

ANTONIO SIGNORINI

Résultats simples de la théorie non linéarisée de l'Élasticité

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 23 (1959), p. 5-21

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1959_4_23__5_0

© Université Paul Sabatier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.
POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

Résultats simples de la théorie non linéarisée de l'Elasticité

Conférence faite à l'E.N.S.E.E.H. de Toulouse
par **Antonio SIGNORINI**

Académicien Secrétaire des Lincei, Professeur à l'Université de Rome. (Mai 1960)

1. Introduction

Cette conférence est consacrée aux études que je poursuis depuis une trentaine d'années⁽¹⁾ dans le domaine de la théorie la plus générale de l'Elasticité.

C'est à Toulouse qu'Eugène COSSERAT était professeur lorsqu'en 1896 il publia, dans les *Annales de la Faculté des Sciences*, avec son frère François, un Mémoire⁽²⁾ qui fut une véritable pierre milliaire dans le développement de la théorie générale de l'Elasticité.

Après, il n'y eut pas de contributions substantielles jusqu'aux Notes⁽³⁾ publiées par Emile ALMANZI, en 1911, dans les « Rendiconti dei Lincei ».

Mes études et celles de mes collaborateurs n'ont jamais eu recours à des escamotages commodes, mais douteux; on s'est toujours fidèlement astreint aux directives que je vais brièvement esquisser.

Dans la théorie classique de l'Elasticité on traite le déplacement local comme infiniment petit, en réalisant ainsi un double profit, plus ou moins justifié.

Chaque problème est ramené à un problème linéaire, au moins si l'on ne songe pas à des liaisons unilatérales.

Le potentiel élastique se réduit à une forme quadratique, si bien que, pour atteindre son expression définitive, on n'a qu'à demander à la Phy-

(1) *Trasformazioni termoelastiche finite* « Annali di Matematica, série IV » : 1^{er} Mém., t. XXII (1943), pp. 33-143; 2^e Mém., t. XXX (1949), pp. 1-72; 3^e Mém., t. XXXIX (1955), pp. 147-201. Un 4^e Mém. va paraître dans le t. des « Annali » dédié à M. G. SANSONE

(2) E. et F. COSSERAT, *Sur la théorie de l'Elasticité* « Annales de Toulouse », t. X (1896), pp. 1-116.

(3) E. ALMANZI, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi* « Rend. Lincei », 1^{er} sem. 1911, p. 705; 2^e sem. 1911, pp. 89 et 289.

sique expérimentale les valeurs d'un certain nombre de paramètres, et non pas la forme d'une fonction inconnue de plusieurs variables.

La théorie générale de l'Elasticité se révèle donc bien plus difficile que la théorie classique. En rejetant l'infinitésimalité des déplacements élastiques on aboutit toujours à des problèmes d'intégration non linéaires et, comme si cela ne devait pas suffire, tout calcul numérique exige la résolution préalable d'un problème extrêmement difficile de véritable Physique mathématique, que j'appelle le *problème central* de la théorie. Ce n'est plus un problème de Mathématique physique, c'est le *choix de l'expression complète du potentiel élastique*.

J'ai dit « déplacements élastiques » et « potentiel élastique ». J'aurais proprement dû dire « transformations thermoélastiques » et « potentiel thermodynamique ».

Lorsqu'on renonce à l'« infinitésimalité des déplacements », la loi de HOOKE doit céder le pas aux deux principes classiques de la Thermodynamique, conformément aux indications données par W. THOMSON dès 1855. On est finalement ramené à un schéma purement mécanique soit dans le cas des transformations isothermes, soit dans le cas des transformations adiabatiques. Cependant, même si l'on veut seulement s'occuper de transformations isothermes, au moment décisif [je veux dire, au moment du choix du potentiel élastique] on doit bien se rappeler les liens intimes entre la Théorie de l'Elasticité et la Thermodynamique.

Aujourd'hui je ne dirai même pas un mot à l'égard des problèmes d'intégration dont je parlai l'année passée à Rome⁽⁴⁾, à l'Institut Poincaré, et à Naples⁽⁵⁾, Aujourd'hui je viserai spécialement aux faits simples et non banaux qui peuvent se présenter dans la théorie non linéarisée : « non banaux », car ils restent complètement inaperçus de la théorie classique. Mais je ne pourrai me passer d'un court résumé de mes études pour la systématisation de la théorie entière.

Je m'adresserai spécialement aux systèmes incompressibles à température constante : on sait bien le rôle de cette liaison intérieure pour tout ce qui se rapporte au caoutchouc et aux corps semblables. Il va sans dire que je commence par le rappel de choses bien connues, dans la forme qu'il vaut mieux pour mon but.

2. Déplacements réguliers

Soit S un système continu à trois dimensions, c son état actuel; c_* un état de référence de S , choisi de la façon qui se révèle la plus commode pour un but déterminé, parmi tous les états possibles de S .

Je note P_* et P un couple quelconque de points correspondants de c_* et c ; y_r et x_r ($r = 1, 2, 3$) les coordonnées de P_* et P par rapport à un repère

(4) *Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata* « Rend. di Matematica », vol. 18 (1959), pp. 95-139.

(5) *Sulla statica dei sistemi elastici vincolati* « Atti del VI Congresso della U. M. I. », pp. 79-93.

cartésien orthogonal $\mathcal{C}$, dont j'appelle 0 l'origine; u_r les composantes du déplacement local $\mathbf{s} = \mathbf{P}_* \mathbf{P}$, par rapport au même repère;

$$\mathcal{D} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} > 0$$

le déterminant jacobien des x par rapport aux y .

