

J. MÉRIC

Sur une classe de tests séquentiels. Caractéristiques exactes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 23 (1959), p. 23-83

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1959_4_23__23_0

© Université Paul Sabatier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une classe de tests séquentiels

Caractéristiques exactes

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1. GÉNÉRALITÉS — TEST PROGRESSIF DE WALD

Le test binomial de Wald, qui fait l'objet de ce travail, est un test statistique *progressif*. Il paraît donc nécessaire de définir la nature d'un test progressif par opposition aux tests classiques et, pour cela, de rappeler quelques généralités sur les tests d'hypothèses statistiques.

Supposons que la loi de probabilité de la variable aléatoire X dépende d'un paramètre inconnu θ . On peut faire sur la valeur de ce paramètre plusieurs *hypothèses*. Une hypothèse est dite simple, si elle attribue à θ une valeur bien définie, *complexe* s'il lui correspond un ensemble de valeurs possibles de θ .

Etant données plusieurs hypothèses en présence, s'excluant mutuellement, on appelle *test statistique* une règle permettant, à partir d'un groupe de n observations sur la variable aléatoire X de faire un choix entre ces hypothèses.

Le problème qui est à la base des travaux de Wald servira d'exemple concret pour illustrer ces définitions.

Un lot important ⁽¹⁾ de pièces mécaniques par exemple, comporte une proportion inconnue p de déchets ou « lous », dont on désire savoir si elle est inférieure ou supérieure à une certaine valeur p' . A une pièce tirée du lot au hasard, on lie une variable aléatoire X pouvant prendre seulement deux valeurs 0, et 1, la valeur 0 étant associée à une pièce bonne, et la valeur 1 à un loup

A $x = 1$ correspond la probabilité p

à $x = 0$ correspond la probabilité $q = 1 - p$.

(1) Assez important pour qu'on puisse l'assimiler à une urne à deux catégories sur laquelle on effectue des tirages *non exhaustifs*.

La loi de probabilité de X dépend donc du paramètre p . Le problème posé est celui du test de deux hypothèses complexes : H que $p \leq p'$ et H' que $p > p'$.

Si l'on envisage pour p deux valeurs possibles seulement, p_0 et p_1 [par exemple $p_0 < p'$ et $p_1 > p'$] le test à réaliser est celui des deux hypothèses simples H_0 que $p = p_0$ et H_1 que $p = p_1$. La nécessité de faire un choix entre ces deux hypothèses très restrictives ne correspond pas au problème réel. C'est pourtant le test correspondant qui permet, en définitive, de le résoudre simplement, comme on le verra plus loin.

Théorie de Neyman et Pearson.

On associe à un *échantillon de taille n* , c'est-à-dire à un groupe de n observations $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur la variable aléatoire X , un *point-échantillon* M , de coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans un espace à n dimensions, Ω_n , dit *espace des échantillons de taille n* . Baser un test sur un échantillon de taille n , c'est déterminer une région W de l'espace Ω_n telle que l'on accepte l'hypothèse H_1 ou l'hypothèse H_0 selon que $M \in W$ ou que $M \in \Omega_n - W$. Cette région est dite *région critique* du test. Etablir un test revient donc à choisir une région critique.

En liant notre décision au résultat d'un échantillonnage, nous nous exposons à un double risque d'erreur : nous courons le risque de rejeter à tort l'hypothèse H_0 ; c'est ce que l'on convient d'appeler une erreur de première espèce. Il peut se faire également que nous acceptions H_0 , alors que c'est H_1 qui est vérifiée; erreur dite de deuxième espèce.

On désigne, en général, par α et β les probabilités respectives d'erreurs de première et de deuxième espèces.

$$\alpha = \Pr [M \in W \mid H_0] \quad ; \quad \beta = \Pr [M \in \Omega_n - W \mid H_1]$$

Une région critique est d'autant plus satisfaisante qu'elle correspond à des valeurs plus faibles de α et β . La quantité $1 - \beta$ est appelée souvent la *puissance* du test.

α et n étant fixés, Jerzy Neyman et Egon S. Pearson montrent comment on peut choisir une région critique W pour rendre β minimum (ou ce qui revient au même, la puissance du test maxima). La région critique correspondante est dite *la plus puissante*.

Le problème se pose en général d'une manière un peu différente. On se donne a priori les probabilités α et β d'erreurs de 1^{re} et 2^e espèces. La théorie de Neyman et Pearson permet alors de déterminer la région critique la plus puissante correspondant à un minimum d'observations. Pour plus de détails, nous renvoyons à cette théorie ⁽²⁾.

(2) « J. Neyman et E. S. Pearson : Statistical Research Memoirs; University College; London ». Vol. I (1936), pp. 1-37. Voir aussi pour les applications industrielles : « J. Mothes : Techniques modernes de contrôle des fabrications » (Dunod, Paris, 1952, pp. 231-243).

Tests progressifs.

La théorie de Neyman-Pearson fait intervenir des échantillons dont la taille n est bien déterminée, pour un problème donné. Dans le test progressif, au contraire, c'est le résultat même des observations qui détermine leur nombre; ce nombre n est donc lui-même une variable aléatoire.

Une méthode progressive pour le test d'une hypothèse H se présente comme une règle permettant, après chaque observation, de choisir entre les trois décisions suivantes :

- accepter H
- rejeter H
- effectuer une observation supplémentaire.

Les observations se poursuivent ainsi jusqu'à ce qu'intervienne une décision définitive : acceptation ou rejet de H . Les qualités d'un test progressif sont caractérisées par deux fonctions :

1° La fonction d'efficacité (appelée encore « Operating Characteristic function » ou « fonction OC » par les anglo-saxons). Elle représente, en fonction du paramètre θ , la probabilité $L(\theta)$ d'accepter l'hypothèse H . La probabilité de prendre une décision correcte est donc égale à $L(\theta)$ si la valeur de θ vérifie l'hypothèse H , à $1 - L(\theta)$ dans le cas contraire.

2° La fonction « taille moyenne des échantillons » (Average Sample Number ou A S N function). Nous avons vu que, pour un test progressif déterminé, le nombre n d'observations est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est une fonction du paramètre θ , $E_{\theta}(n)$, appelée *taille moyenne des échantillons*.

C'est sur ces deux fonctions qu'est basé le choix du test à utiliser dans un problème donné. Pour l'exposé général des principes de ce choix, nous renvoyons aux deux ouvrages fondamentaux de Wald⁽³⁾. Nous nous contenterons de signaler un cas particulier qui s'applique immédiatement au problème de contrôle énoncé au début du chapitre. Il s'agit du test de l'hypothèse H que le paramètre inconnu θ est au plus égal à une valeur donnée θ' , contre l'alternative H' que θ est supérieur à θ' , dans le cas suivant :

On choisit deux valeurs $\theta_0 < \theta'$ et $\theta_1 > \theta'$, divisant l'intervalle de variations de θ en trois régions.

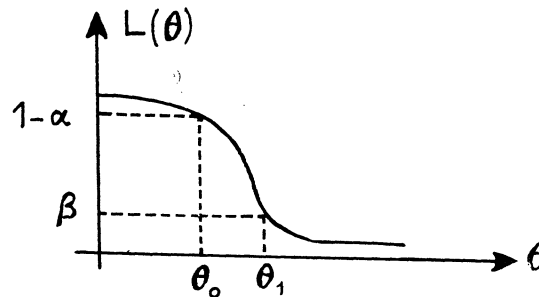
1° La région $\theta \leq \theta_0$, appelée zone de préférence pour l'acceptation de H . Pour θ situé dans cette région, on désire que la probabilité d'erreur soit au plus égale à un seuil convenablement choisi α .

2° La région $\theta \geq \theta_1$ dite zone de préférence pour le rejet de H . On désire qu'à une valeur θ de cette région corresponde une probabilité d'erreur au plus égale à β .

(3) « Sequential Analysis » (John Wiley-London, New-York, 1947). « Statistical Decision functions » (John Wiley-London, New-York, 1950).

3° La région $\theta_0 < \theta < \theta_1$ dite zone d'indifférence. On n'impose aucune condition aux probabilités d'erreurs, lorsque θ se situe dans cette région.

En langage ordinaire, on dira, que si θ est dans la zone d'indifférence, une décision erronée peut être considérée comme sans importance, alors qu'on veut réduire le plus possible le risque d'erreur, lorsque θ se situe dans l'une des deux autres. On conçoit intuitivement que, quelle que soit la méthode de test adoptée, la probabilité d'accepter H , c'est-à-dire la fonction d'efficacité est une fonction décroissante de θ



α et β étant les probabilités maxima admises d'erreurs de 1^{re} et 2^e espèces, on pourra donc imposer à la fonction d'efficacité les deux conditions :

$$L(\theta_0) = 1 - \alpha$$

$$L(\theta_1) = \beta$$

Le problème du contrôle d'un lot de pièces mécaniques apparaît maintenant comme un cas particulier du problème précédent. Le choix des quantités p_0 , p_1 , α , β résulte d'un accord entre le fournisseur et le client, le premier admettant une probabilité maxima α de voir son lot rejeté, malgré une proportion effective p de déchets inférieure à p_0 , et le client une probabilité maxima β d'accepter un lot comprenant une proportion de lousps supérieure à p_1 .

Les conditions précédentes ne définissant pas le test d'une manière univoque, Wald a recherché, parmi les tests qui les vérifient, ceux qui rendraient minima la taille moyenne des échantillons, $E_\theta(n)$, sinon pour toutes les valeurs de θ , ce qui paraît impossible, du moins pour les valeurs θ_0 et θ_1 . Ses recherches ont abouti à la théorie du test progressif qui porte son nom.

Le test progressif de Wald de deux hypothèses simples.

Le test de base est le test progressif des deux hypothèses simples : H_0 que $\theta = \theta_0$, H_1 que $\theta = \theta_1$. Désignons par $p_{0m}(x_1, x_2 \dots x_m)$ et par $p_{1m}(x_1, x_2 \dots x_m)$ les probabilités respectives ⁽⁴⁾ de l'échantillon $(x_1, x_2 \dots x_m)$

(4) Le mot « probabilité » désigne également la densité de probabilité dans le cas où la distribution de la variable aléatoire X est continue.

dans les hypothèses H_0 et H_1 . C'est la valeur du rapport $\frac{p_{1m}}{p_{0m}}$ qui, après chaque observation, détermine la décision à prendre. $A > 1$ et $B < 1$ étant des constantes calculées à l'avance :

1° On accepte H_0 si $\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \leq B$

2° On accepte H_1 si $\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \geq A$

3° On effectue une observation supplémentaire si

$$B < \frac{p_{1m}}{p_{0m}} < A$$

Les constantes A et B sont liées aux probabilités d'erreurs de 1^{re} et de 2^e espèces. Par un raisonnement simple, Wald établit une limite supérieure pour A et une limite inférieure pour B .

$$A \leq \frac{1 - \beta}{\alpha} \quad B \geq \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

et montre que, dans tous les cas pratiques, on peut adopter, pour A et B les valeurs respectives de ces rapports.

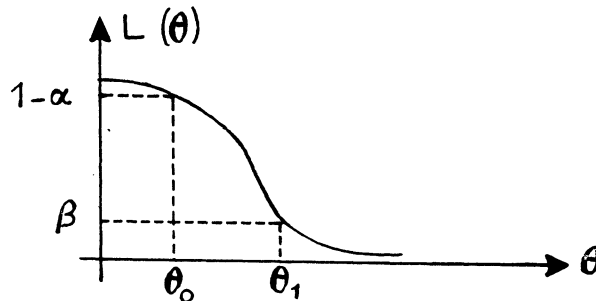
Le test s'appliquant, comme on va le voir, au cas où θ peut prendre des valeurs différentes de θ_0 et de θ_1 il est nécessaire d'étudier la fonction $L(\theta)$ sur l'intervalle $(0,1)$ tout entier. Wald donne de cette fonction une expression approchée :

$$L(\theta) = \frac{A^{h(\theta)} - 1}{A^{h(\theta)} - B^{h(\theta)}}$$

la fonction $h(\theta)$ étant telle que l'espérance mathématique

$$E^{(\theta)} \left[\left(\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \right)^{h(\theta)} \right] \equiv 1 \quad (5)$$

On vérifie que $L(\theta_0) = 1 - \alpha$; $L(\theta_1) = \beta$



(5) L'indice θ signifie que cette espérance mathématique est calculée en supposant que θ est la valeur vraie du paramètre.

EXTENSION A DEUX HYPOTHÈSES COMPLEXES.

La fonction $L(\theta)$ étant toujours décroissante, la probabilité d'accepter H_0 est supérieure à $1 - \alpha$ pour $\theta < \theta_0$, inférieure à β pour $\theta > \theta_1$. Cette propriété rend possible l'utilisation du test des deux hypothèses simples H_0 et H_1 , pour éprouver les hypothèses complexes H que $\theta \leq \theta'$ et H' que $\theta > \theta'$. Les valeurs θ_0 et θ_1 ($\theta_0 < \theta' < \theta_1$) ayant été choisies comme il a été indiqué plus haut, on effectue le test de la manière suivante : après chaque observation, on calcule le rapport $\frac{p_{im}}{p_{om}}$;

— on accepte H si $\frac{p_{im}}{p_{om}} \leq B$

— on accepte H' si $\frac{p_{im}}{p_{om}} \geq A$

— on effectue une observation supplémentaire si $B < \frac{p_{im}}{p_{om}} < A$.

La fonction d'efficacité est celle du test des deux hypothèses simples. Dans le cas d'observations indépendantes on peut obtenir une expression approchée du nombre moyen d'observations. Dans ce cas en effet, le rapport $\frac{p_{im}}{p_{om}}$ des probabilités de l'échantillon est égal au produit des rapports des probabilités $\frac{\omega_{4i}}{\omega_{oi}}$ des observations successives.

On a donc :

$$\frac{p_{im}}{p_{om}} = \prod_{i=1} \frac{\omega_{4i}}{\omega_{oi}}$$

soit, en passant aux logarithmes :

$$\log \frac{p_{im}}{p_{om}} = \sum_{i=1} z_i \quad \text{avec } z_i = \log \frac{\omega_{4i}}{\omega_{oi}}$$

les variables aléatoires z_i ($i = 1, 2 \dots m$) ayant toutes la même distribution. Désignant par $E_\theta(z)$ la valeur commune de leurs espérances mathématiques, Wald donne pour la taille moyenne des échantillons, l'expression approchée

$$E_\theta(n) \sim \frac{L(\theta) \log B + [1 - L(\theta)] \log A}{E_\theta(z)}$$

Le caractère approché de ces formules provient du fait, qu'à la fin du test, le rapport des probabilités n'est pas, en général, rigoureusement égal à A ou B , leur valeur variant brusquement d'une observation à l'autre.

Pour une étude plus précise de la mise en œuvre du test, nous renvoyons à l'important ouvrage « Sequential Analysis of Statistical data : applications » publié par le groupe de Recherche Statistique de l'Université de Columbia.

Le test binomial de Wald.

Il correspond au cas particulier où le paramètre inconnu est l'espérance mathématique d'une variable aléatoire binomiale, par exemple la proportion de « lous » dans un lot de pièces mécaniques (exemple évoqué plus haut. Le test est défini par les quantités p_0, p_1, α, β . La probabilité d'un échantillon contenant x lous et y pièces bonnes ($x + y = m$) s'écrit $p^x q^y$ ⁽⁶⁾, et le rapport :

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^x \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^y$$

En passant aux logarithmes, on obtient :

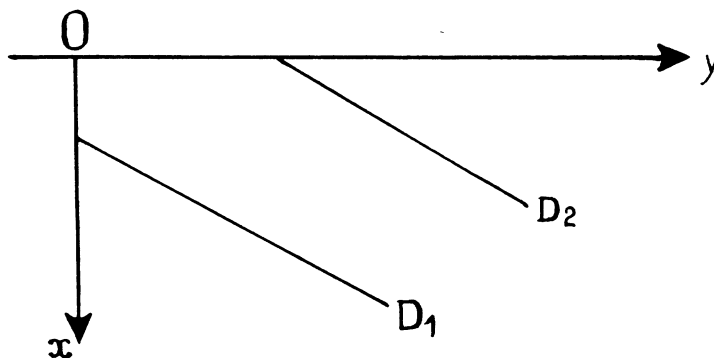
$$\log \left(\frac{p_{1m}}{p_{0m}}\right) = x \log \frac{p_1}{p_0} - y \log \frac{q_1}{q_0}$$

Cette expression, linéaire en x et y , rend très aisée la réalisation graphique du test : il suffit de tracer, dans le plan rapporté aux axes $0x, 0y$, les deux droites parallèles D_1 et D_2 , d'équations respectives :

$$x \log \frac{p_1}{p_0} - y \log \frac{q_1}{q_0} = \log B ; \quad x \log \frac{p_1}{p_0} - y \log \frac{q_1}{q_0} = \log A$$

$$\text{de pente } t = \frac{\log p_1/p_0}{\log q_0/q_1}$$

On poursuit les observations aussi longtemps que le point



échantillon M se situe dans la région comprise entre les deux droites D_1 et D_2 , et dite *zone d'indécision*. Le test prend fin dès que M sort de la zone d'indécision. L'hypothèse H que $p \leq p'$ est alors acceptée ou rejetée suivant que M a franchi la droite D_1 ou la droite D_2 . Les expressions approchées données par Wald des fonctions caractéristiques du test prennent la forme :

$$L(p) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} ; \quad p = \frac{1 - \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h}{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h - \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^h}$$

(6) Dans ce qui suit, on a posé $q = 1 - p, q_0 = 1 - p_0, q_1 = 1 - p_1$.

$$E_p(n) = \frac{L(p) \log B + [1 - L(p)] \log A}{p \log \left(\frac{p_1}{p_0} \right) + q \log \left(\frac{q_1}{q_0} \right)}$$

Ces fonctions ont été tabulées par le groupe de recherches statistiques de l'Université de Columbia. Le test binomial de Wald est couramment utilisé dans les contrôles de fabrication et les contrôles à la réception. Son intérêt réside essentiellement dans une économie *moyenne* considérable⁽⁷⁾ sur le nombre d'essais à réaliser, par rapport aux tests classiques donnant la même sécurité. Cet avantage est particulièrement appréciable lorsque les essais entraînent la destruction des unités éprouvées.

2. LES PROBLÈMES ABORDÉS

Le présent travail concerne les *expressions exactes* des fonctions caractéristiques $L(p)$ et $E_\theta(n)$, du test binomial de Wald.

Résumé des travaux antérieurs.

