

ÉMILE DURAND

Recherches des solutions de l'équation des ondes planes

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k_0^2 \psi = f(x, vt)$$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4^e série, tome 17 (1953), p. 229-264

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1953_4_17__229_0

© Université Paul Sabatier, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DES ONDES PLANES

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k_0^2 \psi = f(x, vt)$$

par Emile DURAND

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Résumé. — On cherche des solutions générales pour des données portées par une courbe quelconque C du plan ξ, τ en partant d'une identité qui fait intervenir l'opérateur $[v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2]$. On examine ensuite quelques cas particuliers où la courbe C est formée de segments rectilignes et on donne de nombreux exemples d'application de la méthode des « images ».

En décomposant l'opérateur du second ordre en un produit de deux opérateurs du premier ordre, on obtient une solution des systèmes d'équations du premier ordre qui se ramènent à l'équation étudiée. Comme exemple d'application on étudie les équations de Maxwell de l'électromagnétisme classique.

1. Identité concernant le domaine compris entre une courbe C et l'angle inférieur des droites caractéristiques.

Le domaine (S) est celui qui est hachuré sur les figures 1_a, 1_b, 1_c et l'identité s'écrit

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left\{ \psi(x, vt) = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{2} \int \int_{(S)} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot ds \right\} \right\}$$

avec

$$(2) \quad \gamma = \sqrt{v^2 (t - \tau)^2 - (x - \xi)^2} \quad ds = d\xi \cdot d\tau$$

$I_0(k_0 \gamma)$ est la fonction de Bessel $J_0(ik_0 \gamma)$ d'argument imaginaire, qui obéit à l'équation

$$(3) \quad [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] I_0(k_0 \gamma) = 0$$

Sous forme de développement en série, cette fonction a pour expression

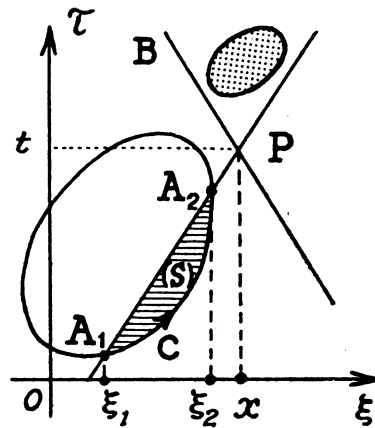
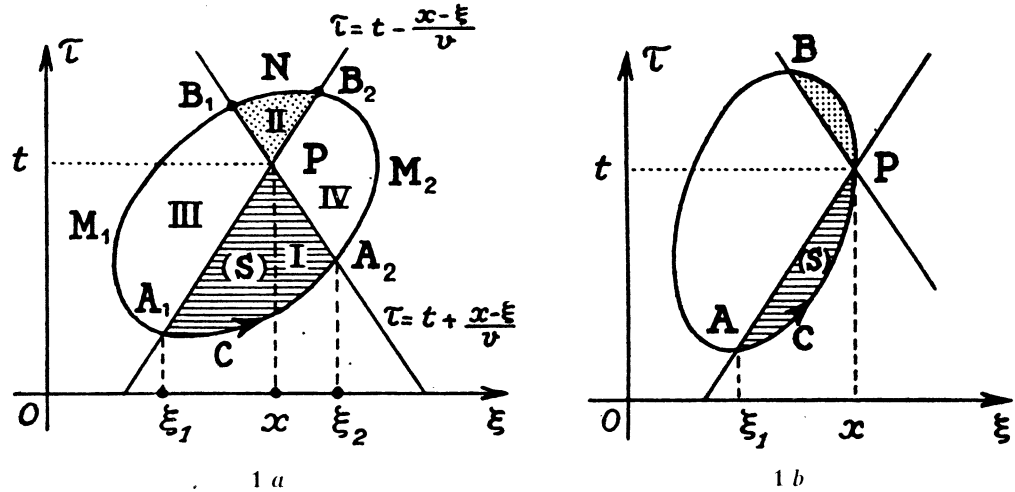
$$(4) \quad I_0(k_0 \gamma) = 1 + \frac{(k_0 \gamma/2)^2}{1!} + \frac{(k_0 \gamma/2)^4}{(2!)^2} + \dots + \frac{(k_0 \gamma/2)^{2n}}{(n!)^2} + \dots$$

La courbe C est la portion de l'arc d'une courbe fermée limitée par les deux droites PA₁ et PA₂ issues de P et que l'on appelle les droites caractéristiques; les équations de ces droites s'écrivent

$$(5) \quad \tau = t - \frac{|x - \xi|}{v} \quad \begin{cases} \tau = t - v^{-1}(x - \xi) & \text{si } \xi < x \\ \tau = t + v^{-1}(x - \xi) & \text{si } \xi > x \end{cases}$$

Les trois alternatives 1, $\frac{1}{2}$, 0, au premier membre de (1) correspondent respectivement au cas où P est à l'intérieur de la courbe fermée, sur la

courbe elle-même ou à l'extérieur; ce sont les trois cas *a*, *b*, *c*, de la figure (1).



1 c
FIG. 1.

Si l'équation de la courbe C comprise entre A_1 et A_2 peut être mise sous la forme

$$(6) \quad \tau = g(\xi)$$

l'intégrale double de (1) peut être explicitée et l'on peut écrire

$$(7) \quad \left. \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \psi(x, vt) = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) d\tau \right\}$$

ξ_1 et ξ_2 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec les

caractéristiques; on a donc

$$(8) \quad \tau_1 = g(\xi_1) = t - \frac{x - \xi_1}{v} \quad \tau_2 = g(\xi_2) = t + \frac{x - \xi_2}{v}$$

ξ_1 et ξ_2 sont des fonctions de x et de t et d'après (8), on a

$$(9) \quad \partial_x \xi_1 = -v^{-1} \partial_t \xi_1 = \frac{1}{1 - v \cdot g'(\xi_1)} \quad \partial_x \xi_2 = v^{-1} \partial_t \xi_2 = \frac{1}{1 + v \cdot g'(\xi_2)}$$

Pour vérifier l'identité sous la forme (7) il suffit de dériver au second membre par rapport aux limites et sous le signe somme. En désignant par $\{\dots\}$ la parenthèse de (7), on trouve aisément

$$(10) \quad \partial_t \left\{ \dots \right\} = \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x - \xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_t I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau$$

puis en tenant compte de

$$\partial_t I_0(k_0 \gamma) = \gamma^{-1} I_1(k_0 \gamma) \cdot k_0 v^2 (t - \tau) \rightarrow \frac{1}{2} k_0^2 v^2 (t - \tau)$$

quand $\gamma \rightarrow 0$:

$$(11) \quad v^{-1} \partial_t \left\{ \dots \right\} = -\frac{\partial_t \xi_1}{2v} \cdot \psi(\xi_1, v\tau_1) + \frac{\partial_t \xi_2}{2v} \cdot \psi(\xi_2, v\tau_2) \\ + \frac{1}{2v} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{k_0^2}{2} (t - \tau) \cdot \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x - \xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot v^{-1} \partial_t I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau$$

Pour les dérivations par rapport à x , on obtient de même

$$(12) \quad \partial_x \left\{ \dots \right\} = -\frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) \cdot \partial_x |x - \xi| \cdot d\xi \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x - \xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_x I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau$$

$$(13) \quad \partial_x^2 \left\{ \dots \right\} = -\frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) \cdot \partial_x^2 |x - \xi| \cdot d\xi \\ + \frac{1}{2} \partial_x \xi_1 \cdot \psi(\xi_1, v\tau_1) + \frac{1}{2} \partial_x \xi_2 \cdot \psi(\xi_2, v\tau_2) \\ + \frac{1}{2v} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{k_0^2}{2} \cdot v (t - \tau) \cdot \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x - \xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_x^2 I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau$$

En portant les expressions (11) (13) dans (7) et en tenant compte de (9), on obtient l'expression

$$(14) \quad \left. \begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix} \right\} \cdot \psi(x, vt) = \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) \cdot \partial_x^2 |x - \xi| \cdot d\xi$$

D'après les propriétés de l'expression $\partial_x^2 |x - \xi|$, les deux membres de (14) sont bien identiques. On a bien 1, $\frac{1}{2}$, 0 dans les trois cas de la figure (1), car x est respectivement entre les limites ξ_1, ξ_2 , sur une de ces limites ou en dehors d'elles.

Il est facile d'éviter l'emploi d'expressions un peu délicates comme $\partial_x^2 |x - \xi|$, il suffit pour cela de diviser en deux l'intervalle d'intégration ξ_1, ξ_2 , soit (ξ_1, x) et (x, ξ_2) . Les dérivations par rapport à la limite x font alors apparaître, au lieu du second membre de (14), directement $(1, \frac{1}{2}, 0) \cdot \psi(x, vt)$ qui est identique au premier membre.

Sous la forme (1), l'identité est plus générale que (7) car elle s'applique à des cas où la courbe C n'est plus du type $\tau = g(\xi)$. Considérons par exemple les quatre cas de la figure (2) qui correspondent au premier membre nul de l'identité (I). Dans le cas *d*) l'identité est évidente car les limites ne dépendent plus de x, t et en vertu de (3). Dans le cas *b*) il est aussi évident que l'on a zéro au premier membre; on pourrait en effet retrancher l'identité correspondant à l'aire PB_1B_2 de l'identité correspondant à l'aire PA_1A_2 ; chacune d'elles correspond à 1 au premier membre, et en les retranchant on trouve zéro. C'est la même chose dans le cas *c*) le point P étant dans un trou situé hors du domaine.

Pour vérifier que (1) est satisfaite avec zéro au premier membre, dans le cas de la figure (2_a), menons les tangentes verticales à la courbe en M, N . On a alors les deux arcs MA_1N et MA_2N qui sont séparément représentables sous la forme $\tau = g(\xi)$. On considère alors le domaine (pointillés + hachures) qui obéit à (1) avec 1 au premier membre; le domaine pointillé seul obéit aussi à (1) avec 1 au premier membre. En retranchant ces deux identités on a bien une identité appliquée au domaine hachuré seul avec zéro au premier membre.

Dans toutes les figures considérées la dérivée de la courbe fermée variait d'une manière continue le long du contour, mais on peut avoir des points anguleux comme dans les figures (9), (10), (11) que nous étudions plus loin; il est clair que rien n'est changé aux identités précédentes dans ces conditions, car ce qui importe c'est ce qui se passe au voisinage immédiat du point P . Le domaine limité par la courbe fermée peut aussi avoir des points à l'infini; il faut toutefois que les intégrales qui apparaissent dans les calculs aient un sens pour pouvoir considérer de tels domaines.

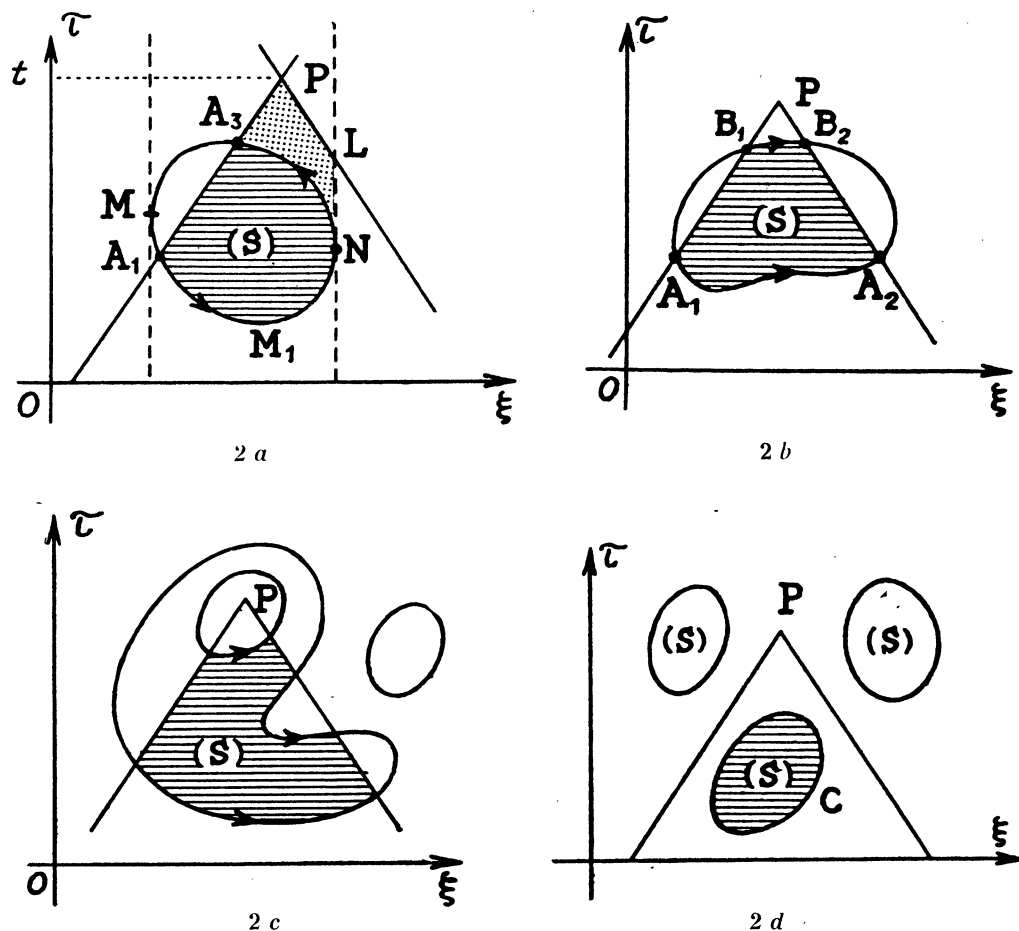


FIG. 2.