Il est superflu de rappeler que la différence $\mathcal{D} - 1$ donne le coefficient de dilatation cubique δ_c pour le déplacement $c_* \rightarrow c$, et le fait que le déplacement, quelle que soit son entité, dans le voisinage de chaque $\mathbf{P}_*$ ne diffère sensiblement pas d'une transformation homographique, bien plus, d'une simple affinité, $\bar{a}$.

Il n'est pas exclu qu'une telle *affinité locale* se réduise à une *déformation pure*, je veux dire, qu'elle admette trois *demi-droites* unies mutuellement orthogonales.

Quoi qu'il en soit, en correspondance à tout déplacement fini il est possible — et il convient systématiquement — de décomposer a en une déformation pure $\mathcal{E}$ suivie d'un déplacement d'ensemble $\mathcal{R}$,

$$(1) \quad a \equiv \mathcal{R} \cdot \mathcal{E}.$$

En posant

$$\varepsilon_{rs} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial y_r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial y_r} \frac{\partial u_i}{\partial y_s}$$

et ensuite

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12},$$

on voit que la déformation pure est exactement déterminée par les valeurs des six ε_j , les six *composantes de la déformation*. En particulier s'exprime comme fonction des ε_j le coefficient de dilatation cubique :

$$\delta_c = \mathcal{D}[\varepsilon] - 1$$

où $\mathcal{D}[\varepsilon]$ est la racine carrée d'un certain polynôme du troisième degré par rapport aux ε_j

Au contraire, dans la détermination de la *rotation locale* — c'est-à-dire de la rotation d'ensemble inhérente à $\mathcal{R}$ — les valeurs des neuf $\partial u_r / \partial y_j$ interviennent même hors des six combinaisons ε_j .

Pour les déplacements finis, les invariants principaux de déformation, les trièdres principaux, les trois composantes principales de déformation $\mathbf{E}_r$ et les trois dilatations principales Δ_r sont bien définis comme dans le cas des déplacements infiniment petits, mais il ne faut pas oublier que, dans un déplacement fini les Δ_r diffèrent sensiblement des $\mathbf{E}_r$.

Depuis l'époque de Lord KELVIN le déplacement $c_* \rightarrow c$ est dit *homogène* si toute ε_j a la même valeur en tout point de c_* : restriction qui équivaut exactement à celle que les x soient fonctions linéaires des y .

3. Systèmes à transformations réversibles

J'en viens à m'occuper du « stress » en appelant X_{rs} les composantes de tension par rapport au repère $\mathcal{C}$, dont les signes soient précisés par la convention d'évaluer positivement les pressions.

Pour tout élément e du système, entourant P_* en c_* et P en c , je noterai toujours dc_* et k_* le volume et la densité dans l'état de référence, dc et k le volume et la densité dans l'état actuel.

J'appelle $\mathbf{Z}(P) \equiv (z_1, z_2, z_3)$ un déplacement infinitésimal de S à partir de c et $\partial l^{(i)}$, dc_* le travail nominal des forces intimes ⁽⁶⁾ en e , c'est-à-dire je pose

$$\partial l^{(i)} = \mathcal{D} \sum_{rs} X_{rs} \frac{\partial z_r}{\partial x_s},$$

C'est un mérite indiscutable de E. et F. COSSERAT d'avoir relevé que le travail nominal des forces intimes peut aussi être exprimé par une forme linéaire des variations $d\varepsilon_{rs}$ des ε_{rs} relatives au déplacement $\mathbf{Z}$: disons, par une forme linéaire des variations $d\varepsilon_i$ des six ε_i [tandis que les $\partial \xi_r / \partial x_s$ sont au nombre de neuf]. Précisément, on trouve qu'on a toujours :

$$(2) \quad \partial l^{(i)} = \sum_{rs} Y_{rs} d\varepsilon_{rs}$$

$$\text{avec } (2)' \quad Y_{rs} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_{i,k}^3 C_{ik} C_{ir} C_{ks} X_{ik},$$

si l'on note C_{rs} les compléments algébriques des éléments de $\mathcal{D}$.

Cette définition des Y_{rs} a comme conséquence immédiate

$$Y_{sr} = Y_{rs}.$$

Il convient donc d'introduire aussi les notations

$$Y_r = Y_{rr}, \quad Y_4 = Y_{23}, \quad Y_5 = Y_{31}, \quad Y_6 = Y_{12},$$

qui par exemple réduisent (2) à

$$(2)'' \quad \partial l^{(i)} = \sum_i Y_i d\varepsilon_i.$$

D'autre part, au moins dans le domaine des phénomènes dont je veux m'occuper, on peut exprimer le premier principe de la Thermodynamique par l'égalité

$$(3) \quad \partial q \cdot k_* dc_* = dw \cdot k_* dc_* + \partial l^{(i)} dc_*$$

en notant $\partial q \cdot k_* dc_*$ l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur reçue par e , w l'énergie interne, fonction caractéristique de la nature de S , définie pour tout e à l'adjonction d'une constante près.

(6) Forces intimes : je veux ainsi indiquer brièvement les forces intérieures qui sont représentées sur le schéma du continu par les « efforts intérieurs de contact ».

Avec ces notations, la condition que S soit un système à transformations réversibles, S_φ , se traduit par l'existence d'une autre fonction caractéristique — s , entropie — telle que l'on ait

$$(4) \quad \frac{\partial q}{T} = ds$$

pour tout e et pour toutes ses transformations élémentaires, si l'on note T la température actuelle de l'élément.

Dans s aussi, pour tout e , il reste une constante arbitraire additive.