M. G. Polya⁽⁸⁾, étudiant le test binomial de Wald comme un problème de marche au hasard dans le plan, a montré que, dans le cas où le rapport t est rationnel :

$$t = \frac{b}{a} \quad (a \text{ et } b \text{ entiers premiers entre eux})$$

il existe des expressions exactes pour les fonctions $L(p)$ et $E^\theta(n)$. Traitant un exemple numérique particulièrement simple, il obtient $L(p)$ sous la forme d'un rapport de deux polynômes en p et q , mais la méthode qu'il utilise pour établir la formule devient impraticable dès que la zone d'indécision s'élargit, Mrs J. Robinson⁽⁹⁾ et M. F. Burman⁽¹⁰⁾, partant du même point de vue, ont donné l'expression générale de $L(p)$ dans le cas où a est égal à 1. Cette expression est relativement simple, mais, sur le plan pratique, la condition $a = 1$ est très restrictive.

M. A. M. Walker⁽¹¹⁾ étudie le même test comme un problème de marche au hasard à une dimension. Sa méthode permet d'obtenir des formules exactes pour $L(p)$ et $E_\theta(n)$. Mais il semble que l'auteur n'ait pas envisagé d'utiliser pratiquement ces formules. En effet, ces dernières ne sont pas complètement explicitées (si ce n'est sur un exemple numérique simple) et leur utilisation pour le calcul nécessite un travail de mise en forme assez important.

(7) Cette économie atteint souvent 50 %.

(8) Univ. of California Publ. Math. N. S. 1 (1948), pp. 229-239.

(9) Univ. of California Publ. Math. N. S. 1 (1948), pp. 241-246.

(10) J. of the Royal Statistical Society (supplément 8), p. 98.

(11) J. of the Royal Statistical Society (série B), vol. 12, n° 2 (1950).

D'autre part, M. Walker se limite strictement au test binomial de Wald, c'est-à-dire au cas où la zone d'indécision est limitée par deux droites parallèles.

Objet du présent travail.

Ce travail a un triple but :

1° Donner un intérêt pratique aux expressions exactes de $L(p)$ et $E\theta(n)$. A cette fin, on a construit des tables permettant de choisir facilement les constantes du test, de manière à se ramener au cas où les droites caractéristiques ont une pente rationnelle, sans pour cela perdre de vue les exigences d'ordre pratique ⁽¹²⁾ qui interviennent dans ce choix.

2° Mise en forme des résultats de Walker, permettant de les utiliser pratiquement pour le calcul des caractéristiques exactes du test de Wald.

3° Mise au point, sur le cas particulier du test binomial de Wald, d'une méthode plus générale que celle de Walker, permettant d'écrire simplement, et sous une forme directement utilisable pour le calcul, les équations donnant la fonction d'efficacité et la taille moyenne des échantillons. Cette méthode permet en outre d'étudier aussi simplement des problèmes de marche au hasard dans le plan plus généraux que le test de Wald, et susceptibles d'applications intéressantes (échantillonnage multiple, etc...).

(12) Ces exigences sont, rappelons-le, étrangères à toute considération d'ordre statistique (intérêts du fournisseur et du client dans un contrôle à la réception, etc...)

CHAPITRE II

AJUSTEMENT DES CONSTANTES p_0 ET p_1 DU TEST BINOMIAL DE WALD PERMETTANT D'UTILISER LES EXPRESSIONS EXACTES DE SES CARACTÉRISTIQUES

Dans les applications pratiques du test binomial de Wald, on choisit les valeurs p_0 et p_1 en dehors de toute préoccupation d'ordre statistique. On utilise ensuite les expressions approchées, données par Wald, des fonctions caractéristiques. Les erreurs introduites par l'approximation faite, peuvent être importantes, comme l'a montré Mrs J. Robinson.

Le présent chapitre répond au but suivant : rendre possible *pratiquement* l'utilisation de formules exactes.

En effet, si p_0 et p_1 sont fixés a priori, il en est de même des quantités :

$$\log \frac{p_1}{p_0} \quad \text{et} \quad \log \frac{q_0}{q_1}$$

et la valeur correspondante du rapport t n'est pas, en général, rationnelle.

Nous avons cherché les expressions générales de p_0 et p_1 correspondant à t rationnel :

$$t = \frac{b}{a}$$

Expressions de p_0 et p_1 correspondant à $t = \frac{b}{a}$

Les constantes p_0 et p_1 doivent vérifier l'égalité :

$$(1) \quad t = \frac{\log p_1 / p_0}{\log q_0 / q_1} = \frac{b}{a}$$

m désignant un nombre quelconque, l'égalité (1) est équivalente aux deux suivantes :

$$(2) \quad \text{Log} \frac{p_1}{p_0} = \frac{b}{m} ; \quad \text{Log} \frac{q_0}{q_1} = \frac{a}{m}$$

soit :

$$(3) \quad \frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{b}{m}} ; \quad \frac{1 - p_0}{1 - p_1} = e^{\frac{a}{m}}$$

De plus, l'inégalité :

$$p_1 > p_0 \quad \text{entraîne} \quad m > 0$$

On déduit de (2)

$$p_1 = p_0 e^{\frac{b}{m}} ; \quad 1 - p_0 = \left[1 - p_0 e^{\frac{b}{m}} \right] e^{\frac{a}{m}}$$

soit :

$$(4) \quad p_0 = \frac{e^{\frac{a}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1}$$

$$(5) \quad p_1 = \frac{c^{\frac{a}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} c = 1 + \frac{e^{\frac{b}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1}$$

Pour des valeurs données de a et b , donc de t , les valeurs de p_0 et p_1 dépendent uniquement de m .

On constate que, si l'on fait tendre m vers l'infini, p_0 et p_1 tendent vers la limite commune

$$s = \frac{a}{a+b}$$

Le rapport s joue un rôle important dans le test binomial.

Dans le système de coordonnées utilisé par Wald ($n = x + y$, $d_n = x$), il représente la pente commune des droites caractéristiques. D'autre part, les trois quantités p_0 , p_1 , s , vérifient la double inégalité :

$$(6) \quad p_0 \leq s \leq p_1$$

En effet :

$$\begin{aligned} p_0 - s &= \frac{e^{\frac{a}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} - \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{\frac{a}{m} - \frac{a}{a+b}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} = \frac{\frac{1}{m} \left(\frac{a}{1} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{a^{n-1}}{m^{n-1}} \right) - \frac{a}{a+b}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} \leq 0. \end{aligned}$$

En permutant a et b dans le développement précédent, on obtient :

$$\frac{e^{\frac{b}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} - \frac{b}{a+b} < 0$$

soit :

$$1 - \frac{e^{\frac{b}{m}} - 1}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} > \frac{a}{a+b}$$

c'est-à-dire :

$$p_1 > s$$

Il est intéressant d'étudier le sens des variations de p_0 et p_1 en fonction de a , b , m .

Si l'on différentie les deux membres des relations (2) on obtient, compte tenu de (3)

$$\begin{cases} -e^{\frac{b}{m}} dp_0 + dp_1 = p_1 d\left(\frac{b}{m}\right) \\ -dp_0 + e^{\frac{a}{m}} dp_1 = q_0 d\left(\frac{a}{m}\right) \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} dp_0 = e^{\frac{a}{m}} \frac{q_1 d\left(\frac{a}{m}\right) - p_1 d\left(\frac{b}{m}\right)}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} \\ dp_1 = e^{\frac{b}{m}} \frac{q_0 d\left(\frac{a}{m}\right) - p_0 d\left(\frac{b}{m}\right)}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial p_0}{\partial a} = \frac{1}{m} \frac{e^{\frac{a}{m}}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} \cdot q_1 > 0; \frac{\partial p_0}{\partial b} = -\frac{1}{m} \frac{e^{\frac{a}{m}}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} p_1 < 0$$

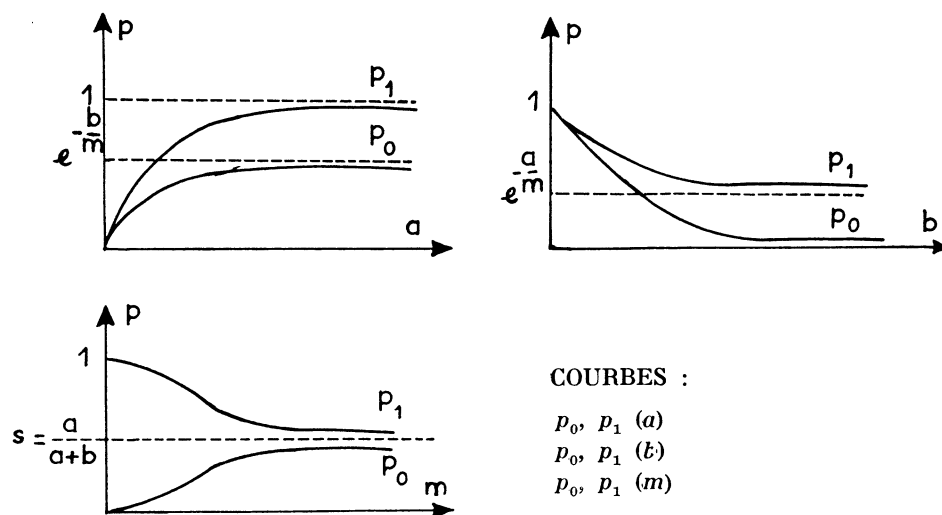
$$\frac{\partial p_0}{\partial a} = \frac{1}{m} \frac{e^{\frac{b}{m}}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} q_0 > 0; \frac{\partial p_1}{\partial b} = -\frac{1}{m} \frac{e^{\frac{b}{m}}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} p_0 < 0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial m} = \frac{e^{\frac{a}{m}}}{m^2} \frac{p_1 b - q_1 a}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} = \frac{(a+b) e^{\frac{a}{m}}}{m^2} \frac{p_1 - s}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} > 0$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial m} = -\frac{e^{\frac{b}{m}}}{m^2} \frac{q_0 a - p_0 b}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} = -\frac{(a+b) e^{\frac{b}{m}}}{m^2} \frac{s - p_0}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} < 0$$

p_0 et p_1 sont des fonctions croissantes de a , décroissantes de b . Par rapport à la variable m , p_0 est une fonction croissante, p_1 une fonction décrois-

sante. Les graphiques ci-dessous donnent l'allure des courbes représentatives des fonctions $p_0, p_1(a, b, m)$



Les tables numériques.

Pour différents couples de valeurs de a et b , nous avons dressé les valeurs de p_0 et p_1 en fonction de m . Nous y avons joint les valeurs de :

$$\omega = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$$

et de :

$$\varepsilon = p_1 - p_0.$$

En effet, dans les problèmes usuels de contrôle, il est commode de définir, dans l'intervalle 0-1, la zone d'indifférence par sa valeur centrale p' et sa longueur ε .

Pour substituer au test correspondant, un test voisin à t rationnel il suffit de rechercher dans les tables, pour $s = \frac{a}{a+b}$ le plus voisin de p' .

La valeur choisie pour ε détermine celle de m . On note alors les valeurs de a, b, ω, p_0, p_1 correspondantes. On peut ainsi écrire immédiate-

ment les équations des droites caractéristiques D_1 et D_2 :

$$D_1 \quad bx - ay = m \log B$$

$$D_2 \quad bx - ay = m \log A$$

Quelques précisions sur la présentation des tables.

1° Le rapport s , toujours compris entre les quantités p_0 et p_1 , est voisin de la valeur centrale ϖ . Il est d'ailleurs, comme nous l'avons vu plus haut, la limite commune de ces trois quantités lorsque m tend vers l'infini, ε tendant vers zéro. Le classement des tableaux suivant les valeurs croissantes de s facilite donc leur usage.

2° Les inégalités $p < \varpi$, $p > \varpi$ étant respectivement équivalentes à $q > 1 - \varpi$, $q < 1 - \varpi$, on peut toujours se ramener au test de deux hypothèses définies par une valeur limite, p' ou $q' \leq \frac{1}{2}$. Nous nous sommes donc bornés dans l'élaboration des tables, aux valeurs de $\varpi \leq \frac{1}{2}$ correspondant à $b \geq a$. En effet,

$$\varpi = \frac{1}{2}(p_0 + p_1) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e^{\frac{b}{m}} - e^{\frac{a}{m}}}{e^{\frac{a+b}{m}} - 1} \right]$$

fonction croissante de b , est égal à $\frac{1}{2}$ pour $b = a$.

Nous n'avons pas dépassé pour a la valeur 4. En effet, les formules exactes faisant intervenir l'inverse d'une matrice d'ordre a , les calculs deviennent très longs lorsque a augmente.

L'usage d'une machine à calculer électronique permettant de calculer rapidement l'inverse d'une matrice d'ordre plus élevé⁽¹⁾, on peut envisager d'étendre les tables précédentes, en considérant des valeurs de a supérieures à 4.

Ainsi, au test initial, caractérisé par les limites :

$$p' - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } p' + \frac{\varepsilon}{2}$$

de la zone d'indifférence, on peut substituer le test correspondant aux limites p_0 et p_1 lues sur les tables voisines des précédentes, et *parfaitement* connues. Les fonctions caractéristiques de ce dernier test ont des expressions exactes.

Cette méthode est à utiliser dans tous les cas où l'on désire connaître exactement $L(p)$ et $E_b(n)$, sauf à modifier légèrement, mais de *quantités* connues, les limites p_0 et p_1 préalablement choisies.

(1) L'inversion d'une matrice d'ordre 32 demande environ 30 minutes.

CHAPITRE III.

ÉTUDE ET MISE EN FORME DES RÉSULTATS DE WALKER CONCERNANT LA FONCTION D'EFFICACITÉ DU TEST DE WALD

Dans ce chapitre, on a cherché à expliciter, sous une forme utilisable pour le calcul numérique, les formules exactes établies par M. Walker concernant la fonction d'efficacité. Il convenait tout d'abord de préciser le sens des sommations apparaissant dans ces formules. Cela fait, on constate que l'écriture reste compliquée si l'on conserve les notations p et q ; cette dernière est considérablement simplifiée par l'introduction des deux quantités :

$$\begin{aligned} u &= p^a q^b \\ v &= p^{r_0} q^{r_0} \end{aligned}$$

(j_0, r_0) étant une solution en nombres entiers de l'équation

$$ar - bj = 1.$$

On obtient aussi une expression de $L(p)$ qui se présente sous la forme :

$$L(p) = \frac{u^\lambda}{b^\mu} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{a-1} v^i \Pi_i(u)}{P(u)}$$

Dans cette formule λ et μ désignent deux constantes entières $\Pi_i(u)$ et $P(u)$ des polynômes en u , dont nous avons cherché à simplifier au maximum le calcul.

La méthode.

La réalisation graphique du test, telle qu'elle a été exposée dans le chapitre d'introduction constitue un problème de « *marche au hasard* » dans le plan. Le « *marcheur* » lié au point-échantillon M peut effectuer des pas de longueur unité parallèlement à Ox ou à Oy , et dans le sens des x ou des y croissants, avec les probabilités respectives p et q . La marche se poursuit aussi longtemps qu'il reste sur la bande limitée par les droites caractéristiques D_1 et D_2 . Elle cesse dès que le marcheur a franchi l'une ou l'autre de ces droites.

Si les grandeurs p_0 et p_1 ont été choisies de manière que :

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{\frac{b}{m}} \quad \text{et} \quad \frac{q_0}{q_1} = e^{\frac{a}{m}}$$

a et b étant des entiers ($b \geq a$), et si l'on pose $m \log B = -k_1$, $m \log A = k_2$, les équations des droites caractéristiques s'écrivent

$$\begin{aligned} D_1, \quad ay - bx &= k_1 \\ D_2, \quad ay - bx &= -k_2. \end{aligned}$$

Reprenant l'idée de M. Barnard (1), M. Walker utilise une méthode différente. Il lie au test le « score »

$$(1) \quad S = ay - bx + k_2.$$

La valeur initiale étant k_2 , chaque loup extrait du lot au cours de l'échantillonnage entraîne une diminution du score de la quantité b , chaque unité donne une augmentation de S de la quantité a . Les observations se poursuivent aussi longtemps que $0 < S < k_1 + k_2 = k$. Elles cessent dès que l'une ou l'autre de ces limites est franchie, la décision finale étant l'acceptation de l'hypothèse H ($p \leq \alpha$) si $S \geq k$, son rejet si $S \leq 0$. Le test est ainsi ramené à un problème de marche au hasard sur l'axe des S , le marcheur pouvant effectuer des pas de longueur a dans le sens positif, de longueur b dans le sens négatif, avec les probabilités respectives q et p .

Les résultats de Walker

L'auteur désigne par u_z la probabilité d'accepter l'hypothèse H , probabilité calculée en supposant que le point-échantillon M a pour abscisse $S = z$ (z pouvant prendre toutes les valeurs entières comprises entre $-b$ et $k+a$). La fonction d'efficacité n'est autre que la quantité u_k .

Les u_z vérifient l'équation aux différences :

$$(2) \quad u_z = q u_{z+a} + p u_{z-b}.$$

Cette équation, à laquelle s'ajoutent les conditions aux limites :

$$(3) \quad u_z = 0 \text{ pour } z \leq 0$$

$$(4) \quad u_z = 1 \text{ pour } z \geq k,$$

permet de calculer u_z ($0 < z < k$).

