ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

JEAN FRESNEL

MARIUS VAN DER PUT

Uniformisation des variétés abéliennes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série, tome S10 (1989), p. 7-42

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1989_5_S10__7_0>

Annales Faculté des Sciences de Toulouse

Uniformisation des variétés abéliennes

JEAN FRESNEL[(1)] ET MARIUS VAN DER PUT[(2)]

RÉSUMÉ. — Soit Z une variété abélienne sur un corps valué complet k ayant mauvaise réduction. Alors Z possède une uniformisation $Z \simeq G/\Lambda$ dans la catégorie des schémas formels sur l'anneau de valuation de k (ou bien dans la catégorie des espaces analytiques rigides sur k). Le groupe algébrique G est extension d'une variété abélienne ayant bonne réduction par un tore de rang h et $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^h$ est un sous-groupe discret de G. On se ramène au cas où Z est la Jacobienne d'une courbe algébrique C. La construction de G et Λ utilise des faisceaux inversibles sur Ω, le revêtement universel de C dans la catégorie des schémas formels sur l'anneau de valuation de k.

ABSTRACT. — An abelian variety Z over a complete valued field k, which has a bad reduction, can be uniformized in the category of formal schemes (or rigid analytic spaces) over the valuation ring of k. This means $Z \simeq G/\Lambda$ where G is an algebraic group, namely an extension of an abelian variety with good reduction by a torus of rank h, and where $\Lambda \simeq \mathbf{Z}^h$ is a discrete subgroup of G. In the proof one reduces to the case where Z = the Jacobian variety of a curve C. The construction of G and Λ uses line bundles on Ω, the universal covering of C in the category of formal schemes over the valuation ring of k.

Introduction

Soient k un corps valué, complet (pour une valuation discrète), C une courbe projective, géométriquement connexe, géométriquement non singulière sur k. La construction analytique rigide de l'uniformisation de la Jacobienne Jac(C) de C est très proche de la géométrie formelle. On

(1) Mathématiques, U. A. 226 Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération 33405 Talence France
(2) Mathematical Institute University of Groningen, P. O. Box 800, 9700 Av. Groningen The Netherlands

explique ici ce que serait cette construction en termes de schéma formel sur l'anneau de valuation k^0 de k.

Quitte à changer k par une extension finie, on sait qu'il existe un schéma $\mathcal{C}$, projectif, plat sur k^0 tel que $\mathcal{C} \otimes k \simeq C$, que $\mathcal{C} \otimes \overline{k}$ soit réduit, que chaque composante irréductible de $\mathcal{C} \otimes k$ soit non singulière et que les seules singularités soient des points doubles ordinaires (appartenant à deux composantes) ; $\overline{k}$ est le corps résiduel de k.

Soit $\widehat{\mathcal{C}}$ le schéma formel, complété de $\mathcal{C}$ le long de la fibre spéciale $\mathcal{C} \otimes \overline{k}$. Le revêtement universel $\Omega \to \widehat{\mathcal{C}}$ pour la topologie de Zariski de $\widehat{\mathcal{C}} \otimes \overline{k}$ est un schéma formel, localement de type fini. Le graphe dual de ses composantes est un arbre qui est le revêtement universel du graphe dual des composantes de $\widehat{\mathcal{C}} \otimes \overline{k}$. Le groupe Γ de ce revêtement est un groupe libre à h générateurs où h est le nombre de Betti du graphe dual des composantes de $\mathcal{C} \otimes \overline{k}$; on a alors $\Gamma \backslash \Omega \simeq \widehat{\mathcal{C}}$.

L'idée de base de notre construction est donnée par ce qui suit. Pour chaque faisceau inversible $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(C)$, il existe un faisceau inversible (formel) $\mathcal{M}$ sur Ω tel que

(i) $\gamma^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (Γ agit sur Ω).

(ii) $degré(\mathcal{M} \otimes \overline{k}|_Z) = 0$, pour chaque composante irréductible Z de $\Omega \otimes \overline{k}$.

En plus il existe une Γ -action sur $\mathcal{M} \otimes k$ telle que le quotient $\Gamma \backslash \mathcal{M} \otimes k$ soit isomorphe à $\mathcal{L}$.

On construit alors un schéma formel $\mathcal{A}$ sur k^0 et un faisceau inversible (formel) $\mathcal{U}$ sur $\Omega \times \mathcal{A}$ tel que

(1) $\mathcal{A} \otimes \overline{k} \simeq \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$ où $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_s$ sont les composantes irréductibles de $\mathcal{C} \otimes \overline{k}$ de genre strictement positif.

(2) pour chaque "point" a de $\mathcal{A}$ (ou plutôt de $\mathcal{A} \otimes k$) le faisceau inversible $\mathcal{U}_a$ sur Ω possède les propriétés (i) et (ii), ci-dessus.

(3) $\mathcal{U}$ est universel pour les propriétés (i) et (ii).

Cette propriété universelle de $\mathcal{U}$ impliquera que $A = \mathcal{A} \otimes k$ est une variété abélienne sur k avec bonne réduction; plus précisément $\mathcal{A}$ sera le complété formel d'un schéma abélien $\mathcal{A}'$ sur k^0 qui a une bonne réduction $\mathcal{A}' \otimes \overline{k}$.

Pour chaque $\gamma \in \Gamma$ le faisceau inversible $\gamma^*\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}^{-1}$ sur $\Omega \times \mathcal{A}$ est isomorphe à $q_2^*\mathcal{O}_\gamma$ où $q_2 : \Omega \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est la projection et où $[\mathcal{O}_\gamma \otimes k] \in \mathrm{Pic}^0(A)$. Soit T le tore algébrique déployé sur k de dimension h admettant un groupe de caractères $X(T)$ isomorphe à Γ_{ab}. Alors l'application $\tau : X(T) \to$

$\mathrm{Pic}^0(A)$ défini par $\tau([\gamma]) = [\mathcal{O}_\gamma \otimes k]$ (où $[\gamma]$ est l'image de γ dans Γ_{ab}) induit une extension de groupes algébriques $\{1\} \to T \to G \to A \to \{1\}$.

A partir d'une structure de schéma formel $\mathcal{T}$ avec $\mathcal{T} \otimes k \simeq T^{an}$ on peut associer à G une structure de schéma formel $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{G} \otimes k \simeq G^{an}$. Le faisceau $\mathcal{U}$ se remonte alors en un faisceau inversible (formel) $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times \mathcal{G}$ et on peut définir sur $\mathcal{V} \otimes k$ une Γ -action α de façon que pour tout $g \in G, \mathcal{V}_g$ soit un faisceau inversible sur Ω avec les propriétés (i), (ii) ci-dessus et α induit sur $\mathcal{V}_g \otimes k$ une Γ -action; en plus $(\mathcal{V}, \alpha)$ est universel pour ces propriétés.

Un quotient par Γ donne un faisceau inversible sur $C \times \mathcal{G}$ donc sur $C \times G$ dont les fibres en chaque point de G sont de degré zéro. La propriété universelle de $\mathrm{Jac}(C)$ montre qu'il existe un morphisme analytique $f : G \to \mathrm{Jac}(C)$. On montre que f est localement un isomorphisme pour les structures analytiques, que $\ker f = \Lambda \simeq \Gamma_{ab}$ est un sous-groupe discret et que $G/\Lambda \simeq \mathrm{Jac}(C)$. Cela veut dire que $f : G \to \mathrm{Jac}(C)$ est l'uniformisation de la Jacobienne de C. Il est à remarquer que $f : G \to \mathrm{Jac}(C)$ n'est pas un morphisme de variétés algébriques bien que G et $\mathrm{Jac}(C)$ soient des variétés algébriques; en effet sinon on aurait $f(T) = \{1\}$! L'uniformisation d'une variété abélienne Z sur k se déduit de l'uniformisation d'une Jacobienne d'une courbe C choisie de façon que l'on ait un morphisme surjectif $\mathrm{Jac}(C) \to Z$.

La démonstration qui est présentée ci-après utilise la géométrie analytique rigide (formelle). Pour des raisons de simplification des démonstrations nous supposons que le corps de base k est valué complet algébriquement clos. Cela permettrait de montrer le théorème fondamental (6.2) pour un corps valué complet quelconque, quitte à faire une extension finie.

A notre connaissance il est deux endroits où l'on a une démonstration de l'uniformisation des variétés abéliennes. D'abord dans les cinq pages de M. Raynaud [Ra] éditées en 1970 pour le congrès international de Nice; le principe de la démonstration repose sur l'existence d'un modèle de Néron pour les variétés abéliennes sur un corps de valuation discrète. Ensuite il y a la démonstration S. Bosch et W. Lütkebohmert [Bo, Lu, 2] de 1984, basée sur des techniques de géométrie analytique rigide. Le lecteur verra sans peine que notre preuve utilise ici des idées sensiblement différentes.

1. Groupes de faisceaux inversibles formels

1.1 Faisceaux inversibles formels

Soient k un corps valué complet, $\overline{k}$ son corps résiduel, Z un k -espace analytique formel, i.e. un k -espace analytique rigide muni d'une structure formelle définie par un recouvrement pur (ou formel), ([Ge, vdP], [Fr, vdP, 1], [Bo, 2]), $r : Z \to \overline{Z}$ la réduction associée, $\overline{Z}$ est un k -schéma réduit localement de type fini. Un sous-ensemble de Z est appelé ouvert formel s'il est de la forme $r^{-1}(U)$ où U est ouvert de $\overline{Z}$ (pour la topologie de Zariski); il y a sur $r^{-1}(U)$ une structure formelle induite.

Un *faisceau formel cohérent* sur Z est un $r_*\mathcal{O}_Z^o$ -module sur $\overline{Z}$ qui est localement de présentation finie ($\mathcal{O}_Z^o$ est le sous-faisceau de $\mathcal{O}_Z$ des fonctions dont la norme spectrale est bornée par 1). Un *faisceau inversible formel* $\mathcal{L}$ sur Z est un $r_*\mathcal{O}_Z^o$ -module sur $\overline{Z}$ qui est localement isomorphe à $r_*\mathcal{O}_Z^0$. On note par $\mathcal{L}\otimes k$ le faisceau inversible sur Z (comme espace analytique) associé à $\mathcal{L}$ (si $\mathcal{L}(r^{-1}(U)) = e\cdot\mathcal{O}_Z^o(r^{-1}(U))$ on aura $\mathcal{L}\otimes k(r^{-1}(U)) = e\cdot\mathcal{O}_Z(r^{-1}(U))$ et $\overline{\mathcal{L}}(U) = e\otimes\overline{1}\cdot\mathcal{O}_{\overline{Z}}(U)$, ainsi $\overline{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible sur $\overline{Z}$ (i.e. localement isomorphe à $\mathcal{O}_{\overline{Z}}$).

1.2 Le revêtement analytique universel d'une courbe C; son graphe

1.2.1 Soient (toujours) k un corps valué, complet, algébriquement clos, C une courbe projective, connexe, non singulière sur k. Alors C **possède une réduction (analytique)** $r : C \to \overline{C}$ qui a les propriétés suivantes.

1) La variété algébrique $\overline{C}$ est réduite (c'est toujours le cas pour une réduction analytique).
2) Les composantes irréductibles de $\overline{C}$ sont non-singulières.
3) Les seules singularités de $\overline{C}$ sont des points doubles ordinaires (par lesquels passent deux composantes irréductibles).
4) Deux composantes irréductibles se coupent en au plus un point.

C'est une conséquence de l'existence d'une réduction stable (ou pré-stable) de C ([vdP, 3], [Bo, Lu, 1]).

1.2.2 Soit Δ^* **le graphe dual des composantes irréductibles de** $\overline{C}$, i.e. que les arêtes Δ_1^* sont les points doubles de $\overline{C}$, les sommets Δ_0^* sont les composantes irréductibles de $\overline{C}$ et l'arête qui relie deux sommets correspond au point d'intersection des composantes irréductibles.

Il suit de 1.2.1 que le graphe Δ^* est connexe et combinatoire (i.e. toute arête a deux sommets et par deux sommets passe au plus une arête).

On oriente (arbitrairement) les arêtes de Δ^*, si bien qu'on les écrit sous la forme (a, b) où $a, b \in \Delta_0^*$. On définit le $\mathbf{Z}$ -module des fonctions alternées sur Δ_1^*, noté $\Delta_1^*\mathbf{Z}$, comme étant les applications de Δ_1^* dans $\mathbf{Z}$ telles que $f(a, b) = -f(b, a)$. On note $\Delta_0^*\mathbf{Z}$ le $\mathbf{Z}$ -module des fonctions de Δ_0^* dans $\mathbf{Z}$ et $d^* : \Delta_1^*\mathbf{Z} \to \Delta_0^*\mathbf{Z}$ l'homomorphisme de $\mathbf{Z}$ -module défini par $(d^*f)(a) = \sum_{(a,b)\in\Delta_1^*} f(a,b)$. Alors on a ker$d \simeq \mathbf{Z}^h$ où h est le nombre de Betti de Δ^*, ker$d$ s'appelle le module des courants de Δ^*; on a $imd^* = \{g \in \Delta_0^*\mathbf{Z} | \sum_{a\in\Delta_0^*} g(a) = 0\}$, ici imd^* est un facteur direct de $\Delta_0^*\mathbf{Z}$, de rang $(\mathrm{card}\Delta_0^*) - 1$. Si $Tr(\Delta^*)$ est un arbre maximal de Δ^* (i.e. un sous-graphe maximal sans circuit), on a $h = \mathrm{card}\big(\text{arêtes de } \Delta^* - Tr(\Delta^*)\big)$. De plus le groupe $\Gamma := \pi_1(\Delta^*)$ est un groupe libre (non abélien) à h générateurs.

1.2.3 Il existe **un revêtement analytique universel** $u : \Omega \to C$, Ω a une structure formelle et (donc) une réduction analytique $R : \Omega \to \overline{\Omega}$ telle que $u : \Omega \to C$ soit un morphisme formel (C est muni de la structure formelle définie en 1.2.1), on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{u} & C \\ {\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \overline{\Omega} & \xrightarrow{\overline{u}} & \overline{C} \end{array}$$

$\overline{u} : \overline{\Omega} \to \overline{C}$ est le revêtement universel de $\overline{C}$ (pour la topologie de Zariski). Par ailleurs $\Gamma := \pi_1(\Delta^*)$ est le groupe du revêtement analytique $u : \Omega \to C$, ainsi $\Gamma \setminus \Omega \simeq C$; de même Γ est le groupe du revêtement $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \overline{C}$ et on a $\Gamma \setminus \overline{\Omega} \simeq \overline{C}$. De façon un peu plus précise le revêtement universel Δ de Δ^* est un arbre (infini), il a pour groupe $\Gamma := \pi_1(\Delta^*)$; on a $\Gamma \setminus \Delta \simeq \Delta^*$; Δ permet de construire $\overline{\Omega}$ qui donne par relèvement la construction de Ω ([vdP, 3] prop. 1.5, page 35, [Ge, vdP], p. 149).

1.2.4 Tout comme en 1.2.2 on définit $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_0\mathbf{Z}, \Delta_1\mathbf{Z}, d : \Delta_1\mathbf{Z} \to \Delta_0\mathbf{Z}$. Dans ce cas on a $imd = \Delta_0\mathbf{Z}$.

1.3 Le Groupe A

Soient toujours C la courbe sur k définie en (1.2.1), $u : \Omega \to C$ son revêtement analytique universel, $r : C \to \overline{C}$ la réduction analytique de C, $R : \Omega \to \overline{\Omega}$ la réduction analytique de Ω, $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \overline{C}$ le revêtement algébrique avec $\overline{u}oR = rou$. Soit Γ le groupe du revêtement $u : \Omega \to C$ (aussi $\overline{u} : \overline{\Omega} \to \overline{C}$).

Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega, \overline{\mathcal{L}} := \mathcal{L} \otimes \overline{k}$. Soient Z une composante irréductible de $\overline{\Omega}, \mathcal{I}d(Z)$ le faisceau cohérent d'idéaux radiciel sur $\overline{\Omega}$ tel que $V\big(\mathcal{I}d(Z)\big) = Z$; alors la notation $\overline{\mathcal{L}}|_Z$ désigne le faisceau $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}/\mathcal{I}d(Z)$ sur $\overline{\Omega}$ et sur Z, on l'appelle la restriction de $\overline{\mathcal{L}}$ à Z.

1.3.1 Le groupe A

Soit A l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles formels $\mathcal{L}$ sur Ω satisfaisant aux propriétés i) et ii) suivantes :

i) pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un isomorphisme de $\gamma^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$,

ii) pour toute composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$ on a degré $(\overline{\mathcal{L}}_{|Z}) = 0$.

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible formel sur Ω satisfaisant i) et ii), on désigne par $[\mathcal{L}]$ sa classe d'isomorphie. On définit sur A une loi interne par $[\mathcal{L}_1] \cdot [\mathcal{L}_2] = [\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2]$. Il est alors facile de vérifier que cela munit A d'une structure de groupe commutatif.

1.3.2 La variété abélienne $\overline{A}$ sur $\overline{k}$

Soient $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_s$ les composantes irréductibles de $\overline{C}$ de genre strictement positif, $\mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$ la variété abélienne sur $\overline{k}$, Jacobienne de $\overline{C}_i$ et $\overline{A} := \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$. Ainsi $\overline{A}$ est aussi une variété abélienne sur $\overline{k}$.

1.3.3 L'homomorphisme a

Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ des composantes irréductibles de $\overline{\Omega}$ telles que $\overline{u}$ induise un isomorphisme de Z_i sur $\overline{C}_i$ pour $1 \leq i \leq s$.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible formel Ω qui satisfait i) et ii) de 1.3.1, alors $\overline{\mathcal{L}}|_{Z_i}$ peut être considéré comme un faisceau inversible sur $\overline{C}_i$ de degré 0; donc la classe d'isomorphie de $\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}$ notée $[\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}]$ est un élément de $\mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$. Cela permet de définir une application $a : A \to \overline{A}$ par $a\Big([\mathcal{L}]\Big) := \Big([\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}]\Big)_{1 \leq i \leq s}$. Clairement a est un homomorphisme de groupe.

1.3.4 LEMME .— *L'homomorphisme $a : A \to \overline{A}$ est surjectif et on a*

$$\ker(a) = \{[\mathcal{L}] \in A \mid \overline{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}\}.$$

Démonstration.— α) Soit $[\mathcal{L}] \in \ker a$, on a donc $\overline{\mathcal{L}}_{|Z} \simeq \mathcal{O}_Z$ pour toute composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$. Soit la suite exacte sur $\overline{\Omega}$

$$O \to \overline{\mathcal{L}} \xrightarrow{\alpha} \prod_Z \overline{\mathcal{L}}_{|Z} \xrightarrow{\beta} \prod_d \overline{\mathcal{L}}|_d \to O$$

où $\prod_Z$ est le produit étendu à toutes les composantes irréductibles, $\prod_d$ est le produit étendu à tous les points doubles; α est l'application diagonale et β est défini par $(f_Z)_Z \to (f_{Z'} - f_{Z''})_d$ si $\{d\} = Z' \cap Z''$ et si d est orienté de Z'' vers Z' dans le graphe dual de $\overline{\Omega}$. On a alors la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\alpha} \prod_Z H^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{L}}|_Z) \xrightarrow{\beta} \prod_d H^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{L}}|_d) \to \ldots$$

Le graphe dual de $\overline{\Omega}$ est un arbre, on conclut que β est surjectif et que $H^0(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{L}}) = \overline{k}e$ où e engendre la fibre de $\overline{\mathcal{L}}$ en tout point de $\overline{\Omega}$. On a donc $\overline{\mathcal{L}} \simeq \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}$.

β) Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) \in \overline{A}$. Il existe un diviseur D_i de degré 0 sur $\overline{C}_i$; dont le support est dans $\overline{C}_i$, qui ne rencontre pas les points doubles de $\overline{C}_i$ et enfin tel que $[\mathcal{O}_{\overline{C}_i}(D_i)] = \xi_i$, pour $1 \leq i \leq s$.

Soient $p \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{support}\,(D_i) \subset \overline{C}$ et $U(p)$ un ouvert affine de $\overline{C}$ et satisfaisant les propriétés 1) et 2) suivantes.

1) $U(p) \cap (\bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{support\,de}\, D_i) = \{p\}$.
2) Il existe $t(p) \in \mathcal{O}_C^0\Big(r^{-1}\big(U(p)\big)\Big)$ dont l'image $\overline{t(p)}$ dans $\mathcal{O}_{\overline{C}}\big(U(p)\big)$ a un unique zéro en p avec la multiplicité 1.

Soient $n(p)$ la multiplicité de $\sum_i D_i$ en p et $\mathcal{M}$ le faisceau inversible formel sur C défini comme suit :

i) $\mathcal{M}_{|S} = R_*\mathcal{O}_\Omega^0.e$, où $S = \overline{C} - (\bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{support\,de}\, D_i)$
ii) $\mathcal{M}_{|U(p)} = R_*\mathcal{O}_\Omega^0.e_p$,
iii) sur les intersections correspondantes, les recollements sont donnés par $e_p = t(p)^{n(p)}.e$, $e_{p_i} = \big(t(p_i)^{n(p_i)}.t(p_j)^{-n(p_j)}\big)e_{p_j}$

On a alors $([\overline{\mathcal{M}}|_{\overline{C}_i}])_{1\leq i \leq s} = \xi$.

Soit $\mathcal{L} := u^*\mathcal{M}$, alors on a bien $[\mathcal{L}] \in A$ et $a([\mathcal{L}]) = \xi$. ∎

1.4 L'espace homogène B sur A

1.4.1 L'espace homogène B sur A

Soit B l'ensemble des classes d'isomorphie de faisceaux inversibles formels $\mathcal{L}$ sur Ω satisfaisant aux propriétés i) et ii) suivantes :

i) pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un isomorphisme de $\gamma^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$..
ii) pour toute composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$ on a degré$(\overline{\mathcal{L}}_{|Z}) = \mathrm{genre\,de}\, Z$.

Clairement B est un A -ensemble homogène sur lequel A opère fidèlement par $[\mathcal{L}] * [\mathcal{M}] := [\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}]$ où $[\mathcal{L}] \in A, [\mathcal{M}] \in B$.

1.4.2 L'espace algébrique homogène $\overline{B}$ sur la variété abélienne $\overline{A}$.

Soient $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots \overline{C}_s$ les composantes irréductibles de $\overline{C}$ de genre strictement positif, $g_i = \mathrm{genre\,de}\,\overline{C}_i, Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$ la variété de Picard des "classes de faisceaux inversibles de degré g_i sur $\overline{C}_i$." Clairement $Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$ est une variété algébrique homogène sur $\mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$.

Soit $\overline{B} = \prod_{i=1}^{s} Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$, c'est donc une variété algébrique homogène sur $\overline{A}$ (défini en 1.3.2).

1.4.3 L'homomorphisme b

Soient $Z_1, Z_2 \ldots, Z_s$ définis comme en 1.3.3, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible formel sur Ω qui satisfait i) et ii) de 1.4.1, alors $\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}$ peut être considéré comme un faisceau inversible sur $\overline{C}_i$ de degré g_i ; donc la classe d'isomorphie de $\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}$ notée $[\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}]$ est un élément de $Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$.

Cela permet de définir une application $b : B \to \overline{B}$ par $b([\mathcal{L}]) = ([\overline{\mathcal{L}}_{|Z_i}])_{1 \leq i \leq s}$. Clairement on a $b([\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}]) = a([\mathcal{L}]) * b([\mathcal{M}])$ si $[\mathcal{L}] \in A$ et $[\mathcal{M}] \in B$.

1.4.4 LEMME .— *L'application $b : B \to \overline{B}$ est surjective. Soient $[\mathcal{L}_1], [\mathcal{L}_2] \in B$, alors on a $b([\mathcal{L}_1]) = b([\mathcal{L}_2])$ si et seulement si $\overline{\mathcal{L}}_1 \otimes \overline{\mathcal{L}}_2^{-1} \simeq \mathcal{O}_{\overline{\Omega}}$.*

Démonstration.— C'est une conséquence immédiate de 1.3.4.

1.5 Le groupe G

1.5.1 La Γ -action sur un faisceau inversible formel

Soient Γ le groupe du revêtement analytique $u : \Omega \to C$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible formel sur Ω. Alors on dit que la famille $\big(\beta(\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma}$ d'isomorphismes $\beta(\gamma) : \gamma^*\mathcal{L} \otimes k \to \mathcal{L} \otimes k$ est *une Γ -action sur $\mathcal{L}$*, si les propriétés i) et ii) suivantes sont satisfaites :

i) il existe $(\alpha(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ une famille d'isomorphismes $\alpha(\gamma) : \gamma^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ avec $\alpha(\gamma_1) \circ \gamma_1^*(\alpha(\gamma_2)) = \alpha(\gamma_2\gamma_1)$ pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

ii) il existe un homomorphisme $c : \Gamma \to k^*$ avec $\beta(\gamma) = c(\gamma)\alpha(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Remarque 1.— Soient α, α' deux familles d'isomorphismes satisfaisant i) ; alors il existe un homomorphisme $d : \Gamma \to k^{0*}$ tel que $\alpha(\gamma) = d(\gamma)\alpha'(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (en quelque sorte, la définition de β est presque indépendante de α).

Remarque 2.— Si $[\mathcal{L}] \in A$, il existe alors une famille $(\alpha(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ satisfaisant i), parce que Γ est un groupe libre de type fini.

Remarque 3.— Une Γ -action générale β sur $\mathcal{L} \otimes k$ possède la forme $\beta(\gamma) = c(\gamma)\alpha(\gamma)$ avec α satisfaisant 1.5.1 i), $c(\gamma) \in \mathcal{O}_\Omega(\Omega)^*$ et $\{\gamma \to c(\gamma)\}$

est un élément de $H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Omega^*)$. Dans le cas où $\mathcal{O}_\Omega(\Omega)^* = k^*$ la condition 1.5.1 ii) est automatiquement satisfaite.

1.5.2 Le groupe G

Soit G l'ensemble des classes d'isomorphie des couples $(\mathcal{L}, \beta)$ avec les propriétés suivantes : $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible formel sur Ω avec degré $\overline{\mathcal{L}}_{|Z} = 0$ pour toute composante irréductible de $\overline{\Omega}$, β est une Γ -action sur $\mathcal{L}$ (définie selon 1.5.1); enfin un isomorphisme de $(\mathcal{L}_1, \beta_1)$ sur $(\mathcal{L}_2, \beta_2)$ est la donnée d'un isomorphisme $\delta : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ tel que $\delta \otimes 1_k : \mathcal{L}_1 \otimes k \to \mathcal{L}_2 \otimes k$ soit compatible avec les Γ -actions respectives. On notera $\big[(\mathcal{L}, \beta)\big]$ la classe d'isomorphie de $(\mathcal{L}, \beta)$.

On a *une loi de groupe commutatif sur* G définie par $[(\mathcal{L}_1, \beta_1)].[(\mathcal{L}_2, \beta_2)] := [(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2, \beta_1 \otimes \beta_2)]$.

1.5.3 L'homomorphisme π

L'application $\pi : G \to A$ définie par $\pi[(\mathcal{L}, \beta)] = [\mathcal{L}]$ est un homomorphisme de groupe qui est surjectif de par la remarque 2 de 1.5.1; par ailleurs on a

$$\ker(\pi) = \Big\{[R_*\mathcal{O}_\Omega^0, \beta]\big| \text{ où } \beta \text{ parcourt toutes les } \Gamma\text{-actions de } R_*\mathcal{O}_\Omega^0\Big\}$$

. Il suit de cela et de 1.5.1 que $\ker(\pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Gamma, k^*)$.

Soit T le tore (déployé) sur k dont le groupe des caractères est Γ_{ab}; alors on a $T(k) \simeq \ker(\pi)$; ce qui donne la suite exacte de groupes

$$\{1\} \to T(k) \to G \to A \to \{1\}.$$

1.5.4 L'homomorphisme q

1.5.4.1 Le quotient $\Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta) \otimes k$

Le quotient $\Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta) \otimes k$ est le faisceau inversible sur C donné par $U \to \Big((\mathcal{L} \otimes k)\big(u^{-1}(U)\big)\Big)^\Gamma$ où U est un ouvert admissible de C et où l'action de Γ sur $(\mathcal{L} \otimes k)\big(u^{-1}(U)\big)$ est prescrite par β.

Par définition le sous-groupe G^0 de G est constitué des classes $[(\mathcal{L}, \beta)]$ avec $\beta(\gamma) = \alpha(\gamma)c(\gamma)$ et $c : \Gamma \to k^{0*}$. Si $[(\mathcal{L}, \beta)] \in G^0$ le quotient $\mathcal{M} = \Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta)$ est un faisceau inversible formel sur C et on a degré$\overline{\mathcal{M}}_{|Z} = 0$ pour toute composante irréductible Z de $\overline{C}$.

1.5.4.2 PROPOSITION (et DÉFINITION) .— *Soit* $[(\mathcal{L}, \beta)] \in G$. *Alors le quotient* $\Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta) \otimes k$ *est un faisceau inversible sur* C *de degré 0. Cela permet de définir un homomorphisme* $q : G \to \mathrm{Jac}(C)$ *par* $q[(\mathcal{L}, \beta)] = \Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta) \otimes k$.

Démonstration. — α) Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible formel sur Ω, α une famille d'isomorphismes $\alpha(\gamma) : \gamma^*\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ satisfaisant i) de 1.5.1. Alors $\Gamma \setminus (\mathcal{L}, \alpha) \otimes k$ est un faisceau inversible sur C de degré $\sum$ degré$(\overline{\mathcal{L}}_{|Z})$ où Z parcourt un système de représentants des composantes irréductibles de $\overline{C}$.

Soient $\mathcal{M} := \Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta)$ (c'est un faisceau inversible formel sur C), $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes \overline{k}$. Alors on a

$$\mathcal{X}(C, \mathcal{M} \otimes k) = \mathcal{X}(\overline{C}, \overline{\mathcal{M}}) \text{ et } \mathcal{X}(C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{X}(\overline{C}, \mathcal{O}_{\overline{C}}),$$

où $\mathcal{X}$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Soit $\eta : \overline{C}' \to \overline{C}$ la normalisation de $\overline{C}$, on a alors les suites exactes

$$0 \to \mathcal{O}_{\overline{C}} \to \eta_* \mathcal{O}_{\overline{C}'} \to \mathcal{F} \to 0$$

$$0 \to \overline{M} \to \overline{M} \otimes \eta_* \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{F} \to 0$$

On a donc $\mathcal{X}(\overline{C}, \eta_* \mathcal{O}_{\overline{C}}) - \mathcal{X}(\overline{C}, \mathcal{O}_{\overline{C}}) = \mathcal{X}(\overline{C}, \overline{\mathcal{M}} \otimes \eta_* \mathcal{O}_{\overline{C}}) - \mathcal{X}(\overline{C}, \overline{\mathcal{M}})$.

Soient $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_t$ les composantes irréductibles de $\overline{C}$, on a donc

$$\mathcal{X}(\overline{C}, \eta_* \mathcal{O}_{\overline{C}}) = \sum_i (1 - g((\overline{C}_i)),$$

$$\mathcal{X}(\overline{C}, \overline{\mathcal{M}} \otimes \eta_* \mathcal{O}_{\overline{C}}) = \sum_i \{(1 - g(\overline{C}_i) + \deg(\mathcal{M}|_{\overline{C}_i})\}.$$

Comme $\mathcal{X}(\overline{C}, \mathcal{O}_{\overline{C}}) = \mathcal{X}(C, \mathcal{O}_C) = 1 - g(C)$

et

$$\mathcal{X}(\overline{C}, \overline{\mathcal{M}}) = \mathcal{X}(C, \mathcal{M} \otimes k) = 1 - g(C) + \deg(\mathcal{M} \otimes k),$$

cela montre bien α).