Pour tout S_φ je noterai $\mathcal{F}$ une troisième fonction caractéristique, la fonction

$$\mathcal{F} = w - s T,$$

correspondant au potentiel thermodynamique de DUHEM, à l'énergie libre de HELMHOLTZ. On doit entendre que la forme de $\mathcal{F}$ est aussi suggérée, sinon imposée, par l'espèce du corps naturel schématisé en S_φ ; mais pour tout e reste arbitraire l'adjonction d'une fonction linéaire de T . En éliminant ∂q entre (3) et (4), on trouve

$$(5) \quad k_* d\mathcal{F} = -\partial l^{(i)} - k_* s dT.$$

A ce stade, l'intervention de (2)'' est décisive, car elle permet de substituer

$$(5)' \quad k_* d\mathcal{F} = -\sum_j d\varepsilon_j - k_* s dT$$

à (5). En premier lieu, cette égalité nous dit que pour tout S_φ le potentiel thermodynamique doit rentrer parmi les fonctions du type

$$\mathcal{F}[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_6 T] \equiv \mathcal{F}[\varepsilon | T].$$

Pour aller plus loin, il faut distinguer le cas des systèmes sans liaisons intérieures — disons brièvement, le cas des systèmes *compressibles* — du cas des systèmes *incompressibles à température constante*, G_φ , systèmes auxquels ma conférence veut spécialement s'adresser.

Une telle liaison intérieure est donnée par la condition que pour tout e , le coefficient de dilatation cubique est univoquement déterminé par la température actuelle T , et par la température T_* dans l'état de référence. Elle peut être exprimée par une équation du type

$$(6) \quad \mathcal{D}[\varepsilon] = \lambda^3(T, T_*)$$

avec

$$(6)' \quad \lambda(T_*, T_*) = 1.$$

Pour toute fonction $\psi[\varepsilon]$ des ε_j j'abrègerai la notation $\partial\psi/\partial\varepsilon_j$ en ψ_j . S'il s'agit d'un système compressible la condition (5)' doit être satisfaite pour tout choix des ε_j et dT , de manière qu'elle équivaut à l'égalité des produits $k_* \mathcal{F}_j$ aux $-Y_j$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) et de $\partial \mathcal{F} / \partial T$ à $-s$. Au contraire pour un système incompressible, les

ε_j et T n'ont plus le caractère de variables complètement indépendantes.

Les $d\varepsilon_j$ sont alors liées à dT par l'égalité

$$\sum_j \mathbb{D}_j d\varepsilon_j = \frac{\partial \lambda^3}{\partial T} dT.$$

En définitive, on peut seulement conclure qu'il existe une fonction scalaire,

$$p(P_*),$$

telle que les sept égalités

$$(7) \quad k_* \mathcal{F}_j = -Y_j + p \mathbb{D}_j, \quad k_* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = -k_* s - p \frac{\partial \lambda^3}{\partial T}$$

sont simultanément vérifiées.

Le scalaire p résume les forces de liaison intérieures. On peut brièvement l'appeler la *pression* [positive ou négative] au point P , point quelconque de l'état actuel du système incompressible.

Au moins jusqu'ici, on revient aux systèmes compressibles en posant $p = 0$ et en oubliant la liaison (6).

4. Extension des formules de Almansi

Je reprends la formule de décomposition

$$a = \mathcal{R} \cdot \mathcal{E}$$

en appelant

$$\mathcal{P} \equiv P_* i_1 i_2 i_3$$

le trièdre principal de déformation en P_* et $\mathcal{P}_\varphi$

le trièdre trirectangle dans lequel $\mathcal{P}$ est transformé par le déplacement d'ensemble $\mathcal{R}$. Evidemment c'est bien $\mathcal{P}_\varphi$ le trièdre principal de déformation pour le *déplacement inverse*,

$$c \rightarrow c_*,$$

celui qui ramène le système de son état actuel à l'état de référence.

En même temps, je conviens de noter X_{rs}^* les composantes de tension par rapport à $\mathcal{P}_\varphi$, et non plus par rapport au repère fixe $\mathcal{C}$.

La déformation pure $\mathcal{E}$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des six composantes de la déformation ε_j , mais elle l'est aussi avec l'ensemble des trois composantes principales de déformation E_r et de trois paramètres angulaires φ_r propres à caractériser l'orientation de $\mathcal{P}$: par exemple, les trois angles d'EULER de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{C}$.

Ainsi, sans devoir encore distinguer le cas de systèmes isotropes de celui des systèmes anisotropes, on peut aussi songer, pour le potentiel thermodynamique, à une expression du type

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(E)} \{ E \mid \varphi \mid T \}.$$

En éliminant les Y entre (2)' et (7), chaque $\mathcal{F}_j$ se présente comme une fonction linéaire homogène de p et des composantes du « stress » par rapport à un trièdre fixe. Eh bien, il y a possibilité de transformer ces expressions des $\mathcal{F}_j$ en des expressions assez simples des dérivées de $\mathcal{F}^{(E)}$ au moyen de p et des X_{rs}^* . Pour écrire toutes les six formules que j'ai indiquées⁽⁷⁾ à la fin de 1958, il convient de faire usage des trois vecteurs ω_r définis par les formules

$$\omega_r = \frac{1}{2} \sum_s i_s \wedge \frac{\partial i_s}{\partial \varphi_r} \quad (r = 1, 2, 3),$$

Par exemple, si les φ_r sont des angles d'EULER, les trois ω_r sont le verqueur de la ligne des nœuds, le verqueur de l'axe de figure et celui de l'axe de précession.

En appelant ω_{rs} les composantes de ω_r par rapport à $\mathcal{T}$, et d_r les binômes $1 + \Delta_r$, les formules en question sont

$$(8) \quad k_* \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = - \frac{\mathcal{D}}{d_r^2} (X_{rr}^* - p), \quad k_* \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial \varphi_r} = - \mathcal{D} \sum_s \omega_{rs} \frac{d_{s+1}^2 - d_{s+2}^2}{d_{s+1} d_{s+2}} X_{s+1, s+2}^*$$

Elles sont valables pour tout système à transformations réversibles pourvu que l'on pose $p = 0$ pour les systèmes compressibles. Si $\mathcal{F}$ ne dépend pas de la déformation pure,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(T)$$

les (8) donnent

$$X_{rr}^* = p, \quad X_{r+1, r+2}^* = 0;$$

c'est le cas des *liquides parfaits*.