Pour faire disparaître les indices négatifs, Walker pose :

$$u_z = v_{z+b-1}.$$

Les relations (2), (3), (4) s'écrivent respectivement :

$$(5) \quad v_{z+b} = q v_{z+a+b} + p v_z \quad (0 \leq z < k-E)$$

$$(6) \quad v_0 = v_1 = \dots = v_{b-1} = 0$$

$$(7) \quad v_{k+a-1} = v_{k+b} = \dots = v_{k+a+b-2} = 1.$$

On introduit alors les sommes :

$$(8) \quad V(S) = \sum_{r=0}^{\infty} S^r v_r; \quad V_j(S) = \sum_{r=0}^{\infty} S^r v_{r+j}$$

convergentes pour S suffisamment petit, et l'on remarque que :

$$(9) \quad S' V_j(S) = V(S) - [S'^{-1} v_{j-1} + S'^{-2} v_{j-2} + \dots + S v_1 + v_0]$$

D'autre part, en vertu de l'équation (5) :

$$V_b = q V_{a+b} + p V$$

(1) Barnard. J. of the Royal Stat. Soc. Suppl. 8, 1.

relation qui peut s'écrire, compte tenu de (9) et des conditions aux limites (6) :

$$\frac{V(S)}{S^b} = \frac{q}{S^{a+b}} \left[V(S) - \sum_{i=1}^a v_{a+b-i} S^{a+b-i} \right] + p V(S),$$

soit :

$$V(S) = \left[\sum_{i=0}^{a-1} S^{b+i} v_{b+i} \right] \left[1 + \frac{S^a}{q} (p S^b - 1) \right]^{-1}$$

Si S est suffisamment petit, on peut développer en série le 2^e crochet; u_r n'est autre que le coefficient du terme en S^{z+b-1} dans le développement correspondant de $V(S)$, soit (2) :

$$(10) \quad u_z = \sum_{i=0}^{a-1} v_{b+i} \sum_{ar+bj=z-1} \frac{p^j}{q^r} (-1)^j C_r^j$$

$r \geq j, j \geq 0.$

Walker présente ce résultat sous la forme :

$$(11) \quad u_z = \sum_{i=0}^{a-1} \lambda_i F(z-i)$$

avec

$$(12) \quad F(z) = \sum_{ar+bj=z-1} \frac{p^j}{q^r} (-1)^j C_r^j$$

$r \leq j, j \leq 0$

Quant aux coefficients $\lambda_i = v_{b+i}$, ils sont déterminés par les conditions aux limites 7), qui s'écrivent, d'après (11) :

$$(13) \quad \sum_{i=0}^{a-1} \lambda_i F(k+r-i) = 1 \quad (r = 0, 1 \dots a-1)$$

prenant la forme d'un système de a équations linéaires à a inconnues, dont la matrice $[M]$ a pour éléments :

$$(14) \quad m_{ij} = F(k+j-i).$$

La fonction d'efficacité a donc pour expression :

$$(15) \quad L(p) = u_k = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^a m_{ij}^{-1} F(k_2 - i + 1)$$

m_{ij}^{-1} désignant l'élément de la matrice $[M]^{-1}$.

(2) On suppose définies les quantités v_r pour $r \leq k+a+b-1$. Ces quantités n'intervenant pas dans le résultat final, l'artifice n'entraîne aucune difficulté supplémentaire, et permet de parvenir d'une manière plus élégante au résultat cherché.

On peut encore écrire, sous forme matricielle :

$$(16) \quad L(p) = \left\{ \dots F(k_2 - i + 1) \dots \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \vdots \\ \lambda_{i-1} \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \dots F(k_2 - i + 1) \dots \right\} [M^{-1}] \left\{ \begin{smallmatrix} \vdots \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$$

Étude de la fonction $F(z)$.

Nous avons tout d'abord cherché à préciser le symbole :

$$\sum_{\substack{ar+bj=z-1 \\ r \geq j, j \geq 0}}$$

c'est-à-dire les solutions du système :

$$(17) \quad \begin{array}{ll} ar + bj = z - 1 & \text{I} \\ j \geq 0 & \text{II} \\ j \leq r & \text{III} \end{array}$$

Considérons l'équation I' : $ap + b\gamma = 1$, a et b étant des entiers premiers entre eux. Elle admet une infinité de solutions entières. On peut obtenir une solution particulière, ρ_0 , γ_0 , en utilisant, par exemple, les restes successifs obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de a et b (qui est 1). Les valeurs ρ_0 et γ_0 ainsi obtenues sont de signes contraires. Nous supposons, pour la commodité de l'exposé, que c'est la valeur de γ_0 qui est négative.

Pour ne conserver que des quantités positives, nous poserons :

$$\rho_0 = r_0, \quad \gamma_0 = -j_0$$

r_0 et j_0 étant des entiers positifs. La solution générale de l'équation I s'écrit alors :

$$r = r_0(z-1) - b\mu, \quad j = -j_0(z-1) + a\mu$$

μ étant un entier quelconque.

Imposons aux solutions de vérifier les inégalités II et III. L'inégalité II

devient : $\mu \geq \frac{z-1}{a+b} j_0$.

L'inégalité III s'écrit :

$(a+b)\mu \leq (z-1)(r_0 + j_0)$, soit $\mu \leq \frac{z-1}{a+b} (r_0 + j_0)$. En résumé, toutes les solutions du système (17) sont données par :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = r_0(z-1) - b\mu = r(\mu) \\ j = -j_0(z-1) + a\mu = j(\mu) \end{array} \right.$$

(3) Il est toujours possible de se ramener à ce cas, la solution générale de (I') étant :
 $\rho = \rho_0 + b\lambda \quad \gamma = \gamma_0 - a\lambda \quad (\lambda \text{ entier}).$

avec :

$$(19) \quad \frac{z-1}{a} j_0 \leq \mu \leq \frac{z-1}{a+b} (r_0 + j_0)$$

La fonction $F(z)$ de Walker prend dès lors la forme :

$$F(z) = \sum_{\mu} C_{(z-1)r_0 - \mu b}^{\mu a - (z-1)j_0} \frac{(-p)^{\mu a - (z-1)j_0}}{q^{(z-1)r_0 - \mu b}}$$

soit :

$$F(z) = \left(\frac{1}{p^{j_0} q^{r_0}} \right)^{z-1} \sum_{\mu} C_{r(\mu)}^{j(\mu)} (-1)^{j(\mu)} (p^a q^b)^{\mu}$$

la sommation portant sur toutes les valeurs de μ vérifiant (19)

En posant :

$$(20) \quad p^a q^b = u \quad p^{j_0} q^{r_0} = v$$

on obtient :

$$(21) \quad F(z) = \frac{1}{v^{z-1}} \sum_{\mu} C_{r(\mu)}^{j(\mu)} (-1)^{j(\mu)} u^{\mu}$$

REMARQUES : 1. A titre de vérification, on retrouve la formule donnée par Burman et Mrs. Robinson, comme un cas particulier de la précédente. En effet, si $a = 1$, l'équation I' admet comme solution particulière $r_0 = 1$, $j_0 = 0$. Donc $v = q$ et :

$$(21\text{bis}) \quad F(z) = \frac{1}{q^{\frac{z-1}{b+1}}} \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{z-1}{b+1} \right]} C_{z-1-b\mu}^{\mu} (-p q^b)^{\mu}$$

le symbole $\left[\frac{z-1}{b+1} \right]$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{z-1}{b+1}$.

2) Vérifions que l'on a toujours $\frac{j_0}{a} \leq \frac{r_0 + j_0}{a+b}$

$$\frac{r_0 + j_0}{a+b} - \frac{j_0}{a} = \frac{r_0 a - j_0 b}{a(a+b)} = \frac{1}{a(a+b)} \text{ puisque, par hypothèse}$$

$$r_0 a - j_0 b = 1.$$

Ainsi l'intervalle de variation de μ a pour longueur :

$$(22) \quad \delta = \frac{z-1}{a(a+b)}$$

[illegible]

Soit $[A]$ la matrice du système; $\{V\}$ le vecteur $\frac{v^{k-a}}{u^{v_k-a}} \begin{Bmatrix} 1 \\ v \\ \vdots \\ v^{a-1} \end{Bmatrix}$

Le vecteur $\{\Lambda\} = \begin{Bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{a-1} \end{Bmatrix}$ vérifie l'égalité :

$$\{\Lambda\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{V}\}$$

Calcul de $[A]^{-1}$. La transposée $[A]'$ de la matrice $[A]$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{u^{x_1}}{v^{\alpha-1}} f_k, & \frac{u^{j_0}}{v^{\alpha-1}} f_{k+1}, & \frac{u^{j_0+x_{\alpha-1}}}{v^{\alpha-1}} f_{k+\alpha}, & \dots, & \frac{u^{j_0+x_3}}{v^{\alpha-1}} f_{k+\alpha-2}, & \frac{u^{j_0+x_2}}{v^{\alpha-1}} f_{k+\alpha-1} \\ \frac{u^{x_2}}{v^{\alpha-2}} f_{k-1}, & \frac{u^{x_1}}{v^{\alpha-2}} f_k, & \frac{u^{j_0}}{v^{\alpha-2}} f_{k+1}, & \dots, & \frac{u^{j_0+x_4}}{v^{\alpha-2}} f_{k+\alpha-3}, & \frac{u^{j_0+x_3}}{v^{\alpha-2}} f_{k+\alpha-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{u^{x_{\alpha-1}}}{v} f_{k-\alpha+2}, & \frac{u^{x_{\alpha-2}}}{v} f_{k-\alpha+3}, & \frac{u^{x_{\alpha-3}}}{v} f_{k-\alpha+4}, & \dots, & \frac{u^{x_1}}{v} f_k, & \frac{u^{j_0}}{v} f_{k+1} \\ f_{k-\alpha+4}, & u^{x_{\alpha-1}} f_{k-\alpha+2}, & u^{x_{\alpha-2}} f_{k-\alpha+3}, & \dots, & u^{x_2} f_k, & u^{x_1} f_k \end{array}$$

Chaque élément de la $i^{ème}$ ligne contenant en facteur $\frac{u^x_i}{v^{a_{i-1}}}$, le déterminant de la matrice [A] est de la forme

$$\frac{u^{x_1 + x_2 + \dots + x_{a-1}}}{v^{1+2+\dots+a-1}} P(u) = \frac{u \left(\sum_i x_i \right)}{a(a-1)} P(u)$$

$P(u)$ étant un polynôme en u . Nous en déduisons la forme de la matrice $[A]^{-1}$:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{P(u)} \begin{bmatrix} \frac{v^{a-1}}{u^{x_1}} \varphi_{11}, & \frac{v^{a-1}}{u^{x_1}} \varphi_{13}, \dots, & \dots, & \frac{v^{a-1}}{u^{x_1}} \varphi_{1, a-1}, & \frac{v^{a-1}}{u^{x_1}} \varphi_{1, a} \\ \frac{v^{a-2}}{u^{x_2}} \varphi_{21}, & \frac{v^{a-2}}{u^{x_2}} \varphi_{22}, \dots, & \dots, & \frac{v^{a-2}}{u^{x_2}} \varphi_{2, a-1}, & \frac{v^{a-2}}{u^{x_2}} \varphi_{2, a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{v}{u^{x_{a-1}}} \varphi_{(a-1), 1}, & \frac{v}{u^{x_{a-1}}} \varphi_{(a-1), 2}, \dots, & \dots, & \frac{v}{u^{x_{a-1}}} \varphi_{(a-1), a-1}, & \frac{v}{u^{x_{a-1}}} \varphi_{(a-1), a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{a, 1}, & \varphi_{a, 2}, & \dots, & \varphi_{a, (a-1)}, & \varphi_{a, a} \end{bmatrix}$$

les φ_{ij} étant des polynômes en u .

Application au calcul numérique.

La connaissance de la forme de $L(p)$ en fonction des variables u et v allège les calculs numériques.

1) *Solution* ($r_0 - j_0$) *de l'équation* (17) : $I' : a\rho + b\gamma = 1$ s'obtient comme nous l'avons indiqué plus haut.

2) *Calcul de* f_z : pour $k - a < z < k + a$ et $k_2 - a < z \leq k_2$

$$f_z = \sum_{\mu} C_r^j(\mu) (-1)^{(\mu)} u^{\mu-\nu} z-1$$

avec : $\frac{z_0-1}{a} j_0 \leq \mu \leq \frac{z-1}{a+b} (r_0 + j_0)$

3) On écrit aisément la matrice $[m]$

$$m = \begin{bmatrix} u^{x_1} f_k, & u^{x_2} f_{k-1}, & \dots, & u^{x_{a-1}} f_{k-a+2}, & f_{k-a+1} \\ u^{j_0} f_{k+1}, & u^{x_1} f_k, & \dots, & u^{x_{a-2}} f_{k-a+3}, & u^{x_{a-1}} f_{k-a+2} \\ u^{j_0+x_{a-1}} f_{k+2}, & u^{j_0} f_{k+1}, & \dots, & u^{x_{a-3}} f_{k-a+4}, & u^{x_{a-2}} f_{k-a+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{j_0+x_2} f_{k+a-1}, & u^{j_0+x_3} f_{k+a-2}, & \dots, & u^{j_0} f_{k+1}, & u^{x_1} f_k \end{bmatrix}$$

4) Calcul de $[m]^{-1}$. Après avoir calculé le déterminant m , on l'écrit sous la forme :

$$[m] = u^{x_1+x_2+\dots+x_{a-1}} P(u)$$

On calcule alors la matrice $[m]^{-1}$ qui peut s'écrire :

$$(m) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_{11}}{u^{x_1}}, \frac{\varphi_{12}}{u^{x_1}}, & \dots & \frac{\varphi_{1a}}{u^{x_1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_{i1}}{u^{x_i}}, \frac{\varphi_{i2}}{u^{x_i}}, & \dots & \frac{\varphi_{ia}}{u^{x_i}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{a,1}, \varphi_{a,2}, & \dots & \varphi_{a,a} \end{pmatrix} \frac{1}{P(u)} = \frac{1}{u^{x_1} P(u)} \begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12}, & \dots & p_{1a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1}, & p_{i2}, & \dots & p_{ia} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{a1}, & p_{a2}, & \dots & p_{aa} \end{pmatrix}$$

Deux cas peuvent se présenter :

a) k_1 est un multiple de a . Nous avons alors :

$$L(p) = \frac{v^{k_1}}{u^{j_0} \frac{k_1}{a}} \frac{\pi_1(u) + v \pi_2(u) + \dots + v^{a-1} \pi_a(u)}{P(u)}$$

avec :

$$\Pi_i(u) = f_{k_2} \varphi_{1,i} + f_{k_2-1} \varphi_{2,i} + \dots + f_{k_2-a+1} \varphi_{a,i}$$

b) k_1 n'est pas multiple de a :

$$L(p) = \frac{v^{k_1}}{u^{y_{k-1}} - u^{y_{k_2-a}}} \frac{P_1(u) + v P_2(u) + \dots + v^{a-1} P_a(u)}{P(u)}$$

avec :

$$P_i(u) = u^{y_1} f_{k_1} p_{1,i} + \dots + u^{y_j} f_{k_1-j+1} p_{j,i} + \dots + f_{k_1-a+1} p_{a,i}$$

Exemple numérique.

L'exemple traité correspond aux valeurs suivantes des constantes :

$$a = 3; \quad b = 5 \left(s = \frac{3}{8} \right); \quad k_1 = k_2 = 17 \quad (k = 34)$$

1) *Solution de l'équation* $3\rho + 1\gamma = 1$. La solution : $r_0 = 2, j_0 = 1$, apparaît immédiatement.

2) *Calcul de* f_z . Le tracé des droites D et D' montre que :

$$\begin{aligned} v_{k-1} = v_{33} = 11 \quad ; \quad v_{k_2-a} = v_{14} = 5 \\ x_1 = x_2 = 0 \quad ; \quad y_1 = 1, y_2 = 0 \end{aligned}$$

Les f_z à calculer correspondent aux valeurs suivantes de z

i	$z = k - i + 1$	$z = k + i - 1$	$z = k_2 - i + 1$
1	34	34	17
2	33	35	16
3	32	36	15

Ces fonctions sont données par le tableau ci-après :

z	VALEURS DE $\frac{z-1}{a} j_0 \leq u \leq (r_0 j_0)$	$r(\mu)$	$j(\mu)$	fz
15	5	3	1	$-C^1_3 = -3$
16	5	5	0	$C^0_5 = 1$
17	6	2	2	$C^2_2 = 1$
32	11	2	2	$C^2_7 = 21$
33	11; 12	1; 6	1; 4	$-C^1_9 + C^4_4 u = -9 + u$
34	11; 12	9; 4	0; 3	$C^0_{11} - C^3_6 u = 1 - 20u$
35	12	8	2	$C^2_8 = 28$
36	12; 13	10; 5	1; 4	$C^1_{10} - C^4_5 u = -10 + 5u$

3) La matrice $[m]$ s'écrit :

$$[m] = \begin{bmatrix} 1 - 20u, & -9 + u, & 21 \\ 28u, & 1 - 20u, & -9 + u \\ (-10 + 5u)u, & 28u, & 1 - 20u \end{bmatrix}$$

Déterminant de $[m]$:

$$\begin{aligned} [m] &= (1 - 20u) (372u^2 + 212u + 1) \\ &\quad + 28u (20u^2 + 407u + 9) \\ &\quad + (5u^2 - 10u) (u^2 + 402u + 60) \\ &= 5u^4 - 4880u^3 + 3808u^2 - 156u + 1 = P(u) \end{aligned}$$

Calculons les $p_{i,j}$ apparaissant dans l'expression de la matrice $[m]^{-1}$.
Ce sont les cofacteurs des éléments $m_{i,j}$ de $[m]$

$$p_{11} = 372 u^2 + 212 u + 1$$

$$p_{21} = 5 u^3 + 505 u^2 + 62 u$$

$$p_{31} = 100 u^3 + 560 u^2 + 28 u$$

$$p_{12} = 20 u^2 + 407 u + 9$$

$$p_{22} = 295 u^2 + 170 u + 1$$

$$p_{13} = u^2 + 402 u + 60$$

$$p_{32} = p_{21}; p_{23} = p_{12}; p_{33} = p_{22}$$

Nous en déduisons les polynômes :

$$p_i(u) = u p_{1,i} + p_{2,i} - 5 p_{3,i}$$

$$p_1(u) = 77 u^3 - 1020 u^2 + 33 u$$

$$p_2(u) = 5 u^3 - 813 u^2 - 7 u + 1$$

$$p_3(u) = u^3 - 694 u^2 - 169 u + 6$$

Finalement :

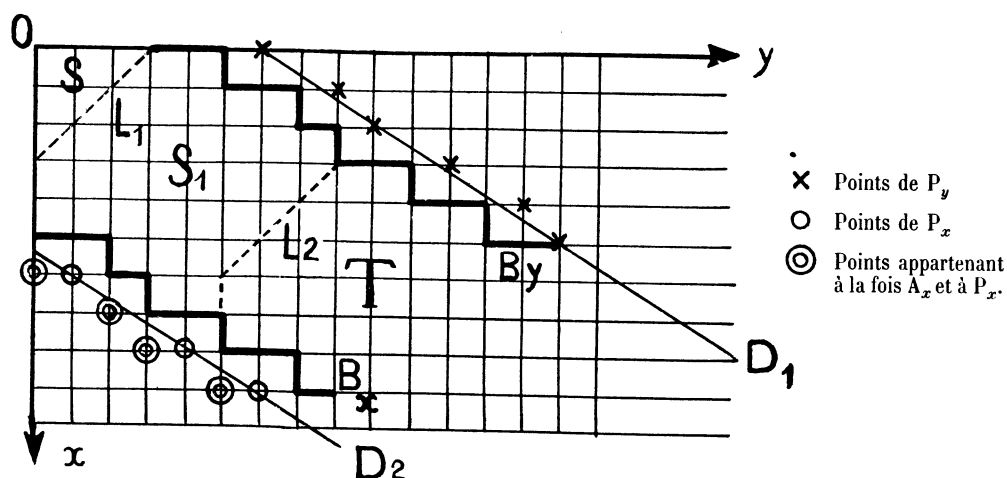
$$L(p) = \frac{v^{17} (77u^3 - 1020u^2 + 34u) + v(5u^3 - 813u^2 - 7u + 1) + v^5(u^3 - 694u^2 - 169u + 6)}{u^6 (5u^4 - 4880u^3 + 3808u^2 - 156u + 1)}$$

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA MÉTHODE DE POLYA ⁽¹⁾ POUR LA DÉTERMINATION DE LA FONCTION D'EFFICACITÉ

Pour obtenir ses formules, M. Walker abandonne l'idée de Wald et de Polya qui traitent le test binomial comme une marche au hasard dans le plan. Dans les chapitres qui suivent, nous reprenons cette idée, qui permet, comme nous le montrerons, d'aborder l'étude de marches au hasard plus générales.

