right\}$$

dans toutes les situations envisagées. Pour simplifier, on suppose que les valeurs numériques de $K$, $\ell$, $\vec{g}$, $\rho_0$ (dans notre système d'unités) sont telles que $K = 1$, $\ell = 1$, $\vec{g} = g\vec{e_3}$ $(g < 0)$, $\rho_0\, g = -1$. La configuration de référence $\vec{x_R}$ (par conséquent $D(\vec{x_R})$ aussi) et la force $\vec{f}$ varient d'un cas à l'autre.

*Exemple 11.1.* — On considère $\vec{f} = \vec{0}$ et la configuration de référence est :

$$\vec{x_R}(a) = a\,\vec{e_1} \text{ si } 0 \leq a \leq \bar{a} \quad ; \quad \vec{x_R}(a) = \bar{a}\,\vec{e_1} + (a - \bar{a})\vec{e_3} \text{ si } \bar{a} \leq a \leq \ell\,.$$

Alors, $D(\vec{x_R}) = [0\ \bar{a}]$ et nous avons la solution suivante pour P2.1.

$$\vec{x}(a) = a\,\vec{e_1} \text{ si } 0 \leq a \leq \bar{a} \quad ; \quad \vec{x}(a) = \bar{a}\,\vec{e_1} + (\bar{a} - a)\vec{e_3} \text{ si } \bar{a} \leq a \leq \ell$$
$$\vec{T} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\phi} = \vec{0} \quad \text{pour } 0 \leq a \leq \ell\,.$$

Toutefois, cette solution ne vérifie pas la condition "$\psi\big(\vec{x}(a)\big) \geq 0$" (fig. 14).

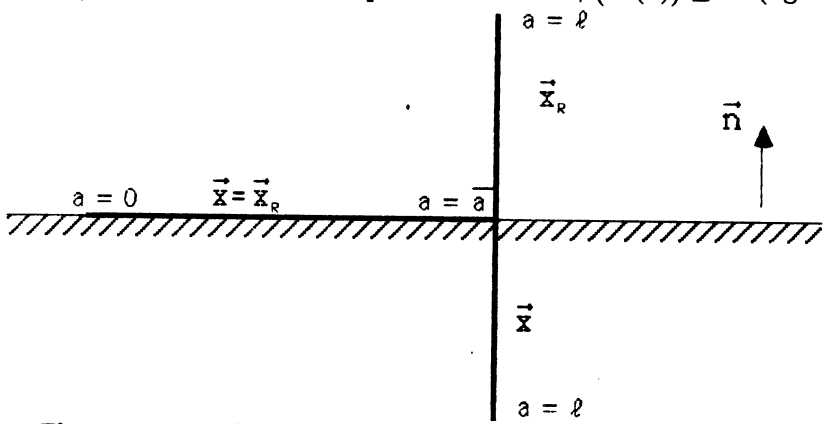



**Fig. 14.** — Une solution du problème de "petites perturbations" ne restant pas dans la région admissible.

*Exemple 11.2.* — On considère :

$$\vec{f} = \mu\vec{e_1} + \vec{e_3} \quad ; \quad \vec{x_R}(a) = -a\vec{e_1} \quad \text{pour } 0 \leq a \leq \ell\,.$$

Alors $D(\vec{x_R}) = [0\,,\,\ell]$.

On pose $\overrightarrow{t} = (\cos\theta)\overrightarrow{e_1} + (\sin\theta)\overrightarrow{e_3}$, où $\theta = \arctan(1/\mu)$.

Alors P2.1 admet la solution suivante : pour $0 \leq a \leq \ell$,

$$\overrightarrow{x}(a) = \left[a + \frac{(\mu\sec\theta)a^2}{2}\right]\overrightarrow{t} \quad ; \quad \overrightarrow{T}(a) = \left[(\mu\sec\theta)a\right]\overrightarrow{t} \quad ; \quad \overrightarrow{\phi} = -\mu\overrightarrow{e_1}.$$

Nous notons que, pour tout $a$ :

$$|\overrightarrow{\phi}| = A \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_T}(a) = -\left[\frac{a(1+\cos\theta)}{\mu} + \frac{a^2}{2}\right]\overrightarrow{\phi}.$$

Cependant, *sur la configuration* $\overrightarrow{x}$, $A(a) = 0$, pour tout $a \in (0, \ell)$, alors que $A_R(a) = \mu$, $\forall\, a \in (0\,,\,\ell)$. Cette situation est représentée dans la figure 15.

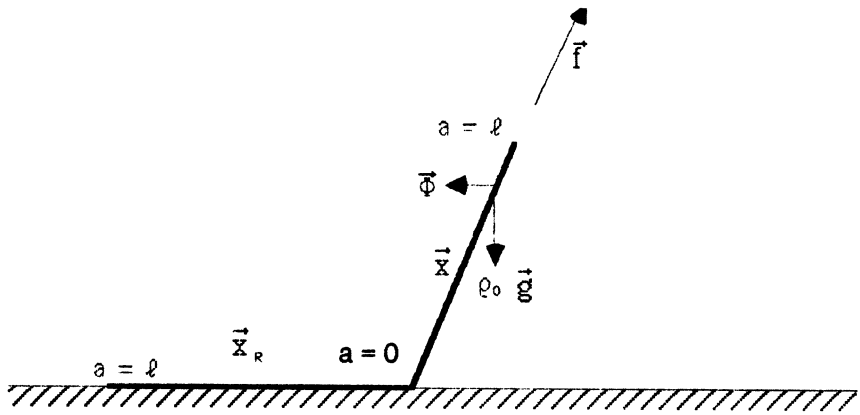



**Fig. 15.** — Une situation où la valeur de $A$ n'est pas la même dans la configuration de référence et dans la solution du problème de "petites perturbations".