5. Systèmes isotropes en c_*

Je dirai que $G_{\mathcal{T}_0}$ est isotrope dans un certain état, c_* , toutes les fois que la structure du potentiel thermodynamique est telle qu'en correspondance à tout état actuel et pour tout élément du système $\mathcal{T}_0$ soit *trièdre principal de tension*.

C'est une restriction qui se trouve automatiquement satisfaite dans le cas des liquides parfaits. Quoiqu'il en soit, elle impose, et impose seulement, que tous les efforts tangentiels $X_{s+1, s+2}^*$ soient identiquement nuls. Il résulte donc du deuxième groupe des (8) que notre définition d'isotropie, comme on pouvait bien le présumer, équivaut à imposer au potentiel thermodynamique de ne pas dépendre de l'orientation du trièdre principal de déformation, caractérisée par les φ_r .

Au lieu des E_r , ou des Δ_r , ou des $d_r = 1 + \Delta_r$,

(7) *Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi*, « Rend. Lincei », nov. 1958, pp. 246-253.

on peut parler des binômes

$$A_r = 1 + 2E_r = (1 + \Delta_r)^2 = d_r^2$$

ou des *trois invariants principaux du déplacement* $c_* \rightarrow c$:

$$\mathfrak{J}_1 = \sum_s A_s, \quad \mathfrak{J}_2 = \sum_s A_{s+1} A_{s+2}, \quad \mathfrak{J}_3 = A_1 A_2 A_3 = \mathfrak{Q}_1^*$$

Bien plus, pour les systèmes incompressibles on peut identifier $\mathfrak{J}_3$ avec $\lambda^3 (T, T_*)$. Ainsi, pour le potentiel thermodynamique de tout G_τ isotrope en c_* , nous pourrons partir d'une expression du type

$$(9) \quad \mathcal{F} = F(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, T),$$

Mais en même temps les efforts normaux X_{rr}^* ne pourront plus différer des efforts principaux, $\mathfrak{W}_r$, car $\mathcal{F}$ est trièdre principal de tension.

En définitive, si l'on introduit les *efforts principaux épurés*, $\mathfrak{W}_r^{(a)}$, au moyen des formules

$$\mathfrak{W}_r^{(a)} = \mathfrak{W}_r - p,$$

les (8) se traduisent en

$$(10) \quad \mathfrak{W}_r^{(a)} = - \frac{d_r^2}{\mathfrak{Q}} \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r},$$

Ces formules ont été substantiellement données par E. ALMANI depuis 1911. On peut désormais les lire en disant que le premier groupe des (8) garde une signification simple même pour les systèmes anisotropes : *il continue de donner les efforts normaux épurés $X_{rr}^* - p$ sur les éléments de surface correspondant à ceux qui dans l'état de référence appartiennent aux plans principaux de déformation.*

6. Solides élastiques incompressibles homogènes et isotropes

Dorénavant, ce que je dirai veut spécialement s'adresser aux *solides élastiques homogènes et isotropes*, G_e .

Je commence en admettant comme *propriété principale* des G_e , celle que, pour toute valeur τ de la température dans un certain intervalle (τ_1, τ_2) , il existe *quelque état naturel intrinsèquement stable d'homogénéité et isotropie* à la température uniforme τ . Ce sont seulement des données d'expériences *qualitatives*. Les phénomènes auxquels veut s'adresser la théorie non linéarisée de l'Elasticité sont très complexes et il faut tarder le plus possible à demander à l'expérience des données *quantitatives*.

Dorénavant j'entendrai que c_* soit un c_τ . Bien plus je marquerai la condition d'isotropie dans l'état de référence en écrivant

$$\mathcal{F} = F^{(\tau)}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, T)$$

Si c ne diffère pas de c_* dans les deuxièmes membres des (10) il n'y a que des constantes. Ainsi la condition que notre c_* soit aussi un état naturel $[\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}_3 \equiv 0]$ se borne à imposer à la pression *dans tel état* une même valeur, $p^{(\tau)}$, pour tout P_* .

Il reste à spécifier la restriction ultérieure que c_* soit intrinsèquement stable. Il faut songer à une transformation isotherme du système à partir de c_*

$$g^{(\tau)} \equiv c_\tau \rightarrow c^{(\tau)},$$

sous la liaison intrinsèque d'incompressibilité. Soit $\mathcal{Q}^{(\tau)}$ le travail des forces intimes en $g^{(\tau)}$. En disant état « intrinsèquement stable » on veut naturellement ajouter la restriction

$$(11) \quad \mathcal{Q}^{(\tau)} < 0$$

pour toute $g^{(\tau)}$ qui ne dégénère pas en un simple déplacement d'ensemble. Autrement $\mathcal{Q}^{(\tau)}$ ne peut être que nul.

Il est implicite en (11), qu'à partir d'un c_* , on peut en obtenir un autre à la même température, c'_* , *seulement* par un déplacement d'ensemble, sans quoi le travail des forces intimes devrait être *négatif* pour toute transformation isotherme de c_* en soi-même qui porte le système à passer par c'_* .

Je pourrai donc parler *du* c_τ correspondant à la température actuelle d'un élément déterminé, mais quelconque, *e* du système ; *des* invariants principaux $\mathcal{J}_r^{(T, \tau)}$ relatifs au déplacement $c_\tau \rightarrow c_T$; de la densité k_T et de la pression uniforme $p^{(T)}$ en c_T ; de l'entropie en c_T , $s^{(T)}$.