2. Identité relative au domaine compris dans l'angle supérieur des caractéristiques.

Partons de l'identité (7) écrite pour une fonction $\psi(x, -vt)$ et remplaçons respectivement τ et $g(\xi)$ par u et $h(\xi)$, soit

$$(15) \quad \frac{1}{2} \left\{ \psi(x, -vt) = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{h(\xi)}^{-t - \frac{|x-\xi|}{v}} \psi(\xi, -vu) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot du \right. \right.$$

avec $\gamma = \sqrt{v^2(t-u)^2 - (x-\xi)^2}$

Changeons t en $-t$ dans les deux membres de (15), puis posons $u = -\tau$. L'intégrale sur u qui allait de $h(\xi)$ à $-|t + v^{-1}|x - \xi|$ donne une intégrale sur τ qui est à prendre entre $-h(\xi)$ et $t + v^{-1}|x - \xi|$. Si on désigne par $g(\xi)$ la nouvelle fonction $-h(\xi)$ et si l'on fait disparaître le

signe (—) devant l'intégrale provenant de $du = -d\tau$ en permutant les limites d'intégration, on obtient l'identité cherchée

$$(16) \quad \frac{1}{v^{1/2}} \left\{ \psi(x, vt) = [v^{-1} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{t-\frac{|x-\xi|}{v}}^{g(\xi)} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau \right\} \right\}$$

γ étant toujours donné par (2).

On voit que cette intégrale (16) est étendue à l'aire en pointillés des figures 1_a, 1_b, 1_c. On peut donc aussi l'écrire sous la forme (1) étant bien entendu que le domaine (S) n'est plus le domaine hachuré mais celui que nous venons d'indiquer.

On notera que les transformations précédentes reviennent à faire glisser la figure parallèlement à l'axe des ordonnées, puis à prendre le symétrique du domaine obtenu par rapport à l'axe des abscisses; c'est ce qu'indiquent les figures 3_a, 3_b, 3_c.

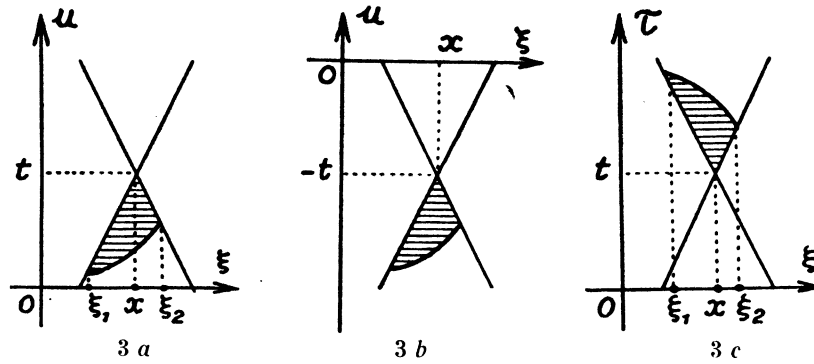


FIG 3.

3. Identités relatives aux domaines qui se trouvent dans les angles latéraux des caractéristiques.

Partons de l'identité (7) où l'on remplace k_0 par ik_0 et où l'on permute les variables x et vt . Posons de plus $\xi = v\tau$ et $v\tau = \xi$. L'intégration sur ξ allait de ξ_1 à ξ_2 ; la nouvelle intégration sur τ va donc aller de ξ_1/v à ξ_2/v que nous désignerons respectivement par τ_1 et τ_2 . L'ancienne intégration sur τ allait de $g(v\tau)$ à $v^{-1}[x - v|t - \tau|]$; la nouvelle intégration sur ξ va donc aller de $[vg(v\tau)]$ à $[x - v|t - \tau|]$.

Les transformations précédentes changent γ en $i\gamma$

$$(17) \quad i\gamma = i\sqrt{v^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2} = \sqrt{(x-\xi)^2 - v^2(t-\tau)^2}$$

qui est donc réel dans l'intervalle considéré. Désignons simplement par $h(\tau)$ la fonction $v \cdot g(v\tau)$. On obtient alors l'identité suivante, en tenant compte de $I_0(ik_0 \cdot i\gamma) = J_0(ik_0 \gamma)$, soit

$$(18) \quad \frac{1}{v^{1/2}} \left\{ \psi(x, vt) = [v^{-1} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ -\frac{v}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{h(\tau)}^{x-v|t-\tau|} \psi(\xi, v\tau) \cdot J_0(ik_0 \gamma) \cdot d\xi \right\} \right\}$$

Dans la figure (4) on a choisi comme axes ξ et $v\tau$, au lieu de ξ et τ . Dans ce système de coordonnées les droites caractéristiques sont normales

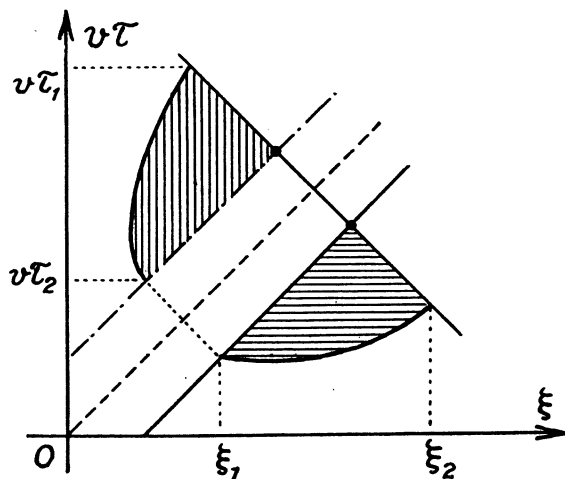


FIG. 4.

l'une sur l'autre et inclinées de 45° sur les axes. La permutation de x et de vt , ξ et $v\tau$ correspond à une symétrie par rapport à la bissectrice du premier quadrant.

La double intégrale de (18) est étendue à l'aire hachurée (S) de la figure (5); on peut donc écrire (18) plus simplement sous la forme

$$(19) \quad \frac{1}{2} \left\{ \psi(x, vt) = [v^{-1} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_a^2] \left\{ -\frac{v}{2} \int_{(S)} \psi(\xi, v\tau) \cdot J_0(ik_a \gamma) \cdot d\xi d\tau \right\} \right\}$$

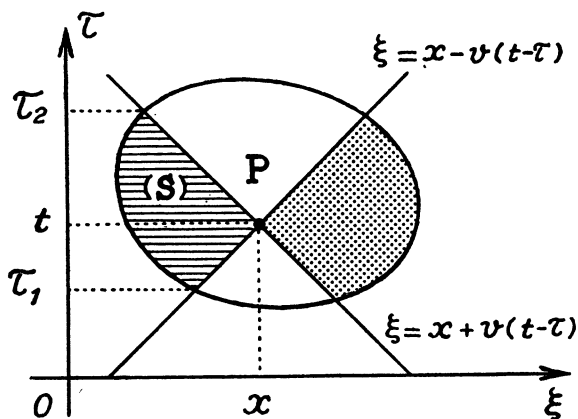


FIG. 5.

En effectuant une symétrie par rapport à l'autre bissectrice des angles formés par les axes de coordonnées, on obtient une formule analogue à (18)

qui s'écrit

$$(20) \quad \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cdot \psi(x, vt) = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ -\frac{v}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{x+vt}^{\xi} \frac{\psi(\xi, v\tau)}{|\tau-\tau_1|} J_0(ik_0 \tau) d\xi \right\}$$

L'intégrale de (20) est donc étendue à l'aire pointillée de la figure (5); cette identité (20) peut encore s'écrire sous la forme (19) au changement près de l'aire (S).

On peut aussi écrire une identité analogue à (19) mais avec $(-v/4)$ au lieu de $(-v/2)$, le domaine (S) étant la somme des aires hachurées et pointillées de la figure (5). Cette identité s'obtient par addition des identités relatives à chacune des deux aires. On peut d'ailleurs l'obtenir à partir de (1) appliquée aux aires hachurées et pointillées de la figure (1). Par addition elles donnent (*fig. 1*)

$$(21) \quad \left\{ \frac{1}{4} \right\} \cdot \psi(x, vt) = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{4} \int_{(I+II)} \psi \cdot I_0 ds \right\}$$

Mais l'opérateur appliqué à toute l'aire limitée par la courbe fermée (I + II + III + IV) donne zéro en vertu de (3) et parce que les limites ne dépendent pas de x, t ; on a donc

$$(22) \quad 0 = [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{4} \int_{(I+II+III+IV)} \psi \cdot I_0 ds \right\}$$

En retranchant (21) de (22) on obtient l'identité cherchée avec le signe $(-)$. L'opération est possible car l'expression $I_0(k_0 \gamma) = J_0(ik_0 \gamma)$ reste réelle dans tous les angles des caractéristiques.

Il est intéressant de considérer la somme des domaines (III + IV), car pour un nombre plus grand de variables d'espace (deux par exemple au lieu de un) on a un cône au lieu de deux droites caractéristiques et ces domaines n'en forment plus qu'un.

4. Solutions de l'équation aux dérivées partielles quand on connaît ψ sur une courbe C ainsi que ses dérivées suivant la conormale.

Nous allons voir que les identités précédentes donnent les solutions de l'équation

$$(23) \quad [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \cdot \psi(x, vt) = f(x, vt)$$

Il suffit pour cela de dériver les intégrales des seconds membres, mais les calculs sont conduits de manière différente que lorsqu'il s'agissait de vérifier l'identité (calculs qui ont permis de vérifier (14)). On transforme en effet les dérivations ∂_x et ∂_t en dérivations ∂_ξ et ∂_τ par rapport aux variables ξ, τ chaque fois que c'est nécessaire.

Partons de l'identité (7) où l'intégrale double concerne l'aire (S) de la figure (1). Calculons d'abord les dérivées par rapport à x . Les limites ξ_1 et ξ_2 dépendent de x mais les dérivations par rapport à ces limites donnent zéro à cause de (8) qui annule l'intervalle d'intégration pour la variable τ .

L'opérateur ∂_x s'applique donc directement à l'intégrale sur τ ; on transforme ∂_x en ∂_{ξ} et on retranche les termes supplémentaires qui s'introduisent ainsi. On trouve alors en désignant simplement par $\{\dots\}$ toute la parenthèse de (7)

$$(24) \quad \partial_x \left\{ \dots \right\} = \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \partial_{\xi} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau \\ - \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi_e \cdot I_0(k_0 \gamma_e) \cdot g'(\xi) \cdot d\xi$$

$$(25) \quad \partial_x^2 \left\{ \dots \right\} = - \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\partial_{\xi} \psi(\xi, v\tau)]_e \cdot I_0(k_0 \gamma_e) \cdot g'(\xi) \cdot d\xi \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \partial_{\xi}^2 \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\psi \cdot \partial_{\xi} I_0(k_0 \gamma)]_e \cdot g'(\xi) \cdot d\xi \\ + \frac{v}{2} \left\{ \psi \cdot g'(\xi_1) \cdot \partial_x \xi_1 - \psi \cdot g'(\xi_2) \cdot \partial_x \xi_2 \right\}$$

Les indices e correspondent aux valeurs prises sur la courbe C ; les indices 1 et 2 indiquent les valeurs aux points A_1 et A_2 d'intersection de la courbe C avec les deux droites caractéristiques.

Pour les dérivations ∂_t par rapport au temps t on opère de même; on transforme ∂_t en ∂_{τ} et on retranche les termes qui s'introduisent ainsi; puis on intègre par parties sur τ , ce qui donne

$$(26) \quad \partial_t \left\{ \dots \right\} = \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|) d\xi \\ - \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_{\tau} I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau \\ = \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi_e \cdot I_0(k_0 \gamma_e) d\xi \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \partial_{\tau} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau$$

$$(27) \quad \partial_t^2 \left\{ \dots \right\} = \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - \frac{|x-\xi|}{v}} \partial_{\tau}^2 \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\tau \\ + \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\partial_{\tau} \psi(\xi, v\tau)]_e \cdot I_0(k_0 \gamma_e) \cdot d\xi \\ - \frac{v}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\psi \cdot \partial_{\tau} I_0(k_0 \gamma)]_e \cdot d\xi \\ - \frac{v}{2} \left\{ \psi \cdot \partial_t \xi_1 - \psi \cdot \partial_t \xi_2 \right\}$$

En portant les expressions (25) et (27) dans (7) et en tenant compte de (9), on obtient l'identité sous la forme désirée. On peut cependant lui donner une forme beaucoup plus simple et beaucoup plus générale en introduisant les cosinus directeurs n_ξ, n_τ de la normale à la courbe C et extérieure au domaine (S), soit :

$$(28) \quad n_\xi = \frac{g'(\xi)}{\sqrt{1+g'^2}} \quad n_\tau = \frac{-1}{\sqrt{1+g'^2}}$$

On introduit de même l'élément d'arc dl de la courbe C d'équation $\tau = g(\xi)$ et l'élément d'aire dS qui ont pour expression

$$(29) \quad dl = \sqrt{d\xi^2 + d\tau^2} = d\xi \sqrt{1+g'^2} \quad dS = d\xi d\tau$$

Enfin pour simplifier encore l'écriture on introduit l'opérateur

$$(30) \quad \frac{d}{dv} = n_\xi \partial_\xi - v^{-1} n_\tau \partial_\tau$$

d/dv est la dérivée suivant une direction que nous appellerons la conormale, car elle est associée à la normale. Dans le système des coordonnées $\xi, v\tau$ la conormale est symétrique de la normale par rapport à la direction de l'axe des ξ comme le montre la figure (6).