Dans ce chapitre, nous analyserons la méthode préconisée par M. Polya pour le calcul des caractéristiques du test.



Revenons donc à la réalisation graphique du test défini par les droites caractéristiques $D_1 : ay - bx = k_1$ et $D_2 : ay - bx = -k_2$. Les déplacements du point-échantillon, se limitant à des pas de longueur unité parallèles à Ox ou à Oy , et dans le sens des x ou des y croissants (avec les probabilités respectives p et q) nous pouvons remplacer les droites caractéristiques par deux lignes brisées représentant les deux chemins extrêmes que puisse parcourir M sans sortir de la zone d'indécision. Nous appellerons ces deux lignes respectivement *bord des x* , B_x , et *bord des y* , B_y . La région comprise entre B_x et B_y sera la bande caractéristique T du test

Conformément aux notations de Polya, nous désignerons par $K(x, y)$ le nombre des chemins partant de l'origine et aboutissant au point de coordonnées x, y sans sortir de la bande T . Ce même auteur définit d'autre part la « *Frontière passive* » P de la bande T (2); de la manière suivante : Un

1. University of California Publ. Math. N.S 1 1948, pp. 229-239.

point appartient à la limite passive de T, s'il est extérieur à T, mais suit immédiatement un point de T. Cette frontière P se divise en deux parties :

— *Frontière passive du côté des x , P_x* , groupant tous les points qui suivent immédiatement des points de B_x .

— *Frontière passive du côté des y , P_y* , ensemble des points qui suivent immédiatement des points de B_y .

On définit de même la frontière active A de T. Un point appartient à la frontière active de A, s'il est extérieur à T, mais « précède » immédiatement un point de T.

A est composé de deux sous-ensembles :

— *Frontière active du côté des x , A_x* , ensemble des points précédant immédiatement des points de B_x .

— *Frontière active du côté des y , A_y* , ensemble des points précédant immédiatement des points de B_y .

La figure 1 illustre ces définitions (elle correspond à $a = 3$, $b = 5$, $k_1 = k_2 = 17$).

Notons que le point-échantillon qui se trouve au point (x, y) après le $t^{\text{ième}}$ saut, (ou, plus simplement, au temps t), se trouvait nécessairement, au temps $t - 1$, soit au point $(x - 1, y)$, soit au point $(x, y - 1)$, ce qui se traduit par la relation :

$$(1) \quad K(x, y) = K(x - 1, y) + K(x, y - 1)$$

A cette équation aux différences partielles se joignent les conditions aux limites suivantes.

$$(2) \quad K(x, y) = 0 \text{ si } (x, y) \text{ est extérieur à la bande T et à sa limite P}$$

En effet, la marche prend fin dès que le mobile est sorti de la bande T.

$$(3) \quad K(x, y) = 1 \text{ pour tous les points de T et de P situés sur les axes } Ox, Oy.$$

Les relations (1), (2) et (3) permettent de calculer $K(x, y)$ pour tous les points du plan. On en déduit la probabilité du passage du point-échantillon M par le point (x, y) :

$$(4) \quad P(x, y) = K(x, y) p^x q^y$$

Quant à la fonction d'efficacité, elle s'écrit :

$$(5) \quad L(p) = \sum_{P_y} P(x, y) = \sum_{P_y} K(x, y) p^x q^y$$

l'ensemble des points de P_y groupant toutes les positions possibles du point M qui correspondent à l'acceptation de l'hypothèse H. Remarquons également que, les points (x, y) et $(x + ia, y + ib)$ occupant par rapport aux droites D_1 et D_2 , des positions homologues, les bords B_x et B_y peuvent être divisés en tronçons superposables par translations de composantes $(\lambda a, \lambda b)$. On peut, de même, par des lignes brisées $L_1, L_2 \dots L_i \dots$ partant de B_y , aboutissant à B_x , diviser la bande T en sous-ensembles :

— S compris entre Ox, Oy et L_1

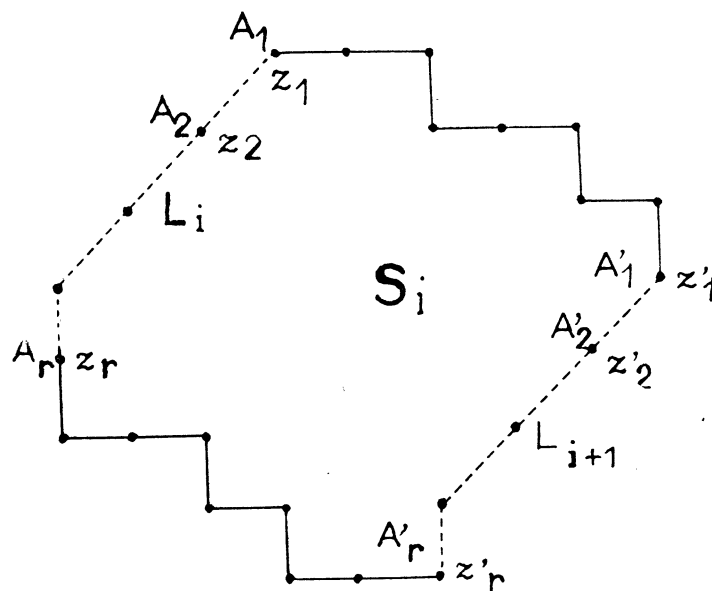
— S_i compris entre L_i et L_{i+1} ($i = 1, 2 \dots \infty$).

Les sous-ensembles S_i sont eux-mêmes superposables par translation $(\lambda a, \lambda b)$, et

$$T = S + \sum_{i=1}^{\infty} S_i$$

Relation de récurrence fondamentale — Démonstration de Polya.

Considérons un des sous-ensembles S_i , limité par les lignes L_i, L_{i+1}



La ligne L_i est jalonnée par des points $A_1, A_2 \dots A_r$. Nous appellerons $z_1, z_2 \dots z_r$ les nombres de chemins aboutissant respectivement à ces points.

A l'aide des relations (1), (2) et (3) le nombre des chemins aboutissant en un point quelconque (x, y) de S_i peut s'exprimer en fonction linéaire de $z_1, z_2 \dots z_r$.

$$K(x, y) = l_1 z_1 + l_2 z_2 + \dots + l_r z_r$$

On introduit alors une convention d'écriture fréquemment utilisée dans le calcul des différences finies : on définit l'opérateur E en posant :

$$(7) \quad K(x + ia, y + ib) = E'K(x, y)$$

On peut effectuer sur E les opérations de l'algèbre ordinaire. Avec ce symbolisme, les nombres de chemins aboutissant aux points $A'_1, A'_2, \dots A'_r$ de L_{i+1} , homologues respectifs de $A_1, A_2, \dots A_r$ s'écrivent :

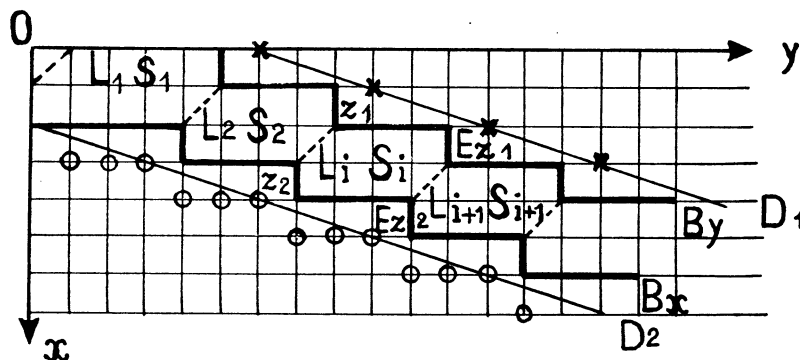
$$Ez_1, Ez_2 \dots Ez_r$$

De proche en proche, Polya calcule les Ez_i en fonction de $z_1, z_2 \dots z_r$. Il obtient ainsi r équations de la forme :

$$Ez_i = \alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \dots + \alpha_{ir}z_r$$

[illegible]
$$(9) \quad \Delta z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$
$$(9 \text{ bis}) \Delta = \left| \begin{array}{cccc} (\alpha_{11} - E), & \dots, & \alpha_{1i} & , \dots, \alpha_{1r} \\ \dots & & & \\ \alpha_{i1} & , \dots, & \alpha_{ii} - E, & \dots, \alpha_{ir} \\ \dots & & & \\ \alpha_{r,1} & , \dots, & \alpha_{r,i} & , \dots, (\alpha_{rr} - E) \end{array} \right|$$
$$(10) \quad C_0 E^r z_i + C_1 E^{r-1} z_i + \dots C_r z_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots r)$$
$$(11) \quad C_0 E^r K(x, y) + C_1 E^{r-1} K(x, y) + \dots + C_r K(x, y) = 0$$
$$(12) \quad C_0 K(x + ra, y + rb) + C_1 K[x + (r-1)a, y + (r-1)b] + \dots + C_0 K(x, y) = 0.$$
$$(13) \quad \mathbf{C}_0 \mathbf{E}^r + \mathbf{C}_1 \mathbf{E}^{r-1} + \dots + \mathbf{C}_r = \mathbf{0}.$$

Ce qui précède est l'extension au cas général du résultat établi par M. Polya sur le cas particulier très simple correspondant à $a = 1$, $b = 3$, $k_1 = k_2 = 6$.



Le graphique se présente comme l'indique la figure (3)

La frontière L_i la plus simple est constituée par deux points A_1 et A_2 .

On vérifie aisément que :

$$\begin{cases} Ez_1 = 4z_1 + z_2 \\ Ez_2 = 6z_1 + 4z_2 \end{cases}$$

La relation de récurrence s'écrit donc :

$$(14) \quad \begin{vmatrix} (4-E) & 1 \\ 6 & (4-E) \end{vmatrix} = E^2 - 8E + 10 = 0$$

soit :

$$(15) \quad K(x+2, y+6) - 8K(x+1, y+3) + 10K(x, y) = 0.$$

Méthode de Polya pour la détermination de la fonction d'efficacité.

M. Polya introduit alors le polynôme :

$$(16) \quad P = C_0 + C_1 p^a q^b + \dots + C_r p^r q^r$$

et montre, sur l'exemple précédent, que la fonction d'efficacité peut s'écrire sous la forme :

$$(17) \quad L(p) = \frac{Q}{R}, \quad Q \text{ étant un polynôme en } p \text{ et } p.$$

En effet, dans cet exemple

$$L(p) = \sum_{p \in x} K(x, y) p^x q^y = \sum_{m=0}^{\infty} K(m, 3m+6) p^m q^{3m+6}$$

tous les points de Py se situant sur la droite D_1 ; $y = 3x + 6$.

D'autre part : $R1 - 8pq^3 + 10p^2q^6$.

Donc :

$$P L(p) = \sum_{m=2}^{\infty} \left[K(m, 3m+6) - 8K(m-1, 3m+3) + 10K(m-2, 3m) \right] p^m q^{3m+6} \\ + \dots + q^6 - 8pq^3 \cdot q^6 + 6pq^9$$

La quantité sous le signe Σ étant identiquement nulle, d'après (15), il reste :

$$L(p) = \frac{q^6 - 2pq^9}{R} = q^6 \frac{1 - 2pq^3}{1 - 8pq^3 + 10p^2q^6} = \frac{Q}{R}$$

Difficultés pour la généralisation des méthodes de Polya.

Dans son travail, Polya ne cherche pas à établir des formules générales explicites. Au début de son article, il définit lui-même son but qui est simplement de « montrer que l'on peut obtenir des formules exactes quand la pente des droites caractéristiques du test est rationnelle $\left(t = \frac{b}{a}\right)$ et que ces formules sont utilisables pour le calcul numérique, avec une quantité de travail raisonnable, dans certains cas ». C'est pourquoi l'on se heurte à un certain nombre de difficultés, dès que l'on veut tirer de ces résultats des règles générales pour le calcul de la fonction d'efficacité.

1° *Choix des frontières L_i* : Lorsque nous avons défini les lignes L_i découpant la bande T en sous-ensembles superposables, nous n'avons pas évoqué cette question. Or, pour des valeurs données de k_1 et de k_2 , il existe une infinité de manières d'opérer cette division. Dans le choix de L_i , on a évidemment intérêt à faire en sorte que le nombre r des points qui la jalonnent soit minimum. Une telle ligne correspond à ce que Polya appelle un « étrangement » de la bande T . D'ailleurs, sur la ligne L_i choisie comporte un nombre de points r' supérieur au nombre minimum r , on obtient une relation de récurrence dont le premier membre est un polynôme symbolique en E , de degré r' , pouvant se mettre sous la forme :

$$(d_0 E^{r'-r} + d_1 E^{r'-r-1} + \dots + d_{r'-r}) (C_0 E^r + C_1 E^{r-1} + \dots + C_r) = 0.$$

Cette relation reste donc équivalente à :

$$(13) \quad C_0 E^r + C_1 E^{r-1} + \dots + C_r = 0$$

La recherche de l'étrangement de la bande T et de la ligne L_i « la plus courte » est un problème à résoudre empiriquement dans chaque cas particulier, et pour lequel on ne peut indiquer de solution générale.

2° *Difficultés de calcul* : r représentant le nombre de points jalonnant la ligne « la plus courte », le polynôme symbolique figurant au premier membre de (13) est le développement d'un déterminant, Δ , d'ordre r . Le nombre r croît avec la largeur de la bande caractéristique, c'est-à-dire avec k_1 et k_2 . Or, même dans le cas où a et b sont petits, ces deux quantités augmentent rapidement avec la sécurité demandée au test. Le développement du déterminant devient très vite alors une opération laborieuse.

3° *Fonction d'efficacité* : Polya, nous l'avons vu, se contente de montrer la forme de cette fonction, en la calculant dans un cas particulier. Il paraît intéressant de chercher à transformer cette démonstration empirique en un théorème général, qui permette de mieux préciser le procédé de calcul de $L(p)$, ainsi que sa forme.

SUR UNE PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA MARCHE AU HASARD ÉTUDIÉE, ET SON EXPRESSION PAR UN SYSTÈME LINÉAIRE HOMOGÈNE

Dans la méthode de M. Polya, le calcul de la fonction d'efficacité $L(p)$ repose sur la connaissance de la relation de récurrence fondamentale

$$(1) \quad C_0 E^r + C_1 E^{r-1} + \dots + C_{r-1} E + C_r = 0.$$

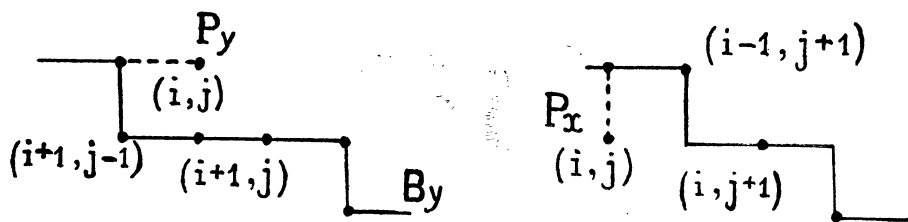
Le procédé préconisé par M. Polya pour trouver cette relation nous paraissant trop compliqué pour être utilisable en pratique dans le cas général, nous avons cherché une méthode plus simple. Ce faisant, nous avons remarqué que la relation (1) résulte de la propriété suivante. *La fonction $K(x, y)$ est nulle en tout point de la frontière A_s , considéré comme appartenant à la bande caractéristique du test.*

Cette propriété de la frontière active se traduit par un système de a équations linéaires et homogènes par rapport aux K_i ($i = 1, 2, \dots, a$), valeurs de la fonction $K(x, y)$ aux a premiers points de P_r . Les coefficients de ce système sont des polynômes de l'opérateur E , par conséquent eux-mêmes des opérateurs. C'est ce système que nous utiliserons dans le chapitre suivant pour déterminer matriciellement la fonction d'efficacité, *sans passer par la relation (1)*. Il présente en outre l'avantage appréciable de pouvoir s'écrire sur simple lecture du graphique.

EXPRESSION DE $K(x, y)$ EN UN POINT DE T en fonction du nombre des chemins aboutissant aux points de P_r .

Dans ce qui suit, nous supposons toujours que $a \leq b$, ce qui ne diminue pas la généralité de la solution, puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas.

Cherchons tout d'abord à exprimer, en fonction de ses valeurs aux points de la limite passive P_r , la valeur de la fonction $K(x, y)$ en un point quelconque de la bande T . Ce calcul faisant appel à l'équation aux différences (1) du chapitre précédent, il faut remarquer que, dans l'application de cette formule, on ne peut faire intervenir les points de la limite passive P . Soient, en effet, i et j les coordonnées d'un point de P_r (fig. 1).



Nous ne pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & K(i+1, j) = K(i+j) + K(i+1, j-1) \\ \text{mais} \quad & K(i+1, j) = K(i+1, j-1). \end{aligned}$$

De même pour un point (i, j) de P_x , nous ne pouvons écrire :

$$\begin{aligned} & K(i, j+1) = K(i, j) + K(i-1, j+1) \\ \text{mais} \quad & K(i, j+1) = K(i-1, j+1). \end{aligned}$$

car, lorsque le point-échantillon atteint un point de la limite passive P , il a quitté la bande T . Il ne saurait donc y revenir, sa marche étant terminée.

Cette remarque permet d'énoncer deux propriétés, caractéristiques respectivement du bord des y et du bord des x .

Les bords B_x et B_y comportent une succession de paliers parallèles à Ox , reliés par des segments de longueur unité parallèles à Ox .