β) Soit $c \in \mathrm{Hom}(\Gamma, k^*)$. Alors le faisceau inversible $(R_* \mathcal{O}^0_\Omega, c) \otimes k$ sur C est de degré 0.

L'application $d : \mathrm{Hom}(\Gamma, k^*) \to Z$ définie par $d(c) =$ degré$((R_* \mathcal{O}^0_\Omega, c) \otimes k)$ est un homomorphisme. Comme k^* est divisible, cela implique que $im(d) = \{0\}$. Ce qui montre β)

γ) Soit $[(\mathcal{L}, \beta)] \in G$, alors on a degré$(\Gamma \setminus (\mathcal{L}, \beta) \otimes k) = 0$.

En effet par 1.5.1 on a $(\mathcal{L}, \beta) = (\mathcal{L}, \alpha) \otimes (R_* \mathcal{O}^0_\Omega, c)$, il suit donc de α) et β) que γ) est satisfait, et donc aussi 1.5.4.2. ∎

1.5.5. THÉORÈME .— *Soit $q : G \to \mathrm{Jac}(C)$ l'homomorphisme défini selon* 1.5.4.2. *Alors q est surjectif et* $\ker(q) \simeq \Gamma_{ab}$ *où Γ est toujours le groupe du revêtement $u : \Omega \to C$.*

Démonstration. — α) L'homomorphisme q est surjectif.

Soit $G' \supset G$ le groupe des classes d'isomorphie $\big[(\mathcal{L},\beta)\big]$ où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible formel sur Ω, β est comme dans 1.5.1 (i.e. on ne suppose plus degré$\overline{\mathcal{L}}_{|Z} = 0$). On a donc canoniquement $G'/G \simeq \Delta_0^* \mathbf{Z}$ (1.2.2).

On va montrer que l'homomorphisme $q' : G' \to \mathrm{Pic}(C)$ défini par $q'\Big([(\mathcal{L},\beta)]\Big) = \Big[\Gamma \setminus (\mathcal{L},\beta) \otimes k\Big]$ est surjectif.

Comme $\mathrm{Pic}^0(C)$ est divisible, cela va montrer que

(1) $q : G \to \mathrm{Pic}^0(C)$ est surjectif (on peut utiliser α) et β) de la démonstration de 1.5.4.1).

(2) L'application canonique $H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^*) \xrightarrow{\alpha_1} H^1(C, \mathcal{O}_C^*) = \mathrm{Pic}(C)$ est un isomorphisme parce que les composantes de $\overline{C}$ sont régulières et les points singuliers sont des points doubles ordinaires ([Fr, vdP 2], proposition 9, p. 59, corollaire 1, p. 79, [He, vdP]).

(3) L'homomorphisme $H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{0*} k^*) \xrightarrow{\alpha_2} H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^*)$ est surjectif. Cela résulte de la suite exacte

$$0 \to r_*\mathcal{O}_C^{0*} k^* \to r_*\mathcal{O}_C^* \to \mathcal{I} \to 0$$

où $\mathcal{I}_p = 0$ si p est régulier et $\mathcal{I}_p \simeq \mathbf{Z}$ sinon.

(4) La suite exacte

$$0 \to H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{0*} \xrightarrow{\alpha_4} H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{0*} k^*) \xrightarrow{\alpha_3} H^1(\overline{C}, \mathcal{K}) \to 0$$

résulte de la suite exacte

$$0 \to r_*\mathcal{O}_C^{o*} \to r_*\mathcal{O}_C^{o*} k^* \to \mathcal{K} \to 0$$

où $\mathcal{K}$ est le faisceau de fibre $|k^*| \simeq k^*/k^{0*}$.

Soient maintenant $L \in \mathrm{Pic}(C)$, L_1 avec $\alpha_1(L_1) = L$, L_2 avec $\alpha_2(L_2) = L_1$ et $C : \Gamma \to k^*$ un homomorphisme tel que l'image de C par $H^1(\Gamma, k^*) \to H^1(\Gamma, |k^*|)$ soit égale à $\alpha_3(L_2)$.

Alors il résulte que $L \simeq (\mathcal{L}_3 \otimes k) \otimes \big(\Gamma \setminus (R_*\mathcal{O}_\Omega^o, c) \otimes k\big)$ où $\mathcal{L}_3$ est élément de $H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{o*})$. Ensuite $u^*\mathcal{L}_3$ se trouve évidemment dans G' et donc $q' : G' \to \mathrm{Pic}(C)$ est surjectif.

β) On a $\ker q \simeq \Gamma_{ab}$.

En particulier de (1) et (3) on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho"'] & G' \arrow[rr, "q'"] \arrow[d, "\rho'"] & & \mathrm{Pic}(C) \arrow[d, "\alpha_1^{-1}"] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{T}(\overline{C}) \arrow[r] & H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{o*}k^*) \arrow[rr, "\alpha_2"] & & H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^*) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il résulte que $\ker q' \simeq \mathcal{I}(\overline{C})$, et la suite exacte $0 \to \ker q \to \ker q' \xrightarrow{\delta} G'/G$. Par ailleurs on a $\mathcal{I}(\overline{C}) \simeq \Delta_1^*\mathbf{Z}$ et $G'/G = \Delta_o^*\mathbf{Z}$.

L'application δ vérifie $\delta([\mathcal{L}, \beta)(Z) =$ degré $\overline{\mathcal{L}}_{|Z}$. Ensuite on peut montrer qu'après identification de $\ker q'$ à $\Delta_1^*\mathbf{Z}$ que δ n'est autre que $d^* : \Delta_1^*\mathbf{Z} \to \Delta_o^*\mathbf{Z}$ (1.2.2). Soit $(g_p)_p \in \mathcal{I}(\overline{C})$, son image canonique dans $H^1(\overline{C}, r_*\mathcal{O}_C^{o*}k^*)$ défini par ρ'^{-1} un faisceau inversible formel $\mathcal{L}$ sur Ω; de plus à $(g_p)_p$ correspond $\widetilde{g} \in \Delta_1^*\mathbf{Z}$ défini par $\widetilde{g}(Z, Z') = v_p(\overline{\lambda^{-1}g_p}|Z')$où$\{p\} = Z \cap Z'$, v_p est la valuation en p sur Z', $\lambda \in k^*$ est tel que $\lambda^{-1}g_p$ soit de valeur absolue 1 sur l'image réciproque par r d'un ouvert dense de Z' et $(\overline{\lambda^{-1}g_p}|Z')$ désigne la fonction rationnelle induite sur Z'. Alors on a $d^*(\widetilde{g})(Z) =$ deg $\overline{\mathcal{L}}_{|Z}$. Cela montre que $\delta = d^*$ et ainsi que $\ker q \simeq \ker d^* \simeq \Gamma_{ab}$. ∎

2. Le groupe analytique formel A

2.1 L'espace analytique formel F

2.1.1 Les ouverts affinoïdes C_i

Soient toujours $r : C \to \overline{C}$ la réduction analytique de la courbe C (définie en 1.2.1), $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_s$ les composantes irréductibles de $\overline{C}$ de genre strictement positif; on note g_i le genre de $\overline{C}_i$ (on a $g = g_1 + g_2 + \ldots + g_s + h$ où g est le genre de C, h est le rang de Γ_{ab}, voir 1.2.3). Soient $\overline{C}_i^*$ l'affine obtenu en ôtant à $\overline{C}_i$ les points doubles de $\overline{C}$ (sur $\overline{C}_i$), $C_i := r^{-1}(\overline{C}_i^*)$, c'est donc un ouvert affinoïde de C dont la réduction canonique coïncide avec r.

2.1.2 L'espace analytique formel F

Soit Y une variété algébrique (resp. un espace analytique), $d \geq 1$ un entier, on note $Y^{(d)}$ le quotient de Y^d par le groupe symétrique S_d qui agit sur Y^d par permutation des "coordonnées".

La propriété universelle de la variété $Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$ (des classes de faisceaux inversibles de degré g_i sur $\overline{C}_i$) montre qu'il existe un morphisme (surjectif) $\mu_i : \overline{C}_i^{*(g_i)} \to Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$; tout élément de $\overline{C}_i^{*(g_i)}$ s'identifie à un diviseur

$D = x_1+x_2+\ldots+x_{g_i}$ dont l'image par μ_i est la classe du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\overline{C}_i}(D)$.

Soit $\overline{F}_i$ l'ouvert de $\overline{C}_i^{*(g_i)}$ constitué des diviseurs $D = x_1 + x_2 + \ldots + x_{g_i}$ de $\overline{C}_i$ avec $x_j \in \overline{C}_i^*$, qui sont non spéciaux, ainsi que $D - d$ pour tout point double d de $\overline{C}$ se trouvant sur $\overline{C}_i$. Alors la restriction de μ_i à $\overline{F}_i$ est une immersion ouverte ([Mi, 2], theorem 5.1, p.182).

Soient $\overline{F} := \overline{F}_1 \times \overline{F}_2 \times \ldots \times \overline{F}_s$, $\quad \mu := (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, i.e.

$\mu : \overline{F} \to \prod_{i=1}^{s} Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$; alors la restriction de μ à $\overline{F}$ est une immersion ouverte de $\overline{F}$ dans $\overline{B}$.

Soient $F_i := \left(r^{(g_i)}\right)^{-1}(\overline{F}_i) \subset C^{(g_i)}$, muni de la structure formelle induite ($r^{(g_i)} : C^{(g_i)} \to \overline{C}^{(g_i)}$ est la réduction induite par r), et $F := F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_s$ muni de la structure formelle produit.

2.2 Le faisceau inversible formel $\mathcal{L}$ sur $C \times F$

Soit Δ' le fermé analytique de $C \times C_1^{g_1} \times \ldots \times C_s^{g_s}$ constitué des éléments $(x, x_{11}, \ldots, x_{1g_1}, x_{21}, \ldots, x_{2g_2}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{sg_s})$ tels qu'il existe i, j avec $x = x_{ij}$; alors Δ' est un fermé de codimension 1.

Comme $C \times C_1^{g_1} \times \ldots \times C_s^{g_s} \to C \times C_1^{(g_1)} \times \ldots \times C_s^{(g_s)}$ est fini surjectif, l'image Δ de Δ' est aussi un fermé analytique de codimension 1.

On définit de même le fermé (de Zariski) $\overline{\Delta}$ de $\overline{C} \times \overline{C}_1^{*(g_1)} \times \ldots \times \overline{C}_s^{*(g_s)}$ qui est bien l'image de Δ par l'application induite par r.

Soit $\mathcal{J}$ le faisceau cohérent d'idéaux (radiciels) de $\mathcal{O}_{C\times F}$ des fonctions qui s'annulent sur $\Delta \cap C \times F$. Soit $\mathcal{J}^0 := \mathcal{J} \cap \mathcal{O}^0_{C\times F}$, alors $\mathcal{J}^0 \otimes \overline{k}$ est le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_{\overline{C}\times\overline{F}}$ des fonctions qui s'annulent sur $\overline{\Delta} \cap \overline{C} \times \overline{F}$. Comme F est régulier, ainsi que $\overline{C}_1^* \cup .. \cup \overline{C}_s^*$, le faisceau $\mathcal{J}$ est inversible, il suit que $\mathcal{J}^0$ est un faisceau inversible formel sur $C \times F$.

On définit alors $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} := (\mathcal{J}^0)^{-1}$ sur $C \times F$.

2.3. Soient $X = C \times F$, $p_2 : X \to F$ la projection sur la deuxième composante, $x \in F$, $X_x := X \times_F Spm(k)$ (où $Spm\, k \to F$ est défini par x), on a $X_x \simeq C$. Alors $\mathcal{L}$ induit sur X_x un faisceau inversible formel, noté $\mathcal{L}_x$ et défini par $\mathcal{L}_x := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}^0_{C\times F}} k^0$ (où $\mathcal{O}^0_{C\times F} \to k^0$ est défini par x).

PROPOSITION (et DÉFINITION) .— : *Soit, $x \in F$ qui provient d'un point* $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1g_1}, x_{21}, \ldots, x_{2g_2}, \ldots, x_{s1}, \ldots, x_{sg_s}) \in C_1^{g_1} \times \ldots \times C_s^{g_s}$.

Alors le faisceau inversible $\mathcal{L}_x \otimes k$ s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{O}_C(D)$ où D est le diviseur $x_{11} + \ldots + x_{1g_1} + x_{21} + \ldots + x_{2g_2} + \ldots + x_{s1} + \ldots + x_{sg_s}$ de C ; de même $\mathcal{L}_x \otimes \overline{k}$ s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{O}_{\overline{C}}(\overline{D})$ où $\overline{D}$ est le diviseur $r(x_{11}) + \ldots + r(x_{1,g_1}) + r(x_{2g_2}) + \ldots + r(x_{s_1}) + \ldots + r(x_s g_s)$ de $\overline{C}$. Il suit de cela que $u^*\mathcal{L}_x$ est un élément de B (1.4.1); ainsi $x \to [u^*\mathcal{L}_x]$ définit une application $s : F \to B$.

Cela induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{s} & B \\ \downarrow r & & \downarrow b \\ \overline{F} & \xrightarrow{\mu} & \overline{B} \end{array}$$

Enfin s est une bijection de F sur $b^{-1}\Big(\mu(\overline{F})\Big)$.

Démonstration. — Montrons que s est surjectif. Soit $\mathcal{M} \in B$ avec $[\overline{\mathcal{M}}_{|Z_i}] \in \mu_i(\overline{F}_i)$. On peut supposer que $\overline{\mathcal{M}}_{|Z_i} \simeq \mathcal{O}_{Z_i}(q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{ig_i})$ où $q_{ij} \in \overline{C}_i^*$ et en plus $q_{i1} + q_{i2} + \ldots + q_{ig_i}$ est un diviseur non-spécial sur Z_i; on a ainsi $\dim_{\overline{k}} H^0(Z_i, \overline{\mathcal{M}}|_{Z_i}) = 1$, $\dim_{\overline{k}} H^1(Z_i, \overline{\mathcal{M}}|_{Z_i}) = 0$.

On considère la suite exacte de faisceau sur $\overline{\Omega}$

$$0 \to \overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{\alpha} \prod_Z \overline{\mathcal{M}}_{|Z} \xrightarrow{\beta} \prod_d \overline{\mathcal{M}}_{|d} \to 0$$

où $\prod_Z$ est un produit pris sur les composantes irréductibles de $\overline{\Omega}$, et $\prod_d$ est un produit pris sur les points doubles de $\overline{\Omega}$; en plus on a

$$\Big(\prod_Z \overline{\mathcal{M}}_{|Z}\Big)(W) := \prod_Z \Big(\overline{\mathcal{M}}|_Z(Z \cap W)\Big)$$

$$\text{et} \qquad \Big(\prod_d \overline{\mathcal{M}}|_d\Big)(W) = \prod_d \Big(\overline{\mathcal{M}}|_d(\{d\} \cap W)\Big).$$

Le morphisme α est clair, β est défini par $\beta\big((a_Z)_Z\big) = (a_{Z_d} - a_{Z'_d})_d$ où $\{d\} = Z_d \cap Z'_d$ et où l'arête d du graphe est orienté de Z'_d vers Z_d.

On déduit de cela la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{M}}) \to \prod_Z H^0(Z, \overline{\mathcal{M}}_{|Z}) \to \prod_d H^0(\{d\}, \overline{\mathcal{M}}|_d)$$
$$\to H^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{M}}) \to \prod_Z H^1(Z, \overline{\mathcal{M}}_{|Z}) \to 0.$$

Sachant que $\dim_{\overline{k}} H^0(Z, \overline{\mathcal{M}}_{|Z}) = 1$, que $\dim_{\overline{k}} H^1(Z, \overline{\mathcal{M}}_{|Z}) = 0$, que $H^0(Z, \overline{\mathcal{M}}_{|Z}) \to H^0(d, \mathcal{M}|d)$ est surjectif (utiliser la définition de $\overline{F}_i$, 2.1.2) et que le graphe de $\overline{\Omega}$ est un arbre, il résulte que β est surjectif et que $\dim_{\overline{k}} ker(\beta) = 1$. Ainsi $\dim_{\overline{k}} H^0(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{M}}) = 1$ et $\dim_{\overline{k}} H^1(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{M}}) = 0$.