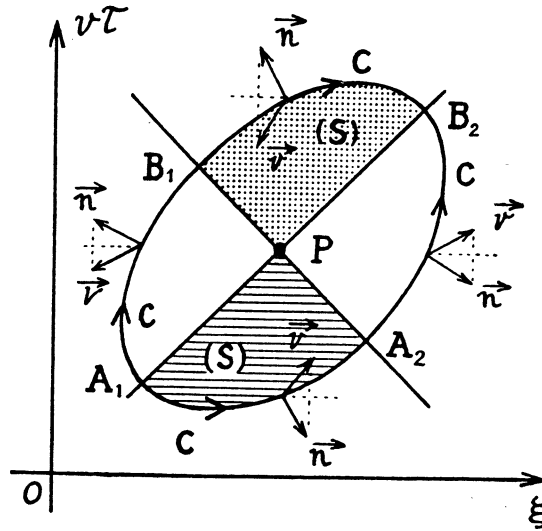


FIG. 6.

Avec toutes ces notations et définitions, l'identité (7) prend la forme

$$(31) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(x, vt) &= \frac{v}{2} \int_{(S)} [v^{-2} \partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - k_0^2] \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot ds \\ &+ \frac{v}{2} \int_C \left\{ I_0(k_0 \gamma) \frac{d\psi}{dv} - \psi \frac{dI_0(k_0 \gamma)}{dv} \right\} dl \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \psi_{A_1} + \psi_{A_2} \right\} \end{aligned} \right\}$$

Dans la mesure où les intégrales ont un sens, l'expression (31) est une identité valable quelle que soit la fonction ψ . Mais si ψ obéit à l'équation (23) on voit que (31) donne la solution de cette équation connaissant le second membre $f(x, vt)$ et les valeurs de ψ et $\frac{d\psi}{dv}$ sur la courbe C. La figure (7) montre que la conormale $\vec{\nu}$ est dirigée soit vers l'intérieur, soit vers l'extérieur du domaine (S). Quand la normale $\vec{n}$ est perpendiculaire aux caractéristiques, $\vec{\nu}$ est dirigé suivant la tangente à la courbe qui limite le domaine. C'est ce qui se passe par exemple le long des caractéristiques.

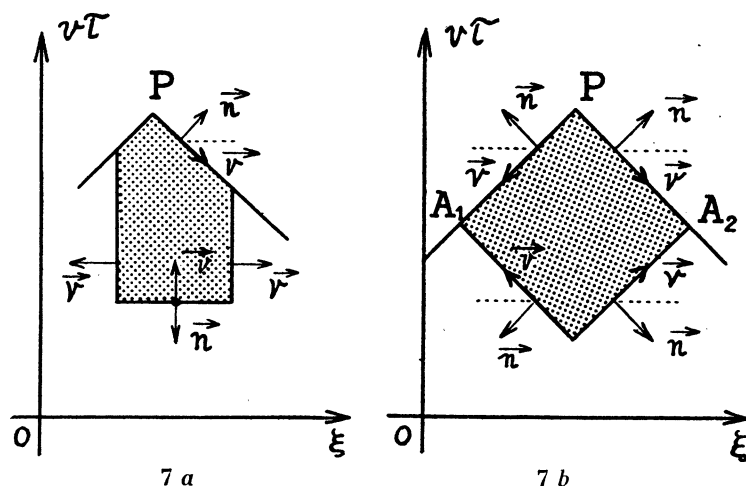


FIG. 7.

On obtient une formule identique à (31) avec l'aire en pointillés de la figure (6) et la courbe C qui la limite vers le haut, sauf que $(\psi_{R1} + \psi_{R2})$ remplace $(\psi_{A1} + \psi_{A2})$.

Au lieu de partir de (7) on aurait pu opérer de la même manière sur le second membre des identités (18) ou (20). En dirigeant les calculs comme précédemment, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right\} \psi(x, vt) = & -\frac{v}{2} \int \int_{(S)} [v^2 \partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - k_0^2] \psi(\xi, v\tau) \cdot J_0(ik_0 \gamma) \cdot ds \\
 (32) \quad & -\frac{v}{2} \int_C \left\{ J_0(ik_0 \gamma) \frac{d\psi}{dv} - \psi \frac{dJ_0(ik_0 \gamma)}{dv} \right\} dl \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \psi_{A_1} + \psi_{A_2} \right\}
 \end{aligned}$$

pour (18) et pour (20) on obtient une expression identique sauf que $\psi_{A1} + \psi_{R1}$ est remplacé par $\psi_{A2} + \psi_{R2}$. La courbe C ayant pour équation

$\xi = h(\tau)$ dans (32) on a

$$(33) \quad n_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}} \quad n_{\tau} = \frac{-h'(\tau)}{\sqrt{1+h'^2}} \quad dl = d\tau \sqrt{1+h'^2}$$

d/dv étant toujours donné par (30). Les formules (31), (32) sont encore valables pour des courbes C quelconques.

Ce qu'il y a de remarquable dans (31), (32) c'est que les valeurs de ψ ou $\frac{d\psi}{dv}$ le long des caractéristiques n'interviennent pas; la raison de ceci apparaîtra clairement dans la démonstration du paragraphe suivant.

5. Démonstration plus générale et plus simple des expressions (31) et (32).

On prend comme point de départ le fait que $I_0(k_0, \gamma)$ obéit à l'équation

$$(34) \quad [v^{-2} \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2 - k_0^2] I_0(k_0, \gamma) = 0$$

On peut donc multiplier par une fonction $\psi(\xi, v\tau)$ et intégrer dans un domaine fermé (S) limité par une courbe Γ du plan des variables ξ, τ , soit

$$(35) \quad \int_S \int \psi(\xi, v\tau) \cdot [v^{-2} \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2 - k_0^2] I_0(k_0, \gamma) \cdot dS = 0$$

Intégrons par parties sur les variables ξ, τ ; pour τ on a

$$(36) \quad \begin{aligned} \int_S \int \psi \cdot \partial_{\tau}^2 I_0 \cdot dS &= \int_S \int \left\{ \partial_{\tau} [\psi \cdot \partial_{\tau} I_0] - (\partial_{\tau} \psi) (\partial_{\tau} I_0) \right\} dS \\ &= \int_{\Gamma} \psi \cdot n_{\tau} \partial_{\tau} I_0 \cdot dl - \int_S \int (\partial_{\tau} \psi) (\partial_{\tau} I_0) \cdot dS \end{aligned}$$

On recommence la même opération sur la nouvelle intégrale de surface obtenue, ce qui donne pour (36)

$$(37) \quad \int_S \int (\partial_{\tau}^2 \psi) \cdot I_0 \cdot dS + \int_{\Gamma} n_{\tau} \cdot \left\{ \psi \partial_{\tau} I_0 - I_0 \partial_{\tau} \psi \right\} dl$$

On obtient une expression analogue pour l'opérateur ∂_{ξ}^2 , et en posant

$$(38) \quad \frac{d}{dv} = n_{\xi} \partial_{\xi} - v^{-2} n_{\tau} \partial_{\tau}$$

n_{ξ}, n_{τ} étant les cosinus directeurs de la normale extérieure à la courbe; l'identité (35) devient donc

$$(39) \quad \int_S \int I_0 [v^{-2} \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2 - k_0^2] \psi \cdot dS + \int_{\Gamma} \left[I_0 \frac{d\psi}{dv} - \psi \frac{dI_0}{dv} \right] dl = 0$$

Cette identité (39) est valable pour un domaine fermé limité par une courbe quelconque Γ , le sens de parcours sur Γ étant le sens direct. Si on l'applique au domaine hachuré de la figure 8_a, limité en partie par deux branches de caractéristiques issues du point $P(x, t)$, il est facile de calculer la partie de l'intégrale curviligne concernant les droites. Le long

de A_2P on a en effet $\frac{d}{dv} = -\frac{1}{v} \frac{d}{dl}$ et le long de PA_1 on a $\frac{d}{dv} = \frac{1}{v} \frac{d}{dl}$;

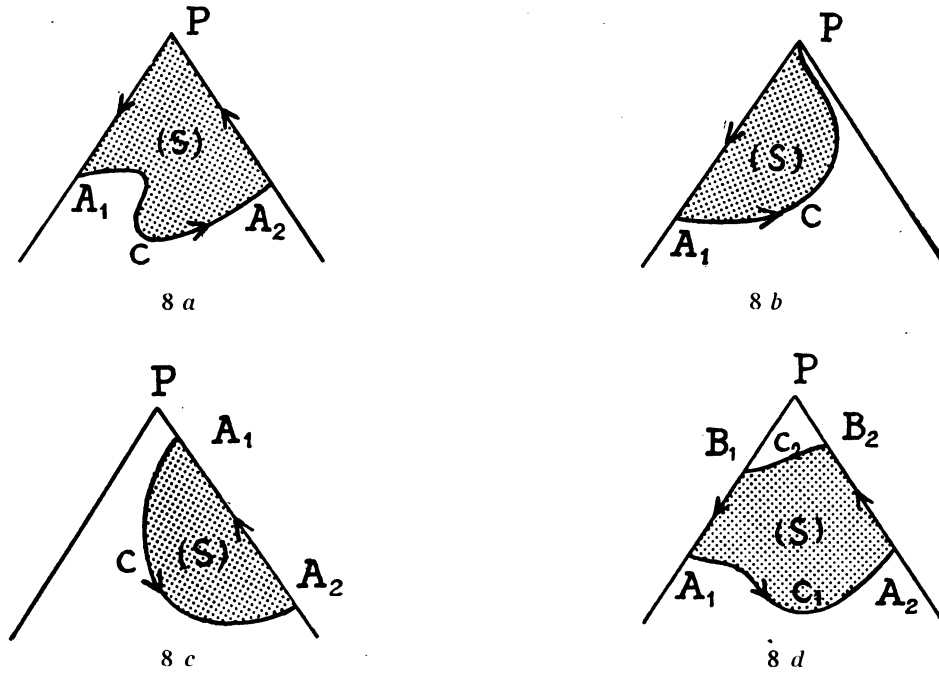


FIG. 8.

$I_0(k_0 \gamma) = 1$ dans les deux cas. On a donc à intégrer une différentielle totale soit

$$(40) \quad -\frac{1}{v} \int_{A_2}^P d\psi + \frac{1}{v} \int_P^{A_1} d\psi = \frac{1}{v} (\psi_{A_1} + \psi_{A_2}) - \frac{2}{v} \psi_P$$

En portant ceci dans (39), on obtient

$$(41) \quad \begin{aligned} \psi_P = & \frac{v}{2} \int_S I_0 [v^{-2} \partial_{\tau}^2 - \partial_z^2 - k_0^2] \psi \cdot dS \\ & + \frac{v}{2} \int_C \left[I_0 \frac{d\psi}{dv} - \psi \frac{dI_0}{dv} \right] dl + \frac{1}{2} (\psi_{A_1} + \psi_{A_2}) \end{aligned}$$

ce qui est bien identique à (31).

Avec le domaine de la figure 8b, au lieu de (40) on a $\frac{1}{v} (\psi_{A_1} - \psi_P)$; on obtient donc (41) mais avec $\frac{1}{2} \cdot \psi_P$ au premier membre, ψ_{A_2} disparaissant au second membre. Enfin avec le domaine de la figure 8c on a $(\psi_{A_2} - \psi_{A_1})$ au lieu de (40) et l'on constate que ψ_P n'apparaît pas.

On retrouverait de la même manière l'identité (32) correspondant aux domaines situés dans les angles latéraux des caractéristiques. L'avantage de ces démonstrations c'est qu'elles sont valables pour des courbes C quelconques et qu'elles montrent pourquoi les valeurs de ψ et de ses dérivées n'apparaissent pas sur les caractéristiques.

6. Courbe C formée de deux segments de droites issues du point (a, b) et parallèles aux caractéristiques. (Fig. 9.)

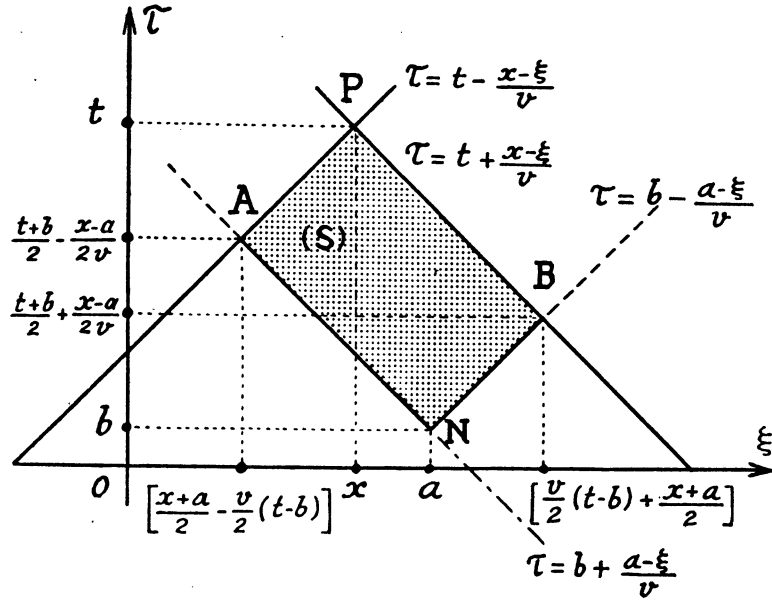


FIG. 9.