P_y est l'ensemble des points dont les coordonnées entières $(x_i, y_i + 1)$ vérifient l'équation

$$a(y_i + 1) - bx_i = k_1 + a - i.$$

On obtient toute la limite passive P_y à partir d'un groupe de a points consécutifs par translations $(\lambda a, \lambda b)$. Les points de coordonnées (x_i, y_i) sont les points de B_y précédant chacun un point de P_y .

$$(2) \quad ay_i - bx_i = k_1 - i.$$

Dans le cas où $a \leq b$, ces points sont les extrémités des paliers de B_y . P_x est l'ensemble des points dont les coordonnées entières $(x'_j + 1, y'_j)$ vérifient l'équation :

$$ay'_j - b(x'_j + 1) = k_2 - b + j \quad (j = 1, 2 \dots b).$$

Les points de coordonnées (y'_j, x'_j) sont les points de B_x précédant chacun un point de P_x .

$$(3) \quad ay'_j - bx'_j = -k_2 + j \quad (j = 1, 2 \dots b).$$

Les propriétés caractéristiques de B_x et B_y s'énoncent ainsi :

1° Pour le bord des y , la fonction K a la même valeur en tout point d'un même palier, ainsi qu'au point de P_y de même abscisse.

2° Pour le bord des x , la fonction K a la même valeur en deux points de même ordonnée. En d'autres termes, la valeur de la fonction K à l'extrémité d'un palier est la même qu'à l'origine du palier suivant. De plus, la valeur de $K(x, y)$ en un point de la limite passive P_x est la même qu'au point de B_x qui le précède.

Théorème.

Revenant à B_y , considérons les valeurs (ξ_i, η_i) de (x_i, y_i) correspondant à $0 \leq \xi_i < a$. Ce sont les coordonnées des extrémités des a premiers paliers de B_y , M_i ($i = 1, 2 \dots a$).

Posons $K_i = K(\xi_i, \eta_i)$.

K_i est égal au nombre de chemins aboutissant au point de P_i qui suit M_i . Nous allons démontrer la proposition suivante :

La valeur de la fonction K en un point (x, y) quelconque de la bande T peut s'écrire :

$$(4) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^a \alpha_i K_i$$

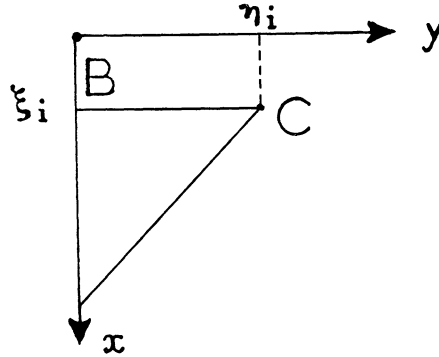
les α_i étant des polynômes symboliques en E , d'expression :

$$(6) \quad \alpha_i = \sum_{\mu} (-1)^{(x-\xi_i) - \mu a} C_{(\eta_i - y) + \mu b}^{(x-\xi_i) - \mu a} E^{\mu}$$

avec : $\frac{(x+y) - (\xi_i + \eta_i)}{a+b} \leq \mu \leq \frac{x - \xi_i}{a}$

Remarquons tout d'abord que la valeur de K en tout point de P_i peut s'écrire $E K_i$ ($i = 1, 2 \dots a$; $\mu = 0, 1, 2 \dots$).

Pour démontrer l'existence d'une expression de la forme (4), il suffit de calculer le coefficient α_i figurant dans cette expression.



Si, utilisant l'équation aux différences

$$(7) \quad K(x, y) = K(x-1, y) + K(x, y-1)$$

on calcule les valeurs de K aux points d'abscisse ξ_i , d'ordonnées, $\eta_i - 1$, $\eta_i - 2, \dots$

on trouve :

$$K(\xi_i, \eta_i - 1) = K_i - K(\xi_i - 1, \eta_i);$$

$$K(\xi_i, \eta_i - 2) = K_i - K(\xi_i - 1, \eta_i) - K(\xi_i - 1, \eta_i - 1)$$

et l'on constate que K_i intervient dans ces expressions avec le coefficient 1. D'autre part, toujours d'après l'équation aux différences (7) K_i n'intervient, dans l'expression de K que pour des points (x, y) tels que $(x+y) \leq \xi_i + \eta_i$. Notre but étant seulement, pour l'instant, de rechercher la contribution de K_i à l'expression de $K(x, y)$ nous pouvons donc poser :

$$K(x, y) = K_i \text{ pour } x = \xi_i, y = 1, 2 \dots \eta_i$$

$K(x, y) = 0$ pour tout point extérieur au triangle BCD déterminé par les droites :

$$x = \xi_i, \quad y = 0, \quad x + y = \xi_i + \eta_i.$$

Dans ces conditions, on peut trouver les valeurs de la fonction K en tout point du triangle BCD, en écrivant l'équation aux différences (7) sous la forme :

$$(8) \quad K(x+1, y-1) = K(x+1, y) - K(x, y)$$

avec les conditions aux limites :

$$(9) \quad K(\xi_i, y) = K_i \text{ pour } y = 1, 2 \dots \eta_i$$

$$(10) \quad K(x, y) = 0 \text{ pour } x < \xi_i, \text{ et pour } x + y > (\xi_i + \eta_i)$$

On constate l'analogie avec la règle de formation des coefficients binomiaux

$$(11) \quad C_{r+1}^{j+1} = C_r^{j+1} + C_r^j$$

$$(12) \quad C_r^0 = 1 \quad \text{pour } r \geq 0$$

$$(13) \quad C_r^j = 0 \quad \text{pour } j > r \quad j \leq 0.$$

Il suffit, pour cela, de poser :

$$K(x + \xi_i - y + \eta_i) = (-1)^x K_i C_y^x$$

soit :

$$(14) \quad K(x, y) = (-1)^{x-\xi_i} K_i C_{\eta_i-y}^{x-\xi_i}$$

et :

$$\eta_i - y = r; \quad x - \xi_i = j.$$

La contribution de $K_i = K(\xi_i, \eta_i)$ à l'expression de $K(x, y)$ s'écrit donc :

$$(15) \quad (-1)^{(x-\xi_i)} K_i C_{\eta_i-y}^{x-\xi_i}$$

Contribution de $E^\mu K_i$: elle s'écrit de même :

$$(-1)^{x-\xi_i-\mu a} C_{(\eta_i-y)+\mu b}^{(x-\xi_i)-\mu a} E^\mu K_i$$

Cette expression est différente de zéro, si sont réalisées les deux conditions suivantes :

$$x - \xi_i - \mu a \geq 0, \quad \text{soit } \mu \leq \frac{x - \xi_i}{a}$$

$$x - \xi_i - \mu a \leq \eta_i - y + \mu b \quad \text{soit } \mu \geq \frac{x + y - (\xi_i + \eta_i)}{a + b}$$

De ces résultats on déduit l'expression (6) du coefficient α .

Il est intéressant de remarquer que l'expression (4) de $K(x, y)$ s'écrit sur simple lecture du graphique.

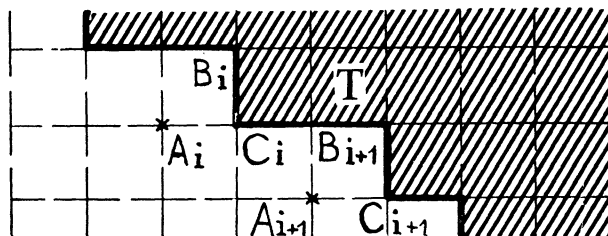
Enoncé et expression mathématique de la propriété fondamentale.

Cette propriété concerne le bord des x , B_x , et a déjà été envisagée au début du chapitre :

En deux points de B_x de même ordonnée, la fonction $K(x, y)$ a la même

valeur. Cela résulte du fait que, lorsque le point-échantillon a franchi B_x , il ne peut revenir dans T , sa marche étant terminée.

Or, à tout couple de points de B_x de même ordonnée, B_i, C_i , est toujours associé un point A_i de A_x (voir figure 3)



Si l'on considère que $K(x, y)$ est encore définie au point A_i , en fonction des E^*K , comme si A_i appartenait aussi à la bande T , il est équivalent d'écrire :

$$K(B_i) = K(C_i)$$

ou :

$$(16) \quad K(A_i) = 0$$

puisque :

$$K(C_i) = K(A_i) + K(B_i)$$

La propriété précédente s'énonce alors ainsi :

La fonction $K(x, y)$ est nulle en tout point de A_x considéré comme appartenant à la bande T .

Si nous remplaçons, dans (16), $K(A_i)$ par son expression en fonction des E^*K , nous obtenons une équation de la forme :

$$\sum_{j=1}^a d_{ij} K_j = 0$$

où les d_{ij} sont des polynômes en E ⁽¹⁾.

En écrivant la même équation pour a points consécutifs de A_x , ($A_1, A_2, \dots, A_a$) on obtient un système linéaire et homogène par rapport aux K_j :

$$(17) \quad \left\{ \sum_{j=1}^a d_{ij} K_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, a). \right.$$

1. Nous supposons que les droites $x + y = +x_{A_i} + y_{A_i}$ coupent B_x . On peut toujours choisir les points A_i pour qu'il en soit ainsi. Cela évite, pour le présent, une difficulté qui sera évoquée et levée plus loin.

Partant de (17), il est aisé d'exprimer que $K(x, y)$ est nulle en tout point de A_s . En effet, tous les points de A_s s'obtiennent à partir des points $A_1, A_2, \dots, A_n$, par translations de composantes respectives ra, rb . Soit donc A'_i le point obtenu en faisant subir à A_i la translation de composantes ra, rb . On a :

$$K(A'_i) = E^r K(A_i).$$

Par conséquent, l'équation obtenue en multipliant symboliquement (16) par E^r exprime que $K(A'_i) = 0$.

Il suffit donc de multiplier les équations (17) par des puissances convenables de E pour exprimer que $K(x, y)$ est nulle en tout point de A_s .

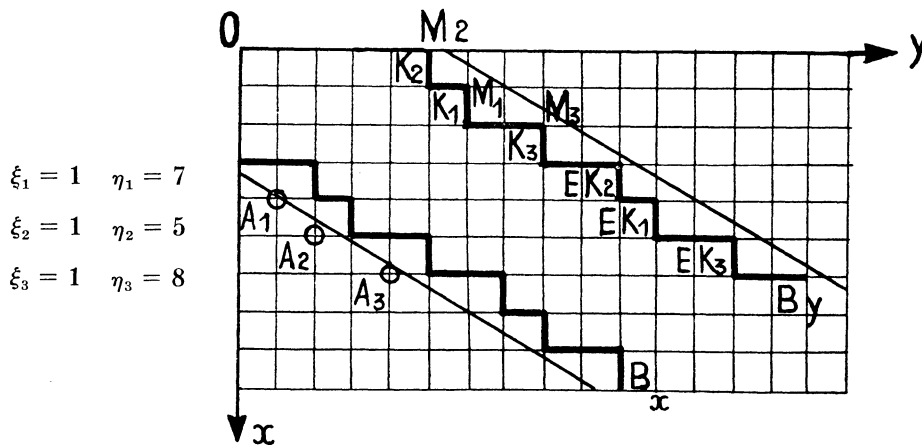
En résumé, on exprime que $K(x, y) = 0$ en tout point de A_s à l'aide du système (17) linéaire et homogène par rapport aux K_i . Ce système s'écrit très simplement, sur lecture du graphique, et c'est lui qui permettra de déterminer, par une méthode matricielle, la fonction d'efficacité.

Exemple numérique.

L'exemple choisi est celui du chapitre III, correspondant à :

$$a = 3, b = 5, k_1 = k_2 = 17.$$

La figure (4) représente le graphique du test.



Avec les notations adoptées, $K_1 = K(1, 7)$; $K_2 = K(0, 5)$; $K_3 = K(2, 8)$. Soient A_1, A_2, A_3 , les points de A_s d'ordonnées respectives 1, 2, 3.

Exprimons que $K(A_1)$, $K(A_2)$, $K(A_3)$ en fonction des $E^i K_i$, en utilisant les résultats du début du chapitre : il suffit de lire sur le graphique :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(A_1) = K(4,1) = (-C_6^3 + C_{11}^0 E) K_1 + (C_4^4 - C_9^1 E) K_2 + C_7^2 K_3 \\ K(A_2) = K(5,2) = (C_5^4 - C_{10}^1 E) K_1 + C_8^2 E K_2 + (-C_6^3 + C_{11}^0 E) K_3 \\ K(A_3) = K(6,4) = C_8^2 E K_1 + (-C_6^3 E + C_{11}^0 E^2) K_2 + (C_4^4 - C_9^1 E) K_3 \end{array} \right.$$

Le système (17) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} (E - 20) K_1 + (1 - 9E) K_2 + 21 K_3 = 0 \\ (5 - 10E) K_1 + 28 E K_2 + (E - 20) K_3 = 0 \\ 28 E K_1 + E(E - 20) K_2 + (1 - 9E) K_3 = 0. \end{array} \right.$$

Expression générale des coefficients du système (17).

Comme nous l'avons déjà indiqué, on écrit ce système très simplement, dans chaque cas particulier, en lisant sur le graphique. Nous précisons néanmoins l'expression générale des coefficients.

Revenons aux notations du début du chapitre : les points (x_i, y_{i+1}) de P_y correspondent, on l'a vu à (x_i, y_i) solution en nombres entiers de l'équation :

$$(18) \quad ay_i - bx_i = k_1 - i \quad (i = 1, 2 \dots a)$$

(r_0, j_0) , (avec r_0, j_0 positifs) désignant une solution entière de l'équation :

$$ar - bj = 1.$$

On peut donner la solution générale de (18) sous la forme :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = (k_1 - i) j_0 + \lambda_i a \\ y_i = (k_1 - i) r_0 + \lambda_i b \end{array} \right. \quad (\lambda_i \text{ entier})$$

Les extrémités M_i des a premiers paliers de B_y correspondent à $x_i = \xi_i$ avec $0 \leq \xi_i < a$, soit :

$$\lambda_i = \left[\frac{k_1 - i}{a} j_0 \right]$$

le symbole $[z]$ désignant le plus grand entier inférieur ou égal à z

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = (k_1 - i) j_0 - \left[\frac{k_1 - i}{a} j_0 \right] a \\ \eta_i = (k_1 - i) r_0 - \left[\frac{k_1 - i}{a} \right] b \end{array} \right.$$

Les solutions entières positives (x_j, y_j) de l'équation :

$$(21) \quad a Y_j - b X_j = -k_2 - j \quad (j = 0, 1, 2 \dots a - 1)$$

qui définissent les points de A_x , sont de la forme

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_j = -(k_2 + j) j_0 + \lambda'_j a \\ Y_j = -(k_2 + j) r_0 + \lambda'_j b \end{array} \right.$$

La contribution de $K(x_i, y_i)$ à l'expression de $K(X_j, Y_j)$ s'écrit :

$$(-1)^{X_j - x_i} C_{y_i - Y_j}^{X_j - x_i} K(x_i, y_i)$$

Elle est différente de zéro à condition que :

$$1^\circ X_j \geq x_i, \quad \text{soit : } \lambda'_j - \lambda_i \geq \frac{k+j-i}{a} j_0$$

$$2^\circ y_i - Y_j \geq X_j - x_i, \quad \text{soit : } \lambda'_j - \lambda_i \geq \frac{k+j-i}{a+b} (r_0 + j_0)$$

D'autre part :

$$x_i - \xi_i = \lambda_i + \left[\frac{k_i - i}{a} \cdot j_0 \right]$$

Posons : $\lambda'_j - \lambda_i = \mu$

La contribution de $K(x_i, y_i)$ prend la forme :

$$(-1)^{\mu a - (k+j-i)j_0} C_{(k+j-i)r_0 - \mu b}^{\mu a - (k+j-i)j_0} E^{\lambda_j - \mu + \left[\frac{k_i - i}{a} \right] j_0} K_i$$

Le coefficient α_i de K_i dans l'expression (5) de $K(X_j, Y_j)$ s'écrit donc :

$$\alpha_i = a_{ji} = E^{j+} \left[\frac{k_i - i}{a} \right] j_0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu a - (k+i-i)j_0} C_{(k+j-i)r_0 - \mu b}^{\mu a - (k+j-i)j_0} E^{-\mu}$$

$$\text{avec : } j_0 \frac{k+j-i}{a} \leq \mu \leq \frac{k+j-i}{a+b} (r_0 + j_0)$$

Si l'on pose :

$$a_{j-1,i} = d_{ji}$$

le système (17) s'écrit :

$$(23) \quad \sum_{j=1}^a d_{ij} K_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, a)$$

avec :

$$(24) \quad d_{ij} = E^{\lambda'_{i-1} + \left[\frac{k_i - j}{a} \right] j_0} \sum_{\mu} (-1)^{\mu a - (k+i-j-1)j_0} C_{(k+i-j-1)r_0 - \mu b}^{\mu a - (k+i-j-1)j_0} E^{-\mu}$$

$$\text{avec : } \frac{k+i-j-1}{a} j_0 \leq \mu \leq \frac{k+i-j-1}{a+b} r_0 + j_0$$

soit, sous forme matricielle :

$$(25) \quad A \{K_i\} = 0 \quad \text{avec } A = [d_{ij}]$$

On a intérêt à utiliser les a premiers points de A_n , ils correspondent à : $0 \leq Y_j < a$ soit :

$$\lambda'_j = \text{plus petit entier} \geq \frac{(k+j)r_0}{b} \quad (j = 0, 1, \dots, a-1)$$

Remarque : On a posé, au chapitre III :

$$f_z(u) = \sum_{\mu} (-1)^{\mu a - (z-1)j_0} C_{(z-1)r_0 - \mu b}^{\mu a - (z-1)j_0} u^{\mu - \nu_{z-1}}$$

avec : $\frac{z-1}{a} j_0 \leq \mu \leq \frac{z-1}{a+b} (r_0 + j_0)$

on constate que :

$$a_{ji} = E^{\lambda_j + \left[\frac{k_i - i}{a} j_0 \right] - \nu_{k+j-i}} f_{k+j-i+1} \left(\frac{1}{E} \right)$$

La matrice A a donc pour élément :

$$d_{ij} = E^{\lambda_i + \left[\frac{k_i - j}{a} j_0 \right] - \nu_{k+i-j}} f_{k+i-j} \left(\frac{1}{E} \right)$$

Remarque concernant les résultats de M. Polya.

Avant de passer au problème de la détermination de $L(p)$ à partir du système (17), il est intéressant de montrer comment on peut, en utilisant ce même système, donner dans le cas général, une justification des résultats obtenus par Polya sur un exemple numérique.

