P. VINCENSINI

# Sur la déformation de certaines congruences rectilignes

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série*, tome 24 (1932), p. 49-66
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1932_3_24__49_0>

# Sur la déformation de certaines congruences rectilignes.

Par M. P. VINCENSINI.

Le présent article a pour objet, l'étude de certaines congruences rectilignes (C), dont les rayons (D) sont situés dans les plans tangents aux différents points M d'une surface (S), ne cessant d'admettre une propriété déterminée, lorsque (S) se déforme arbitrairement en entraînant ses plans tangents, les rayons (D) de (C) étant supposés invariablement liés à ces plans tangents.

## I. — Formules fondamentales.

Supposons que le rayon (D) de (C), situé dans le plan tangent en $M(x, y, z)$ à (S), soit parallèle à la tangente à la courbe $u=$ const., le système $(u, v)$ de (S) étant orthogonal.

Désignons par $X_i, Y_i, Z_i$ $(i=1, 2, 3)$, les cosinus directeurs des tangentes aux courbes $v=$ const., $u=$ const., et de la normale en M à (S).

Soit I le point où D coupe la tangente à la courbe $v=$ const.. Posons $\overline{MI}=a$.

$\xi, \eta, \zeta$ étant les coordonnées de I par rapport aux axes fixes, on a :

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x + aX_1, \\ \eta &= y + aY_1, \\ \zeta &= z + aZ_1. \end{aligned}\right.$$

Les cosinus directeurs de D sont $X_2, Y_2, Z_2$.

Le calcul des deux formes de Kummer de la congruence (C), ne présente aucune difficulté. Si l'on désigne par E, F, G; D, D′, D″, les coefficients des deux formes fondamentales de (S)

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ -S\,dX_3\,dx &= D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2, \end{aligned}\right.$$

et si l'on utilise les formules connues de la théorie des surfaces, on trouve pour les coefficients de la première forme de Kummer

$$S\,dX_2\,d\xi = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 :$$

$$e = S\frac{\partial X_2}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{E}+\frac{\partial a}{\partial u}\right) + a\frac{DD'}{\sqrt{EG}},$$

$$g = S\frac{\partial X_2}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{D'D''}{\sqrt{EG}},$$

$$f = S\frac{\partial X_2}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{G}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial v} + a\frac{D'^2}{\sqrt{EG}},$$

$$f' = S\frac{\partial X_2}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{E}+\frac{\partial a}{\partial u}\right) + a\frac{DD''}{\sqrt{EG}}.$$

De même, les coefficients de la représentation sphérique de la congruence

$$d\sigma^2 = S\left(\frac{\partial X_2}{\partial u}du + \frac{\partial X_2}{\partial v}dv\right)^2 = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2,$$

ont pour expressions :

$$E_1 = \frac{1}{G}\left[\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 + D'^2\right], \qquad F_1 = \frac{D'D''}{G} - \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$G_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \frac{D''^2}{G}.$$

L'équation aux abscisses des foyers situés sur D, comptées à partir du point I est :

$$(1) \qquad (E_1G_1 - F_1^2)\rho^2 + [E_1 g + G_1 e - F_1(f+f')]\,\rho + eg - ff' = 0;$$

et celle des développables :

$$(2) \quad (E_1 f' - F_1 e)\,du^2 + [E_1 g - G_1 e + F_1(f'-f)]\,du\,dv + (F_1 g - G_1 f)\,dv^2 = 0.$$

Explicitons les coefficients de l'équation (1). Après quelques simplifications et groupements, il se trouve que chacun de ces coefficients peut se mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs *linéaires* en D, D′, D″, l'un des facteurs étant d'ailleurs le même pour les trois.

On obtient :

$$E_1G_1 - F_1^2 = \frac{1}{4G^2E}\left[\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D'\right]^2,$$

$$E_1 g + G_1 e - F_1(f+f') = \frac{1}{2EG}\left[\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D'\right]$$

$$\times\left[\frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v}\right)D' + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)D''\right],$$

$$eg - ff' = \frac{a}{2EG}\left[\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D'\right]\left[\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)D' - \frac{\partial a}{\partial v}D\right].$$

Notons que le facteur commun aux trois coefficients :

$$\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D',$$

ne peut être identiquement nul, pour une déformation arbitraire de (S), que dans le cas particulier des surfaces développables, qui sera exclu de notre étude.

La somme et le produit des racines de l'équation (1), ont pour expressions :

$$(3)\quad \rho_1 + \rho_2 = -\frac{2G\left[\frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v}\right)D' + \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)D''\right]}{\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D'},$$

$$(4)\quad \rho_1\rho_2 = \frac{2aG\left[\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)D' - \frac{\partial a}{\partial v}D\right]}{\frac{\partial E}{\partial v}D'' + \frac{\partial G}{\partial u}D'}.$$

## II. — Congruences arbitrairement déformables avec conservation du produit $\rho_1\rho_2$.

Ayant égard à la formule (4), cherchons les congruences (C) jouissant de la propriété suivante :

I étant la projection orthogonale du point de contact M sur D, F et F' les foyers portés par D, les différents produits $\overline{IF} \times \overline{IF'}$ *restent invariables lorsqu'on déforme* (S) *arbitrairement.*

L'équation du problème est :

$$\frac{2aG\left[\left(\sqrt{E}+\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'-\frac{\partial a}{\partial v}D\right]}{\frac{\partial E}{\partial v}D''+\frac{\partial G}{\partial u}D'}=f(u,v),$$

$f(u, v)$ étant une fonction arbitraire de $u$ et $v$.