Est aussi fonction de T seulement la *chaleur spécifique*,

$$(12) \quad c^{(T)} = \frac{T ds^{(T)}}{dT},$$

à considérer comme une autre donnée expérimentale à l'égard de G_* .

7. Similitude des états naturels, potentiel thermodynamique

La propriété principale des G_* , avant tout autre recours à l'expérience, permet de caractériser les déformations dues à de simples changements de température. En effet, on peut déduire de la propriété principale seule, sans besoin d'ajouter aucun autre postulat, que *lorsqu'on change τ en τ' , la déformation d'un c_τ en un $c_{\tau'}$ doit correspondre à une simple similitude*.

Pour tout T notons l_T le maximum de la longueur d'une corde de c_T . Ainsi la nécessaire similitude des états naturels donne lieu à

$$1 + \Delta_r = \frac{l_T}{l_\tau} = \lambda(T, \tau), \quad \mathcal{J}_1^{(T, \tau)} = 3 \frac{l_T^2}{l_\tau^2}, \quad \mathcal{J}_2^{(T, \tau)} = 3 \frac{l_T^4}{l_\tau^4},$$

J'introduis maintenant le *potentiel élastique isotherme* à la température T [la température actuelle de c] par la formule

$$(13) \quad W_T = k_T \left\{ F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) - F^{(\tau)}\left(3 \frac{l_T^2}{l_\tau^2}, 3 \frac{l_T^4}{l_\tau^4}, T\right) \right\},$$

qui implique $W_T \equiv 0$ pour $c \equiv c_T$, quel que soit τ .

Puis je reprends l'égalité (5), pour l'appliquer en premier lieu à la transformation isotherme spéciale qui — en correspondance à un élément déterminé, mais quelconque, e — est définie par l'affinité locale $\mathcal{A}^{(T)}$ relative au déplacement $c_T \rightarrow c$. Le long d'elle, on a $dT = 0$ et le volume de e ne diffère pas du volume final dc .

On voit tout de suite que (5) fournit l'expression

$$(14) \quad l^{(i)} dc_* = -dc \cdot W_T$$

pour le travail total $l^{(i)} dc_*$ des forces intimes à l'égard de l'élément considéré.

Cette égalité est très expressive. D'abord elle rend évident que W_T a une valeur intrinsèque.

L'expression du potentiel isotherme change si l'on change la température τ de l'état de référence, mais la valeur de W_T ne peut différer de celle que (13) donne pour $\tau = T$, c'est-à-dire

$$k_T \{ F^{(T)}(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}, T) - F^{(T)}(3, 3, T) \}$$

si l'on note $\mathcal{J}_r^{(T)}$ les invariants principaux de $\mathcal{A}^{(T)}$, qui pour notre e ont les mêmes valeurs que les invariants principaux de $c_T \rightarrow c$. En somme on a toujours pour W_T une expression intrinsèque du type

$$W_T = W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}).$$

Il est même évident qu'en conséquence de (14) l'inégalité (11) impose

$$(15) \quad W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}) \geq 0,$$

avec le signe = seulement pour $\mathcal{J}_1^{(T)} = \mathcal{J}_2^{(T)} = 3$: W_T doit être positif pour tout autre choix *possible*⁽⁸⁾ des deux arguments.

C'est bien la condition (15) qui distingue carrément un solide parfaitement élastique des autres systèmes à transformations réversibles.

Par exemple on voit bien qu'elle exclut le cas des liquides parfaits, où l'on aurait toujours $W_T = 0$.

Jusqu'ici, d'après (13) on a pour $F^{(\tau)}$ l'expression

$$F^{(\tau)} = \frac{1}{k_T} W_T + F^{(\tau)}\left(3 \frac{l_T}{l_\tau}, 3 \frac{l_T}{l_\tau}, T\right).$$

Mais songeons aussi à la transformation non isotherme donnée par le passage de G_e par tous les états naturels $c_{\tau'}$ de c_τ à c_T .

En correspondance à tout état naturel le travail nominal des forces intimes est identiquement nul.

L'intégration de (5) donne donc, avec le concours de (12),

$$F^{(\tau)}\left(3 \frac{l_T}{l_\tau}, 3 \frac{l_T}{l_\tau}, T\right) = - \int_{T_0}^T s^{(\tau')} d\tau' = - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''} d\tau'',$$

(8) En disant *possible* je veux dire « pour tout choix de $\mathcal{J}_1^{(T)}$ et $\mathcal{J}_2^{(T)}$ compatible avec leur signification d'invariants principaux d'un déplacement qui respecte les volumes.

en notant T_0 et τ_0 deux constantes arbitraires

Le potentiel thermodynamique, par sa définition même,

$$\mathcal{F} = w - s T$$

devait bien être susceptible d'une expression intrinsèque à l'adjonction près d'une fonction linéaire de T . Elle est désormais acquise en

$$(16) \quad F^{(\tau)}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T(\mathfrak{J}_1^{(T)}, \mathfrak{J}_2^{(T)}) - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''} d\tau'',$$

Ce résultat est dû à M. P. G. BORDONI⁽⁹⁾. Comme conséquence immédiate, on a que la détermination complète de la structure de $F^{(\tau)}$ peut être toujours ramenée à assigner, pour tout τ , l'expression $W_\tau(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2)$ du potentiel isotherme, outre les valeurs de l_τ et $c^{(\tau)}$.

En effet, on peut aisément démontrer que la similitude des états naturels donne lieu à toutes les égalités

$$l_T^{sr} \mathfrak{J}_r^{(T)} = l_\tau^{sr} \mathfrak{J}_r = l_\tau^{sr} \mathfrak{J}'_r,$$

où les $\mathfrak{J}'_r$ et l_τ se rapportent à c_τ , et non plus à c_τ .