Montrons tout d'abord que le premier membre de la relation fondamentale (1) n'est autre que le déterminant du système (17) : l'élimination de $(a-1)$ des K_i entre les équations (17) donne :

$$(27) \quad \Delta \cdot K_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, a)$$

où Δ représente le déterminant des coefficients du système : c'est un polynôme en E . Le système (17) restant vérifié lorsqu'on applique au premier membre d'une équation quelconque l'opérateur E , l'équation (27) implique :

$$(28) \quad E \Delta K_i = \Delta \cdot (E K_i) = 0$$

La valeur de $K(x, y)$ en un point quelconque de T apparaissant comme une combinaison linéaire des $E K_i$, (28) implique :

$$(29) \quad K(x, y) = 0$$

C'est la relation de récurrence (1) de M. Polya.

On peut ensuite montrer, en toute généralité que, partant de cette relation, il est possible d'exprimer $L(p)$ comme un rapport de deux polynômes en p et q

$$L(p) = \frac{Q}{R}$$

et préciser la forme de ce rapport.

Pour simplifier l'écriture il est commode d'introduire un nouvel opérateur I , en posant :

$$(31) \quad I^r P(x, y) = P(x + ra, y + rb)$$

$P(x, y)$ désignant la probabilité pour que le point-échantillon passe par la position (x, y) .

On voit que :

$I^r P(x, y) = K(x + ra, y + rb) p^{r+a} q^{r+b} = E^r K(x, y) p^r q^r (p^a q^b)^r$
soit, avec la notation $p^a q^b = u$

$$(32) \quad I^r P(x, y) = u^r E^r K(x, y) p^r q^r$$

Exprimons la probabilité P_i d'atteindre le point de la frontière P_i d'abscisse ξ_i . Ce point a pour coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i = (k_1 + a - i) j_0 - v_{k_1-i+a} a \\ \eta_i + 1 = (k_1 + a - i) r_0 - v_{k_1-i+a} b \end{array} \right.$$

avec : $v_s = \left\lfloor \frac{z j_s}{a} \right\rfloor$

Le nombre de chemins aboutissant au point considéré étant égal à K_i , la probabilité P_i cherchée s'écrit :

$$P_i = p^{\xi_i} q^{\eta_i+1} K_i = (p^{j_0} q^{r_0})^{k_1-i+a} (p^a q^b)^{-v_{k_1-i+a}} K_i$$

soit, en posant $v = p^{j_0} q^{r_0}$

$$P_i = \frac{v^{k_1-i+a}}{u^{v_{k_1-i+a}}} K_i$$

De même :

$$I^n P_i = P(\xi_i + na, \eta_i + 1 + nb) = u^n E^n K_i \frac{v^{k_1-i+a}}{u^{v_{k_1-i+a}}}$$

soit :

$$(49) \quad I^n P_i = v^{k_1-i+a} u^{n-v_{k_1-i+a}} E^n K_i$$

REMARQUE. — La frontière P_j étant l'ensemble des points de coordonnées

$$(\xi_i + ja, \eta_i + 1 + jb) \quad (i = 1, 2, \dots, a, j = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

la fonction d'efficacité n'est autre que la somme double :

$$L(p) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=0}^{\infty} I^j P_i$$

Appliquons maintenant l'opérateur (30) à K_i compte tenu des relations

$$K_i = \frac{u^{v_{k_1-i+a}}}{v^{k_1-i+a}} P_i, \quad E^n K_j = \frac{u^{v_{k_1-i+a-n}}}{v^{k_1-i+a}} I^n P_i$$

Nous obtenons l'égalité :

$$\frac{u^{v_{k_1-i+a-r}}}{v^{k_1-i+a}} \left[C_0 I^r + C_1 u I^{r-1} + \dots + C_r u^r \right] P_i = 0$$

Nous pouvons la transformer et écrire, en supprimant le facteur

$$\frac{u^{v_{k_1-i+a-r}}}{v^{k_1-i+a}}$$

$$[C_0 + C_1 u + \dots C_r u^r] P_i = [C_0 (1 - I^r) + C_1 u (1 - I^{r-1}) + \dots C_{r-1} u^{r-1}] P_i$$

On obtiendrait de même, en appliquant la relation à $I^* K_i$ (n entier positif quelconque) :

$$[C_0 + C_1 u + \dots C_r u^r] I^* P_i = [C_0 (1 - I^r) + C_1 u (1 - I^{r-1}) + \dots + C_{r-1} u^{r-1}] I^* P_i$$

Ecrivons la même égalité pour tous les points de la frontière passive P_j ($\xi_i + ja, \eta_i + 1 + jb$), et faisons la somme membre à membre. Si nous posons :

$$C_0 + C_1 u + \dots + C_r u^r = R(u)$$

et si nous remarquons que :

$$(1 - I^k) \sum_{j=0}^{\infty} I^j = (1 - I^k) (1 + I + \dots + I^k + \dots) = 1 + I + \dots + I^{k-1} \\ = \sum_{j=0}^{k-1} I^j \quad (2)$$

il vient :

$$R \sum_{i=1}^a \sum_{j=0}^{\infty} P_i = RL(p) = \sum_{i=1}^a \left[C_0 \sum_{j=0}^{r-1} u^j + C_1 \sum_{j=0}^{r-2} u^{j+1} + \dots + C_{r-1} \sum_{j=0}^0 u^{j+r-1} \right] I^j P_i$$

Le second membre représente bien un polynôme Q de degré fini en p et q ce qui généralise le résultat obtenu par Polya sur un exemple numérique.

Si nous remplaçons $I^j P_i$ par son expression (6) en fonction de $E_j K_i$, le second membre prend la forme :

$$\sum_{i=1}^a \frac{v^{k_1-i+a}}{u^{v_{k_1}-i+a}} \left[C_0 \sum_{j=0}^{r-1} u^j + C_1 \sum_{j=0}^{r-2} u^{j+1} + \dots + C_{r-1} \sum_{j=0}^0 u^{j+r-1} \right] E_j K_i \\ = \frac{v^{k_1}}{u^{v_{k_1}+a}} \sum_{i=1}^a v^{a-i} u^{v_{k_1}+a-v_{k_1}-i+a} \left[C_0 \sum_{j=0}^{r-1} u^j + C_1 \sum_{j=0}^{r-2} u^{j+1} + \dots + C_{r-1} \sum_{j=0}^0 u^{j+r-1} \right]$$

La qualité $u^{v_{k_1}+a-v_{k_1}-i+a} \left[\dots \right] E_j K_i$ représente un polynôme en u que nous désignerons par $\omega_{a-i}(u)$. Avec ces notations, la fonction, d'efficacité s'écrit :

$$L(p) = \frac{v^{k_1}}{u^{v_{k_1}+a}} \frac{\sum_{i=0}^{a-1} v^i \omega_i(u)}{R(u)}$$

Cette méthode ne saurait nous donner que la forme de $L(p)$, qui est bien celle obtenue au chapitre III. Quant à son utilisation pratique, elle conduit le plus souvent à des calculs si compliqués qu'elle ne peut guère être envisagée.

2. Nous n'évoquons pas les problèmes de convergence déjà étudiés par d'autres auteurs.

CHAPITRE VI

MÉTHODE MATRICIELLE POUR LE CALCUL DE LA FONCTION D'EFFICACITÉ

1. — PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Pour exprimer la propriété caractéristique du bord des x , B_x nous avons été conduits à écrire un système linéaire homogène de a équations :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^a d_{ij} K_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, a)$$

système équivalent à l'équation matricielle :

$$(2) \quad A(E) \{K_i\} = 0 \quad (2)$$

$A(E)$ désignant la matrice des coefficients d_{ij} , qui sont des polynômes en E . La probabilité $I' P_i$ que le test se termine par l'acceptation de H au point de coordonnées $[\xi_i + ja, \eta_i + 1 + jb]$ étant liée au nombre des chemins $E' K_i$ aboutissant en ce point par la relation :

$$I' P_i = u' E' K_i p^{\xi_i} q^{\eta_i + 1}$$

Nous pouvons substituer les $I' P_i$ aux $E' K_i$ dans (2) qui s'écrit alors :

$$(3) \quad B \{P_i\} = \{0\}$$

B étant une matrice carrée dont les éléments b_{ij} sont des polynômes en I de la forme :

$$b_{ij} = \beta_0 + \beta_1 I + \dots + \beta_s I^s$$

La division de ces polynômes par $I - 1$ donne :

$$(4) \quad b_{ij} = (I - 1) q_{ij} + r_{ij}$$

La matrice B apparaît alors comme la somme de deux matrices :

$$(5) \quad B = (I - 1) Q + R$$

et l'égalité matricielle (3) peut s'écrire :

$$(6) \quad R \{P_i\} = (1 - I) Q \{P_i\}$$

En multipliant les deux membres de (6) par I' , nous obtenons :

$$(7) \quad R (1 + I + I^2 + \dots) \{P_i\} = Q \{P_i\}$$

Or :

$$L_i = (1 + I + I^2 + \dots) P_i$$

représente la probabilité que le test se termine par l'acceptation en un point de coordonnées

$$\xi_i + \lambda a \quad \eta_i + 1 + \lambda b \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

1. Voir chapitre V.

2. La notation $\{\varphi_i\}$ désigne la matrice colonne ayant pour éléments $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

et la somme des L_i , elle n'est autre que la fonction d'efficacité :

$$(8) \quad \sum_{i=1}^p L_i = L(p)$$

En résumé, la transformation de l'équation matricielle (1) conduit à :

$$(9) \quad R\{L_i\} = Q\{P_i\}$$

qui donne :

$$(10) \quad \{L_i\} = R^{-1}Q\{P_i\}$$

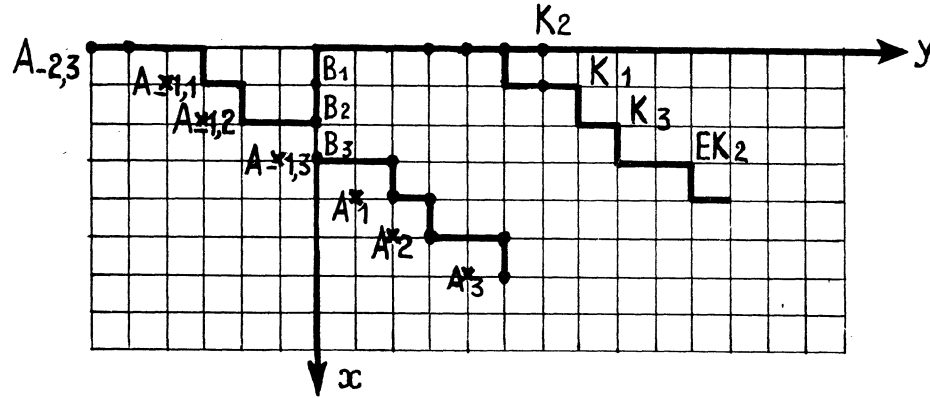
L'expression de $Q P_i$ est simple : en effet, elle ne fait intervenir qu'un nombre fini de points de P_i , les éléments de Q étant des polynômes en I de degré fini.

Les L_i étant connus, $L(p)$ est donné par (8).

Application numérique.

Nous avons appliqué cette méthode au test dont la fonction d'efficacité a déjà été calculée par la méthode de Walker. Il correspond aux valeurs suivantes des constantes :

$$a = 3 \quad b = 5 \quad k_1 = k_2 = 17.$$



En exprimant, en fonction des E/K_i , les valeurs de $K(x, y)$ aux points A_1, A_2, A_3 , et en les égalant à zéro, on obtient la relation (1) avec :

$$A = \begin{bmatrix} (E - 20) & , & (1 - 9E) & , & 21 \\ (5 - 10E) & , & 28E & , & (E - 20) \\ 28E & , & E(E - 20) & , & (1 - 9E) \end{bmatrix}$$

En introduisant les I/P_i on en déduit la relation (3) avec :

$$B = \begin{bmatrix} (I - 20u) & , & v(u - 9I) & , & 21v^2 \\ u(5u - 10I) & , & v(28uI) & , & v^2(I - 20u) \\ 28uI & , & v(I^2 - 20uI) & , & v^2(u - 9I) \end{bmatrix}$$

La division des b_{ij} par $(I-1)$ donne (5) avec :

$$R = \begin{bmatrix} (1-20u) & , & v(u-9) & , & 21v^2 \\ u(u-10) & , & 28vu & , & v^2(1-20u) \\ 28u & , & v(1-20u) & , & v^2(u-9) \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 & , & -9v & , & 0 \\ -10u & , & 0 & , & v^2 \\ 28u & , & v(I+1-20u) & , & -9v^2 \end{bmatrix}$$

La relation (6) permet alors de calculer $\{L_i\}$.

Calcul de $Q\{P_i\}$. En égalant à 1 les valeurs de $K(x, y)$ aux points O, B_1, B_2, B_3 , nous obtenons le système :

$$1 = K_2; 1 = K_1 - 5K_2; 1 = 7K_1 + 10K_2 + K_3; 1 = 21K_1 - 10K_2 + 8K_3 + EK_2$$

qui a pour solution :

$$K_1 = 6; K_2 = 1; K_3 = 33; EK_2 = 149..$$

On en déduit P_1, P_2, P_3, IP_2 , et finalement :

$$Q\{P_i\} = \frac{v^{19}}{u^6} \begin{bmatrix} -3 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice R^{-1} s'écrit :

$$R^{-1} = \frac{1}{v^2} \frac{\begin{bmatrix} v^2(372u^2 + 212u + E), & v^2(u^2 + 402u + 60), & v^2(20u^2 + 407u + P) \\ v(5u^3 + 505u^2 + 62u), & v(20u^2 + 407u + 9), & v(295u^2 + 107u^2 + 1) \\ 100u^3 + 597u^2 + 10u, & 372u^2 + 212u + 1, & 5u^3 + 505u^2 + 62u \end{bmatrix}}{5u^4 - 4880u^3 + 3808u^2 - 156u + 1}.$$

Enfin, d'après (7)

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{v^{17}}{u^6} \frac{\begin{bmatrix} v^2(u^3 - 694u^2 - 169u + 6) \\ v(5u^3 - 813u^2 - 7u + 1) \\ 77u^3 - 1020u^2 + 33u \end{bmatrix}}{5u^4 - 4880u^3 + 3808u^2 - 156u + 1}.$$

Sur cet exemple, c'est par un calcul direct que nous avons déterminé les matrices R, Q, P_i .

Nous allons montrer que, dans le cas général, ces matrices ont des expressions particulièrement simples :

1° R n'est autre que la matrice $A\left(\frac{1}{u}\right)$.

2° Les éléments du produit matriciel QP_i sont des combinaisons linéaires des valeurs de $K(x, y)$ en certains points du plan.

2. — PRATIQUE DE LA MÉTHODE

Écriture de l'équation matricielle fondamentale.

Nous avons indiqué que l'égalité (2) :

$$A\{K_i\} = 0$$

entraîne :

$$A\{E^\lambda K_i\} = 0 \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

Cela est encore vrai pour certaines valeurs négatives de λ , mais pas pour toutes. Il est avantageux, pour simplifier la discussion, de présenter le problème de la manière suivante :

On suppose prolongés indéfiniment dans les deux sens B_x , B_y et la bande T , ainsi que les limites active et passive A et P .

Soit $K(x, y)$ la fonction définie, pour (x, y) entiers, par l'équation aux différences partielles.

$$(9) \quad K(x, y) = K(x-1, y) + K(x, y-1)$$

avec les conditions :

$$(10) \quad K(x, y) = E^\lambda K_i \quad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

aux points de B_y d'abscisses $\xi_i + \lambda a$, les $E^\lambda K_i$ désignant des valeurs données.

La valeur de la fonction K est ainsi parfaitement définie en tout point (x, y) situé à gauche de B_y . Elle est donnée par les expressions (5, 6) du précédent chapitre.

Prenons maintenant pour valeur de $E^\lambda K_i$ le nombre de chemins issus de l'origine, et aboutissant au point $(\xi_i + \lambda a, \eta_i + \lambda b)$ de B_y . De ce choix il résulte que :

1° En tout point de la bande T de coordonnées non négatives, la valeur de la fonction K est égale au nombre de chemins aboutissant à ce point. En particulier $K(x, y) = 1$ sur les portions de Ox et Oy situées dans T .

2° $K(x, y) = 0$ pour tout point du demi-plan $x < 0$. En particulier :

$$E^{-\lambda} K_i = 0 \quad (\lambda > 0).$$

L'égalité des valeurs de $K(x, y)$ en deux points de B_x de même ordonnée entraîne :

$K(x, y) = 0$ en tout point (X_j, Y_j) de A_x , d'ordonnée ≥ -1 . Aux points de A_x d'ordonnées inférieures à -1 on peut calculer $K(x, y)$ en utilisant les valeurs de cette fonction aux points de $0x$:

$$K(x, 0) = 1 \quad \text{dans } T.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{— pour } X_j + Y_j \geq 0 \quad & K(X_j, Y_j) = 0 \\ \text{— pour } X_j + Y_j < 0 \quad & K(X_j, Y_j) = \sum_{x=0}^{X_j} (-1)^{X_j-x} C_{-Y_j}^{X_j-x} \\ & = (-1)^{X_j} C_{-Y_j-1}^{X_j} \end{aligned}$$

On peut donc obtenir l'équation matricielle (2) en utilisant a points consécutifs (X_j, Y_j) de A_x tels que :

$$X_j + Y_j \geq 0.$$

L'égalité :

$$A\{K_i\} = 0$$

entraîne :

$$E^\lambda A \{K_i\} = A \{E^\lambda K_i\} = 0$$

quel que soit λ tel que

$$X_j + \lambda a + Y_j + \lambda b \geq 0$$

soit :

$$\lambda \geq -\frac{X_j + Y_j}{a + b}$$

Calcul de la fonction d'efficacité.

Pour la commodité des calculs ultérieurs, nous utiliserons les a premiers points de A_x pour lesquels l'expression de K ne fait pas intervenir les $E^r K_i$. La matrice A correspondante est la plus simple possible et aucun de ses éléments ne contient de puissances négatives de E . Appelons ces points :

$$A_{0j} = (X_{0j}, Y_{0j}) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, a-1).$$

Nous désignerons par A_γ, j les points de coordonnées :

$$X_{0j} + \lambda a, Y_{0j} + \lambda b \quad (\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(voir figure 2).