Le long de AN, on a : $v\tau = vb + (a - \xi)$

$$g'(\xi) = -\frac{1}{v} \quad l_\xi = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}} \quad n_\tau = \frac{-v}{\sqrt{1+v^2}}$$

d'où

$$dl = \frac{1}{v} \sqrt{1+v^2} d\xi \quad \frac{d}{dv} = -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} (\partial_\xi - v^{-1} \partial_\tau)$$

Si $f(\xi, v\tau)$ est une fonction quelconque de ξ et de $v\tau$, on a donc

$$(42) \quad \left(\frac{df}{dv}\right)_\bullet dl = -\frac{df_\bullet}{d\xi} \frac{d\xi}{v} = -\frac{1}{v} df_\bullet$$

ou encore entre opérateurs $\frac{d}{dv} = -\frac{1}{v} \frac{d}{dl}$.

Le long de NB, on trouve de même que l'on a $\frac{d}{dv} = \frac{1}{v} \frac{d}{dl}$.

$$(43) \quad \left(\frac{df}{dv}\right)_\bullet dl = \frac{df_\bullet}{d\xi} \frac{d\xi}{v} = \frac{1}{v} df_\bullet \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dv} = \frac{1}{v} \frac{d}{dl}$$

En tenant compte de ceci (31) devient

$$(44) \quad \begin{aligned} \psi(x, vt) = & \frac{v}{2} \int_S f(\xi, v\tau) \cdot I_0(k, \gamma) \cdot dS \\ & - \frac{1}{2} \int_A^N \{ I_0 d\psi - \psi dI_0 \} + \frac{1}{2} \int_N^B \{ I_0 d\psi - \psi dI_0 \} \\ & + \frac{1}{2} \{ \psi_A + \psi_B \} \end{aligned}$$

Comme on a

$$d(I_0 \psi) = I_0 \cdot d\psi + \psi \cdot dI_0$$

et comme $\gamma_A = \gamma_B = 0$, on en déduit

$$(45) \quad \psi(x, vt) = \frac{v}{2} \int_S f(\xi, v\tau) \cdot I_0(k, \gamma) dS + \int_A^N \psi dI_0 - \int_N^B \psi dI_0 \\ + \psi_A + \psi_B - (I_0 \psi)_N$$

On voit qu'il suffit de connaître les valeurs de ψ sur les caractéristiques issues de N et qu'il n'est pas nécessaire de connaître les dérivées; c'est assez naturel, car la dérivée suivant la conormale est précisément la dérivée suivant les droites NA ou NB; donc connaître ψ c'est aussi connaître cette dérivée.

Quand $f(\xi, v\tau) = 0$ on a simplement

$$(46) \quad \psi(x, vt) = \int_A^N \psi \cdot dI_0 - \int_N^B \psi \cdot dI_0 + \psi_A + \psi_B - (I_0 \psi)_N$$

Voici quelques exemples d'application de ces formules :

I. Cas où $f = 0$. *Premier exemple* : k_0 est différent de zéro et on donne les valeurs $\psi(x, x) = 1$ de $\psi(x, -x) = 1$ sur deux caractéristiques issues de l'origine des coordonnées, $a, b = 0$;

(5) donne alors

$$\psi(x, vt) = \left[I_0 \right]_A^N - \left[I_0 \right]_N^B + 2 - (I_0)_N$$

mais $(I_0)_A = (I_0)_B = 1$ et $(I_0)_N = I_0(k_0 \sqrt{v^2 t^2 - x^2})$

d'où

$$\psi(x, vt) = (I_0)_N = I_0(k_0 \sqrt{v^2 t^2 - x^2})$$

Deuxième exemple : k_0 et f sont nuls. Puisque $I_0 = 1$ la formule (46) prend la forme simple

$$(47) \quad \psi_t = \psi_A + \psi_B - \psi_N$$

On ne diminue pas la généralité du problème en faisant $a = b = 0$, d'où

$$(48) \quad \psi(x, vt) = \psi\left(\frac{x-vt}{2}, -\frac{x-vt}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+vt}{2}, \frac{x+vt}{2}\right) - \psi(0, 0)$$

Sous cette dernière forme, on voit bien que $\psi(x, vt)$ est une solution de $(v^2 \partial_t^2 - \partial_x^2) \psi = 0$ et quand $vt = \pm x$, on voit que c'est bien une identité.

Voici quelques exemples simples : I) On donne $\psi(x, x) = 1$; $\psi(x, -x) = \exp \{ -2ikx \}$

la formule (48) donne la solution $\psi(x, vt) = \exp \{ ik(vt - x) \}$

2) On donne $\psi(x, x) = \exp \{ 2ikx \}$; $\psi(x, -x) = 1$ On trouve $\psi = \exp \{ ik(vt + x) \}$

3) On donne $\psi(x, x) = e^{ikx} \cos kx$; $\psi(x, -x) = e^{ikx} \cos(kx)$ On trouve $\psi = \exp [ikvt] \cdot \cos(kx)$

On trouve donc respectivement des ondes qui se dirigent vers la droite, vers la gauche et des ondes stationnaires.

II. *Cas où f est différent de zéro.* On suppose que k_0 est nul.

On donne

$$\psi(x, x) = 1 \quad \psi(x, -x) = 1$$

Si f était nul cela correspondrait à la solution $\psi = 1$, mais si l'on donne

$$(49) \quad f(x, vt) = ik e^{ikvt} \partial_x^2 |x|$$

la formule (48) n'est plus valable et il faut employer la formule (45) avec $k_0 = 0$, soit

$$(50) \quad \psi(x, vt) = \frac{v}{2} \int_s^t f(\xi, v\tau) d\xi d\tau + \psi_A + \psi_B - \psi_N$$

Pour calculer effectivement l'intégrale de (50) il faut considérer les deux cas où $x > 0$ et où $x < 0$. Par exemple avec $x > 0$ on a

$$\frac{v}{2} \int_0^{t-\frac{x}{v}} d\tau \cdot ik e^{ikv\tau} \int_{-\xi}^{\xi} \partial_{\xi}^2 |\xi| \cdot d\xi$$

car il suffit de prendre un intervalle infiniment petit de part et d'autre de $\xi = 0$. En vertu des propriétés de la fonction $\partial_{\xi}^2 |\xi|$ on a

$$2 \cdot \frac{ikv}{2} \int_0^{t-\frac{x}{v}} e^{ikv\tau} d\tau = \left[e^{ikv\tau} \right]_0^{t-\frac{x}{v}} = e^{ik(vt-x)} - 1.$$

Dans ces conditions (50) donne

$$(51) \quad \psi(x, vt) = e^{ik(vt-x)} \text{ pour } x > 0$$

Si l'on avait pris $x < 0$, l'intégrale sur τ dans (51) serait allée de 0 à $\frac{x}{v}$ et l'on aurait trouvé

$$\psi(x, vt) = e^{ik(vt+x)} \text{ pour } x < 0$$

7. Courbe C formée de segments de droites parallèles aux axes de coordonnées (fig. 10).

La solution est donnée par (31) et on suppose que ψ obéit à l'équation

$$(52) \quad [v^2 \partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2] \psi = f(x, vt)$$

Pour l'intégrale curviligne le long de C on a trois cas à considérer. De A_2 à A_1 on a $dl = d\tau$ mais $v\tau$ varie de $vt - (x - a)$ à $v\theta$ et il revient au même de prendre $d\tau$ au lieu de $-d\tau$, l'intégration allant de zéro à $t - \frac{(x-a)}{v}$

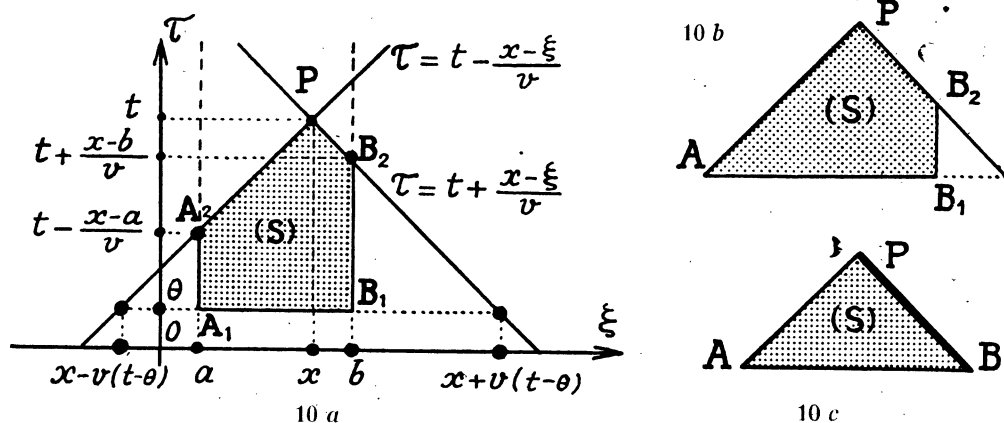


FIG. 10.

On a aussi $n_{\xi} = -1$, $n_{\tau} = 0$, $d/dv = -\partial_{\xi}$, $(\partial_{\xi}^2 \psi)_{\xi=a} = [\psi_{\xi\xi}(\xi, v\tau)]_{\xi=a}$ et pour une fonction de γ on a l'équivalence $-\partial_{\xi} = \partial_x$.

De A_1 à B_1 on a $dl = d\xi$ et $n_{\xi} = -1$, $n_{\tau} = 0$, $\frac{d}{dv} = v^{-2} \partial_{\tau}$. Pour une fonction de γ on sait que ∂_{ξ} est équivalent à $-\partial_x$, enfin

$$(\partial_{\tau} \psi)_{\tau=\theta} = [\psi_{\tau}(\xi, v\tau)]_{\tau=\theta}$$

De B_1 à B_2 on a $dl = d\tau$ et $v\tau$ varie de $v\theta$ à $vt + (x-b)$; la dérivée normale se réduit à ∂_{ξ} ; pour une fonction de γ , ∂_{ξ} est équivalent à $-\partial_x$ et $(\partial_{\xi} \psi)_{\xi=b} = [\psi_{\xi}(\xi, v\tau)]_{\xi=b}$.

En définitive on peut mettre (31) sous la forme

$$\begin{aligned} \psi(x, vt) &= \frac{v}{2} \int_a^b \int_{\theta}^{\tau} f(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0, \gamma) \cdot dS \\ &= \frac{v}{2} \int_{\theta}^{t+\frac{x-a}{v}} \left\{ I_0 \psi_{\xi}(\xi, v\tau) + \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_{\xi} I_0 \right\}_{\xi=a} d\tau \\ (53) \quad &+ \frac{1}{2v} \int_a^b \left\{ I_0 \psi_{\tau}(\xi, v\tau) + \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_{\tau} I_0 \right\}_{\tau=\theta} d\xi \\ &+ \frac{v}{2} \int_{\theta}^{t+\frac{x-b}{v}} \left\{ I_0 \psi_{\xi}(\xi, v\tau) + \psi(\xi, v\tau) \cdot \partial_{\xi} I_0 \right\}_{\xi=b} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \psi[a, vt - (x-a)] + \psi[b, vt + (x-b)] \right\} \end{aligned}$$

Pour les valeurs de θ correspondant aux cas de figure (10)_b et (10)_c, on modifiera certaines limites dans la formule (53). Par exemple pour (10)_b, la première intégrale sur τ disparaît et l'intégrale sur ξ va de $[x-v(t-\theta)]$ à b . Pour (10)_c, les deux intégrales sur τ disparaissent et l'intégrale sur ξ est à prendre entre les limites $[x-v(t-\theta)]$ et $[x+v(t-\theta)]$.

Dans le cas de la figure (11)_a, le point P est hors du domaine et l'on a zéro au premier membre de (31). Au second membre on a $\frac{1}{2} (\psi_{B_2} - \psi_{A_2})$

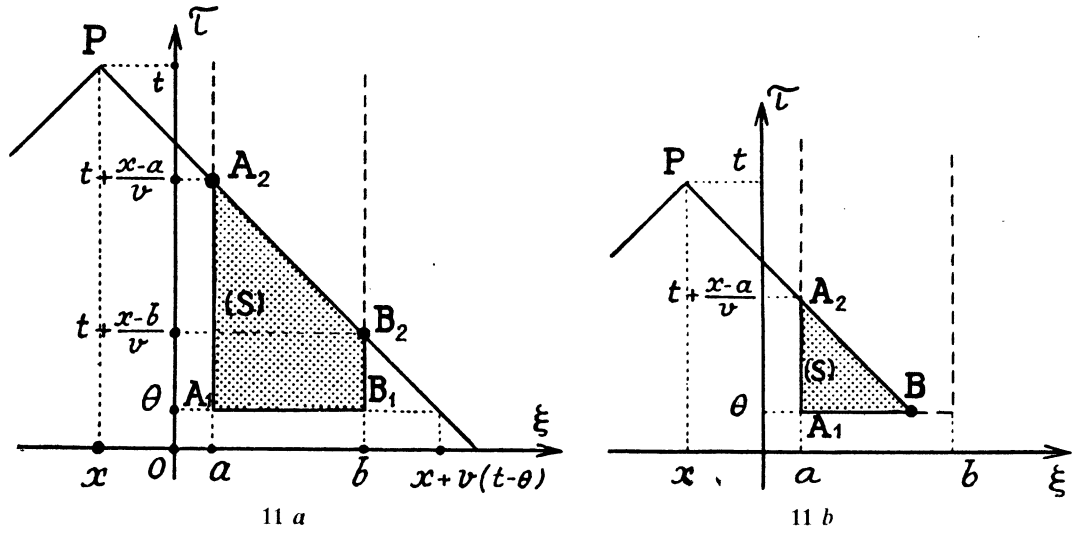


FIG. 11.