La technique des bases normales ([Bo, 1], [Ge, vdP]) peut être utilisée ici parce que $\gamma^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, cela montre que $H^1(\overline{\Omega}, \mathcal{M}) = 0$ et que $H^0(\overline{\Omega}, \mathcal{M}) = k^0.e$ est un k^0 -module libre de rang 1. Pour une Γ -action quelconque sur $\mathcal{M}$ on a $\gamma^*(e) = c(\gamma)e$ où $c(\gamma) \in k^{0*}$, on peut donc choisir l'action de Γ de façon que $\gamma^*(e) = e$.

Soit donc $\mathcal{F}$ le $R_*\mathcal{O}^0_\Omega$-module défini par la suite exacte

$$0 \to R_*\mathcal{O}^0_\Omega \cdot e \to \mathcal{M} \to \mathcal{F} \to 0$$

De ce que $\gamma^* R_*\mathcal{O}^0_\Omega \cdot e \simeq R_*\mathcal{O}^0_\Omega \cdot e$, il suit que $\gamma^*\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}$; cela montre aussi que le support de $\mathcal{F}$ est discret.

Comme $0 \to \mathcal{O}_{\overline{\Omega}} \cdot \overline{e} \to \overline{\mathcal{M}} \to \overline{\mathcal{F}} \to 0$ est exact, on déduit que $\mathcal{F}_p$ est un k^0-module libre fini et que $\mathrm{rang}_{k^0}\mathcal{F}_p = \dim_{\overline{k}} \overline{\mathcal{F}}_p$.

Facilement on a support $\overline{\mathcal{F}}_{|Z_i} = \{q_{i1}, q_{i1}, \ldots, q_{ig_i}\}$.

Soit $p \in \overline{\Omega}$, alors on a

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\substack{q \in C \\ r(q) \equiv p mod \Gamma}} \dim_k(\Gamma\backslash\mathcal{F} \otimes k)_q = \mathrm{rang}_{k^0}\mathcal{F}_p = \dim_{\overline{k}} \overline{\mathcal{F}}_p$$

Posons $D' = \sum_{q \in C} \mathrm{rang}_{k^0}(\Gamma\backslash\mathcal{F})_q.q$ que l'on peut considérer comme un point de F.

Comme la suite $0 \to R_*\mathcal{O}^0_\Omega.e \to u^*\mathcal{L}_{D'} \to \mathcal{F} \to 0$ on a donc $\mathcal{M} \simeq u^*\mathcal{L}_{D'}$.

Cela prouve que s est surjectif. Comme $D' = \sum_{q \in C} \dim_k \left(\frac{\mathcal{M}_q}{e.\mathcal{O}_{C,q}} \right).q$, où e est "l'unique" base des sections globales de $\mathcal{M}\left(\sum_{q \in C}\right.$ veut dire qu'on somme sur un système de représentants de Ω modulo Γ), il suit que s est injectif. ∎

2.4 Le lemme clef

LEMME (clef) .— *Soit V un espace analytique formel réduit, $\mathcal{M}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times V$ qui possède les propriétés suivantes :*

1) $\gamma^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$ (Γ *agit sur la première composante de* $\Omega \times V$.

2) Soit $p_2 : \Omega \times V \to V$ *la seconde projection, on note pour* $v \in V$, $\mathcal{M}_v$ *le faisceau inversible formel sur* Ω *induit par ce morphisme (voir 2.3). On suppose que tout* $v \in V$, $\mathcal{M}_v \in B$.

3) Avec les mêmes notations, on suppose que pour tout $\overline{v} \in \overline{V}$, $\overline{\mathcal{M}}_{\overline{v}} \in \mu(\overline{F})$ *(voir 2.1.2).*

Par 2.3, pour tout $v \in V$, *il existe un unique* $h(v) \in F$ *tel que* $\mathcal{M}_v \simeq s\big(h(v)\big)$. *Alors l'application* $h : V \to F$ *est un morphisme analytique formel. De plus il existe un faisceau inversible formel* $\mathcal{R}$ *sur* V *tel que* $(1 \times h)^* u^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{M} \otimes p_2^* \mathcal{R}$ *(*$\mathcal{L}$ *est le faisceau inversible formel sur* $C \times F$ *défini en 2.2.)*

Démonstration. — α) *Montrons que* h *est un morphisme analytique formel.*

Comme le problème est local (formel), on peut supposer que V est affinoïde formel.

Soit Z une composante irréductible de $\overline{\Omega}$, $\mathcal{N} := \overline{\mathcal{M}}_{|Z \times \overline{V}}$. Considérant la projection $q : Z \times \overline{V} \to \overline{V}$, par 3), on a pour tout $\overline{v} \in \overline{V}$, $\dim_{\overline{k}} H^0(Z, \mathcal{N}_{\overline{v}}) = 1$ et $H^1(Z, \mathcal{N}_{\overline{v}}) = 0$. Il suit que $R^1 q_* \mathcal{N} = 0$ et que $q_* \mathcal{N}$ est un faisceau inversible sur $\overline{V}$ ([Mi, 1], théorème 4.2, p. 108). Considérant l'action de Γ, on peut donc recouvrir $\overline{V}$ par un nombre fini d'affinoïdes formels, de façon que pour tout Z, $q_* \mathcal{N}$ soit trivial sur chacun.

On suppose donc maintenant que $q_* \mathcal{N}$ est trivial sur $\overline{V}$. Comme dans la démonstration de 2.3, on considère la suite exacte de faisceaux sur $\overline{\Omega} \times \overline{V}$

$$0 \to \overline{\mathcal{M}} \to \prod_Z \overline{\mathcal{M}}|_{\overline{Z} \times \overline{V}} \to \prod_d \overline{\mathcal{M}}|_{d \times \overline{V}} \to 0$$

Pour des raisons analogues à ce qui précède, on peut (quitte à remplacer V par un recouvrement affinoïde formel) supposer que $\overline{\mathcal{M}}|_{d \times \overline{V}}$ est un faisceau inversible trivial, pour tout point double d.

On a donc la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}) \to \prod_Z H^0(Z \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}_{|Z \times \overline{V}})$$
$$\to \prod_d H^0(d \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}|_{d \times \overline{V}}) \to H^1(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}) \to 0$$

Les $H^0(Z \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}|_{Z\times\overline{V}})$, $H^0(d \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}|_{d\times\overline{V}})$ sont des $\mathcal{O}_{\overline{V}}(\overline{V})$ -modules libres de rang 1 et l'application canonique $H^0(Z \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}_{|Z\times\overline{V}}) \to H^0(d \times \overline{V}, \overline{\mathcal{M}}|_{d\times\overline{V}})$ est un isomorphisme. En utilisant le même argument qu'en 2.3, on montre alors que $H^1(\overline{\Omega}\times\overline{V}, \overline{\mathcal{M}}) = 0$ et que $H^0(\overline{\Omega}\times\overline{V}, \overline{\mathcal{M}})$ est un $\mathcal{O}_{\overline{V}}(\overline{V})$ -module libre de rang 1.

Tenant compte de l'action Γ, la technique des bases normales permet alors de montrer que $H^1(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{M}) = 0$ et que $H^0(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{M})$ est un $\mathcal{O}_V^0(V)$ -module libre de rang 1, disons engendré par e.

On peut définir une Γ -action $(\alpha(\gamma))_\gamma$ du faisceau inversible formel $\mathcal{M}$ de façon que e soit invariant par cette action; cela montre alors que $\Gamma\backslash\mathcal{M}$ est un faisceau inversible formel sur $C \times V$ qui possède une section globale (non nulle) toujours notée e. Le faisceau $(\Gamma\backslash\mathcal{M})_v$ est inversible, associé à un diviseur dont le support est dans $\cup C_i$ et dont la restriction à C_i est de degré g_i.

On a donc degré$(\Gamma\backslash\mathcal{M})_v \otimes k = g_1 + g_2 + \ldots + g_s = g - h$ (2.1.1) et $(\overline{\Gamma\backslash\mathcal{M}_{\overline{v}}}|_{\overline{C}_i} \in \mu_i(\overline{F}_i)$.

Alors la propriété universelle de la variété algébrique $Pic^{g-h}(C)$ (resp. $Pic^{g_i}(\overline{C}_i)$) montre qu'il existe un morphisme analytique $f : V \to Pic^{g-h}(C)$ (resp. un morphisme algébrique

$$\overline{f} : \overline{V} \to \prod_{i=1}^{s} Pic^{g_i}(\overline{C}_i)\ ) \quad \text{avec}$$

$$f(v) = [(\Gamma\backslash\mathcal{M} \otimes k)_v], \overline{f}(\overline{v}) = ([(\overline{\Gamma\backslash\mathcal{M}})_{\overline{v}}|_{C_i}])_i.$$

Soit $w : C^{(g-h)} \to Pic^{g-h}(C)$ le morphisme canonique (qui sur F coïncide avec $D \to (\mathcal{L} \otimes k)_D$.) On sait que $W = w(C^{(g-h)})$ est un fermé algébrique de $Pic^{g-h}(C)$, en plus il existe un ouvert (algébrique) dense contenant F qui sur W définit un isomorphisme avec son image. Ainsi w induit un isomorphisme $i : F \to w(F)$ et $w(F)$ est un affinoïde de W (isomorphe à F). Par 2.3, pour tout $v \in V$, il existe $h(v) \in F$ tel que $\mathcal{M}_v \simeq s(h(v))$; comme on a $f(V) \subset i(F)$, il suit que $h = i^{-1} \circ f$ est analytique. Par ailleurs l'isomorphisme $\mathcal{M}_v \simeq u^*\mathcal{L}_{h(v)}$ et 2.3 montrent que h est un morphisme formel.

β) Soit $\mathcal{E}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times V$ avec les propriétés suivantes

1) $\gamma^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$

2) Pour chaque $v \in V$, le faisceau $\mathcal{E}_v$ sur Ω est isomorphe à $R_*\mathcal{O}^0_\Omega$.

Alors il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{E}'$ sur V tel que $\mathcal{E} \simeq p_2^*\mathcal{E}'$ (où $p_2 : \Omega \times V \to V$ est la seconde projection).

Pour montrer cela, il faut trouver un recouvrement admissible affinoïde (formel) $\{W_i\}$ tel que $\mathcal{E}|_{\Omega\times W_i} \simeq R_{i*}\mathcal{O}^0_{\Omega\times W_i}$ i.e. quitte à "diminuer" V, nous allons vérifier que $\mathcal{E} \simeq \widetilde{R}_*\mathcal{O}_{\Omega\times V}$ (où $\widetilde{R} : \Omega \times V \to \overline{\Omega} \times \overline{V}$ est la réduction).

Supposons d'abord V affinoïde formel. Soit $D = \sum_{i=1}^{g'} x_i$ $(g' = g_1 + g_2 + \ldots + g_s)$ un élément de F (2.1.2) tel que tous les $\overline{x}_i \in \overline{C}$ soient tous distincts. Soient $\mathcal{G}$ le faisceau inversible formel sur C tel que $\mathcal{G} \otimes k = \mathcal{O}_C(D)$ et $\mathcal{F}$ le faisceau inversible formel défini par la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to r_*\mathcal{O}^0_C \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \to 0$$

Alors on a $\mathcal{F}_x = 0$ si $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_g\}$ et $\mathcal{F}_x \simeq k^0$ sinon. La démonstration de 2.3 assure que

$$(2) \qquad \begin{array}{lclcl} H^0(\overline{\Omega}, u^*\mathcal{G} \otimes \overline{k}) \simeq \overline{k} & \text{et} & H^1(\Omega, u^*\mathcal{G} \otimes \overline{k}) = 0 & & \text{et aussi que} \\ H^0(\Omega, u^*\mathcal{G}) \simeq k^0 & \text{et} & H^1(\Omega, u^*\mathcal{G}) = 0. & & \end{array}$$

Alors (1) et (2) donnent facilement par la suite exacte de cohomologie que

$$(3) \quad 0 \to H^0(\Omega, R_*\mathcal{O}^0_\Omega) \xrightarrow{\sim} H^0(\Omega, u^*G) \xrightarrow{\alpha} H^0(\Omega, u^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^1(\Omega, R_*\mathcal{O}^0_\Omega) \to 0$$

où $im\alpha = 0$.

On considère maintenant la suite exacte sur $\overline{\Omega} \times \overline{V}$

$$(4) \qquad 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes (up_1)^*\mathcal{G} \to \mathcal{E} \otimes (up_1)^*\mathcal{F} \to 0$$

(où $p_1 : \Omega \times V \to \Omega$ est la première projection).

Soient $\mathcal{H} = \mathcal{E} \otimes (up_1)^*\mathcal{G}$, $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \overline{k}$, Z une composante irréductible de $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{H}}_{|Z\times\overline{V}}$. Les hypothèses sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ montrent que $\dim_{\overline{k}} H^0(Z, \mathcal{Q}_{\overline{v}}) = 1$ et $H^1(Z, \mathcal{Q}_{\overline{v}}) = 0$. Il suit de la méthode de démonstration de la partie α), qu'après avoir "diminuer" V, le

(5) Le $\mathcal{O}^0_V(V)$ -module $H^0(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{H})$ est libre de rang 1, engendré disons par e et $H^1(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{H}) = 0$.

De (3) on a la suite exacte

$$(6) \quad 0 \to H^0(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{E}) \xrightarrow{a} H^0(\Omega \times V, \mathcal{F} \otimes (up_1)^*\mathcal{G}) \\ \xrightarrow{b} H^0(\Omega \times V, \mathcal{E} \otimes (up_1)^*\mathcal{F})$$

Il suit de (3) que pour chaque $v \in V$, on a $b_v = 0$; comme V est réduit on conclut que $b = 0$ et donc que a est un isomorphisme. Par (5) le $\mathcal{O}_V^0(V)$ -module $H^0(\overline{\Omega} \times \overline{V}, \mathcal{E})$ est libre de rang 1 engendré par e' avec $a(e') = e$. La spécialisation en chaque v montre que e'_v engendre $\mathcal{E}_v$; ainsi e' engendre $\mathcal{E}$ et on a bien $\mathcal{E} \simeq \tilde{R}_* \mathcal{O}^0_{\Omega \times V}$.

γ) Comme $(1 \times h)^* u^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1}$ satisfait les hypothèses de β), il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{R}$ sur $\Omega \otimes V$ avec $(1 \times h)^* u^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^{-1} \simeq p_2^* \mathcal{R}$. ∎

2.5 L'espace analytique formel A

Soient $\mathcal{M} \in B$, $s[\mathcal{M}] : F \to A$ l'application définie par $s[\mathcal{M}](x) = [u^* \mathcal{L}_x \otimes \mathcal{M}^{-1}]$. Soit $\overline{s}[\overline{\mathcal{M}}] : \overline{F} \to \overline{A}$ l'application définie comme suit : si $y \in \overline{F}$ avec $\mu(y) = ([\mathcal{F}_1], \dots, [\mathcal{F}_s,])$ alors

$\overline{s}[\overline{\mathcal{M}}](y) := ([\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{M}^{-1}_{|Z_1}], \dots, [\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{M}^{-1}_{|Z_s}])$ où $Z_1, Z_2, \dots, Z_s$ est un système de représentants des composantes irréductibles de $\overline{C}$ de genre strictement positif (2.1.1). Alors on a le diagramme commutatif suivant avec $s[\mathcal{M}]$ et $\overline{s}[\overline{\mathcal{M}}]$ injectifs et $ims[\mathcal{M}] = a^{-1}(im\overline{s}[\overline{\mathcal{M}}])$

(1)
$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{s[\mathcal{M}]} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{F} & \xrightarrow{\overline{s}[\overline{\mathcal{M}}]} & \overline{A} \end{array}$$

Soient $[\mathcal{M}_1], [\mathcal{M}_2], \dots, [\mathcal{M}_t] \in B$ tels que $\bigcup_{i=1}^{t} \mu(F).b([\mathcal{M}_i^{-1}]) = \overline{A}$, $s_i = s[\mathcal{M}_i], \overline{s}_i = \overline{s}[\overline{\mathcal{M}}_i]$, $A_i = ims_i$. Alors on munit A_i de la structure analytique formelle induite par la bijection $s_i : F \to A_i$.