Le premier groupe de ces égalités permet sans plus de traduire (16) en

$$(16') \quad F^{(\tau)}(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T\left(\frac{l_\tau \mathfrak{J}_1}{l_T}, \frac{l_\tau \mathfrak{J}_2}{l_T}\right) - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''} d\tau''$$

Le deuxième groupe ajoute que les produits $l_\tau^{sr} \mathfrak{J}_r$ ont un caractère invariant par rapport au choix de τ : d'où la nécessité que cela se vérifie aussi pour l'entière $F^{(\tau)}$.

Ainsi se trouve mise hors de doute la valeur du postulat que j'employai il y a longtemps pour caractériser la structure complète du potentiel thermodynamique dans l'*Elasticité du second degré*.

8. Aire de définition du potentiel isotherme

Je viens de montrer que le *problème central* de la théorie des transformations thermoélastiques finies se ramène substantiellement à la détermination du potentiel isotherme W_τ pour toute valeur de τ .

Je me propose maintenant de donner une synthèse convenable de résultats expérimentaux déjà acquis à l'égard de l'expression effective de

$$W_\tau(\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2).$$

A ce qu'il semble, il est très utile d'employer un certain couple de variables indépendantes à la place des trois dilatations principales, liées entre elles, dans toute transformation isotherme, par l'équation

$$(17) \quad (1 + \Delta_1)(1 + \Delta_2)(1 + \Delta_3) = 1.$$

Il s'agit des deux variables

$$\lambda = 1 + \Delta_3 > 0, \quad s = \Delta_1 - \Delta_2,$$

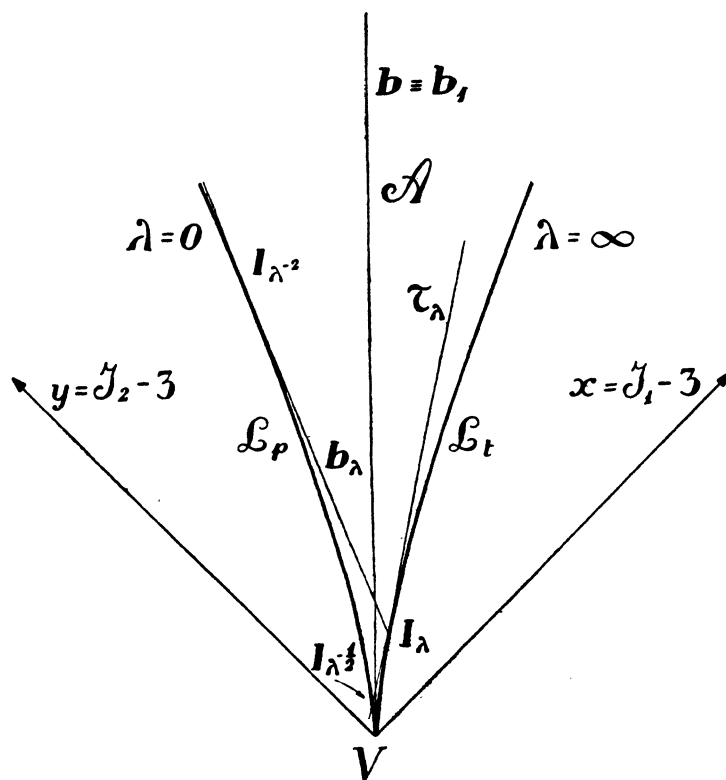
(9) P. G. BORDONI, *On the Exact Relation Between the Specific Heats of an Elastic Solid* « Journal of Rational Mechanics and Analysis », vol. 4 (1955), pp. 975-981.

qui, d'après (17), se trouvent en correspondance biunivoque avec les trois Δ_r et donnent aussi lieu aux simples égalités

$$(18) \quad \mathfrak{J}_1 = s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \quad \mathfrak{J}_2 = s^2 \lambda^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda.$$

Je devrai maintes fois m'adresser aux deux cas particuliers $s = 0$ et $\lambda = 1$. Le premier est le cas d'une *extension simple* accouplée à la contraction latérale nécessaire pour la conservation des volumes, tandis que pour $\lambda = 1$ il s'agit d'un *glissement simple*.

Les égalités (18) se prêtent bien à délimiter d'une manière assez expressive le domaine bidimensionnel où il suffit de considérer W_+ , défini en fonction de $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$:



disons, l'aire plane $\mathcal{A}$ recouverte par le point I de coordonnées cartésiennes orthogonales $\mathfrak{J}_1 - 3$, $\mathfrak{J}_2 - 3$, lorsqu'on donne à λ et s toute valeur entre 0 et ∞ .

Pour $\lambda = 1$ [glissement simple] le point I, lorsque s varie de 0 à ∞ , en partant de $V \equiv (0,0)$ [état naturel] décrit la demi-droite b , bissectrice du premier quadrant.

Au contraire, pour $s = 0$ le lieu de I est donné par la ligne $\mathcal{L}$ ayant comme équations paramétriques⁽¹⁰⁾

$$x = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3 \quad y = \lambda^{-2} + 2\lambda - 3 \quad (\lambda \geq 0).$$

Sur cette ligne, il convient d'indiquer par I_λ le point correspondant à une valeur déterminée λ du paramètre, par $\mathcal{L}_t$ l'arc $I_1 I_\infty \equiv V I_\infty$ [traction simple], et par $\mathcal{L}_p$ l'arc complémentaire $V I_0$ [pression simple].

On reconnaît tout de suite que $I_{\lambda^{-1}}$ est le point symétrique de I_λ par rapport à b , que le long de l'entière $\mathcal{L}$ le coefficient angulaire de la tangente est λ^{-1} , que $\mathcal{L}$ a réellement l'allure de la figure.

Soit maintenant b_λ la demi-droite issue de I_λ avec le coefficient angulaire λ^2 [$b_1 \equiv b$].