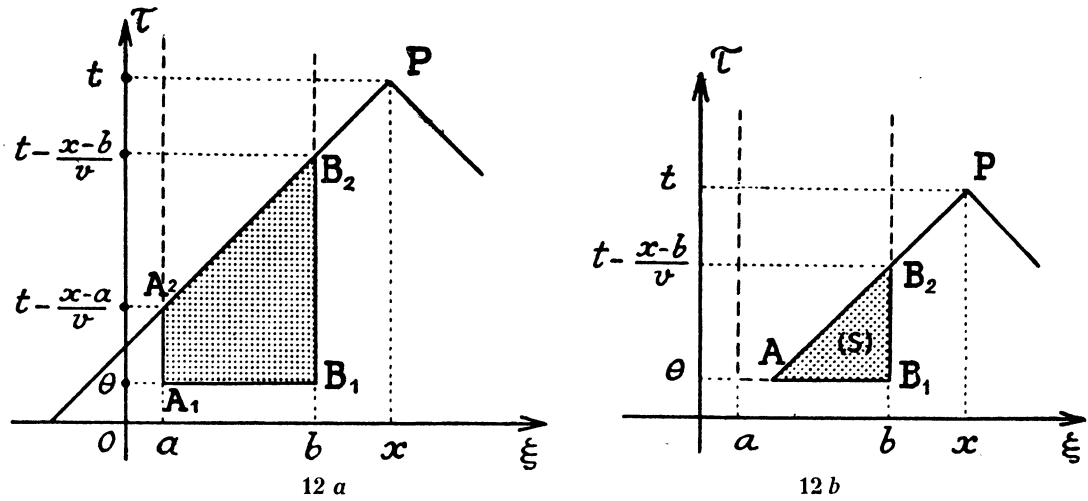


FIG. 12.

ou plus explicitement

$$(54) \quad \frac{1}{2} \{ [b, vt + (x-b)] - \psi[a, vt + (x-a)] \}$$

Dans le cas de la figure (12)_a on a aussi zéro au premier membre de (31) et $\frac{1}{2} (\psi_{A2} - \psi_{B2})$ au second, soit

$$(55) \quad \frac{1}{2} \{ \psi [a, vt - (x - a)] - \psi [b, vt - (x - b)] \}$$

Dans le cas des figures (11)_b ou (12)_b, l'une des parties du contour disparaît.

8. Solutions de l'équation pour des conditions aux limites portées par l'axe des espaces : Problème de conditions initiales ou Problème de Cauchy.

C'est le cas de la figure (10)_a où $\theta = 0$ et où $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$. Le domaine (S) est alors toujours un triangle de sommet P (x, t) et de base A₁ (x - vt, 0), A₂ (x + vt, 0). (Fig. 13.)

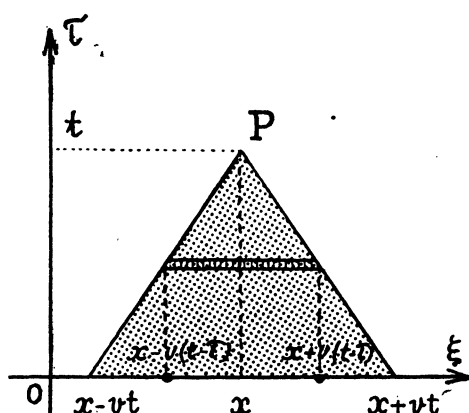


FIG. 13.

La relation (33) prend la forme suivante, en posant $\xi = x + a$

$$(56) \quad \begin{aligned} \psi(x, vt) = & \frac{v}{2} \int_0^t d\tau \int_{-v(t-\tau)}^{v(t-\tau)} f(x+\alpha, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot d\alpha \\ & + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} \left\{ I_0(k_0 \gamma_0) \cdot \psi_t(x+\alpha, 0) + \psi(x+\alpha, 0) \cdot \partial_t I_0(k_0 \gamma_0) \right\} d\alpha \\ & + \frac{1}{2} \left[\psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0) \right] \end{aligned}$$

avec

$$(57) \quad \gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - \alpha^2} \quad \gamma_0 = (\gamma)_{\tau=0} = \sqrt{v^2 t^2 - \alpha^2}$$

On retrouve donc avec (56) la solution archi-classique due à Heaviside et Poincaré, de l'équation des télégraphistes. On n'a plus $1, \frac{1}{2}, 0$ au premier membre, mais toujours un, parce que le point est toujours dans le domaine possible qui est ici tout le demi-plan supérieur; on peut donc admettre que la courbe fermée de nos paragraphes précédents est l'axe des ξ et le demi-cercle à l'infini du demi-plan supérieur.

Quand $k_0 = 0$, on a la forme plus simple de solution

$$(58) \quad \psi(x, vt) = \frac{v}{2} \int_0^t d\tau \int_{-v(t-\tau)}^{v(t-\tau)} f(x+\alpha, v\tau) d\alpha \\ + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} \psi_t(x+\alpha, 0) d\alpha + \frac{1}{2} [\psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0)]$$

Ces expressions (56) et (58) donnent la solution $\psi(x, vt)$ de (52) dans tout le demi-plan supérieur quand on connaît $\psi(x, 0)$ et $\psi_t(x, 0)$ c'est-à-dire ψ et sa dérivée temporelle pour $t = 0$.

Exemples d'application de (56) et (58).

1. On donne $k_0 = 0$, $f(x, vt) = ik \cdot \exp[ikvt] \cdot \partial_{x^2} |x|$

$\psi(x, 0) = \exp[-ik|x|]$, $\psi_t(x, 0) = ikv \exp[-ik|x|]$

Tant que la base du triangle de la figure (13) ne contient pas $\xi = 0$ on n'a pas à s'occuper de l'intégrale double de (58); puis, suivant que $x > 0$ ou $x < 0$ on trouve

$$\psi(x, vt) = \exp[ik(vt - x)] \quad \psi(x, vt) = \exp[ik(vt + x)]$$

Cela correspond donc à une source placée à l'origine des coordonnées.

2. On donne

$$\psi(x, 0) = 1 \text{ quand } a < x < b \\ \psi(x, 0) = 0 \text{ quand } x < a \text{ ou } x > b \\ \psi_t(x, 0) = 0, f = 0, k_0 = 0;$$

(58) fournit la solution

$$\psi(x, vt) = \frac{1}{2} [\psi(x - vt, 0) + \psi(x + vt, 0)]$$

d'où les aspects successifs de la figure (14) pour des temps $t = 0, t_1, t_2$ croissants.

La figure (15) indique les domaines où la fonction $\psi(x, vt)$ est différente de zéro. En un point tel que x_0 , l'ébranlement dure de $t_1 = \frac{x_0 - b}{v}$ $t_2 = \frac{x_0 - a}{v}$ soit $t_2 - t_1 = \frac{b - a}{v}$; c'est ce qui se passe dans un tuyau indéfini dont une tranche gazeuse est maintenue comprimée puis abandonnée brusquement à elle-même; on a alors deux compressions qui se propagent en sens inverse; mais on pourrait aussi bien supposer que pour $t < 0$ on avait deux ondes se dirigeant l'une vers l'autre comme l'indique le bas de la figure (14) où $t'_2 < t'_1 < 0$.

3. On donne $\psi(x, 0) = 0$ $\psi_t(x, 0) = kv \cdot \exp\{i\sqrt{k^2 + k_0^2} x\}$
 $f = 0$ mais k_0 différent de zéro.

(56) fournit la solution

$$(59) \quad \psi(x, vt) = \frac{k}{2} e^{i\sqrt{k^2 + k_0^2} x} \int_{-vt}^{vt} I_0[k_0 \sqrt{v^2 t^2 - \alpha^2}] e^{i\sqrt{k^2 + k_0^2} \alpha} d\alpha$$

Par raison d'antisymétrie on voit que $\partial/\partial k_0$ est nul. On peut donc faire $k_0 = 0$ dans (59) ce qui donne alors sans difficulté

$$\psi(x, vt) = \exp\{i\sqrt{k^2 + k_0^2} x\} \cdot \sin(kvt)$$

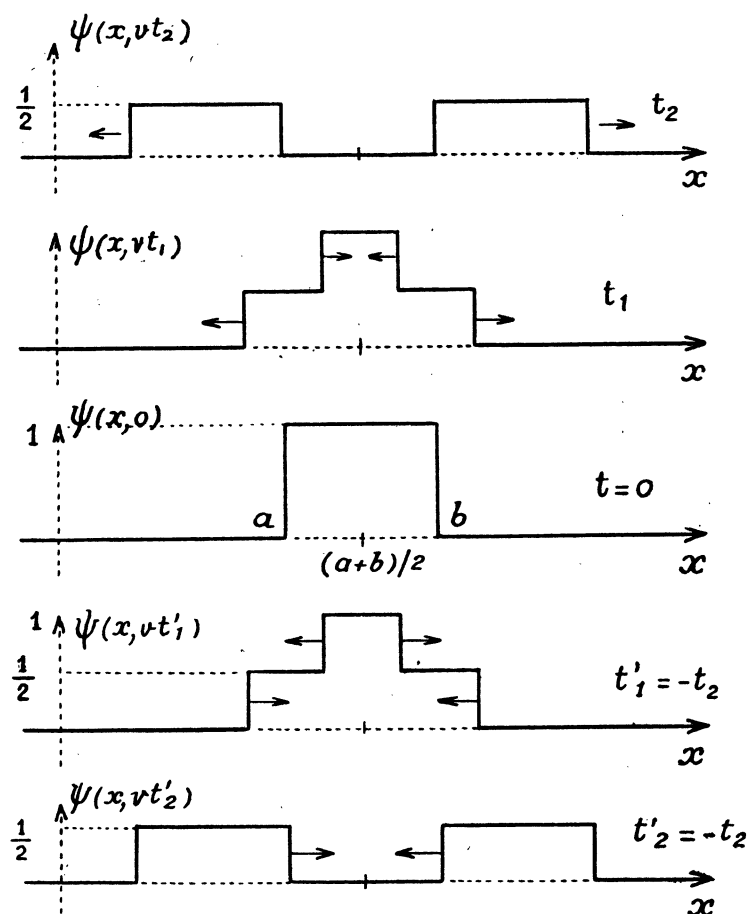


FIG. 14.

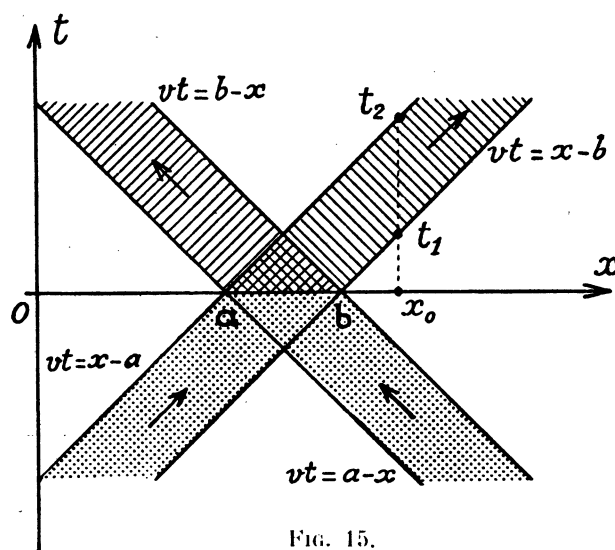


FIG. 15.

9. Formule permettant de remonter dans le passé d'une onde plane : Problème de Cauchy à l'envers.

On obtient cette formule en considérant le domaine de la figure (16).

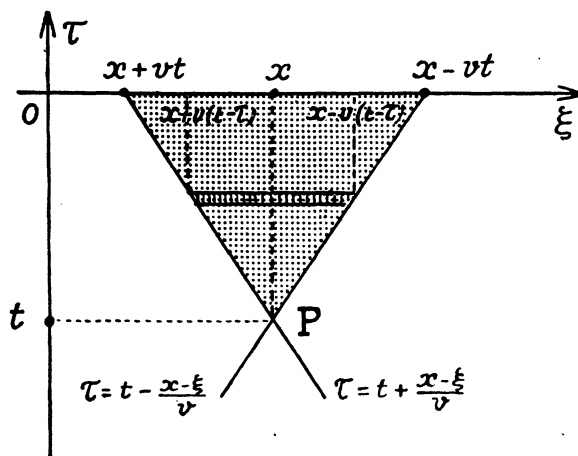


FIG. 16.

Dans ce cas on a $d/dv = -v^{-2} \partial_z$ et la formule (31) devient

$$\begin{aligned}
 \psi(x, vt) &= \frac{v}{2} \int_t^0 d\tau \int_{v(t-\tau)}^{-v(t-\tau)} f(x, v\tau) I_0(k_0 \gamma) d\alpha \\
 (60) \quad &- \frac{1}{2v} \int_{vt}^{-vt} \left\{ I_0(k_0 \gamma_0) \cdot \psi_t(x+\alpha, 0) + \psi(x+\alpha, 0) \partial_t I_0(k_0 \gamma) \right\} d\alpha \\
 &+ \frac{1}{2} [\psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0)]
 \end{aligned}$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs négatives de t , car le domaine possible pour le point (x, t) est tout le demi-plan inférieur.

Exemple d'application de (60). I. On donne $\psi(x, 0) = e^{ikx}$, $\psi_t(x, 0) = ikve^{ikx}$, $k_0 = f = 0$; on trouve $\psi(x, vt) = e^{ik(vt+x)}$.