Il s'agit maintenant de montrer que $A_i \cap A_j$ est un ouvert formel de A_i (resp. A_j) et que le recollement se fait par un isomorphisme analytique (formel).

Soient $F_i := s_i^{-1}(A_i \cap A_j)$, $F_j := s_j^{-1}(A_i \cap A_j)$, $g_{ij} : F_i \to F_j$ la bijection induite par le diagramme commutatif ci-après

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{s_i} & A_i \\ \cup & & \cup \\ F_i & \longrightarrow & A_i \cap A_j \\ \downarrow{\scriptstyle g_{ij}} & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ F_j & \longrightarrow & A_i \cap A_j \\ \cap & & \cap \\ F & \xrightarrow{s_j} & A_j \end{array}$$

Il faut donc prouver que g_{ij} est un isomorphisme analytique (formel).

D'abord $A_i \cap A_j = a^{-1}(im\bar{s}_i \cap im\bar{s}_j)$, donc F_i (resp. F_j) est ouvert formel de F, ce qui montre que $A_i \cap A_j$ est ouvert formel de A_i (resp. A_j). Appliquons le lemme clef 2.4 au faisceau inversible formel $u^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}_i^{-1}\otimes\mathcal{M}_j$, il suit que $F_i \xrightarrow{g_{ij}} F_j \hookrightarrow F$ est un morphisme analytique formel; le même procédé montre que $F_j \xrightarrow{g_{ij}^{-1}} F_i \hookrightarrow F$ est aussi un morphisme analytique formel. Ainsi $g_{ij} : F_i \to F_j$ est bien un isomorphisme formel.

Il résulte de cela que le recouvrement $\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ de A, muni des morphismes de recollement g_{ij} définit sur A une structure d'espace analytique formel, que la réduction analytique (pour cette structure formelle) n'est autre que $a : A \to \bar{A}$ et que dans le diagramme (1) le morphisme s_i (resp. $\bar{s}_i$) est une immersion analytique ouverte formelle (resp. une immersion ouverte).

2.6 Le groupe analytique formel A

2.6.1 Une première propriété universelle pour A

Soit V un espace analytique, réduit, formel, $\mathcal{M}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times V$ tel que

1) $\gamma^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (Γ opère sur la première composante de $\Omega \times V$)

2) pour tout $v \in V$, on a $[\mathcal{M}_v] \in A$

Alors l'application $\varphi : V \to A$ induite par $v \to [\mathcal{M}_v]$ est un morphisme analytique formel.

Démonstration.— D'abord $\{\bar{v} \in \bar{V} | (\overline{\mathcal{M}}_{\bar{v}|Z_1}, \ldots, \overline{\mathcal{M}}_{\bar{v}|Z_s}) \in \bar{A}_i\}$ est un ouvert de Zariski $\bar{V}_i$ de $\bar{V}$ (on peut utiliser [Mi, 1], theorem 4.2, p 108); ainsi son image réciproque V_i est un ouvert formel de V. Il suffit donc de montrer que $\varphi : V_i \to A_i$ est un morphisme analytique formel. Soit $p : \Omega \times V \to \Omega$ la première projection, alors $\mathcal{M} \otimes p^*\mathcal{M}_i$ satisfait le lemme clef 2.4, ce qui montre que $\varphi : V_i \to A_i$ est un morphisme analytique formel. ∎

Remarque.— Le résultat 2.6.1 veut aussi dire que A est un espace de module grossier ("coarse moduli-space") qui "paramétrise" les faisceaux inversibles formels $\mathcal{M}$ sur Ω satisfaisant $\gamma^*\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et degré $\overline{\mathcal{M}}|_Z = 0$ pour toute composante irréductible Z de $\bar{\Omega}$.

On verra en 4.1 que A est un espace de module fin ("fine moduli-space").

2.6.2 La loi de groupe A (1.3.1) est une loi de groupe analytique formelle et $a : A \to \overline{A}$ respecte ces lois.

Démonstration. — Il s'agit donc de montrer que la multiplication $m : A \times A \to A$ est un morphisme analytique formel. Bien entendu le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{m} & A \\ \Big\downarrow{\scriptstyle a \times a} & & \Big\downarrow{\scriptstyle a} \\ \overline{A} \times \overline{A} & \xrightarrow{\overline{m}} & \overline{A} \end{array}$$

montre que m est formel.

Considérons la restriction de m à $A_i \times A_j$ et le faisceau inversible formel $q_1^*(u^*\mathcal{L}) \otimes q_2^*(u^*\mathcal{L}) \otimes q_3\mathcal{M}_i^{-1} \otimes q_3\mathcal{M}_j^{-1}$ sur $\Omega \times A_i \times A_j$ où $q_1(w, f_i, f_j) = (w, f_i), q_2(w, f_i, f_j) = (w, f_j)$ et $q_3(w, f_i, f_j) = w$. Alors 2.6.1 appliqué à ce faisceau montre bien que $m : A_i \times \mathcal{A}_j \to A$ est un morphisme analytique formel.

Un procédé analogue montre que l'application, inverse d'un élément est un automorphisme analytique formel de A. ∎

3. Les groupes analytiques (formels) G, G^0

3.1 Le faisceau inversible formel $\mathcal{F}[\mathcal{M}]$ sur $\Omega \times A[\mathcal{M}]$

Soient $\mathcal{L}$ le faisceau inversible formel sur $C \times F$ défini en 2.2, $(u \times 1)^*\mathcal{L}$ sur $\Omega \times F$ muni de la Γ -action naturelle, $[\mathcal{M}] \in B$, α une Γ -action sur $\mathcal{M}$ satisfaisant 1.5.1, i), $s[\mathcal{M}] : F \to A[\mathcal{M}]$ la bijection définie en 2.5 et $\mathcal{F}[\mathcal{M}] := (1 \times s[\mathcal{M}]^{-1})^*((u \times 1)^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{M}^{-1})$ (où $p_1 : \Omega \times F \to \Omega$ est la première projection), enfin $\alpha_{\mathcal{M}}$ est la Γ -action induite sur $\mathcal{F}[\mathcal{M}]$ par celle de $(u \times 1)^*\mathcal{L}$ et α.

Pout tout $a \in A[M]$, on a $[\mathcal{F}[\mathcal{M}]_a] = a$ et on peut normaliser $\mathcal{F}[\mathcal{M}]$ en un point $w_0 \in \Omega$ de façon que $\mathcal{F}[\mathcal{M}]_{w_0}$ soit trivial sur $A[\mathcal{M}]$.

Soient $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j \in B, \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i]$ (resp. $\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j]$) la restriction de $\mathcal{F}[\mathcal{M}_i]$ (resp. $\mathcal{F}[M_j]$) à $\Omega \times (A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j])$ avec toujours $\mathcal{F}[\mathcal{M}_i]_{w_0}$ (resp. $\mathcal{F}[\mathcal{M}_j]_{w_0}$) trivial. Une utilisation judicieuse du lemme clef 2.4 montre qu'il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{R}_{ij}$ sur $A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j]$ tel que $\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i] \simeq \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j] \otimes p_2^*\mathcal{R}_{ij}$ (où $p_2 : \Omega \times (A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j]) \to A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j]$ est la deuxième projection). Comme $\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i]_{w_0}$ et $\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j]_{w_0}$ sont triviaux sur $A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j]$ il suit que $\mathcal{R}_{ij}$ est trivial. Ainsi il existe un isomorphisme $\varphi_{ij} : \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i] \to \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j]$.

En général le diagramme, ci-après n'est pas commutatif

$$\begin{array}{ccc} \alpha^*\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i] & \xrightarrow{\alpha^*(\varphi_{ij})} & \alpha^*\widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j] \\ {\scriptstyle \alpha_{\mathcal{M}_i}(\gamma)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{M}_j}(\gamma)} \\ \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_i] & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \widehat{\mathcal{F}}[\mathcal{M}_j] \end{array}$$

on a

$$\alpha_{\mathcal{M}_j}(\gamma) \circ \varphi_{ij} = c_{\mathcal{M}_i,\mathcal{M}_j}(\gamma)\gamma^*(\varphi_{ij}) \circ \alpha_{\mathcal{M}_i}(\gamma);$$

où

$$c_{\mathcal{M}_i,\mathcal{M}_j}(\gamma) \in \mathcal{O}^{0*}_{\Omega\times A}(\Omega \times (A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j])) = \mathcal{O}^{0*}_A(A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j]).$$

L'élément $c_{\mathcal{M}_i,\mathcal{M}_j}(\gamma)$ ne dépend pas du choix de l'isomorphisme φ_{ij} et $c_{\mathcal{M}_i,\mathcal{M}_j} : \Gamma \to \Gamma_{ab} = X(T) \to \mathcal{O}^{0*}_A(A[\mathcal{M}_i] \cap A[\mathcal{M}_j])$ est un homomorphisme.

3.2 Une structure formelle sur T, T^0

Soient toujours $T \simeq G^h_{m,k}$ le tore (déployé) de dimension h, $X(T) \simeq \mathbf{Z}^h$ le groupe des caractères de T (i.e. $X(T) = \mathrm{Hom}(T, G_{m,k})$). Soient $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_h$ une base de $X(T)$, $\pi \in k$ avec $0 < |\pi| < 1$ et $T_{n_1,n_2,\ldots,n_h} := \{t \in T|\ |\pi|^{n_i+1} \leq |\mathcal{X}_i(t)| \leq |\pi|^{n_i},$ pour $1 \leq i \leq h\}$, alors $\{T_{n_1,n_2,\ldots,n_h} | (n_1, \ldots, n_h) \in \mathbf{Z}^h\}$ définit un recouvrement formel de T et ainsi donc une structure analytique formelle de T; bien entendu cette structure n'est pas canonique, elle dépend du choix de $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_h$ et π.

On note T^0 le tore affinoïde de dimension h, il est donc isomorphe à $Spm(k < t_1, t_2, \ldots, t_h, t_1^{-1}, t_2^{-1}, \ldots, t_h^{-1} >)$, et c'est aussi le sous-groupe affinoïde de T défini par $T^0 := \{t \in T|\ |\mathcal{X}_i(t)| = 1$ pour $1 \leq i \leq h\}$.

3.3 Le faisceau inversible formel $\mathcal{F}'[\mathcal{M}]$ sur $\Omega \times T \times A[\mathcal{M}]$

Soient $p : \Omega \times T \times A[\mathcal{M}] \to \Omega \times A[\mathcal{M}], \mathcal{F}'[\mathcal{M}] := p^*\mathcal{F}[\mathcal{M}]$; on définit sur $\mathcal{F}'[\mathcal{M}] \otimes k$ une Γ -action notée $\beta_{\mathcal{M}}$ par $\beta_{\mathcal{M}}(\gamma) := [\gamma].\alpha_{\mathcal{M}}(\gamma)$ où $\alpha_{\mathcal{M}}$ est la Γ -action sur $\mathcal{F}'[\mathcal{M}]$ induite par celle de $\mathcal{F}[\mathcal{M}]$ (en 3.1) et $[\gamma]$ est l'élément image de γ dans $\Gamma_{ab} = X(T)$, vu comme fonction analytique inversible sur T, donc sur $T \times A[\mathcal{M}]$, donc sur $\Omega \times T \times A[\mathcal{M}]$.

3.4 L'espace analytique formel G, G^0

Soient $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_t \in B$, définis en 2.5, $\mathcal{F}'_i := \mathcal{F}'[\mathcal{M}_i]$, $\beta_i := \beta_{\mathcal{M}_i}$, $A_i := A[\mathcal{M}_i]$, $\sigma_i : T \times A \to G$ l'application $(t, a) \to [\mathcal{F}'_{i(t,a)}, \beta_{i(t,a)}]$ où $\beta_{i(t,a)}$ est la Γ -action sur $\mathcal{F}'_{i(t,a)}$ induite par β_i. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} T \times A_i & \xrightarrow{\sigma_i} & G \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A_i & \xrightarrow{s_i} & A \end{array}$$

et σ_i est injectif. En effet $\beta_{i(t,a)} = [\gamma](t)(\alpha_i)_a$ où $\alpha_i := \alpha_{\mathcal{M}_i}$ et $(\alpha_i)_a$ est la Γ -action induite par α_i sur $\mathcal{F}[\mathcal{M}_i]_a)$.

Soit G_i : $G_i = im\sigma_i$, on le munit de la structure analytique formelle induite par celle de $T \times A_i$. Il s'agit maintenant de montrer que $G_i \cap G_j$ est un ouvert formel de G_i (resp. G_j) et que le recollement se fait par un isomorphisme analytique. Cela se lit sur le diagramme commutatif suivant

$$
\begin{array}{ccc}
T \times A_i & \xrightarrow{\sigma_i} & G_i \\
\cup & & \cup \\
T \times (A_i \cap A_j) & \longrightarrow & G_i \cap G_j \\
\Big\downarrow h_{ij} & & \Big\downarrow 1 \\
T \times (A_i \cap A_j) & \longrightarrow & G_i \cap G_j \\
\cap & & \cap \\
T \times A_j & \xrightarrow{\sigma_j} & G_j
\end{array}
$$

Il suit de 3.1 que $h_{ij}(t,a) = (f_{ij}(a).t, a)$ où $f_{ij} : A_i \cap A_j \to T^0$ est le morphisme tel que $[\gamma] \circ f_{ij} = c_{ij}(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, avec $c_{ij} := c_{\mathcal{M}_i\mathcal{M}_j}$ (3.1).

Cela définit sur G une structure d'espace analytique formel (qui n'est pas canonique).

Si on pose $G_i^0 := \sigma_i(T^0 \times A_i)$, cela définit de la même manière sur G^0 (1.5.4.1) une structure d'espace analytique formel (parce que $f_{ij}(a) \in T^0$) et qui est canonique; de plus $G^0 \hookrightarrow G$ est une immersion ouverte (formelle).

3.5 Les groupes analytique formels G, G^0

3.5.1 Il s'agit de montrer que la multiplication $m : G \times G \to G$ (définie en 1.5.2) est un morphisme analytique formel.

Montrons que $m : G_i \times G_j \to G$ est un morphisme analytique formel. On sait qu'il existe un recouvrement formel $\{W_l\}_l$ de $A_i \times A_j$ tel que $m(W_l) \subset A_{\rho(l)}$ (par 2.6.2). Soit $((t_i, a_i), (t_j, a_j)) \in (T \times A_i) \times (T \times A_j)$ avec $(a_i, a_j) \in W_l$, alors il suit de la définition de $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_{\rho(l)}$ (3.4) qu'il existe $d_{ijl} \in T^0$ tel que $m(\sigma_i(t_i, a_i), \sigma_j(t_j, a_j)) = \sigma_{\rho(l)}(t_i t_j d_{ijl}, a_i a_j)$, pour tout $((t_i, a_i), (t_j, a_j)) \in (T \times A_i) \times (T \times A_j)$ et $(a_i, a_j) \in W_l$, alors il suit de la définition de $\sigma_i, \sigma_j, \sigma_{\rho(l)}$ (3.4) qu'il existe $d_{ijl} \in T^0$ tel que $m(\sigma_i(t_i, a_i), \sigma_j(t_j, a_j)) = \sigma_{\rho(l)}(t_i t_j d_{ijl}, a_i a_j)$, pour tout $((t_i, a_i), (t_j, a_j)) \in (T \times A_i) \times (T \times A_j)$ et $(a_i, a_j) \in W_l$.