La matrice A est la matrice du système :

$$K(A_{0,i}) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, a-1).$$

L'équation correspondante à $A_{0,i-1}$ est de la forme :

$$(11) \quad \sum_{j=1}^a d_{ij} K_j = 0$$

d_{ij} étant un polynôme en E de la forme :

$$(12) \quad d_{ij}(E) = a_0 E^m + a_1 E^{m-1} + \dots + a_{m-1} E + a_m.$$

D'autre part, nous savons que :

$$E^r K_j = \frac{1}{u^r} \frac{I^r P_j}{p^{rj} q^{rj+1}} = \frac{I^r P_j}{u^r \omega_j}$$

en posant :

$$(13) \quad \omega_j = p^{rj} q^{rj+1} = \frac{v^{k-rj+a}}{u^{rk-rj+a}}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$d_{ij} K_j = \frac{1}{u^m \omega_j} (a_0 I^m + a_1 u I^{m-1} + \dots + a_{m-1} u^{m-1} I + a_m u^m) P_j$$

soit, d'après les propriétés de la division des polynômes en x par $x-1$:

$$(14) \quad d_{ij} K_j = \frac{1}{\omega_j} \left\{ \frac{1-1}{u^m} \left[a_0 I^{m-1} + (a_0 + a_1 u) I^{m-2} + \dots + (a_0 + a_1 u + \dots + a_{m-1} u^{m-1}) \right] \dots + d_{ij} \left(\frac{1}{u} \right) \right\} P_j$$

c'est-à-dire :

$$(15) d_{ij} \frac{1}{u} \frac{P_j}{G_j} = (uE - 1) \left[\frac{a_0 u^{m-1} E^{m-1} + (a_0 + a_1 u) u^{m-2} E^{m-2} + \dots + (a_0 + a_{m-1} u^{m-1})}{u^m} \right] K_j$$

La quantité entre crochets s'écrit encore :

$$(16) \left[\frac{1}{u} (a_0 E^{m-1} + a_1 E^{m-2} + \dots + a_{m-1}) + \frac{1}{u^2} (a_0 E^{m-2} + \dots + a_{m-2}) + \dots + \frac{1}{u^m} a_0 \right] K$$

Dans l'expression (16), le coefficient de $\frac{1}{u^r}$ est :

$$(a_0 E^{m-r} + a_1 E^{m-r-1} + \dots + a_{m-r}) K_j$$

c'est-à-dire :

$$E^{-r} d_{ij} (E) K_j, \text{ avec } E^{-\lambda} K_j = 0.$$

Cette expression n'est autre que la valeur de la fonction au point $A_{-r, (i-1)}$:

$$K(A_{-r, i-1}).$$

En définitive, l'équation (11) est équivalente à :

$$(17) \sum_j d_{ij} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{P_j}{G_j} = (I - 1) \left[\frac{1}{u} K(A_{-1, i-1}) + \frac{1}{u^2} K(A_{-2, i-1}) \dots \right]$$

Posant :

$$\omega = \frac{1}{u} = p^{-a} q^{-b}$$

on en déduit, d'après la théorie du paragraphe précédent :

$$(18) \sum_j d_{ij} (w) L_j / G_j = \sum_r w^r K(A_{-r, i-1})$$

Le système des a équations (18) est équivalent à la relation matricielle

$$(19) A(w) \left\{ L_i / G_i \right\} = \sum_r w^r \left\{ K(A_{-r, i-1}) \right\}$$

Les valeurs de $K(A_{-r, i-1})$ se calculent aisément, grâce aux relations démontrées ci-dessus.

$$(20) K(X_j, Y_j) \begin{cases} = 0 & \text{si } X_j + Y_j \geq 0 \\ = 0 & \text{si } X_j < 0 \\ = (-1)^{X_j} C_{-Y_j-1}^{X_j} & \text{pour } X_j + Y_j < 0, X_j > 0. \end{cases}$$

En résumé : pour calculer la fonction d'efficacité :

1° On annule les expressions, en fonction des $E'K_i$, de $K(x, y)$ aux points A_{0j} ($j = 0, 1, 2 \dots a-1$) de la limite active A_x .

La matrice du système obtenu s'écrit :

$$A(E) = [d_{ij}(E)]$$

$d_{ij}(E)$ désignant des polynômes en E .

Les probabilités L_i ($i = 1, 2 \dots a$) sont solution de l'équation matricielle :

$$(21) \quad A(w) \left\{ \frac{L_i}{\omega_i} \right\} = \sum_r w^r \left\{ K(\Lambda_{-r, i-1}) \right\}$$

avec :

$$\omega_i = p^{5i} q^{7i+1} = u^{k_1-i+a} w^{v_{k_1}-i+a}$$

Quant à la fonction d'efficacité $L(p)$ elle est l'élément unique du produit matriciel :

$$[\omega_i] \{L_i/\omega_i\} = [L(p)].$$

Application numérique.

Nous traiterons le test correspondant à la figure (2), défini par : $a = 3$, $b = 5$, $k_1 = 34$, $k_2 = 17$.

On lit :

$$\begin{bmatrix} K(A_{00}) \\ K(A_{01}) \\ K(A_{02}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-C_{15}^1 E^2 + C_{10}^4 E), (C_{13}^2 E - C_8^5), (E^2 - C_{11}^3 E + C_6^6) \\ (E^2 - C_{12}^3 E + C_7^6), (-C_{15}^1 E + C_{10}^4), (C_{13}^2 E - C_8^5) \\ (C_{14}^2 E^2 - C_9^5 E), (E^2 - C_{12}^3 E + C_7^6), (-C_{15}^1 E^2 + C_{10}^4 E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} (-15E^2 + 210E), (78E - 56), (E^2 - 165E + 1) \\ (E^2 - 220E + 7), (-15E + 210), (78E - 56) \\ (91E^2 - 126E), (E^2 - 220E + 7), (-15E^2 + 210E) \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = p^{51} q^{71+1} = q^{12} = \frac{v^{36}}{u^{12}}$$

$$\omega_2 = p^{52} q^{72+1} = p^2 q^{15} = \frac{v^{35}}{u^{11}}$$

$$\omega_3 = p^{53} q^{73+1} = pq^{13} = \frac{v^{34}}{u^{11}}$$

L'équation matricielle donnant $\{L_i/\omega_i\}$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{-15+210u}{u^2}, \frac{78-56u}{u}, \frac{1-165u+u^2}{u^2} \\ \frac{1-220u+7u^2}{u^2}, \frac{-15+210u}{u}, \frac{78-56u}{u^2} \\ \frac{91-126u}{u^2}, \frac{1-220u+7u^2}{u^2}, \frac{-15+210u}{u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1/\omega_1 \\ L_2/\omega_2 \\ L_3/\omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{u} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{u^2} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

système qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} -15+210u, u(78-56u), 1-165u+u^2 \\ 1-220u+7u^2, (-15+210u)u, (78-56u)u \\ 91-126u, 1-220u+7u^2, (-15+210u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1/\omega_1 \\ L_2/\omega_2 \\ L_3/\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lorsqu'on dispose d'une machine à calculer résolvant rapidement les systèmes linéaires, il n'est pas avantageux de calculer l'inverse de la matrice. Il est préférable de remplacer u par sa valeur numérique, pour chaque valeur de p , et de résoudre chaque fois le système correspondant. Il paraît même intéressant d'introduire la nouvelle variable :

$$w = u^{-1} = p^{-a}q^{-b}$$

ce qui évite l'apparition de puissances négatives. L'équation matricielle donnant $\{L_i/\mathcal{O}_i\}$ s'écrit directement à partir de (2) :

$$A(w) \{L_i/\mathcal{O}_i\} = \sum_r w^r \{K(A_{-r, i-1})\}$$

soit dans le cas particulier traité

$$\begin{bmatrix} (-15w^2 + 210w), (78w - 56), (E^2 - 165E + 1) \\ (w^2 - 220w + 7), (-15w + 210), (78w - 56) \\ (91w^2 - 126w), (w^2 - 220w + 7), (-15w^2 + 210w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1/\mathcal{O}_1 \\ L_2/\mathcal{O}_2 \\ L_3/\mathcal{O}_3 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la méthode établie dans ce chapitre apparaît comme particulièrement simple : le graphique étant construit, une lecture directe permet d'écrire rapidement l'équation matricielle :

$$A(E) \{K_i\} = 0$$

ainsi que les quantités $K(A_{-r, i})$. Les équations matricielles donnant $L(p)$ en découlent immédiatement; elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(w) \cdot \{L_i/\mathcal{O}_i\} = \sum_r w^r \{K(A_{-r, i-1})\} \\ L(p) = [\mathcal{O}_i] \{L_i/\mathcal{O}_i\} \end{array} \right.$$

CHAPITRE VII

MÉTHODE MATRICIELLE POUR LE CALCUL DE LA FONCTION « NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS »

La méthode est suggérée par M. G. Polya. Ce dernier fait intervenir l'opérateur D :

$$(1) \quad D = p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q}$$

en remarquant que :

$$(2) \quad D^k (p^x q^y) = (x + y)^k p^x q^y$$

Or :

$$(3) \quad L(p) = \sum_{p_y} K(x, y) p^x q^y = \frac{P}{R}$$

$$(4) \quad 1 - L(p) = L'(p) = \sum_{p_x} K(x, y) p^x q^y = \frac{Q}{R}$$

P, Q, R désignant des polynômes en p et q .

La relation : $P + Q = R$

est une conséquence de l'identité

$$q \equiv 1 - p$$

Les variables p et q étant, provisoirement, considérées comme indépendantes, on calcule successivement

$$D \left(\frac{P}{R} \right) = \sum_{p_y} (x + y) K(x, y) p^x q^y$$

$$D \left(\frac{Q}{R} \right) = \sum_{p_x} (x + y) K(x, y) p^x q^y$$

La somme de ces deux quantités :

$$D \left(\frac{P}{R} \right) + D \left(\frac{Q}{R} \right) = \sum_{p_x + p_y} (x + y) K(x, y) p^x q^y = E_p(n)$$

n'est autre que l'espérance mathématique $E_p(n)$ du nombre n d'observations. $E_p(n)$ est la fonction « nombre moyen » d'observations, fonction « A.S.N. » de Wald (Average Sample Number). Compte tenu des propriétés simples de l'opérateur D :

$$D(U + V) = D U + D V \quad ; \quad D \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{UDV - VDU}{V^2}$$

On trouve :

$$E_p(n) = \frac{RD(P+Q) - (P+Q)DR}{R'}$$

soit, puisque $P(p, 1-p) + Q(p, 1-p) = R(p, 1-p)$:

$$(5) \quad E_p(n) = \frac{D(P+Q-R)}{R}$$

La méthode est d'une application simple lorsque les polynômes P, Q, R sont complètement explicités. Ce travail, très long en général, et souvent inutile, pour le calcul numérique de $L(p)$. Nous avons donc cherché, tout en utilisant l'opérateur D , une méthode matricielle permettant de l'éviter.

1. — CALCUL DE $L'(p)$

Cette probabilité s'écrit :

$$L'(p) = \sum_{r,x} K(x, y) p^x q^y$$

La connaissance de son expression est indispensable pour le calcul de $E_p(n)$.

P_x est comme nous l'avons vu au chapitre V l'ensemble des points de coordonnées $(x'_i + 1, y'_i)$ avec :

$$(6) \quad \begin{cases} x'_i = -(k_2 - i)j_0 + \lambda'_i a \\ y'_i = -(k_2 - i)r_0 + \lambda'_i b \end{cases} \quad \lambda'_i \text{ entier, } (i = 1, 2 \dots b)$$

Les b premiers points de P_x d'ordonnées positives correspondent à $x'_i = \xi'_i, y'_i = \eta'_i$ avec :

$$(7) \quad \begin{cases} \xi'_i = -(k_2 - i)j_0 + v'_{k_2-i} a \\ \eta'_i = -(k_2 - i)r_0 + v'_{k_2-i} b \end{cases}$$

v'_z désignant le plus petit entier supérieur ou égal à $z \frac{r_0}{b}$

Nous désignerons par $M_{\lambda,i}$ les points de B_x de coordonnées

$$\xi'_i + \lambda a, \eta'_i + \lambda b$$

Le nombre de chemins aboutissant en chaque point de P_x d'ordonnées positives a pour valeur :

$$(8) \quad K(\xi'_i + \lambda a, \eta'_i + \lambda b) = K(M_{\lambda,i}) \quad \lambda \geq 0, i = 1, 2 \dots b$$

Utilisant les calculs déjà faits pour les points de A_x , au chapitre V, nous pouvons écrire :

$$(9) \quad K(\xi'_i, \eta'_i) = \sum_{j=1}^a b_{i,j}(E) K_j$$

avec :

$$(10) \quad b_{ij}(E) = E^{j_0 - \left[\frac{k-i-j}{a} \right] j_0} \sum_{\mu} (-1)^{\mu a - (k-i-j)j_0} C_{(k-i-j)r_0 - b}^{\mu a - (k-i-j)j_0} E^{-\mu}$$

$$\text{avec :} \quad j_0 \frac{k-i-j}{a} \leq \mu \leq \frac{k-i-j}{a+b} (r_0 + j_0)$$

Le système des équations (9) pour, $(i = 1, 2 \dots b)$ s'écrit matriciellement :

$$(11) \quad \{K(\xi'_i, \eta'_i)\} = B(E) \{K_i\}$$

B désignant la matrice de forme (b, a)

$$(12) \quad B(E) = [b_{ij}(E)]$$

La probabilité d'aboutir au point $(\xi'_i + 1, \eta'_i)$ a pour expression :

$$P'_i = p^{\xi'_i + 1} q^{\eta'_i} K(\xi'_i, \eta'_i) = \mathcal{O}'_i K(\xi'_i, \eta'_i)$$

si l'on pose :

$$\mathcal{O}'_i = p^{\xi'_i + 1} q^{\eta'_i}$$

La probabilité L'_i de terminer le test en un point de P_* de coordonnées $(\xi'_i + 1 + \lambda a, \eta'_i + \lambda b)$ est donnée par :

$$L'_{i/\mathcal{O}'_i} = (1 + uE + u^2 E^2 \dots) K(\xi'_i, \eta'_i)$$

La méthode exposée au chapitre précédent (§ 2) et basée sur les propriétés de la division d'un polynôme en x par $(x - 1)$ s'applique ici. Elle permet d'écrire, partant de l'équation (12)

$$\left\{ L'_i / \mathcal{O}'_i \right\} = b \left(\frac{1}{u} \right) \left\{ (1 + uE \dots) K_i \right\} - \sum_r \frac{1}{u^r} \left\{ K(M_{-r,i}) \right\}$$

soit, puisque $(1 + uE + \dots) K_i = L_{i/\mathcal{O}'_i}$

$$(13) \quad \{L'_{i/\mathcal{O}'_i}\} = B(w) \{L_{i/\mathcal{O}'_i}\} - \sum_r w^r \{K(M_{-r,i})\}$$

compte tenu des relations (20) du chapitre V, soit :

$$\text{pour } y'_i < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \text{ si } x'_i + y'_i \geq 0 \\ = 0 \text{ si } x'_i < 0 \\ = (-1)^{x'_i} C_{-y'_i-1}^{x'_i} \text{ pour } x'_i + y'_i < 0 \quad x'_i > 0 \end{array} \right.$$

Enfin $L'(p)$ est donné par :

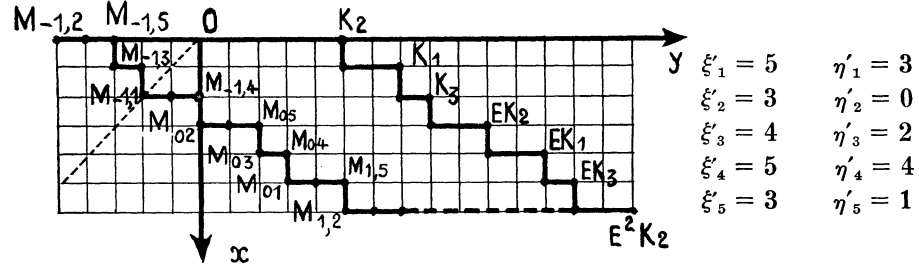
$$(14) \quad [L'(p)] = [\mathcal{O}'_i] \{L'_{i/\mathcal{O}'_i}\}$$

avec :

$$(15) \quad \mathcal{O}'_i = p^{\xi'_i + 1} q^{\eta'_i} = \frac{u^{y'_{k_2} + b - i}}{v^{k_2 + b - i}}$$

Application numérique.