On notera qu'il ne suffit pas de remplacer t par $-t$ dans la formule (56), car on trouverait $e^{ik(x-vt)}$; ceci serait normal puisque l'on n'obtient pas $\psi(x, vt)$ mais $\psi(x, -vt)$.

II. Avec l'exemple de la figure (14) on trouve les ondes correspondant aux deux cas de figure du bas avec t'_1 et t'_2 .

10. Conditions aux limites portées par l'axe des temps : Problème de Kirchhoff ou problème de conditions aux limites spatiales.

Quand on applique la formule (32) au domaine hachuré (S) de la figure (17) le point P pouvant se trouver n'importe où dans le demi-plan $\xi > 0$, on a

$$n_\tau = 0 \quad n_\xi = -1 \quad d/dv = -\partial_z$$

En posant $\beta = v(t - \tau)$, la formule (32) devient, si ψ obéit à (52)

$$\begin{aligned}
 \psi(x, vt) = & -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{-(x-\xi)}^{(x-\xi)} f(\xi, vt + \beta) \cdot J_0(ik_0 \gamma) \cdot d\beta \\
 (61) \quad & + \frac{1}{2} \int_{-x}^x \left\{ \psi_x(0, vt + \beta) J_0(ik_0 \gamma_0) + \psi(0, vt + \beta) \cdot \partial_x J_0(ik_0 \gamma_0) \right\} d\beta \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \psi(0, vt + x) + \psi(0, vt - x) \right\}
 \end{aligned}$$

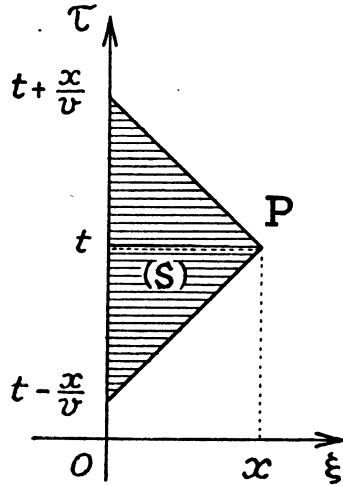


FIG. 17.

avec $i\gamma = i\sqrt{\beta^2 - (x - \xi)^2} = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2}$ qui est réel dans le domaine considéré et $i\gamma_0 = (i\gamma)_{\xi=0} = \sqrt{x^2 - \beta^2}$; on a toujours un au premier membre de (32) car $t - \frac{x}{v} < t < t + \frac{x}{v}$. Quand $k_0 = 0$ on a $J_0(0) = 1$ et (61) devient

$$\begin{aligned}
 \psi(x, vt) = & -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{-(x-\xi)}^{(x-\xi)} f(\xi, vt + \beta) \cdot d\beta \\
 (62) \quad & + \frac{1}{2} \int_{-x}^x \psi_x(0, vt + \beta) \cdot d\beta \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \psi(0, vt + x) + \psi(0, vt - x) \right\}
 \end{aligned}$$

Ces expressions (61) et (62) sont les solutions cherchées de (52) quand on connaît le second membre et les valeurs ψ, ψ_x sur la limite $x = 0$.

Exemples. 1. On donne

$$f = 0 \quad \psi(0, vt) = 0 \quad \psi_x(0, vt) = \sqrt{k_0^2 - k^2} e^{kvt}$$

(61) donne

$$\begin{aligned}\psi(x, vt) &= \frac{1}{2} \sqrt{k_0^2 - k^2} \int_{-x}^x e^{k(vt+\beta)} J_0(k_0 \sqrt{x^2 - \beta^2}) d\beta \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{k_0^2 - k^2} \cdot e^{kvt} \int_{-1}^1 e^{kxu} J_0(k_0 x \sqrt{1-u^2}) du\end{aligned}$$

comme on connaît la solution $\psi(x, vt) = \exp[kvt] \cdot \sin[x \sqrt{k_0^2 - k^2}]$ on en déduit que l'on a

$$(63) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{kxu} J_0(k_0 x \sqrt{1-u^2}) du = \frac{\sin[x \sqrt{k_0^2 - k^2}]}{[x \sqrt{k_0^2 - k^2}]}$$

2. On donne $f = 0$; $k_0 = 0$, et

$$a) \quad \psi(0, vt) = \exp[ikvt] \quad \psi_x(0, vt) = -ik \exp[ikvt];$$

$$(62) \text{ donne } \psi(x, vt) = \exp[ik(vt - x)]$$

$$b) \quad \psi(0, vt) = \exp[ikvt] \quad \psi_x(0, vt) = ik \exp[ikvt];$$

$$(62) \text{ donne } \psi(x, vt) = \exp[ik(vt + x)].$$

C'est une onde qui se dirige vers la gauche; il a donc suffi de changer le signe de $\psi_x(0, vt)$ pour que le sens de propagation soit inversé.

$$c) \quad \psi(0, vt) = \exp[ikvt] \quad \psi_x(0, vt) = 0;$$

$$(62) \text{ donne } \psi(x, vt) = \exp[ikvt] \cdot \cos(kx); \text{ c'est une onde stationnaire.}$$

Remarque. — Pour obtenir ψ en un point P situé dans le demi-plan $\xi < 0$, il suffit de considérer le domaine (S) de la figure (18); la formule (32) donne dans ce cas

$$\begin{aligned}(64) \quad \psi(x, vt) &= -\frac{1}{2} \int_x^0 d\xi \int_{\xi-x}^{-(x-\xi)} f(\xi, vt+\beta) \cdot J_0(ik_0 \gamma) d\beta \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-x}^x \left\{ \psi_x(0, vt+\beta) \cdot J_0(ik_0 \gamma_0) + \psi(0, vt+\beta) \cdot \partial_x J_0(ik_0 \gamma_0) \right\} d\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \psi(0, vt+x) + \psi(0, vt-x) \right\}\end{aligned}$$

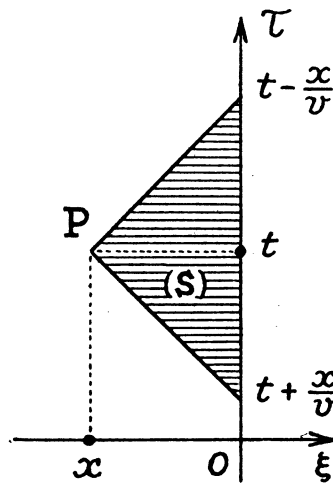


FIG. 18.

Cette formule (64) n'est en fait pas différente de (61); dans l'intégrale double les deux limites sont inversées, ce qui ne change rien et dans l'intégrale simple, il y a un signe moins qui est compensé par la permutation des limites.

11. Problème mixte : Conditions aux limites portées par le demi-axe positif des temps et le demi-axe positif des espaces. (Fig. 19.)

La formule (53) appliquée au domaine (S) de la figure 19 donne, avec $\theta = 0$, $a = 0$, $b = x + vt$

$$\begin{aligned}
 \psi(x, vt) = & \frac{v}{2} \int_S f(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot dS \\
 & - \frac{v}{2} \int_0^{t-\frac{x}{v}} \left\{ I_0(k_0 \gamma) \cdot \psi_x + \psi \cdot \partial_x I_0(k_0 \gamma) \right\}_{\xi=0} d\tau \\
 (65) \quad & + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} \left\{ I_0(k_0 \gamma) \cdot \psi_t + \psi \cdot \partial_t I_0(k_0 \gamma) \right\}_{\tau=0} d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \psi(0, vt-x) + \psi(x+vt, 0) \right\}
 \end{aligned}$$

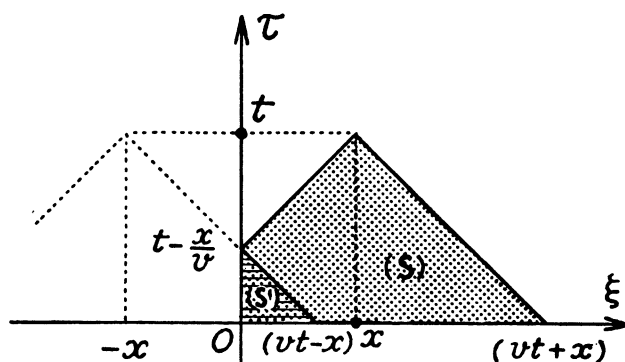


FIG. 19.

Enfin la formule (39) appliquée au domaine (S') de la figure 19, donne

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{v}{2} \int_S f(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot dS \\
 & - \frac{v}{2} \int_0^{t-\frac{x}{v}} \left\{ I_0(k_0 \gamma) \cdot \psi_x(\xi, v\tau) - \psi \cdot \partial_x I_0(k_0 \gamma) \right\}_{\xi=0} d\tau \\
 (66) \quad & + \frac{1}{2v} \int_0^{vt-x} \left\{ I_0(k_0 \gamma) \cdot \psi_t(\xi, v\tau) + \psi \cdot \partial_t I_0(k_0 \gamma) \right\}_{\tau=0} d\xi \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \psi(vt-x, 0) - \psi(0, vt-x) \right\}
 \end{aligned}$$

Par addition ou soustraction des formules (65) et (66) on voit que l'on fait disparaître soit $\psi(0, vt)$ soit $\psi_x(0, vt)$ car il y a $\partial_x I_0(k_0 \gamma_0)$ dans (65) et $-\partial_x I_0(k_0 \gamma'_0)$ dans (66). $\gamma' = \sqrt{v^2(t - \tau)^2 - (x + \xi)^2}$ diffère de γ par le changement de x en $-x$; on a $\gamma_{\xi=0} = \gamma'_{\xi=0}$. On peut donc obtenir la solution $\psi(x, vt)$ connaissant

$$\begin{aligned} & \psi(0, vt) \quad \text{quand } t > 0 \\ & \psi(x, 0) \text{ et } \psi_t(x, 0) \quad \text{quand } x > 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \psi_x(0, vt) \quad \text{quand } t > 0 \\ \psi(x, 0) \text{ et } \psi_t(x, 0) \quad \text{quand } x > 0 \end{array} \right.$$

Il faut évidemment qu'il y ait compatibilité dans les données, soit $\psi(0, vt) = \psi(x, 0)$ quand $t = x = 0$.

Retranchons par exemple (66) de (65), quand $k_0 = 0$, $f = 0$; on obtient l'expression simple (quand $vt \geq x$)

$$(67) \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2v} \int_{vt-x}^{vt+x} \psi_t(\xi, 0) d\xi + \psi(0, vt-x) + \frac{1}{2} \left\{ \psi(x+vt, 0) - \psi(vt-x, 0) \right\}$$

Tant que $vt \leq x$ on a un problème de Cauchy dont la solution est donnée par la formule (58).

Exemple : $\psi(0, vt) = \cos(kvt)$; $\psi(x, 0) = \cos(kx)$; $\psi_t(x, 0) = 0$ (67) fournit la solution

$$\psi(x, vt) = \cos(kvt) \cdot \cos(kx).$$

Remarque. — En utilisant les domaines de la figure (20), on aurait la solution d'un problème analogue au précédent, mais les rôles des axes de coordonnées seraient permutés.

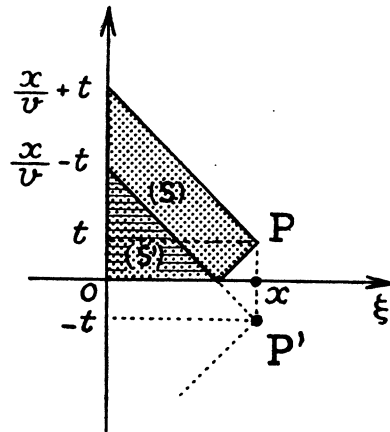


FIG. 20.

12. Problème mixte avec valeurs données pour $x = 0$ et $x = a$.

Il s'agit de déterminer ψ au point P (x, vt) de la figure (21) où $t > 0$ et $0 < x < a$. On donne les conditions initiales $\psi(x, 0)$ et $\psi_t(x, 0)$ et on impose les valeurs de ψ ou de ψ_x pour $x = 0$ et $x = a$.