Cela montre bien que m est un morphisme analytique formel; la même méthode montre que l'application inverse d'un élément est un isomorphisme analytique formel.

Comme $d_{ijl} \in T^0$, le sous-groupe G^0 est aussi un sous-groupe analytique formel.

3.5.2 En particulier les morphismes suivants sont formels $\pi : G \to A$, $\pi : G^0 \to A$, $i : T \hookrightarrow G$ $i : T^0 \hookrightarrow G^0$. Alors on a le diagramme commutatif induit par les réductions

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1) & \longrightarrow & T^0 & \xrightarrow{i} & G^0 & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow a \\
(1) & \longrightarrow & \overline{T}^0 & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{G}^0 & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \overline{A} & \to & 0
\end{array}$$

où $\overline{T}^0 \simeq G^h_{m,\bar{k}}$, $\overline{G}^0$ est un groupe algébrique sur $\bar{k}$ ($\overline{A}$ est une variété abélienne), les morphismes $\bar{i}$, $\bar{\pi}$ sont algébriques et les suites horizontales sont exactes.

3.5.3 Les homomorphismes $c_{ij} : X(T) \to \mathcal{O}_A^{0*}(A_i \cap A_j)$ (3.1, 3.4) définissent un homomorphisme $\tau : X(T) \to H^1(A, \mathcal{O}_A^{0*})$; ce même homomorphisme (par les c_{ij}) définit l'extension G^0 de A par T^0.

4. La propriété universelle de A, G, G^0

4.1 Le faisceau universel formel $\mathcal{U}$ sur $\Omega \times A$

Notation. Soient V un k -espace analytique formel réduit, $p_2 : \Omega \times V \to V$ la deuxième projection. Sur l'ensemble des faisceaux inversibles formels sur $\Omega \times V$, la notation $\mathcal{M}_1 \approx \mathcal{M}_2$ désigne la relation d'équivalence entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ définie par le fait qu'il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{R}$ sur V tel que $\mathcal{M}_1 \simeq \mathcal{M}_2 \otimes p_2^*\mathcal{R}$.

THÉORÈME .— *Soient Ω, A définis par 1.2.3, 2.5. Alors il existe sur $\Omega \times A$ un faisceau inversible formel $\mathcal{U}$ qui possède les propriétés suivantes*

(1) Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma^*\mathcal{U} \approx \mathcal{U}$($\Gamma$ agit sur la première composante de $\Omega \times A$)

(2) Pour tout $a \in A$, on a $[\mathcal{U}_a] = a$.

(3) Soient V un k -espace analytique formel, $\mathcal{E}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times V$ qui possède les propriétés suivantes

i) Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma^*\mathcal{E} \approx \mathcal{E}$.

ii) Pour tout $\bar{v} \in \overline{V}$ et pour chaque composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$, on a degré $\mathcal{E}_{|Z \times \{\bar{v}\}} = 0$.

Alors il existe un unique morphisme formel $f : V \to A$ tel que $(1\times f)^*\mathcal{U} \approx \mathcal{M}$.

(4) *L'application $q : G \to \mathrm{Jac}(C)$ (définie en 1.5.4.2) est un morphisme analytique. Soit $\mathcal{K}$ le faisceau inversible (universel) sur $C \times Jac(C)$ avec $[\mathcal{K}_y] = y$, pour tout $y \in \mathrm{Jac}(C)$, et normalisé en un point $u(w_0)$, avec $w_0 \in \Omega$ (i.e. $\mathcal{K}_{u(w_0)} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{JacC}}$). Alors on a $(u\times q)^*\mathcal{K} \simeq (1\times\pi)^*\mathcal{U}\otimes k$, et donc $\gamma^*(1\times\pi)^*\mathcal{U}\otimes k \simeq (1\times\pi)^*\mathcal{U}\otimes k$. En plus on a $\gamma^*[(1\times\pi)^*\mathcal{U}|_{\Omega\times G^0}] \simeq [(1\times\pi)^*\mathcal{U}|_{\Omega\times G^0}]$.*

(5) *L'application $\Gamma \to \mathcal{R}$ avec $\gamma^*\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}^{-1} \simeq p_2^*\mathcal{R}$ induit l'application $\tau : X(T) \to H^1(A, \mathcal{O}_A^{0*})$.*

Remarque. — La propriété (3) veut dire que $(\mathcal{U}, \Omega\times A)$ représente le foncteur $V \to P(V)$ où $P(V)$ est l'ensemble des faisceaux inversibles formels sur $\Omega\times V$ satisfaisant (i) et (ii), cet ensemble étant quotienté par la relation d'équivalence "$\approx$".

Démonstration. — On suit les notations de 3.1, on pose $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}[\mathcal{M}_i]$, $\varphi_{ij} : \mathcal{F}|_{\Omega\times(A_i\cap A_j)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_j|_{\Omega\times(A_i\cap A_j)}$ l'isomomorphisme défini en 3.1, il suit de cela que $\varphi_{li}\circ\varphi_{jl}\circ\varphi_{ij}$ donne un isomorphisme de $\mathcal{F}_i|_{\Omega\times(A_i\cap A_j\cap A_j)}$. Facilement $\varphi_{li}\circ\varphi_{jl}\circ\varphi_{ij}$ correspond à un élément $\xi_{ijl} \in \mathcal{O}_A^{0*}(A_i\cap A_j\cap A_l)$ et ainsi $\{\xi_{ijl}\}_{ijl} \in \check{H}^2(\{A_i\}, \mathcal{O}_A^{0*})$. Si l'on peut montrer que le 2-cocycle $\{\xi_{ijl}\}_{ijl}$ est trivial, cela permettra de changer φ_{ij} en ψ_{ij} de façon que $\psi_{li}\circ\psi_{jl}\circ\psi_{ij}$ soit l'identité sur $A_i\cap A_j\cap A_l$, et par suite les $\mathcal{F}_i$ se recolleront en un faisceau inversible formel $\mathcal{U}$ sur $\Omega\times A$.

Soit $\mathcal{K}$ le faisceau inversible universel sur $C\times \mathrm{Jac}\, C$ avec $[\mathcal{K}_y] = y$ pour tout $y \in \mathrm{Jac}\, C$ et $\mathcal{K}_{u(w_0)}$ trivial (sur $\mathrm{Jac}\, C$).

Soient toujours $\pi : G \to A$ la surjection $\mathcal{F}_i'' := (1\times\pi)^*\mathcal{F}_i$, on a $\mathcal{F}_i^! = (1\times\sigma_i)^*\mathcal{F}_i''$ ($\mathcal{F}_i^!$ est défini par 3.3, 3.4), on peut donc reporter sur $\mathcal{F}_i''\otimes k$ la Γ -action β_i de $\mathcal{F}_i^!\otimes k$. Ainsi $\Gamma\backslash\mathcal{F}_i''\otimes k$ est un faisceau inversible sur $C\times G_i$ avec degré $((\Gamma\backslash\mathcal{F}_i''\otimes k)_g) = 0$ pour tout $g\in G_i$. La propriété universelle de $\mathcal{K}$ ([Bo, Lu, 2], prop. 1.1, p.258) assure qu'il existe un morphisme analytique $G_i \to \mathrm{Jac}\, C$, qui n'est autre que l'application q et tel que $(1\times q)^*\mathcal{K} \simeq \Gamma\backslash\mathcal{F}_i''\otimes k$. Cela montre que $q : G \to \mathrm{Jac}\, C$ est un morphisme analytique et que les faisceaux inversibles $\mathcal{F}_i''\otimes k$ sur $\Omega\times G_i$ se recollent en le faisceau inversible $(u\times q)^*\mathcal{K}$.

Cela veut dire que le 2-cocycle $\{\xi_{ijl}\}_{ijl}$ est trivial comme élément de $\check{H}^2(\{\Omega\times G_i\}_i, \mathcal{O}^*_{\Omega\times G})$. Soient donc $f_{ij} \in \mathcal{O}^*_{\Omega\times G}(\Omega\times(G_i\cap G_j))$ avec $f_{ij}f_{jl}f_{li} = \xi_{ijl}$. Comme ξ_{ijl} ne dépend pas de Ω on a la même relation en remplaçant f_{ij} par $g_{ij} := f_{ij}(w_0, \cdot) \in \mathcal{O}_G^*(G_i \cap G_j)$. Comme $G_i \simeq T \times A_i$, on a la suite exacte

$(1) \to \mathcal{O}_A^*(A_i) \to \mathcal{O}_G^*(G_i) \to X(T) \to (0)$, où $X(T)$ est toujours le groupe des caractères de T. Si on note par ξ_{ij} l'image de g_{ij} dans $X(T)$ on a donc $\mathcal{X}_{ij} + \mathcal{X}_{jl} + \mathcal{X}_{li} = 0$ puisque $g_{ij}g_{jl}g_{li} \in \mathcal{O}_A^*(A_i \cap A_j \cap A_l)$; on peut remplacer g_{ij} par $h_{ij} \in \mathcal{O}_A^*(A_i \cap A_j)$ de façon à obtenir $h_{ij}h_{jl}h_{li} = \xi_{ijl}$ pour tout i, j, l.

Soient $\lambda_{ij} \in k^*$ avec $|\lambda_{ij}| = ||h_{ij}||_{A_i \cap A_j}$, alors on a $\lambda_{ij}.\lambda_{jl}\lambda_{li} \in k^{0*}$, comme le faisceau constant sur $\overline{A}$ (qui est irréductible) de fibre k^{0*} est flasque, on peut trouver $\mu_{ij} \in k^*$ avec $|\mu_{ij}| = ||h_{ij}||_{A_i \cap A_j}$ et $\mu_{ij}\mu_{jl}\mu_{li} = 1$. Alors $\mu_{ij}^{-1}h_{ij} \in \mathcal{O}_A^{0*}(A_i \cap A_j)$ et trivialise le 2-cocycle $\{\xi_{ijl}\}_{ijl}$.

Ainsi on a bien un faisceau inversible formel $\mathcal{U}$ sur $\Omega \times A$ qui recolle les $\mathcal{F}_i$ (sur $\Omega \times A_i$). De $\gamma^*\mathcal{F}_i \simeq \mathcal{F}_i$ on déduit que $\gamma^*\mathcal{U} \approx \mathcal{U}$ et $[(\mathcal{F}_i)_a] = a$ pour tout $a \in A_i$ implique $[\mathcal{U}_a] = a$ pour tout $a \in A$. Ensuite (3) se déduit aisément du lemme clef 2.4.

On a bien $(1 \times \pi)^*\mathcal{U} \otimes k \simeq (u \times q)^*\mathcal{K}$ qui est le recollement des $\mathcal{F}_i'' \otimes k$ avec les Γ -actions β_i (la Γ -action de $(u \times q)^*\mathcal{K}$ étant induite par u); cela implique d'abord que $\gamma^*(1 \times \pi)^*\mathcal{U} \otimes k \simeq (1 \times \pi)^*\mathcal{U} \otimes k$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. La définition des β_i (3.3, 3.4) montre bien que $\beta_i(\gamma)$ est un isomorphisme de $\gamma^*\mathcal{F}_i''|_{\Omega \times G_i^0}$ sur $\mathcal{F}_i''|_{\Omega \times G_i^0}$ (où $G_i^0 := \sigma_i(T^0 \times A_i)$). Ainsi on a $\gamma^*[(1 \times \pi)^*\mathcal{U}|_{\Omega \times G^0}] \simeq (1 \times \pi)^*\mathcal{U}|_{\Omega \times G^0}]$. ∎

4.2 Le faisceau inversible formel $\mathcal{V}$ sur $\Omega \times G$

COROLLAIRE .— *Soient G muni de la structure analytique formelle définie en 3.4, $\mathcal{U}$ défini en 4.1, $\mathcal{V} := (1 \times \pi)^*\mathcal{U}$, $(\alpha(\gamma))_\gamma$ la famille d'isomorphismes $\alpha(\gamma) : \gamma^*\mathcal{V} \otimes k \to \mathcal{V} \otimes k$ définie selon 3.3 (et avec $\alpha(\gamma_1) \circ \gamma_1^*(\alpha(\gamma_2)) = \alpha(\gamma_2\gamma_1)$ pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$). Alors $(\mathcal{V}, \alpha)$ satisfait les propriétés suivantes :*

(1) Pour tout $\overline{g} \in \overline{G}$ et pour toute composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$, on a degré$(\mathcal{V} \otimes \overline{k}_{|Z \times \{\overline{g}\}}) = 0$.

(2) Pour tout $g \in G$, on a $[\mathcal{V}_g, \alpha_g] = g$.

(3) Soient V un k -espace analytique formel, réduit, $\mathcal{E}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times V$ avec les propriétés et données suivantes :

(i) pour toute composante irréductible Z de $\overline{\Omega}$ et pour tout $\overline{v} \in \overline{V}$ on a degré $\mathcal{E} \otimes \overline{k}|_{Z \times \{\overline{v}\}} = 0$.

(ii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{O}_\gamma$ sur V avec $\gamma^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^{-1} \simeq p_2^*\mathcal{O}_\gamma$ où $p_2 : \Omega \times V \to V$ est la projection,

(iii) Il existe une famille d'isomorphismes $((\delta(\gamma))_\gamma$ *avec* $\delta(\gamma) : \mathcal{O}_\gamma \otimes k \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_v$.

Il existe une famille d'isomorphismes $\beta(\gamma))_\gamma$ *définie par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \gamma^*\mathcal{E} \otimes k & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{E} \otimes k) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_\gamma \otimes k) \\ \beta(\gamma) & \searrow & \Big\downarrow 1 \otimes p_2^*\delta(\gamma) \\ & & (\mathcal{E} \otimes k) \otimes p_2^*\mathcal{O}_V = \mathcal{E} \otimes k \end{array}$$

Si ces propriétés (i), (ii), (iii) sont satisfaites, il existe un morphisme unique $f : V \to G$ *avec* $(1 \otimes f)^*(\mathcal{V}, \alpha) \simeq (\mathcal{E}, \beta)$.

4.3 Le faisceau inversible formel $\mathcal{W}$ sur $C \times G^0$

COROLLAIRE .— *Soient* G^0 *le sous-groupe analytique formel de G défini en 1.5.4.2, par 4.1 on sait que la* Γ *-action* α *sur* $\mathcal{V} \otimes k$ *est aussi une* Γ *-action sur* $\mathcal{V}|_{\Omega \times G^0}$ *(*$\mathcal{V}$ *et* α *sont définis en 4.2). Alors* $\mathcal{W} := \Gamma \backslash (\mathcal{V}|_{\Omega \times G^0}, \alpha)$ *est un faisceau inversible formel sur* $C \times G^0$ *qui possède les propriétés suivantes.*

(1) Pour chaque composante irréductible $\overline{C}_i$ *de* $\overline{C}$ *et chaque* $\overline{g} \in \overline{G}^0$, *on a* degré$(\mathcal{W} \otimes \overline{k}|_{\overline{C}_i \times \{\overline{g}\}}) = 0$.

(2) Soient V un k -espace analytique formel, réduit, $\mathcal{E}$ *un faisceau inversible formel sur* $C \times V$ *tel que* degré $\mathcal{E} \otimes \overline{k}|_{\overline{C}_i \times \{\overline{v}\}} = 0$, *pour tout* $\overline{v} \in \overline{V}$, *alors il existe un morphisme formel unique* $f : V \to G^0$ *tel que* $\mathcal{E} \simeq (1 \times f)^*\mathcal{W}$.

4.4 La suite exacte $(1) \to \Lambda \to G \xrightarrow{q} \mathrm{Jac}(C) \to (1)$

PROPOSITION .— *Soient* $\varepsilon \geq 0$ *et* $G^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{t} \sigma_i(T^\varepsilon \times A_i)$ *avec* $T^\varepsilon := \{t \in T | (1+\varepsilon)^{-1} \leq |\mathcal{X}_i(t)| \leq (1+\varepsilon)$, pour $1 \leq i \leq h\}$, *selon les notations de 3.2* $(1+\varepsilon \in |k^*|)$.