Nous reprenons l'exemple $a = 3$; $b = 5$; $k_1 = k_2 = 17$



On lit sur le graphique :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(M_{01}) = (-9E + 1) K_1 + 21 EK_2 + (E - 10) K_3 \\ K(M_{02}) = 21K_1 + (1 - 10)K_2 - 8 K_3 \\ K(M_{03}) = (E - 10)K_1 - 8EK_2 + 15 K_3 \\ K(M_{04}) = -8EK_1 + 15 EK_2 + (E - 4) K_3 \\ K(M_{05}) = 15 K_1 + (E - 4)K_2 - 7 K_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K(M_{-1,4}) = K(M_{-1,1}) = 0 \\ K(M_{-1,3}) = -2 \\ K(M_{-1,2}) = K(M_{-1,5}) = 1 \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_1/\zeta'_1 \\ L'_2/\zeta'_2 \\ L'_3/\zeta'_3 \\ L'_4/\zeta'_4 \\ L'_5/\zeta'_5 \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} (-9w + 1) & 21w & (w - 10) \\ 21 & (w - 10) & -8 \\ (w - 10) & -8w & 15 \\ -8w & 15w & (w - 4) \\ 15 & (w - 4) & -7 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} L_i/\zeta_i \\ L_2/\zeta_2 \\ L_3/\zeta_3 \end{array} \right\} - w \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} 2$$

$$\left\{ L_i/\zeta_i \right\} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} w - 694w^2 - 169w^3 + 6w^4 \\ 5w - 813w^2 - 7w^3 + w^4 \\ 77w^2 - 1020w^3 + 33w^4 \end{bmatrix}$$

avec :

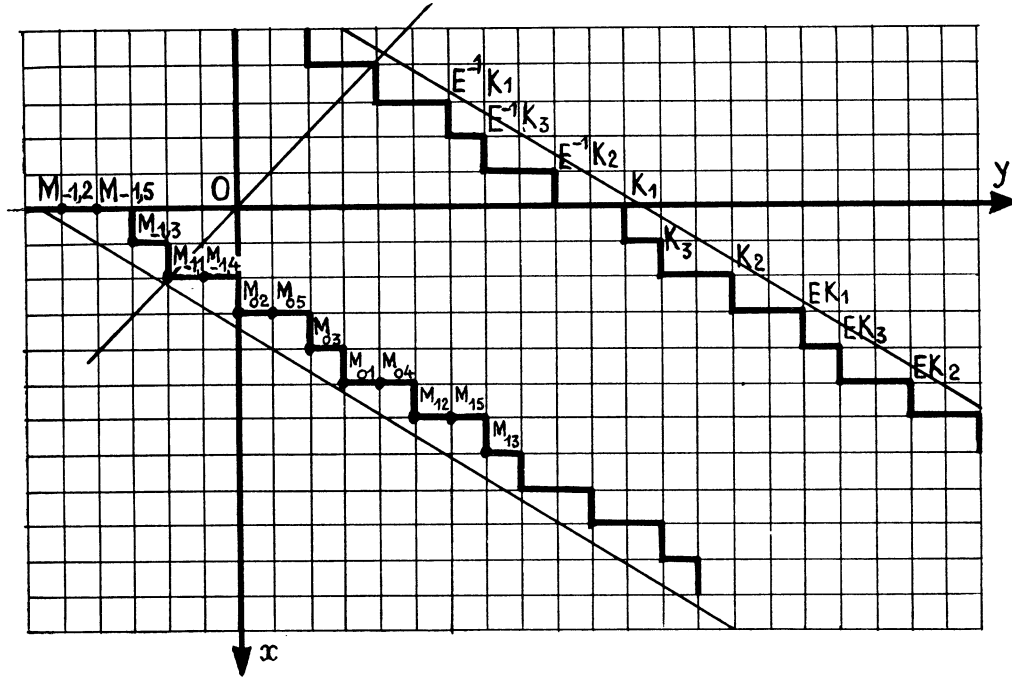
$$\Delta = 5 - 4880w + 3808w^2 - 156w^3 + w^4.$$

On trouve :

$$B \left\{ L_i/\zeta_i \right\} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} w - 1368w^2 - 719w^3 + 30w^4 \\ -29w - 7055w^2 + 3868w^3 + 156w^4 + w^5 \\ -10w + 8056w^2 - 7800w^3 + 322w^4 - 2w^5 \\ -241w^2 - 2846w^3 + 95w^4 \\ -5w - 7692w^2 + 3820w^3 - 152w^4 + w^5 \end{array} \right\}$$

On en déduit :

$$L'_i/\mathcal{G}'_i = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} w - 1368w^2 + 719w^3 + 30w^4 \\ - 34w - 2175w^2 + 68w^3 \\ - 1704w^2 - 184w^3 + 10w^4 \\ - 241w^2 - 2486w^3 + 95w^4 \\ - 10w - 2812w^2 + 12w^3 + 4w^4 \end{array} \right\}$$



De plus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}'_1 = v^{-21}w^{-9} \\ \mathcal{G}'_2 = v^{-20}w^{-8} \\ \mathcal{G}'_3 = v^{-19}w^{-8} \\ \mathcal{G}'_4 = v^{-18}w^{-8} \\ \mathcal{G}'_5 = v^{-17}w^{-7} \end{array} \right.$$

Donc :

$$L'(p) = [\mathcal{G}'_i] \left\{ L'_i/\mathcal{G}'_i \right\} = \frac{1}{\Delta} [\mathcal{G}'_i] \left\{ \begin{array}{l} w - 1368w^2 - 719w^3 + 30w^4 \\ - 34w + 2175w^2 + 68w^3 \\ - 1704w^2 - 184w^3 + 10w^4 \\ - 241w^2 - 2486w^3 + 95w^4 \\ - 10w - 2812w^2 + 12w^3 + 4w^4 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{p^3}{q\Delta} [1, v, v^2, v^3, v^4] \left\{ \begin{array}{l} 1 - 1368w - 719w^2 + 30w^3 \\ - 34w + 2175w^2 + 68w^3 \\ - 1704w^2 - 184w^3 + 10w^4 \\ - 241w^2 - 2486w^3 + 95w^4 \\ - 10w^2 - 2812w^3 + 12w^4 + 4w^5 \end{array} \right\}$$

2. — CALCUL DU NOMBRE MOYEN D'OBSERVATIONS

Nous avons obtenu $L(p)$ et $L'(p)$ sous la forme :

$$[L(p)] = [\omega_i] \{ L_i / \omega_i \} ; [L'(p)] = [\omega'_i] \{ L'_i / \omega'_i \}$$

Appliquant l'opérateur D à ces deux quantités, on obtient :

$$\begin{aligned} D L(p) &= [D \omega_i] \{ L_i / \omega_i \} + [\omega_i] D \{ L_i / \omega_i \} \\ D L'(p) &= [D \omega'_i] \{ L'_i / \omega'_i \} + [\omega'_i] D \{ L'_i / \omega'_i \} \end{aligned}$$

Mais :

$$D \omega_i = (\xi_i + \eta_i + 1) \omega_i = n_i \omega_i$$

si l'on pose : $n_i = \xi_i + \eta_i + 1$

De même, si l'on pose : $n'_i = \xi'_i + \eta'_i + 1$,

$$D \omega'_i = n'_i \omega'_i$$

Par conséquent :

$$(16) \quad [D \omega_i] \{ L_i / \omega_i \} = [n_i \omega_i] \{ L_i / \omega_i \} = [\omega_i] [n_i \delta_{ij}] \{ L_j / \omega_j \}$$

δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker

De même :

$$(17) \quad [D \omega'_i] \{ L'_i / \omega'_i \} = [\omega'_i] [n'_i \delta_{ij}] \{ L'_j / \omega'_j \}$$

Les nombres n_i et n'_i se lisent aisément sur le graphique.

D'autre part, $\{ L_i / \omega_i \}$ et $\{ L'_i / \omega'_i \}$ s'écrivent :

$$(18) \quad \{ L_i / \omega_i \} = A^{-1} \{ S_i \} = \frac{1}{\Delta} A^r \{ S_i \}$$

$$(19) \quad \{ L'_i / \omega'_i \} = B A^{-1} \{ S_i \} - \{ T_i \} = \frac{1}{\Delta} B A^r \{ S_i \} - \{ T_i \}^*$$

avec :

$$(20) \quad \{ S_i \} = \left\{ \sum_r w^r K(A_{-r,i}) \right\} ; \{ T_i \} = \left\{ \sum_r w^r K(M_{-r,i}) \right\}$$

et

Δ = déterminant de A

On en déduit :

$$(21) \quad D \{ L_i / \omega_i \} = - \frac{D\Delta}{\Delta^2} A^r \{ S_i \} + \frac{1}{\Delta} D(A^r \{ S_i \}) = - \frac{D\Delta}{\Delta} \{ \frac{L_i}{\omega_i} \} + \frac{1}{\Delta} D(A^r \{ S_i \})$$

$$\begin{aligned} (22) \quad D \{ L'_i / \omega'_i \} &= - \frac{D\Delta}{\Delta^2} B A^r \{ S_i \} - \Delta \{ T_i \} + \frac{1}{\Delta} D(B A^r \{ S_i \} - \Delta \{ T_i \}) \\ &= - \frac{D\Delta}{\Delta} \{ L'_i / \omega'_i \} + \frac{1}{\Delta} D(B A^r \{ S_i \} - \Delta \{ T_i \}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (23) \quad & [\omega_i] D \{ L_i / \omega_i \} + [\omega'_i] D \{ L'_i / \omega'_i \} = \dots\dots\dots \\ &= - \frac{D\Delta}{\Delta} (L(p) + L'(p)) + \frac{1}{\Delta} [\omega_i] D(A^r \{ S_i \}) + \frac{1}{\Delta} [\omega'_i] D(B A^r \{ S_i \} - \Delta \{ T_i \}) \end{aligned}$$

* Le symbole A désignant la matrice adjointe de A .

En définitive, compte tenu de (16), (17), et de la relation : $L(p) + L'(p) = 1$, le nombre probable d'observations $E_p(n)$ est donné par la formule :

$$(24) \Delta \cdot E_p(n) = -D\Delta + [\mathcal{G}_i]([n_i \delta_{ij}] + D)(A^r \{S_i\}) + [\mathcal{G}'_i]([n'_i \delta_{ij}] + D)(BA^r \{S_i\} - \Delta \{T_i\})$$

soit :

$$(25) \Delta \cdot E_p(n) = -D\Delta + [\mathcal{G}_i]([n_i \delta_{ij}] + D)(\Delta \{L_i / \mathcal{G}_i\}) + [\mathcal{G}'_i]([n'_i \delta_{ij}] + D)(\Delta \{L'_i / \mathcal{G}'_i\})$$

Avantages de la méthode.

1° *Pour le calcul.* La formule (25) fait intervenir des produits matriciels, ce qui permet une écriture condensée, se prêtant plus aisément au calcul automatique.

D'autre part, les matrices :

$$\Delta \{L_i / \mathcal{G}_i\} \quad \text{et} \quad \Delta \{L'_i / \mathcal{G}'_i\}$$

auxquelles s'applique l'opérateur D , sont fonctions de la seule variable :

$$w = p^a q^b$$

Or :

$$D \varphi(w) = \frac{d\varphi}{dw} Dw = -(a+b) w \frac{d\varphi}{dw}$$

Par conséquent, dans les formules (24) et (25) :

$$(26) \quad D = -(a+b) w \frac{d}{dw}$$

ce qui rend plus systématique le calcul.

2° *Pour l'utilisation du test.* La méthode permet de calculer séparément les nombres probables d'observations $E_a(n)$ et $E_r(n)$ dans l'hypothèse de l'acceptation et dans celle du rejet respectivement.

$$(27) \quad E_a(n) = \frac{DL(p)}{L(p)}$$

$$(28) \quad E_r(n) = \frac{DL'(p)}{L'(p)}$$

Des relations (16) et (21) on déduit :

$$(29) \quad \Delta \cdot E_a(n) = -D\Delta + \frac{1}{L(p)} [\mathcal{G}_i]([n_i \delta_{ij}] + D)(\Delta \{L_i / \mathcal{G}_i\})$$

On tire de même, de (17) et (22)

$$(30) \quad \Delta \cdot E_r(n) = -D\Delta + \frac{1}{L'(p)} [\mathcal{G}'_i]([n'_i \delta_{ij}] + D)(\Delta \{L'_i / \mathcal{G}'_i\})$$

La connaissance de $E_a(n)$ et $E_r(n)$ peut être intéressante pour les utilisateurs. Dans le cas d'un contrôle à la réception, par exemple, elle permet au fournisseur, qui connaît la qualité de sa fabrication, d'apprécier le coût du contrôle, en fonction du risque accepté.

Application.

Nous reprenons l'exemple :

$$a = 3 \quad b = 5 \quad k_1 = k_2 = 17$$

pour lequel on a trouvé :

$$\Delta \left\{ L_i / \mathfrak{G}_i \right\} = \left\{ \begin{array}{l} w - 694w^2 - 169w^3 + 6w^4 \\ 5w - 813w^2 - 7w^3 + w^4 \\ 77w^2 - 1020w^3 + 33w^4 \end{array} \right\}$$

$$\Delta \left\{ \frac{L'_i}{\mathfrak{G}'_i} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} w - 1368w^2 - 719w^3 + 30w^4 \\ -34w - 2175w^2 + 68w^3 \\ -1704w^2 - 184w^3 + 10w^4 \\ -241w^2 - 2468w^3 + 95w^4 \\ -10w - 2812w^2 + 12w^3 + 4w^4 \end{array} \right\}$$

$$\Delta = 5 - 4880w + 3808w^2 - 156w^3 + w^4$$

$$n_1 = 9; \quad n_2 = 6; \quad n_3 = 11$$

$$n'_1 = 9; \quad n'_2 = 4; \quad n'_3 = 7; \quad n'_4 = 10; \quad n'_5 = 5$$

On obtient :

$$([n_i \delta_{ij}] + D) (\Delta \{ L_i / \mathfrak{G}_i \}) = \left\{ \begin{array}{l} w + 694x7w^2 + 169x15w^3 - 6x23w^4 \\ -10w + 8130w^2 + 18x7w^3 - 26w^4 \\ -77x5w^2 + 1020x13xw^3 - 33x21w^4 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} w + 11858w^2 + 2535w^3 - 138w^4 \\ -10w + 8130w^2 + 126w^3 - 26w^4 \\ -385w^2 + 13260w^3 - 693w^4 \end{array} \right\}$$

$$([n'_i \delta_{ij}] + D) (\Delta \{ L'_i / \mathfrak{G}'_i \}) = \left\{ \begin{array}{l} w + 9576w^2 + 10785w^3 - 690w^4 \\ 136w + 26100w^2 - 1360w^3 \\ 15336w^2 + 3128w^3 - 250w^4 \\ 1446w^2 + 34804w^3 - 2090w^4 \\ 30w + 24002w^2 - 228w^3 - 108w^4 \end{array} \right\}$$

$$[\mathfrak{G}_i] = v^{17}w^5 [wv^2, wv, 1] = q^4/p \left[v^2, v, \frac{1}{w} \right]$$

$$[\mathfrak{G}'_i] = \frac{p^3}{q} \left[\frac{1}{w}, v, v^3, v^3, v^4w \right]$$

$$D\Delta = -8w \frac{d\Delta}{dw} = 8(4880w - 7616w^2 + 468w^3 - 4w^4)$$

En définitive :

$$\Delta \cdot E_p(n) = 8(4w^4 - 468w^3 + 7616w^2 - 4880w)$$

$$+ \frac{q^4}{p} \left[v^3, v, 1 \right] \left\{ \begin{array}{l} w + 11858w^2 + 2535w^3 - 138w^4 \\ -10w + 8130w^2 + 126w^3 - 26w^4 \\ -385w + 13260w^2 - 693w^3 \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{p^3}{q} \left[1, v, v^3, v^3, v^4 \right] \left\{ \begin{array}{l} 1 + 9576w + 10785w^2 - 690w^3 \\ 136w + 26100w^2 - 1360w^3 \\ 1446w^2 + 34804w^3 - 2090w^4 \\ 15336w^2 + 3128w^3 - 250w^4 \\ 30w^2 + 24002w^3 - 228w^4 - 108w^5 \end{array} \right\}$$

CONCLUSION

Dans notre étude des fonctions « O. C. » et « A. S. N. » du test de Wald, nous avons confronté deux méthodes :

— La méthode de M. Walker, traitant le problème comme une marche au hasard sur une droite. Nous avons transformé les résultats de cet auteur, afin d'obtenir une expression de $L(p)$ utilisable pour le calcul.

— La méthode de M. Polya, qui, reprenant le point de vue de Wald, considère le test comme une marche au hasard dans le plan. Plus difficilement utilisable, au point de vue pratique, que la précédente méthode, elle présente sur cette dernière l'avantage de pouvoir s'appliquer à d'autres problèmes de marche au hasard.

C'est pourquoi, travaillant dans le même sens, nous avons mis au point une méthode matricielle qui, tout en s'appliquant d'une manière très simple au test de Wald, permet d'étudier des problèmes plus généraux de marche au hasard, en précisant notamment la moyenne du nombre de pas.

Sur le plan pratique, certaines méthodes d'échantillonnage par groupes posent des problèmes de ce type, que nous nous proposons d'aborder ultérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

- A. WALD. Sequential Analysis (1947).
- A. WALD. Statistical Decision Functions (1950).
- COLUMBIA UNIVERSITY. STATISTICAL RESEARCH GROUP. Sequential Analysis of Statistical Data-applications.
- W. FELLER. Probability Theory and its applications.
- G. POLYA. Exact formulas in the Sequential Analysis of attributes Univ. of California. Publ. Math. NS 1; p. 229 (1948).
- Mrs J. ROBINSON. A note on Sequential Analysis.
- Mrs J. ROBINSON. Univ. of California Publ. Math. N. S. 1; p. 241 (1948).
- M. F. BURMAN. J. of the Royal Stat. Soc. (Suppl. vol. 8) p. 98.
- A. M. WALKER. Note on Sequential Sampling Formulas for binomial population.
- W. BARTKY. Multiple Sampling with constant probability Annals of Math. Stat. Vol. 17, n° 1, mars 1946.
- M. A. GIRSHICK. Multiple Sampling with constant probability Annals of Math. Stat. Vol. 17, n° 3, Sept. 1946.
- M. A. GIRSHICK. Contribution to the Theory of Sequential Analysis Annals of Math. Stat. Vol. 17, Juin 1946.
- A. G. BAKER. Properties of some tests in Sequential Analysis Biometrika. Vol. 37. p. 334 (Décembre 1950).
- F. J. ANSCOMBE. Linear Sequential Rectifying Inspection for Controlling Fraction defective. Journal of the Royal Stat. Soc.; Suppl. Vol. 9; n° 1-2 (1947).
- G. A. BARNARD. Sequential tests in industrial Statistics. J. of the Royal Stat. Soc. Suppl. Vol. 8; n° 1 (1946).
- E. PAULSON. A note on the efficiency of Wald's Sequential test. Annals of Math. Stat. Vol. 18, pp. 427 et 447 (1950).
- J. WOLFOWITZ. On Sequential binomial estimation. Annals of Math. Stat. Vol. 17. p. 489 (1946).
- C. STEIN. A property of some tests of composite hypothesis. Annals, of Math. Stat. Vol. 22, p. 475 (1951).
- H. K. NANDI. Use of well known Statistics in Sequential analysis. Sankhya, 8, p. 329 (1948).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER.

Introduction.

- | | |
|--|----|
| 1. Généralités; test progressif de Wald..... | 23 |
| 2. Les problèmes abordés. | 30 |

CHAPITRE II.

- | | |
|---|----|
| Ajustement des constances p_0 et p_1 du test binomial de Wald, permettant d'utiliser les expressions exactes de ses caractéristiques | 32 |
|---|----|

CHAPITRE III.

- | | |
|--|----|
| Etude et mise en forme des résultats de M. Walker concernant la fonction d'efficacité du test de Wald..... | 37 |
|--|----|

CHAPITRE IV.

- | | |
|--|----|
| Analyse de la méthode de M. Polya pour la détermination de la fonction d'efficacité. | 48 |
|--|----|

CHAPITRE V.

- | | |
|--|----|
| Sur une propriété fondamentale de la marche au hasard étudiée, et son expression par un système linéaire homogène..... | 54 |
|--|----|

CHAPITRE VI.

- | | |
|--|----|
| Méthode matricielle pour la détermination de la fonction d'efficacité. | 65 |
|--|----|

CHAPITRE VII.

- | | |
|---|----|
| Méthode matricielle pour le calcul de la fonction d'A.S.N. | 73 |
|---|----|

- | | |
|----------------------|----|
| CONCLUSION | 81 |
|----------------------|----|