*Exemple 11.3.* — $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{e_3}$ et la configuration de référence est

$$\overrightarrow{x_R}(a) = a\overrightarrow{e_1} \quad \text{pour } 0 \leq a \leq \ell.$$

Donc $D(\overrightarrow{x_R}) = [0\,,\,\ell]$; $A_R(a) = \mu$, $\forall\, a \in (0\,,\,\ell)$.

Alors le fil *admet une et une seule configuration d'équilibre*, donnée par :

$$\overrightarrow{x}(a) = \left(a + \frac{a^2}{2}\right)\overrightarrow{e_3} \quad ; \quad \overrightarrow{T}(a) = a\overrightarrow{e_3} \quad ; \quad \overrightarrow{\phi} = \overrightarrow{0}, \quad 0 < a < \ell.$$

Cette solution *n'est pas* solution du problème de "petites perturbations", car $\overrightarrow{u_T}(a) = -a\overrightarrow{e_1}$ pour $0 \leq a \leq \ell$, de manière que :

$$|\overrightarrow{\phi}| < A = \mu \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_T}(a) \neq \overrightarrow{0} \quad \text{pour } 0 < a < \ell.$$

De plus, la valeur de $A$ n'est pas la même pour ces deux configurations. Cet exemple est représenté dans la figure 16.

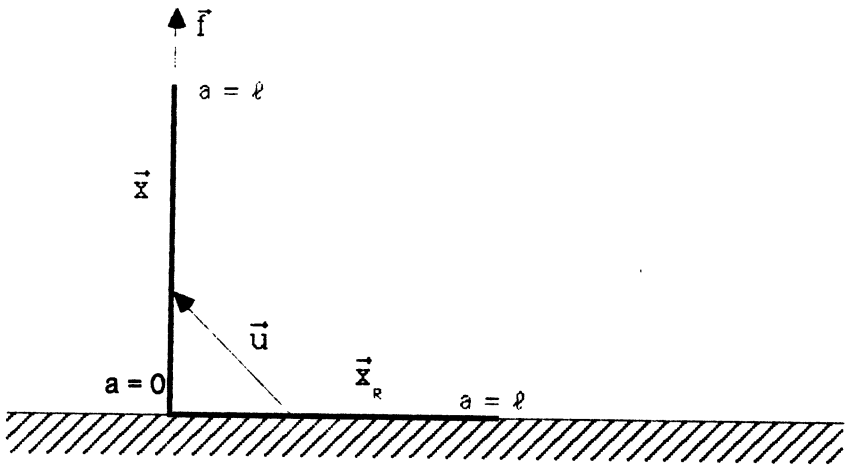



**Fig. 16.** — Une situation où l'unique solution du problème de l'obstacle plan n'est pas solution du problème de "petites perturbations".

## Références

[1] SALENCON (J.) . — *Mécanique des milieux continus*, tome 2, École Polytechnique, Palaiseau (1983)

[2] MOREAU (J.J.) . — *La notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique*, C.R. Acad. Sc. Paris, série A, **267** (1968) pp. 954-967

[3] GERMAIN (P.) . — *Mécanique des milieux continus*, tome II, École Polytechnique, Palaiseau (1985)

[4] EKELAND (I.) et TEMAM (R.) . — *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod & Gauthiers-Villars, Paris (1974)

[5] SOUZA DE CURSI (J.E.) . — *Sur le Principe du Minimum de l'Énergie en statique de fils sans raideur*, C.R. Acad. Sc. Paris, série II, **301** (1985) pp. 1319-1322

[6] SOUZA DE CURSI (J.E.) . — *Statique des fils sans raideur à comportement unilatéral*, J. Méc. Th. Appl. **6** n° 6 (1987) pp. 789-825

[7] SOUZA DE CURSI (J.E.) . — *Construction de solutions non tendues pour un problème d'amarrage*, 18ième Congrès National d'Analyse Numérique, Le-Puy-Saint-Vincent (1984)

[8] AUBERT (G.) et TAHRAOUI (R.) .— *Sur la minimisation d'une fonctionnelle non convexe, non différentiable, en dimension un,*
Bolletino de L'UMI (5) **17B** (1980) pp. 244-258

[9] AUBERT (G.) et TAHRAOUI (R.) .— *Théorèmes d'existence pour des problèmes de calcul des variations,*
J. D.E., n° 1 (1979)

[10] AUBERT (G.) et TAHRAOUI (R.) .— *Théorèmes d'existence en optimisation non convexe,*
Applicable Analysis, **18** (1980) pp. 75-100

[11] HESTENES (M.R.) .— *Calculus of Variations and Optimal Control Theory,*
John Wiley & Sons, EUA (1976)

[12] PANAGIATOPOULOS (P.D.) .— *A variational inequality approach to the inelastic stress-unilateral analysis of cable-structures,*
Computers and Structures, **6** (1976) pp. 133-139

[13] DUVAUT (G.) et LIONS (J.L.) .— *Les inéquations en Mécanique et Physique,*
Dunod, Paris (1972)

[14] SOUZA DE CURSI (J.E.) .— *Contact unilatéral avec frottement sec entre un fil sans raideur et un obstacle plan,*
Rapport interne - Publications du Service de Mathématiques de l'ENSM (1988)

[15] BREZIS (H.) .— *Analyse Fonctionnelle,*
Éditions Masson, Paris (1983)

[16] RAYMOND (J.P.) .— *Existence theorems in optimal control problems without convexity conditions,*
Communication personnelle