C'est bien b_λ qui donne le lieu des positions prises par I si, sans changer λ , on fait varier s de 0 à ∞ .

L'aire $\mathcal{A}$ est donc l'aire délimitée par $\mathcal{L}$ avec le concours d'une partie de la droite à l'infini. La ligne $\mathcal{L}$ est enveloppée par les demi-droites b_λ . La correspondance entre I et les couples de valeurs de λ et s n'est pas biunivoque, car pour tout point de $\mathcal{A}$ il y a une tangente à $\mathcal{L}_t$ et une tangente à $\mathcal{L}_p$.

9. Sur la déduction du potentiel isotherme de l'expérience

Des épreuves de traction ou pression simple ne peuvent numériquement caractériser W_τ que le long des arcs $\mathcal{L}_t$ et $\mathcal{L}_p$. Des essais de glissement simple ne peuvent suffire qu'à le caractériser le long de la demi-droite b .

Des expériences relativement récentes pour une détermination complète de W_τ sont dues à MM. R. S. RIVLIN⁽¹¹⁾ et D. W. SAUNDERS. Pour plusieurs espèces de caoutchouc, moyennant des dispositifs opportunément conçus, ils sont arrivés à la conclusion que l'on peut attribuer à W_τ une expression du type

$$(19) \quad W_\tau = e_1^{(\tau)} (\mathfrak{J}_1 - 3) + \psi_\tau (\mathfrak{J}_2 - 3)$$

avec $e_1^{(\tau)}$ indépendant de $\mathfrak{J}_1$ et $\mathfrak{J}_2$, ψ_τ fonction jamais décroissante de $\mathfrak{J}_2 - 3$ et en plus

$$(19') \quad \psi_\tau'' \leq 0,$$

au moins pour les déformations d'une certaine entité.

Dès qu'une expression du type (19) est présumée, les essais à traction simple deviennent suffisants pour la détermination complète de W_τ en $\mathcal{A}$.

Vice versa, cette observation peut donner l'essor à de nets contrôles de l'hypothèse (19) si l'on dispose aussi de résultats d'essais à pression ou à glissement simple.

(10) Il s'agit d'une branche d'une courbe du quatrième degré.

(11) V. R. S. RIVLIN and D. W. SAUNDERS, *Experiments on the deformation of rubber* « Phil. Trans. », vol. 243 A (1951), pp. 251-288.

Dès 1940, M. M. MOONEY⁽¹²⁾ avait proposé pour W_τ l'expression à laquelle (19) donne lieu si ψ''_τ est identiquement nulle, savoir

$$(M) \quad W_\tau = e_1^{(\tau)} (\mathfrak{J}_1 - 3) + e_2^{(\tau)} (\mathfrak{J}_2 - 3)$$

où $e_2^{(\tau)}$ aussi ne dépend ni de $\mathfrak{J}_1$ ni de $\mathfrak{J}_2$.

Cette proposition s'était principalement basée sur le fait qu'elle se trouvait être en parfait accord avec de soigneux essais à glissement simple. Mais cet accord se serait vérifié même si l'on avait ajouté au deuxième membre de (M) une fonction quelconque de $\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2$.

10. Elasticité du second degré

Dans les expressions (10) des efforts principaux la rotation locale n'intervient pas, même s'il s'agit de transformations non isothermes. Mais la rotation locale doit bien avoir quelque reflet sur les expressions exactes des composantes épurées du « stress » par rapport à un repère fixe :

$$X_{rs}^{(a)} = X_{rs} - \delta_{rs} p,$$

avec la notation de KRONECKER.

En effet, doit être trièdre principal de tension le trièdre $\mathcal{T}_\varepsilon$, qui ne dépend pas de la déformation seule et pour des transformations finies diffère sensiblement de $\mathcal{T}$.

Si l'on veut atteindre des expressions exactes et générales des $X^{(a)}$ il faut songer au déplacement inverse $c \rightarrow c_*$.

A son égard, même du côté physique, le déplacement direct ne peut avancer aucun droit de préséance et ici il est décisif de se placer, d'une certaine manière, d'un point de vue eulérien.

En effet, soient $\overline{\varepsilon}_j$ les composantes de déformation du déplacement inverse [qui pour des déformations finies ne coïncident pas avec les ε_j changées de signe].

Pour le déplacement inverse ce sont bien les trièdres $\mathcal{T}_\varepsilon$ qui se trouvent être trièdres principaux de déformation.

C'est pourquoi, en transformant convenablement les égalités (10) on arrive à reconnaître que les $X^{(a)}$ se présentent toujours comme des fonctions du second degré des $\overline{\varepsilon}_j$, où néanmoins les coefficients peuvent dépendre des invariants principaux.

Ce résultat d'un caractère général m'amena à essayer l'hypothèse que les composantes de tension soient exactement des fonctions du second degré des $\overline{\varepsilon}_j$.

Les résultats ont dépassé mon attente, soit pour les solides compressibles, soit pour les solides incompressibles. Depuis bien des années, j'ai pris l'habitude d'appeler « Elasticité du second degré » la théorie non

(12) M. MOONEY, *A theory of Large Elastic Deformation* « J. Appl. Phys. », XI (1940), pp. 582-592.

linéarisée, ni autrement simplifiée, qui découle d'une telle hypothèse très simple à l'égard de la structure du potentiel thermodynamique.

Pour des systèmes compressibles, dès 1949⁽¹³⁾, l'Elasticité du second degré avait déjà si bien résisté aux épreuves qualitatives les plus rigoureuses, que je ne pouvais m'empêcher de croire qu'il existe *quelque* corps naturel auquel elle convient même du côté quantitatif. Cette présomption a été validée en 1955⁽¹⁴⁾ par un fait inattendu, au moins pour moi : pour des systèmes incompressibles l'hypothèse caractéristique de l'élasticité du second degré impose au potentiel isotherme une expression qui — s'il s'annule un des trois coefficients disponibles en elle — est bien l'expression (M) proposée par M. M. MOONEY en 1940 et après heureusement assujettie à bien des contrôles.