La solution de ce problème est obtenue par la considération des domaines limités par les trois côtés de la demi-bande infinie de largeur a et les caractéristiques issues des points P , P_1 , P'_1 , P_2 , P'_2 , ... etc. Les points P_n , P'_n dont les abscisses sont

$$x_{2n-1} = 2na - x \quad x_{2n} = 2na + x \quad x'_{2n+1} = -(2na + x) \quad x'_{2n} = -(2na - x)$$

sont appelés les images d'ordre n du point P . Comme ces images sont situées hors de la bande et que le point P est à l'intérieur, on a pour les divers domaines

$$(68) \quad \psi(x, vt) = [v^{-2} \lambda_t^2 - \lambda_x^2 - k_0^2] \left\{ \frac{v}{2} \int_{OM_1 P N_1 a} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma) \cdot dS \right\}$$

$$(69) \quad 0 = [\dots \dots \dots] \left\{ \frac{v}{2} \int_{OM_2 N_1 a} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma_1) \cdot dS \right\}$$

$$0 = [\dots \dots \dots] \left\{ \frac{v}{2} \int_{OM_1 N_2 a} \psi(\xi, v\tau) \cdot I_0(k_0 \gamma'_1) \cdot dS \right\}$$

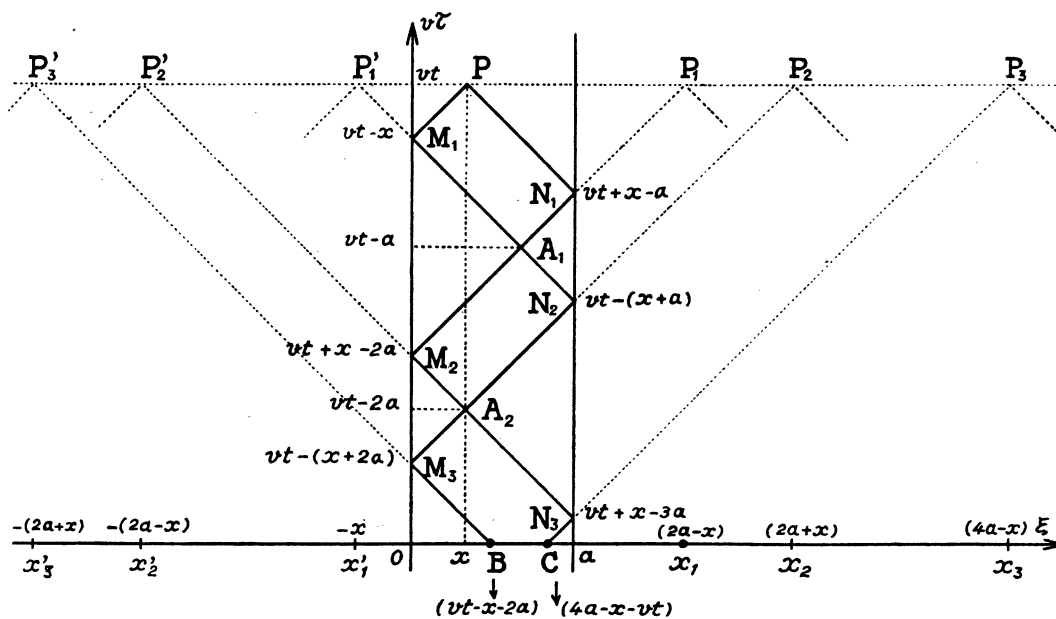


FIG. 21.

En définitive les images sont disposées symétriquement par rapport à $x = 0$ et $x = a$; en retranchant ou en ajoutant indéfiniment les équations (69) à (68), on peut s'arranger pour faire disparaître soit ψ , soit ψ_x sur les limites $x = 0$ et $x = a$. On a donc en principe le résultat cherché. On pourrait aussi faire disparaître ψ pour $x = 0$ et ψ_x pour $x = a$ ou inversement.

Nous allons examiner de plus près la forme de la solution quand $k_0 = 0$, $f = 0$. Quand t va en croissant à partir de $t = 0$, le point P s'élève vers le

haut et les points de réflexion des caractéristiques sur les limites, soit $M_1, M_2, M_3 \dots N_1, N_2, N_3 \dots$ sont en nombres croissants. Tant que $0 \leq vt \leq x$ il n'y a pas de réflexion des caractéristiques et l'on a un problème de Cauchy dont la solution est donnée par (58) où $f = 0$, soit

$$(70) \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi_t(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{2} \{ \psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0) \}$$

Quand $x \leq vt \leq (a-x)$ et en se plaçant dans le cas de la figure (21) où $x < (a/2)$ on a une réflexion en M_1 . Il s'agit donc du problème mixte du type déjà étudié et dont la solution est donnée par (67), soit

$$(71) \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2v} \int_{vt-x}^{vt+x} \psi_t(\xi, 0) d\xi + \frac{1}{2} \{ \psi(vt+x, 0) - \psi(vt-x, 0) \} + \psi(0, vt-x)$$

Quand $(a-x) \leq vt \leq a$, on est dans le cas de la figure (22). En retranchant les identités relatives aux domaines hachurés de l'identité relative au domaine OMPNa, on obtient aisément

$$(72) \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2v} \int_{vt-x}^{2a-vt-x} \psi_t(\xi, 0) d\xi - \frac{1}{2} \{ \psi(vt-x, 0) + \psi(2a-vt-x, 0) \} + \{ \psi(0, vt-x) + \psi(a, vt+x-a) \}$$

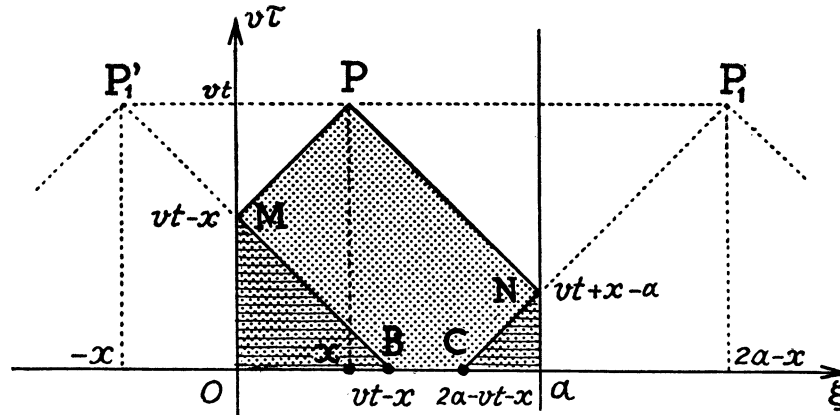


FIG. 22.

Pour les valeurs de vt comprises entre a et $2a$ on est ramené aux trois cas précédents, car la formule (47) donne immédiatement ψ_A , soit

$$(73) \quad \psi_P = \psi_{M_1} + \psi_{N_1} - \psi_{A_1}$$

ψ_{A_1} est ainsi relié à ψ_P pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et a . D'une manière plus précise

$$(74) \quad \psi(x, vt) = \psi_{M_1} + \psi_{N_1} - \psi(a-x, vt-a)$$

et $\psi(a-x, vt-a)$ est relié aux conditions initiales et éventuellement à ψ_{M_2} et ψ_{N_2} par les formules (70) (71) (72) où l'on remplace vt par $(vt-a)$

et x par $(a - x)$; on a donc :

Quand $a \leq vt \leq x + a$

$$(75) \quad \psi(x, vt) = \psi_{M_1} + \psi_{N_1} - \frac{1}{2v} \int_{2a-vt-x}^{vt-x} \psi_t(\xi, 0) d\xi - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \psi(vt-x, 0) \\ + \psi(2a-vt-x, 0) \end{array} \right\}$$

quand $(x + a) \leq vt \leq (2a - x)$

$$(76) \quad \psi(x, vt) = \psi_{M_1} + \psi_{N_1} - \psi_{N_2} - \frac{1}{2v} \int_{2a-x-vt}^{2a+x-vt} \psi_t(\xi, 0) d\xi \\ - \frac{1}{2} \left\{ \psi(2a-x-vt, 0) - \psi(2a+x-vt, 0) \right\}$$

quand $(2a - x) \leq vt \leq 2a$

$$(77) \quad \psi(x, vt) = (\psi_{M_1} - \psi_{M_2}) + (\psi_{N_1} - \psi_{N_2}) - \frac{1}{2v} \int_{x+vt-2a}^{x-vt+2a} \psi_t(\xi, 0) d\xi \\ + \frac{1}{2} \left\{ \psi[x+vt-2a, 0] + \psi[x-vt+2a, 0] \right\}$$

On obtient ainsi de proche en proche ψ pour des valeurs croissantes de vt . D'une manière générale si $2na < vt < 2(n+1)a$, l'application répétée de (73) donne

$$(78) \quad \psi_v = (\psi_{M_1} - \psi_{M_2}) + (\psi_{M_3} - \psi_{M_4}) + \dots - \psi_{M_{2n-1}} + (\psi_{M_{2n}}) \\ + (\psi_{N_1} - \psi_{N_2}) + (\psi_{N_3} - \psi_{N_4}) + \dots + (\psi_{N_{2n-1}} - \psi_{N_{2n}}) + \psi_{N_{2n}}$$

On relie ensuite $\psi_{A_{2n}}$ aux conditions initiales par des formules du type (71) (72) (73) ou (76) (77) (78) où vt est remplacé par $(vt - 2na)$.

Dans le cas particulièrement important où ψ est nul aux limites $x = 0$ et $x = a$ la formule (78) montre que la fonction $\psi(x, vt)$ est périodique et de période $2a/v$ puisque chaque parenthèse de (78) est nulle.

Exemples : On donne $\psi(x, 0)$; $\psi_t(x, 0) = 0$; $\psi(0, vt) = \psi(a, vt) = 0$. Nous avons dit que dans ce cas le phénomène était périodique dans le temps et de période $2a/v$; il suffit de déterminer ψ entre $0 < vt < 2a$ et pour cela on a les formules (71) à (78), soit

$$\begin{aligned} 0 \leq vt \leq x & \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2} \{ \psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0) \} \\ x \leq vt \leq (a-x) & \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2} \{ \psi(x+vt, 0) - \psi(vt-x, 0) \} \\ (a-x) \leq vt \leq a & \quad \psi(x, vt) = -\frac{1}{2} \{ \psi(2a-vt-x, 0) + \psi(vt-x, 0) \} \\ a \leq vt \leq (x+a) & \quad \psi(x, vt) = -\frac{1}{2} \{ \psi(2a-vt-x, 0) + \psi(vt-x, 0) \} \\ (x+a) \leq vt \leq (2a-x) & \quad \psi(x, vt) = -\frac{1}{2} \{ \psi(2a-x-vt, 0) - \psi(2a+x-vt, 0) \} \\ (2a-x) \leq vt \leq 2a & \quad \psi(x, vt) = \frac{1}{2} \{ \psi(x+vt-2a, 0) + \psi(x-vt+2a, 0) \} \end{aligned}$$

←

→

On voit que dans tous les cas la solution est obtenue par la superposition de deux ondes se propageant en sens inverse et qui se déduisent de $\psi(x, 0)$

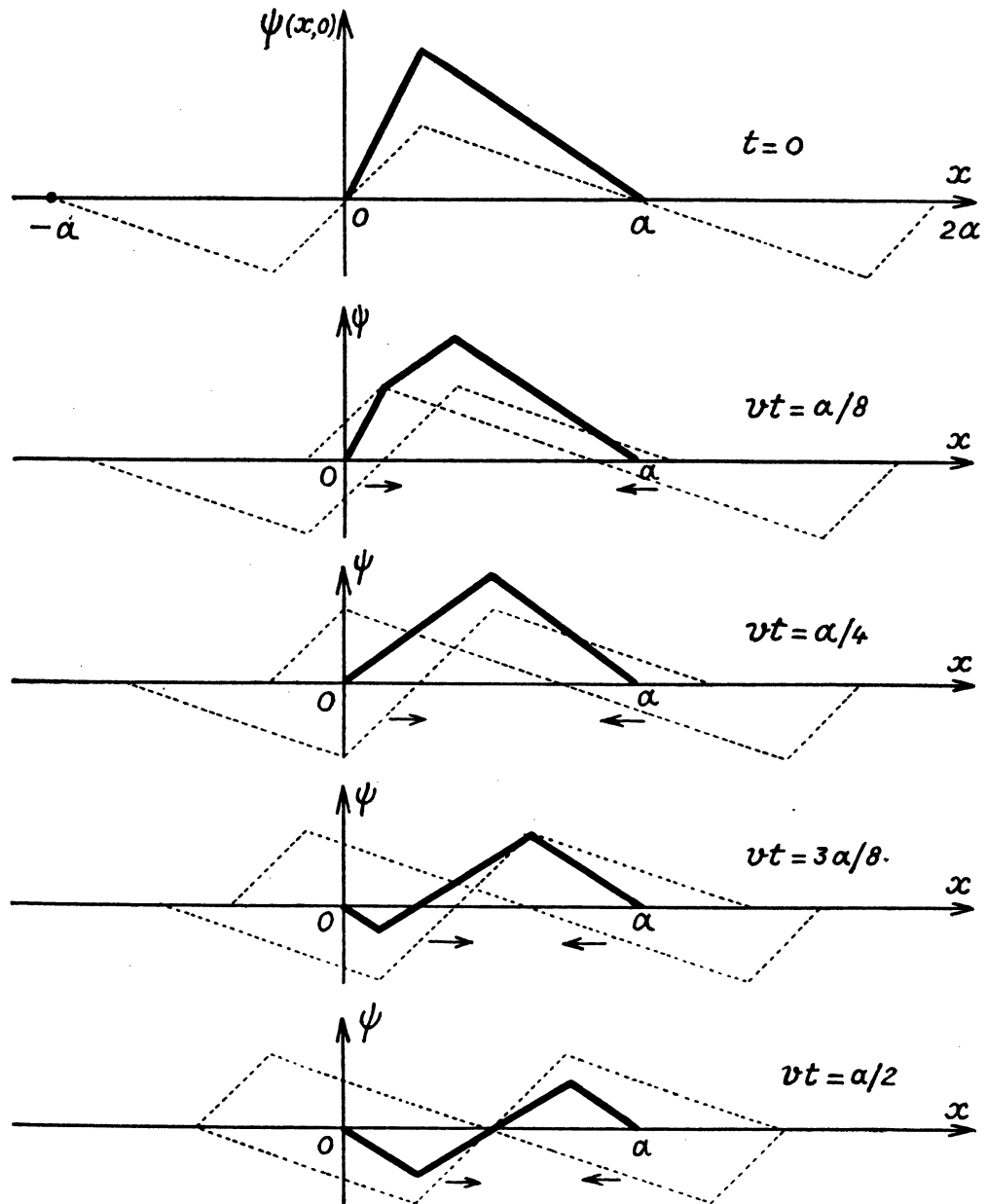


FIG. 23.

par des décalages plus un changement de signe. Au temps $t = 0$ ces deux ondes ont chacune la valeur $\frac{1}{2} \psi(x, 0)$ pour $0 < x < a$. Elles se prolongent

par symétrie par rapport aux extrémités de l'intervalle jusqu'à $x = 2a$ pour l'onde allant vers la gauche et jusqu'à $x = -a$ pour l'onde se propageant vers la droite. La figure (23) montre ces ondes quand au temps $t = 0$ la fonction donnée est formée de deux segments rectilignes dissymétriques. Comme le mouvement est périodique on peut dire que dans les instants ultérieurs le mouvement continue à être donné par la superposition de deux ondes périodiques de période $2a/v$ se propageant en sens inverse. Le mouvement observé entre 0 et a se présente donc comme une portion d'onde stationnaire indéfinie.