1) Soit $\varepsilon \geq 0$ *avec* $G^\varepsilon \cap \Delta = \{1\}$. *Alors la restriction* $q : G^l \to \mathrm{Jac}(C)$ *est une immersion ouverte.*

2) Soit $\widetilde{q} : G/\Lambda \to \mathrm{Jac}(C)$ *l'isomorphisme de groupe induit par q (1.5.5). Alors* $\widetilde{q}$ *est un isomorphisme analytique.*

Démonstration.— Comme $G^\varepsilon \hookrightarrow G/\Lambda$ (pour $G^\varepsilon \cap \Lambda = \{1\}$) est par définition de la structure de G/Λ une immersion ouverte, il suffit donc de montrer 2).

Clairement $\widetilde{q} : G/\Lambda \to \mathrm{Jac}(C)$ est un morphisme analytique, par [Gr, Ge] il reste à montrer que $\widetilde{q}$ est localement bi-analytique. Comme $\widetilde{q}$ est un isomorphisme de groupe il suffit de trouver un affinoïde W de $\mathrm{Jac}(C)$ avec $1 \in W$ et un morphisme $\psi : W \to \widetilde{q}^{-1}(W)$ réciproque de $\widetilde{q}$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_g \in C$ tels que $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_g$ soient distincts et ne correspondent pas à des points doubles de $\overline{C}$ et tels que l'image de $(x_1, x_2, \ldots, x_{g'})$ ($g' = g_1 + \ldots + g_s, g_i$ défini en 2.1) soit élément de F.

On peut choisir en x_i un paramètre local t_i de façon que les propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\{x \in C \mid |t_i(x)| \leq 1\} \subset r^{-1}(x_i), \text{ l'application } (y_1, \ldots, y_g) \to \Big[\sum_{i=1}^{g} y_i - \sum_{i=1}^{g} x_i\Big]$$

induit une immersion analytique ouverte de $V = Spm\ k < t_1, \ldots, t_g >$ (le polydisque) dans $\mathrm{Jac}(C)$.

Soit $\mathcal{K}$ le faisceau inversible sur $C \times \mathrm{Jac}(C)$ (avec $[\mathcal{K}_z] = z$ pour $z \in \mathrm{Jac}(C)$), sa restriction à $C \times V$ est de la forme $\mathcal{E} \otimes k$ où $\mathcal{E}$ est un faisceau inversible formel tel que degré$(\mathcal{E} \otimes \overline{k}|_{\overline{C}_i \times \{\overline{v}\}}) = 0$ pour chaque composante irréductible $\overline{C}_i$ de $\overline{C}$ et pour chaque $\overline{v} \in \overline{V}$. Par 4.3 il existe un morphisme formel $f : V \to G^0 \subset G/\Lambda$, facilement on vérifie que f est un inverse local de $\widetilde{q}$. ∎

5. La variété abélienne A, le groupe algébrique G

5.1 L'algébricité de A

THÉORÈME .— *Le groupe analytique A défini en 2.6 est une variété abélienne.*

Démonstration.— α) *Un faisceau ample sur A.* Soit $\mathcal{P}$ “la” polarisation principale de $\mathrm{Jac}C$. D'après [Re, vdP], il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{E}$ sur A tel $q^*\mathcal{P} \simeq \pi^*(\mathcal{E} \otimes k)$. On veut montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ est “la” polarisation principale sur $\overline{A} = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{Jac}(\overline{C}_i)$.

Si S est un groupe algébrique (resp. analytique) et $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur S on note $\theta_2(\mathcal{M})$ le faisceau inversible sur $S \times S$ défini par $\theta_2(\mathcal{M}) = m^*\mathcal{M} \otimes p_1^*\mathcal{M}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{M}^{-1}$ où $m : S \times S \to S$ est la multiplication et $p_i : S \times S \to S$ sont les projections pour $i = 1, 2$.

Soit $i_C : C \to \mathrm{Jac}(C)$ le morphisme canonique défini par $i_C(x) = [x - u(w_0)]$ où $w_0 \in \Omega$ (est fixé). Comme G est un revêtement analytique de $\mathrm{Jac}(C)$ et comme Ω est simplement connexe, on a un unique morphisme $i_\Omega : \Omega \to G$ avec $i_C \circ u = q \circ i_\Omega$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i_C"] & \mathrm{Jac}\, C \\ \Omega \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_\Omega"] \arrow[dr, "\tilde{i}_\Omega"'] & G \arrow[u, "q"'] \arrow[d, "\pi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

On sait que $(i_C \times 1)^*\theta_2(\mathcal{P})$ est le faisceau inversible (universel) $\mathcal{K}$ sur $C \times \mathrm{Jac}(C)$ avec $\mathcal{K}_{\{u(w_0)\}\times \mathrm{Jac}(C)}$ trivial et $[\mathcal{K}_{C\times\{y\}}] = y$ pour tout $y \in \mathrm{Jac}(C)$ [Mi, 2]).

On déduit de 4.1 partie (4) et 4.2 que

(1) $$(1 \times \pi)^*\mathcal{U} \otimes k \simeq (1 \times \pi)^*(\tilde{i}_\Omega \times 1_A)^*\theta_2(\mathcal{E} \otimes k)$$

où $\tilde{i}_\Omega = \pi \circ i_\Omega$; en plus on a $\mathcal{U}_{\Omega\times\{1\}}$ trivial, $(\tilde{i}_\Omega \times 1_A)^*\theta_2(\mathcal{E})_{\Omega\times\{1\}}$ trivial et $(\tilde{i}_\Omega \times 1_A)^*\theta_2(\mathcal{E})_{\{w_0\}\times A}$ trivial.

Montrons que $\tilde{i}_\Omega$ est un morphisme formel. Il existe une structure formelle sur Ω plus fine que celle initiale et telle que $\tilde{i}_\Omega$ devienne un morphisme formel. Soit $\overline{\overline{\Omega}}$ la réduction de Ω relative à cette structure formelle, alors $\tilde{i}_\Omega$ induit un morphisme de $\overline{k}$-schéma $\tilde{i}_\Omega : \overline{\overline{\Omega}} \to \overline{A}$ et on a un morphisme $\rho : \overline{\overline{\Omega}} \to \overline{\Omega}$ surjectif. De plus on peut montrer que l'image réciproque $\rho^{-1}(\{x\})$ d'un point $x \in \overline{\Omega}$ est soit un point, soit une réunion de droites $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$. Comme $\overline{A}$ est une variété abélienne on sait alors que $\overline{i}_\Omega(\rho^{-1}\{x\})$ est un point ([Mi, 1], corollary 3.8, p.107). Cela montre bien que $\overline{i}_\Omega$ induit une application de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{A}$ et donc que $\tilde{i}_\Omega$ est un morphisme formel (pour la structure initiale sur Ω).

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau inversible formel sur $\Omega \times A$ tel que

(2) $\mathcal{U} \simeq (\tilde{i}_\Omega \times 1)^*\theta_2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{F}$, on a donc $\mathcal{F}_{\Omega\times\{1\}}$ trivial, $(1 \times \pi)^*\mathcal{F} \otimes k$ trivial, et $\mathcal{F} \otimes k_{\{w_0\}\times A}$ trivial.

Soit A_i un recouvrement formel de A tel que $\pi^{-1}(A_i) \simeq A_i \times T$. Alors $(1 \times \pi)^*\mathcal{F} \otimes k|_{\Omega\times A_i\times T}$ trivial implique $\mathcal{F} \otimes k|_{\Omega\times A_i}$ trivial. Ainsi $\mathcal{F} \otimes k$ définit un 1-cocycle $(c_{ij})_{ij}$ sur le recouvrement $\{\Omega \times A_i\}_i$ avec $c_{ij} \in \mathcal{O}^*_{\Omega\times A}(\Omega \times (A_i \cap A_j))$.

(3) Soient $a_0 \in \bigcap_i A_i$ et d_{ij} défini par $c_{ij}(w,a) = c_{ij}(w,a_0)d_{ij}(w,a)$.

Comme $\overline{A}$ est irréductible on déduit facilement que $|c_{ij}(w,a)| = |c_{ij}(w,a_0)|$, ainsi $d_{ij} \in \mathcal{O}^{0*}_{\Omega\times A}(\Omega \times (A_i \cap A_j))$. Comme $\mathcal{O}^0_\Omega(\Omega) = k^0$, on a $d_{ij} \in \mathcal{O}^{0*}_A(A_i \cap A_j)$, de plus d_{ij} est un 1-cocycle. Soit $\mathcal{L}_2$ le faisceau inversible formel sur A associé à ce 1-cocycle; par (3) on a donc $\mathcal{F} \otimes k \simeq p_2^*\mathcal{L} \otimes k$ où $p_2 : \Omega \times A \to A$ est la projection.

Soit $\mathcal{G} = \mathcal{F} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$, on a donc $\mathcal{G} \otimes k$ trivial et $\mathcal{G}_{\Omega\times\{1\}}$ trivial.

Alors le lemme ci-après montre que $\mathcal{G}$ est trivial. Ainsi $\mathcal{F} \simeq p_2^*\mathcal{L}_2$, or $\mathcal{F}_{\{w_0\}\times A} \simeq \mathcal{L}_2$, ainsi (2) montre que $\mathcal{L}_2$ est trivial et ainsi $\mathcal{U} \simeq (\tilde{i}_\Omega \times 1)^*\theta_2(\mathcal{E})$.

Par construction de $\mathcal{U}$ on obtient que $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \otimes \overline{k}$ sur $\overline{\Omega} \times \overline{A}$ est encore le faisceau universel pour un problème de module analogue à celui de 4.1 et on a par (3) $\overline{\mathcal{U}} \simeq (i_{\overline{\Omega}} \times 1)^*\theta_2(\overline{\mathcal{E}})$ où $i_{\overline{\Omega}} = \overline{\tilde{i}}_\Omega$

Dans $\overline{\Omega}$ on choisit un fermé connexe $\overline{\Omega}_f$ qui contient $\overline{w}_0$ et qui est un domaine fondamental pour l'action de Γ (i.e. $\overline{\Omega}_f$ contient exactement un système de représentants des composantes irréductibles de $\overline{C}$, et son graphe est un arbre). Alors $\overline{A}$ s'identifie à la jacobienne de $\overline{\Omega}_f$.

La restriction $\overline{\mathcal{U}}|_{\overline{\Omega}_f \times \overline{A}}$ est le faisceau inversible universel associé à la Jacobienne de $\overline{\Omega}_f$ et il est isomorphe à $(i_f \times 1)^*\theta_2(\overline{\mathcal{E}})$ si $i_f : \overline{\Omega}_f \to \overline{A}$ est la restriction de $i_{\overline{\Omega}}$ à $\overline{\Omega}_f$.

Soit $\mathcal{Q}$ "la" polarisation principale sur $\overline{A}$, alors on a $(i_f \times 1)^*\theta_2(\mathcal{Q}) \simeq (i_f \times 1)^*\theta_2(\overline{\mathcal{E}})$. Cela implique que $\theta_2(\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1})$ sur $\overline{A} \times \overline{A}$ est trivial sur $\{a\} \times \overline{A}$ avec $a \in im(i_f)$. Comme $im(i_f)$ engendre le groupe $\overline{A}$, il suit que $\theta_2(\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1})$ est trivial sur chaque $\{a\} \times A$ pour $a \in \overline{A}$. Comme $\theta_2(\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1})$ est symétrique, on a aussi $\theta_2(\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1})$ trivial sur $\overline{A} \times \{a\}$ et le théorème du balancement ([Mi, 1], corollary 5.2, p.109) montre que $\theta_2(\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1})$ est trivial. Il suit que $\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1} \in Pic^0(\overline{A})$ ([Mi, 1] p.118), comme $\mathcal{Q}$ est ample ([Mi, 2], p.186) il existe $a \in \overline{A}$ tel que $\overline{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{Q}^{-1} \simeq t_a^*\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}^{-1}$ ([Mi, 1], prop. 10.1, p.119); cela montre que $\overline{\mathcal{E}} \simeq t_a^*\mathcal{Q}$, ainsi $\overline{\mathcal{E}}$ est une polarisation principale de $\overline{A}$.

β) Le groupe analytique A est une variété algébrique projective.

Comme $\overline{\mathcal{E}}$ est ample sur $\overline{A}$, on a $\overline{\mathcal{E}}^{3n}$ qui est très ample pour $n \geq 1$ ([Mu], p.163), ainsi $H^i(\overline{A}, \overline{\mathcal{E}}^{3n}) = 0$ pour $i \geq 1$ et $n \geq 1$, la $\overline{k}$ -algèbre graduée $D = \oplus_{n\geq 0} H^0(\overline{A}, \overline{\mathcal{E}}^{3n})$ est engendré par $H^0(\overline{A}, \mathcal{E}^3)$.

La technique des bases normales ([Bo, 1], [Ge, vdP]) montre que $H^0(A, \mathcal{E}^{3n})$

est un k^0 -module libre de type fini et que $H^0(\overline{A}, \overline{\mathcal{E}}^{3n}) = H^0(A, \mathcal{E}^{3n}) \otimes \overline{k}$. Soit la k^0 -algèbre graduée $B := \oplus_{n \geq 0} H^0(A, \mathcal{E}^{3n})$, on a donc $D = B \otimes \overline{k}$.

Le faisceau $\mathcal{E}$ définit un morphisme $\varphi : A \to \mathrm{Proj}(B \otimes k)$, la k^0 -algèbre B définit sur $\mathrm{Proj}(B \otimes k)$ une structure analytique formelle et φ est un morphisme formel. Il donne en réduction $\overline{\varphi} : \overline{A} \to \overline{\mathrm{Proj}(B \otimes k)} = \mathrm{Proj}(D)$; ainsi $\overline{\varphi}$ est l'isomorphisme défini par le faisceau très ample $\overline{\mathcal{E}}$. Cela montre alors que φ est aussi un isomorphisme.

Ainsi A est une variété algébrique projective, donc aussi une variété abélienne. ∎

LEMME .— *Soit $\mathcal{G}$ un faisceau inversible formel sur $\Omega \times A$ tel que $\mathcal{G} \otimes k$ soit trivial et que $\mathcal{G}_{\Omega \times \{1\}}$ soit trivial. Alors $\mathcal{G}$ est trivial.*

Démonstration.— Dire que $\mathcal{G} \otimes k$ est trivial, c'est aussi dire que $\mathcal{G}$ est dans le noyau de l'homomorphisme canonique $H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A}) \to H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* \mathcal{O}^{*}_{\Omega \times A})$ (où $\rho : \Omega \times A \to \overline{\Omega} \times \overline{A}$ est la réduction). On va montrer que chaque élément de ce noyau provient d'un faisceau inversible formel de Ω. Et comme $\mathcal{G}|_{\Omega \times \{1\}}$ est trivial, cela montre que $\mathcal{G}$ est trivial.

On considère les deux suites exactes sur $\overline{\Omega} \times \overline{A}$:

$$1 \to \rho_* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A} \to \rho_* k^* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A} \to \mathcal{K} \to 1$$

$$1 \to \rho_* k^* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A} \to \rho_* \mathcal{O}^{*}_{\Omega \times A} \to \mathcal{Z} \to 0,$$

$\mathcal{K}$ est le faisceau de fibre k^*/k^{0*} et $\mathcal{Z}$ sur $\overline{\Omega} \times \overline{A}$ a le support $D \times \overline{A}$ où D est l'ensemble des points doubles de $\overline{\Omega}$ et $\mathcal{Z}|_{D \times \overline{A}}$ est le faisceau constant de fibre $\mathbf{Z}$.

La première suite montre aisément que l'homomorphisme $H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A}) \to H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* \mathcal{O}^{*}_{\Omega \times A})$ est un isomorphisme.