Bien plus on trouve qu'il est même *nécessaire* que le troisième coefficient soit nul si l'on accepte inconditionnellement les résultats des expériences de MM. RIVLIN et SAUNDERS, en particulier la restriction (19)'.

11. Résultats non banaux

Je voudrais terminer en appelant l'attention, au moyen d'exemples tangibles, sur des faits non banaux qui peuvent se présenter dans le domaine de la théorie non linéarisée de l'élasticité : « non banaux » car ils restent complètement inaperçus de la théorie linéarisée.

Envisageons un solide libre, dans un état d'équilibre déterminé par des forces extérieures entièrement données. La théorie classique de l'Elasticité présuppose certains développements en série dans le dessein d'en garder seulement les premiers termes.

Pour les termes suivants, la théorie générale fournit des systèmes d'équations soumis à certaines conditions d'intégrabilité. Les conditions d'intégrabilité se montrent généralement propices à la théorie classique, car en définitive elles se bornent à demander un choix convenable de la rotation d'ensemble du solide *en éliminant ainsi une indétermination traditionnelle*.

Mais en même temps, j'ai pu établir, depuis 1935⁽¹⁵⁾, qu'il y a des cas bien marqués d'exception, où les conditions d'intégrabilité déjà pour les deuxièmes termes ne peuvent être satisfaites et les développements en série présupposés par la théorie classique *n'existent pas*, indépendamment de toute question de convergence.

Depuis presque une vingtaine d'année, les questions délicates qui viennent ainsi se poser ont été l'objet de travaux remarquables de M. C. TOLLTI, récemment complétés par son élève F. STOPPELLI.

(13) *Loc. cit.* (1), 2^e Mém., chap. II.

(14) *Loc. cit.* (1), 3^e Mém., chap. III.

(15) *Trasformazioni termoelastiche finite, caratteristiche dei sistemi differenziali*, « Atti della XXIV Riunione della S. I. P. S., 1935 », 3^e vol., pp. 17-18.

Au Congrès de 1950 à Cambridge Mass, je pus déjà indiquer un cas d'exception d'un type très simple et pas du tout artificiel : celui d'une plaque rectangulaire d'épaisseur quelconque, homogène et isotrope, sollicitée à flexion simple sur chacun des deux couples de bords opposés, au moins si sur deux bords adjacents les axes neutres sont orthogonaux entre eux.

Peut-être, des exemples d'exception si expressifs peuvent-ils justifier un avertissement d'un caractère général : *la linéarisation d'un problème physique peut aussi donner lieu à des anomalies non banales.*

Permettez-moi d'ajouter, Mesdames et Messieurs, que l'exception peut se présenter seulement si l'ensemble des forces extérieures admet un axe d'équilibre au sens de MÖBIUS⁽¹⁶⁾, en particulier dans le cas de l'équilibre astatique.

Non seulement dans la théorie linéarisée, mais aussi dans la théorie complète, l'existence d'un axe d'équilibre s'accompagne généralement de celle d'une infinité de solutions du problème statique.

S'il n'y a qu'un axe d'équilibre et si *toutes les forces extérieures lui sont parallèles*, l'indétermination continue de correspondre à un simple déplacement d'ensemble, où l'axe de rotation est parallèle à l'axe d'équilibre. Autrement, d'une solution à l'autre des équations complètes, les tensions aussi changent. C'est un autre fait qui reste complètement inaperçu à la théorie complète.

Je vais terminer, en donnant un exemple concret de ces cas d'indifférence de la position et de la configuration d'équilibre, dont je m'aperçus en 1935⁽¹⁷⁾. Entendons encore que le solide se présente comme une plaque rectangulaire d'épaisseur quelconque, isotrope et homogène, ayant son centre de gravité en 0 et ses bords normaux aux axes y_1 et y_2 .

Entendons en même temps que :

a) les bords normaux à y_1 soient assujettis à une *pression* uniforme d'intensité h , et les bords normaux à y_2 à une traction uniforme de même intensité ;

b) les forces sur les deux faces et les forces de masse soient négligeables par rapport aux forces sur les bords.

Dans ces conditions, l'ensemble des forces extérieures admet un axe d'équilibre, y_3 , et parmi les déplacements homogènes ayant 0 comme point fixe, il y a une infinité de solutions du problème, au moins si h n'est pas trop grand.

L'une d'elles, δ_0 , est une déformation pure ayant $\mathcal{C}$ comme trièdre uni. Ses dilatations principales Δ_1 et Δ_2 ne sont sûrement pas égales. Elles ont des signes opposés.

(16) V. *Sollecitazioni iperstatiche* « Rend. Ist. Lombardo », S. II, vol. LXV, fasc. XIX-XX (1932), pp. 4-5.

(17) *Loc. cit.* (15), p. 18.

Après avoir choisi un sens positif pour les rotations autour de y_3 , notons :

1° δ_{φ} la déformation pure que l'on obtient à partir de δ_0 si l'on assujettit le trièdre uni à une rotation d'ampleur φ autour de y_3 sans toucher aux dilatations principales ;

2° $\rho_{-2\varphi}$ la rotation d'ensemble d'ampleur -2φ autour du même axe.

Puisque $\Delta_1 \neq \Delta_2$, la déformation pure δ_{φ} diffère de δ_0 toutes les fois que φ n'est pas un multiple exact de π , mais le produit

$$\rho_{-2\varphi} \cdot \delta_{\varphi}$$

donne une solution du problème *pour toute valeur de φ* .