13. Solution des équations de l'électromagnétisme quand les données ne dépendent que du temps t et d'une seule variable d'espace x .

1. *Les équations de Maxwell.* — Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles qui se ramène à l'équation des ondes planes. Ce sont les identités 7, 16, 18, 20 où $k_0 = 0$ qui sont intéressantes parce que l'opérateur différentiel se trouve en avant des signes d'intégration; on peut alors le décomposer en un produit de deux opérateurs du premier ordre, ce qui conduit directement aux opérateurs concernant les équations du champ ou aux relations entre champs et potentiels.

Nous ne considérerons que le cas où ϵ, μ sont des constantes, donc aussi $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}, Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$; les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} + Z v^{-1} \partial_t \vec{H} = 0 & \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} - Z^{-1} v^{-1} \partial_t \vec{E} = \vec{i} & \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon \end{array} \right.$$

Quand les données $\vec{i}, \rho$ ne dépendent que de x et t on a des solutions $\vec{E}, \vec{H}$ qui ne dépendent aussi que de ces variables; on a alors entre opérateurs les équivalences

$$(82) \quad \vec{\text{grad}} = \partial_x \vec{n} \quad \vec{\text{rot}} = \partial_x [\vec{n} \times \quad] \quad \text{div} = \partial_x (\vec{n} \cdot \quad)$$

ou $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la direction de l'axe des x ($n_x = 1; n_y = n_z = 0$).

Les équations reliant les champs aux potentiels et aux antipotentels s'écrivent

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\epsilon^{-1} \text{rot } \vec{A}' - \text{grad } V - \partial_t \vec{A} \\ \vec{H} = \mu^{-1} \text{rot } \vec{A} - \text{grad } V' - \partial_t \vec{A}' \end{array} \right.$$

Si la résolution des équations de Maxwell se rattache à l'équation des ondes planes c'est que les potentiels et antipotentels définis par (83) obéissent aux équations

$$\begin{array}{ll} [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2] V = \rho/\epsilon & [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2] V' = 0 \\ [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2] \vec{A} = \mu \vec{i} & [v^{-2} \partial_t^2 - \partial_x^2] \vec{A}' = 0 \end{array}$$

2. *Solution des équations de Maxwell quand on connaît les champs sur le plan $\xi = 0$ et les charges-courants pour $\xi > 0$.*

Nous partirons de l'identité (19) où $k_0 = 0$, appliquée au domaine (S) de la figure (17) et aux trois composantes d'un vecteur quelconque $\vec{\mathcal{A}}(x, t)$, soit

$$(84) \quad \vec{\mathcal{A}}(x, vt) = [\nu^{-2} \partial_t^2, \dots, \partial_x^2] \left\{ \frac{\nu}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-\frac{x-\xi}{\nu}}^{t+\frac{x-\xi}{\nu}} \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) d\tau \right\} \\ = [\nu^{-2} \partial_t^2, \dots, \partial_x^2] \left\{ -\frac{\nu}{2} \int_S \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) dS \right\}$$

Les dérivations des intégrales par rapport à t ou à x donnent

$$(85) \quad \partial_t \int_S \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) dS = \int_S \partial_\tau \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) dS = \int_S \left\{ \partial_t \vec{\mathcal{A}}(x, vt) \right\}_{(\xi, \tau)} dS$$

$$(86) \quad \partial_x \int_S \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) dS = \int_0^x d\xi \cdot \partial_x \int_{t-\frac{x-\xi}{\nu}}^{t+\frac{x-\xi}{\nu}} \vec{\mathcal{A}}(\xi, v\tau) d\tau \\ = \int_0^x d\xi (-\partial_\xi) \int_{t-\frac{x-\xi}{\nu}}^{t+\frac{x-\xi}{\nu}} \vec{\mathcal{A}} d\tau + \int_0^x d\xi \int_{t-\frac{x-\xi}{\nu}}^{t+\frac{x-\xi}{\nu}} [\partial_x \vec{\mathcal{A}}]_{(\xi, \tau)} d\tau \\ = \int_S \left\{ \partial_x \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \int_{t-\frac{x}{\nu}}^{t+\frac{x}{\nu}} \vec{\mathcal{A}}(0, v\tau) d\tau$$

En multipliant (86) scalairement ou vectoriellement par $\vec{n}$ on en déduit d'après (82) que l'on a

$$(87) \quad \vec{\text{rot}} \int_S \vec{\mathcal{A}} dS = \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \int_{t-\frac{x}{\nu}}^{t+\frac{x}{\nu}} [\vec{n} \times \vec{\mathcal{A}}]_{(0, \tau)} d\tau$$

$$(88) \quad \text{div.} \int_S \vec{\mathcal{A}} dS = \int_S \left\{ \text{div.} \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \int_{t-\frac{x}{\nu}}^{t+\frac{x}{\nu}} (\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{A}})_{(0, \tau)} d\tau$$

En tenant compte de $\vec{\partial}_x \vec{\partial}_x = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} - \vec{\text{grad}} \text{div}$ et de (85) (87) (88), l'identité (84) devient

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{A}}(x, vt) = & \vec{\text{rot}} \left\{ -\frac{v}{2} \int \int_S \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}} dS - \frac{v}{2} \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{\mathcal{A}}]_{(0,\tau)} d\tau \right. \\
 (89) \quad & - \vec{\text{grad}} \left\{ -\frac{v}{2} \int \int_S \text{div} \vec{\mathcal{A}} dS - \frac{v}{2} \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} (\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{A}})_{(0,\tau)} d\tau \right. \\
 & \left. \left. + v^{-1} \partial_t \left\{ -\frac{v}{2} \int \int_S \left\{ v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi,\tau)} dS \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

D'autre part en écrivant (86) pour un autre vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ et en lui appliquant l'opérateur $v^{-1} \partial_t$, on obtient

$$\begin{aligned}
 (90) \quad 0 = & - \vec{\text{rot}} \int \int_S \left\{ v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{B}} \right\}_{(\xi,\tau)} dS + v^{-1} \partial_t \int \int_S \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{B}} dS \\
 & + v^{-1} \partial_t \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{\mathcal{B}}]_{(0,\tau)} d\tau
 \end{aligned}$$

En additionnant (89) et (90) multipliée par $v/2$, il vient

$$\begin{aligned}
 (91) \quad \vec{\mathcal{A}}(x, vt) = & \vec{\text{rot}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}} + v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{B}} \right\} dS + \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{\mathcal{A}}]_{(0,\tau)} d\tau \right\} \\
 & + \vec{\text{grad}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \text{div} \vec{\mathcal{A}} dS + \frac{v}{2} \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} (\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{A}})_{(0,\tau)} d\tau \right\} \\
 & + v^{-1} \partial_t \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{B}} - v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{A}} \right\} dS + \frac{v}{2} \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{\mathcal{B}}]_{(0,\tau)} d\tau \right\}
 \end{aligned}$$

Pour appliquer cette identité aux équations de Maxwell, on remplace d'abord $\vec{\mathcal{A}}$ par $\vec{E}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ par $\vec{Z} \vec{H}$; puis $\vec{\mathcal{A}}$ par $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ par $-\vec{Z}^{-1} \vec{E}$; on obtient

alors deux expressions identiques à (83), à condition de poser

$$\begin{aligned}
 V &= -\frac{v}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int \int_S \rho \, dS + \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \, d\tau \right\} \\
 \vec{A} &= -\frac{v}{2} \left\{ \mu \int \int_S \vec{i} \, dS + \mu \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{H}]_{(0, \tau)} \, d\tau \right\} \\
 (92) \quad V' &= -\frac{v}{2} \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} (\vec{n} \cdot \vec{H})_{(0, \tau)} \, d\tau \\
 \vec{A}' &= \frac{v}{2} \varepsilon \int_{t-\frac{x}{v}}^{t+\frac{x}{v}} [\vec{n} \times \vec{E}]_{(0, \tau)} \, d\tau
 \end{aligned}$$

Les équations (83) et (92) donnent la solution de notre problème.

En fait, ce problème n'est pas posé d'une manière intéressante car les données ne sont pas indépendantes. En effet les champs sur la limite $\xi = 0$ dépendent des sources situées dans la région $\xi > 0$. Cette difficulté ne se présente pas quand i et ρ sont partout nuls pour $\xi > 0$ car alors les champs $\xi = 0$ sont équivalents aux sources situées à gauche de ce plan. Dans ce cas, en effectuant les dérivations de (83) sur les expressions (92), on obtient

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(x, vt) &= \frac{1}{2} \{ \vec{E}(0, vt + x) + \vec{E}(0, vt - x) \} \\
 &\quad + \frac{Z}{2} \vec{n} \times \{ \vec{H}(0, vt + x) - \vec{H}(0, vt - x) \} \\
 (93) \quad \vec{H}(x, vt) &= \frac{1}{2} \{ \vec{H}(0, vt + x) + \vec{H}(0, vt - x) \} \\
 &\quad - \frac{Z^{-1}}{2} \vec{n} \times \{ \vec{E}(0, vt + x) - \vec{E}(0, vt - x) \}
 \end{aligned}$$

3. Solutions des équations de Maxwell pour des conditions initiales déterminées.

On part de l'identité (7) où $k_0 = 0$ et on l'applique à chacune des composantes d'un vecteur $\vec{A}$ soit

$$\begin{aligned}
 (94) \quad \vec{A}(x, vt) &= [v^{-2} \partial_t^2, -\partial_x^2] \left\{ \frac{v}{2} \int_0^t d\tau \int_{-v(t-\tau)}^{v(t-\tau)} \vec{A}_0(x+z, v\tau) \, dz \right\} \\
 &= [v^{-2} \partial_t^2, -\partial_x^2] \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \vec{A}_0(\xi, v\tau) \, dS \right\}
 \end{aligned}$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire triangulaire de la figure (13).

Comme on a entre opérateurs $\vec{\partial}_x \vec{\partial}_x = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} - \vec{\text{grad}} \text{div}$ on peut écrire (94) sous la forme

$$(95) \quad \vec{\mathcal{A}}(x, vt) = \vec{\text{rot}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS - \vec{\text{grad}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \text{div.} \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS \right. \right. \\ \left. \left. + v^{-1} \partial_t \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \frac{1}{2} \int_{-vt}^{vt} \vec{\mathcal{A}}(x + \alpha, 0) d\alpha \right\} \right. \right\}$$

En appliquant l'opérateur $v^{-1} \partial_t \vec{\text{rot}}$ à {...} et en remplaçant le vecteur $\vec{\mathcal{A}}$ par un autre vecteur $\vec{\mathcal{B}}$, on obtient l'identité

$$(96) \quad \vec{\text{rot}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{B}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \frac{1}{2} \int_{-vt}^{vt} \vec{\mathcal{B}}(x + \alpha, 0) d\alpha \right\} \\ + v^{-1} \partial_t \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{B}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS \right\} = 0$$

En additionnant (95) et (96) on aboutit à l'identité cherchée

$$(97) \quad \vec{\mathcal{A}}(x, vt) = \vec{\text{rot}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{A}} + v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS + \frac{1}{2} \int_{-vt}^{vt} \vec{\mathcal{B}}(x + \alpha, 0) d\alpha \right\} \\ - \vec{\text{grad}} \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ \text{div} \vec{\mathcal{A}} \right\}_{(\xi, \tau)} dS \right\} \\ + v^{-1} \partial_t \left\{ \frac{v}{2} \int \int_S \left\{ v^{-1} \partial_t \vec{\mathcal{A}} - \vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{B}} \right\} + \frac{1}{2} \int_{-vt}^{vt} \vec{\mathcal{A}}(x + \alpha, 0) d\alpha \right\}$$

En remplaçant les vecteurs $\vec{\mathcal{A}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ par les champs et en tenant compte des équations de Maxwell, on obtient les équations (83), à condition de poser

$$(98) \quad V = -\frac{v}{2\epsilon} \int \int_S \rho dS \quad V' = 0 \\ \vec{A} = -\frac{v}{2} \int \int_S \vec{i} dS + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} \vec{E}(x + \alpha, 0) d\alpha \\ \vec{A}' = -\frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} \vec{H}(x + \alpha, 0) d\alpha$$

Quand $\rho = \vec{i} = 0$, (83) et (98) donnent

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{E}(x + vt, 0) + \vec{E}(x - vt, 0) \right\} \\
 &\quad - \frac{Z}{2} \left\{ \vec{n} \times [\vec{H}(x + vt, 0) - \vec{H}(x - vt, 0)] \right\} \\
 \vec{H} &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{H}(x + vt, 0) + \vec{H}(x - vt, 0) \right\} \\
 &\quad - \frac{Z^{-1}}{2} \left\{ \vec{n} \times [\vec{E}(x + vt, 0) - \vec{E}(x - vt, 0)] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{99}$$

On trouvera un exemple d'application de l'identité (7) avec k_0 différent de zéro dans un article de l'auteur concernant les solutions des équations de l'électron de Dirac pour des conditions initiales déterminées (*Journal de Physique*, 1954).