La seconde suite donne la suite exacte

$$\begin{aligned} 1 \to k^* \to \mathcal{O}^*_{\Omega \times A}(\Omega \times A) \to H^0(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \mathcal{Z}) \to H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* k^* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega \times A}) \\ \to H^1(\overline{\Omega} \times \overline{A}, \rho_* \mathcal{O}^{*}_{\Omega \times A}) \to 0 \end{aligned}$$

Remplaçons $\Omega \times A$ par Ω, on trouve aussi

$$1 \to k^* \to \mathcal{O}^*_{\Omega}(\Omega) \to H^0(\overline{\Omega}, \mathcal{Z}') \to H^1(\overline{\Omega}, \rho_* k^* \mathcal{O}^{0*}_{\Omega}) \to H^1(\overline{\Omega}, \rho_* \mathcal{O}^{*}_{\Omega}) \to 0$$

Maintenant les trois premiers termes de ces suites exactes coïncident, alors il existe un faisceau inversible formel $\mathcal{L}_1$ sur Ω avec $\mathcal{G} \simeq p_1^* \mathcal{L}_1$ (où $p_1 : \Omega \times A \to \Omega$ est la projection) et $\mathcal{L}_1 \otimes k$ trivial. ∎

5.2 L'algébricité de G

COROLLAIRE .— *Le groupe analytique G défini en 3.5 est un groupe algébrique et $\pi : G \to A$ est un morphisme algébrique.*

Démonstration.— On a $\mathcal{U} \simeq (\widetilde{i}_\Omega \times 1_A)^*\theta_2(\mathcal{E})$ (voir la démonstration de 5.1) et $\tau([\gamma]) = (\gamma^*\mathcal{U})\otimes\mathcal{U}^{-1}|_{w_0\times A}$ (voir 4.1), on a aussi $\tau([\gamma]) = a(\gamma)^*\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}^{-1}$ où $a(\gamma) \in A$ est l'image de $[\gamma]$ par $\Gamma_{ab} = \Lambda \subset G\xrightarrow{\pi}A$; par ailleurs $a(\gamma)^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^{-1}$ est élément de $Pic^0(A)$.

Une vérification immédiate montre que G est le groupe analytique associé au groupe algébrique extension de A par T correspondant à l'homomorphisme $\tau : X(T) \to Pic^0(A)$. ∎

6. Uniformisation des variétés abéliennes

6.1 Extension d'une variété abélienne par un tore

Soient A une variété abélienne avec bonne réduction $r : A \to \overline{A}$, T le tore sur k de dimension h, $X(T)$ son groupe des caractères. On a donc $T = \text{Spec}(k[X(T)]) \simeq \text{Spec}\ k[Z_1, Z_2, \ldots, Z_h, Z_1^{-1}, \ldots, Z_h^{-1}]$.
Soit $T^0 := \{t \in T|\ |\chi(t)| = 1, \text{ pour tout } \chi \in X(T)\} \simeq Spm\ k < Z_1, \ldots, Z_h, Z_1^{-1}, \ldots, Z_h^{-1} >$ c'est un sous-groupe affinoïde de T (muni de sa structure analytique). Soient $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ une base de $X(T)$, $\varepsilon \geq 0$ avec $1+\varepsilon \in |k^*|$, $T^\varepsilon := \{t \in T|(1+\varepsilon)^{-1} \leq |\chi_i(t)| \leq 1+\varepsilon, \ 1 \leq i \leq h\}$.

On dit qu'un groupe analytique G est extension de A par T, s'il existe une suite exacte de morphismes analytiques

$$(1) \to T\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\pi}A \to (1),$$

où i est une immersion fermée et où π se trivialise sur un recouvrement formel de A. Cela veut dire qu'il existe un recouvrement formel $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de A avec des isomorphismes $f_i : \pi^{-1}(U_i)\xrightarrow{\sim}U_i \times T$ qui possèdent les propriétés suivantes

(i) le diagramme suivant est commutatif pour $1 \leq i \leq n$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times T \arrow[dl, "pr_1"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

(ii) $f_j \circ f_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times T \to (U_i \cap U_j) \times T$ est de la forme $(u, t) \to (u, \xi_{ij}(u)t)$, où $\xi_{ij} : U_i \cap U_j \to T^0$ est un morphisme.

On définit alors $G^0 := \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i \times T^0)$, $G^\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i \times T^\varepsilon)$ pour $1 + \varepsilon \in |k^*|$. Alors G^0 est un sous-groupe (quasi-compact) de G, il est ainsi muni d'une structure formelle et on a la suite exacte ([Re, vdP], 1. 6.1)

$$(1) \to T^0 \to G^0 \to A \to (1)$$

De plus $\tau : X(T) \to H^1(A, \mathcal{O}_A^{0*})$ défini par $\chi \to (\chi \circ \xi_{ij})_{ij}$ est un homomorphisme, mieux τ est à valeurs dans $Pic^0(A^{an})$. On peut montrer que les extensions analytiques de A par T sont en bijection avec $\mathrm{Hom}(X(T^{an}), Pic^0(A^{an}))$; comme le groupe des caractères du tore algébrique T est le même que le groupe des caractères du tore analytique T^{an} et comme $Pic^0(A) \simeq Pic^0(A^{an})$ (c'est $GAGA$, [Ko]), il suit que les extensions analytiques de A^{an} par T^{an} sont aussi les extensions algébriques de A par T et en particulier le morphisme π est algébrique.

6.2 Le théorème de l'uniformisation des variétés abéliennes

THÉORÈME .— *Soit Z une variété abélienne. Alors il existe un groupe algébrique G et un morphisme analytique surjectif $u : \mathcal{G} \to Z$ avec les propriétés suivantes :*

1) $u : G \to Z$ est le revêtement analytique universel de Z ; donc $u : G \to Z$ est unique à isomorphisme près.

2) On a une suite exacte (algébrique)

$$(1) \to T \to G \to A \to (1)$$

où T est un tore, A une variété abélienne avec bonne réduction (T et A sont uniques).

3) Il existe $\varepsilon > 0$ avec $1 + \varepsilon \in |k^*|$ et tel que $u|_{G^\varepsilon} : G^\varepsilon \to Z$ soit une immersion ouverte.

4) $\ker u$ *est un sous-groupe discret, libre de rang égal à la dimension de T.*

Démonstration.— Si $u : G \to Z$ est un revêtement analytique, il devient alors le revêtement universel parce que G est simplement connexe (3.3, p.315 de [vdP, 4]).

S'il existe une courbe C avec $Z = \mathrm{Jac}(C)$, le théorème n'est autre que 2.5, 2.6, 3.4, 3.5.2, 4.1 (partie 4), 4.4, 5.1.

Si Z est quelconque il existe une courbe C et un morphisme surjectif $\mu : \operatorname{Jac} C \to Z$ ([Mi, 2], theorem 10.1, p.198); soit Y la composante unité de $\ker\mu$, alors il existe une isogénie $\rho : \operatorname{Jac}(C) \to Y \times Z$ ([Mi, 1]; prop. 1.2.1, p.122). Il résulte alors des lemmes 1 et 2 ci-après que le théorème est satisfait pour Z.

LEMME 1 .— *Soit $\varphi : Y \to Z$ une isogénie entre deux k -variétés abéliennes. Si Y satisfait le théorème 6.2, alors il en est de même de Z.*

Démonstration. — On a donc un groupe algébrique G et $u : G \to Y$ un revêtement analytique universel et une suite exacte $(1) \to T \to G \xrightarrow{\pi} A \to 0$ où T est un tore et A une variété abélienne, le tout satisfaisant les conclusions du théorème. Ainsi u induit un isomorphisme $\overline{u} : G^0 \xrightarrow{\sim} u(G^0) \subset Y$, soient $Y^0 = \overline{u}(G^0)$ et $E = u^{-1}((\ker\varphi) \cap Y^0) \subset G^0 \subset G$. Alors E est un schéma en groupes finis sur k et fermé dans G, posons $E_1 = E \cap T$, $E_2 = \pi(E)$, on a aussi E_2 fermé dans A. Cela induit la suite de groupes algébriques

$$1 \to T/E_1 \to G/E \to A/E_2 \to (1).$$

On sait que A/E_2 est encore une variété abélienne avec bonne réduction. Le noyau de $X(T) \to \mathcal{O}_{E_1}(E_1)^*$ est un sous-groupe H de $X(T)$ (le groupe des caractères de T) avec $[X(T) : H] = \operatorname{rang de} E_1$. En plus T/E_1 s'identifie à $\operatorname{Spec}(k[H])$ par l'injection $k[H] \to k[X(T)]$.

Ainsi G/E est extension d'une variété abélienne par un tore. Par ailleurs u induit un morphisme injectif $u_1 : G/E \to Y/(\ker\varphi) \cap Y^0$ qui est un revêtement analytique (universel); donc $u_1 : G/E \to Y/(\ker\varphi) \cap Y^0$ satisfait les propriétés du théorème.

On peut donc supposer maintenant que $\ker\varphi \cap Y^0 = (0)$. Dans cette situation on a $\ker(\varphi \circ u)/\ker u \simeq \ker\varphi$, comme $\ker\varphi$ est fini, on a donc $\ker(\varphi \circ u)$ qui est discret, libre de rang la dimension de T et $\varphi \circ u : G \to Z$ est bien un revêtement analytique. Ce qui montre le lemme. ∎

LEMME 2 .— *Soient Y et Z deux k -variétés abéliennes. Si $Y \times Z$ satisfait le théorème, alors il en est de même de Y et de Z.*

Démonstration. — Soient G un groupe algébrique et $u : G \to Y \times Z$ un revêtement universel et une suite exacte $(1) \to T \to G \xrightarrow{\pi} A \to 0$ où T est un tore. Soient p_1, p_2 les endomorphismes de $Y \times Z$ projection respectivement sur $Y \times \{1\}, \{1\} \times Z$. Alors $p_1 + p_2 = 1$, $p_1^2 = p_1$, $p_2^2 = p_2$, $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$.

Comme G est le revêtement universel de $Y \times Z$, p_1 et p_2 se relèvent en les endomorphismes analytiques q_1 et q_2 de G avec les mêmes propriétés que p_1 et p_2.

Soit φ un endomorphisme analytique de G, alors $\pi \circ \varphi(T) = 0$ (c'est le lemme 3, ci-après), ce qui montre que $\varphi(T) \subset T$. Ainsi φ induit un endomorphisme φ_1 de T et un endomorphisme φ_2 de $G/T = A$.

Soient $\tau : X(T^{an}) \to Pic(A^{an})$ l'homomorphisme qui définit l'extension $(1) \to T \to G \to A \to (1)$ (6.1), $\alpha_2 \in EndA^{an}$, $\alpha_1 \in EndT^{an}$. Alors il existe un endomorphisme α de G^{an} qui induit α_1 et α_2 si et seulement si $\alpha_2^* \circ \tau = \tau \circ \alpha_1^*$ où $\alpha_1^* : X(T^{an}) \to X(T^{an})$ est induit par α_1 et $\alpha_2^* : Pic^0(A^{an}) \to Pic^0(A^{an})$ est induit par α_2.

On a $End(T^{an}) = End(T)$ (c'est élémentaire) et $End(A^{an}) = End(A)$ (c'est $GAGA$, [Ko]). Il suit donc que $End(G^{an}) = End(G)$, i.e. que les endomorphismes analytiques de G sont algébriques.

Ainsi $q_1 = (u_1, v_1)$, $q_2 = (u_2, v_2)$ avec $u_1, u_2 \in EndT$ $v_1, v_2 \in EndA$.

On a donc $G \simeq G_1 \times G_2$, $G_1 = \ker q_2$, $G_2 = \ker q_1$, $T \simeq T_1 \times T_2$, $T_1 = \ker u_2$, $T_2 = \ker u_1$, $A \simeq A_1 \times A_2$, $A_1 = \ker v_2$, $A_2 = \ker v_1$,. On déduit les suites exactes $(1) \to T_1 \to G_i \to A_i \to (1)$, $i = 1,2$ et u induit un revêtement universel $u_1 : G_1 \to Y$ resp. $u_2 : G_2 \to Z$ qui satisfont chacun le théorème. ∎

LEMME 3 .— *Soient A une variété abélienne avec bonne réduction, F une partie finie (ou compacte) de $\mathbf{P}^1_k$, $\rho : \{\mathbf{P}^l_k - F\} \to A$ un morphisme analytique. Alors $\rho(\mathbf{P}^1_k - F)$ est un point.*

Démonstration. — Soit $V \subset \mathbf{P}^1_k - F$ un affinoïde connexe, alors V possède une structure formelle avec une réduction $\overline{V}$ de façon que $\rho : V \to A$ soit un morphisme formel. Alors $\overline{\rho} : \overline{V} \to \overline{A}$ a pour image un point $\overline{a}_0$, parce que les composantes de $\overline{V}$ sont des ouverts de $\mathbf{P}^1_{\overline{k}}$ ([Mi], corollary 3.8, p.107). Il s'ensuit que $\rho(\mathbf{P}^1_k - F) \subset r^{-1}(\overline{a}_0)$. Sachant qu'une fonction analytique bornée sur $\mathbf{P}^1_k - F$ est constante, on déduit que l'image de ρ est un point. ∎

Bibliographie

[Bo, 1] S. BOSCH. "*Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*". Manuscripta math 1, 35–57 (1969).

[Bo, 2] S. BOSCH. "*Zür Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme*" Manuscripta math 20, a–27 (1977).

[B, G, R] S. BOSCH., U. GUNTZER, R. REMMERT. "*Non-archimedean analysis*". Springer-Verlag (1984).

[Bo-Lu, 1] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT. "*Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*". Math. Ann. 270, 349–379 (1985).

[Bo, Lu, 2] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT. "*Stable reduction and uniformization of abelian varieties II*". Invent. math. 78, 257–297 (1984).

[Fr, vdP, 1] J. FRESNEL, M. van der PUT. "*Géométrie analytique rigide et applications*". Birkhäuser (1981).

[Fr, vdP, 2] J. FRESNEL, M. van der PUT. "*Localisation formelle et groupe de Picard*". Ann. Inst. Fourrier 33, 4, 19–82 (1983).

[Ge, vdP] L. GERRITZEN, M. van der PUT. "*Schottky groups and Mumford curves*". LN 817 (1980).

[Ge, Gr] L. GERRITZEN, H. GRAUERT. "*Die Azyklizität der affinoiden Uberdeckungen*". Global analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, 159–184. Princeton university press (1969).

[Ha] R. HARTSHORNE. "*Algebraic geometry*". Springer-Verlag (1977).

[He, vdP] E. HEINRICH, M. van der PUT. "*Uber die Picardgruppen affinoider Algebren*". Math Z. 186, 9–28 (1984).

[Ko] U. KOPF. "*Uber eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Raümen*. Schriftenreihe Math. inst. Univ. Münster, 2 serie, Heft 7 (1974).

[Mi, 1] J.S. MILNE. "*Abelian varieties*". Arithmetic geometry edited by G. Cornell, J.H. Silverman, Springer-Verlag (1986).

[Mi, 2] J.S. MILNE; "*Jacobian varieties*". Arithmetic geometry edited by G. Cornell, J.J. Silverman, Springer-Verlag (1986).

[Mu] D. MUMFORD. "*Abelian varieties*". Oxford university press (1974).

[vdP, 1] M. van der PUT. "*The class group of a one-dimensional affinoid space*". Ann. Inst. Fourier, 30, 4, 155–164 (1980).

[vdP, 2] M. van der PUT. "*Etale coverings of a Mumford curve*". Ann. Inst. Fourier 33,, 1 29–52 (1983).

[vdP, 3] M. van der PUT. "*Stable reductions of algebraic curves*". Proc. Nederl. Akad. Wetensch. A. 87 (4), 461–478 (1984).

[vdP, 4] M. van der PUT. "*A note on p-adic uniformization*". Proc. Nederl. Akad. Wetensch. A. 90 (3), 313–318 (1987).

[vdP, Re] M. van der PUT, M. REVERSAT. "*Construction analytique rigide de variétés abéliennes*". A paraître. Bull. soc. math. France (1989).

[Ra] M. RAYNAUD. "*Variétés abéliennes et géométrie rigide*". Actes, congrès intern. math. 1970. Tome 1, 473–477.