Pour que l'équation ci-dessus reste vérifiée dans toute déformation de (S), il faut et il suffit que :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial E}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial a}{\partial v}=0,\\ &\frac{\partial \log G}{\partial u}=\frac{2a}{f(u,v)}\left(E+\frac{\partial a}{\partial u}\right), \end{aligned}\right.$$

comme on le voit en annulant les coefficients de D, D', D'', dans l'équation ci-dessus, rendue entière.

Les deux premières équations (5), expriment que les rayons de (C) sont perpendiculaires aux tangentes à une famille quelconque de géodésiques, et que leur position ne dépend, que de la *distance géodésique* du point **M**, à une trajectoire orthogonale quelconque de la famille de géodésiques envisagée.

La dernière équation (5) fait connaître le produit $\rho_1\rho_2=f(uv)$, constant sur chaque rayon, dès que la surface (S), et la congruence (C) associée, sont choisies.

Ainsi :

*Étant donnée une surface quelconque* (S) *et une famille de géodésiques également quelconque; si dans chaque plan tangent en* **M** *à* (S), *on mène une perpendiculaire à la tangente à la géodésique* G *issue de* M, *la distance* MI *de* M *à cette perpendiculaire étant une fonction* quelconque *de la distance géodésique de* M *à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques* (G), *on obtient la congruence rectiligne la plus générale jouissant de la propriété requise.*

Introduisons maintenant la condition supplémentaire suivante :

$\overline{IF}\times\overline{IF'}$ *ne dépend que de* $\overline{MI}$.

$f(u, v)$ est alors une fonction de $a$ $[a=\varphi(u)]$.

La dernière équation (5) s'écrit, après avoir posé comme il est légitime $E=1$ :

$$(5')\qquad \frac{\partial \log G}{\partial u}=\frac{2a}{f(a)}\left(1+\frac{\partial a}{\partial u}\right).$$

On en déduit immédiatement, le second membre étant uniquement fonction de $u$ :

$$G = UV,$$

U et V étant respectivement fonctions de $u$ et de $v$.

En changeant le paramètre $v$, on peut prendre $V = 1$. L'élément linéaire de (S) a donc la forme :

$$ds^2 = du^2 + G(u)\,dv^2.$$

*Les seules surfaces auxquelles on peut attacher des congruences arbitrairement déformables, jouissant de la propriété imposée, sont donc les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

Pour que l'on puisse attacher à (S) des congruences (C) pour lesquelles $\overline{MI}$ et $\overline{IF} \times \overline{IF'}$ soient constants, et aient, respectivement, la même valeur pour chaque rayon, il faut et il suffit que G satisfasse à l'équation :

$$\frac{\partial \log G}{\partial u} = K(\text{const.}).$$

On obtient ainsi les surfaces *pseudo-sphériques*.

Envisageons les congruences (C), pour lesquelles subsiste, au cours d'une déformation arbitraire de (S), la relation générale

$$\overline{IF} \times \overline{IF'} = f(\overline{MI}) \qquad [f = \text{fonction arbitraire}].$$

Comme on vient de le voir, (S) est nécessairement applicable sur une surface de révolution, la fonction $a(u)$ définissant les congruences répondant à une forme déterminée de $f$ étant solution de (5′) où G est supposé connu.

Nous allons montrer que toutes les congruences (C) ci-dessus, relatives à une même surface (S) applicable sur une surface de révolution, jouissent de la propriété suivante :

*Pour une même congruence* (C), *les différents couples de foyers associés, sont situés sur deux tangentes conjuguées de* (S).

Considérons les directions MF, MF′, allant de M aux deux foyers F, F′, situés sur le rayon D de (C).

$du$ et $dv$ étant les accroissements des variables fixant ces deux directions, on a pour la première :

$$\frac{\sqrt{G}\,dv}{du} = \frac{\overline{IF}}{a} = \frac{\rho_1}{a}, \qquad \left(a = \overline{MI}\right),$$

et pour la deuxième :

$$\frac{\sqrt{G}\,dv}{du} = \frac{\rho_2}{a}.$$

L'équation du faisceau (MF, MF') est :

$$\rho_1\rho_2 du^2 - a\sqrt{G}(\rho_1+\rho_2)\,du\,dv + a^2 G\,dv^2 = 0.$$

Les directions MF, MF', seront conjuguées sur (S) si :

$$\rho_1\rho_2 D'' + a\sqrt{G}(\rho_1+\rho_2)\,D' + a^2 G D = 0.$$

C'est ce que l'on vérifie immédiatement en tenant compte des expressions de $\rho_1\rho_2$, $\rho_1+\rho_2$, du numéro I, appliquées au cas actuel.

Ainsi :

*Les surfaces* (S) *auxquelles on peut associer des congruences* (C) *formées de droites situées dans leurs plans tangents, telles que si* I *est le pied de la perpendiculaire abaissée de chaque point de contact sur le rayon* D *correspondant, le produit* $\overline{IF} \times \overline{IF'}$ *soit une fonction déterminée de* $\overline{MI}$, *et reste la même fonction* $f(\overline{MI})$ *au cours d'une déformation arbitraire de* (S), *sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

*Les rayons d'une même famille de congruences* (C), *sont perpendiculaires aux tangentes aux transformées des méridiens, et définis dans chaque plan tangent par l'équation* (5').

*En outre, pour toute congruence* (C), *deux foyers associés quelconques sont sur deux tangentes conjuguées de* (S).

Comme congruences (C) particulières attachées à une surface applicable sur une surface de révolution (S), nous citerons les congruences des axes des systèmes cycliques arbitrairement déformables avec (S), que nous avons déterminés dans un Mémoire antérieur [1].

La fonction $a$ définissant l'une de ces congruences est [Mémoire cité] :

$$a = \sqrt{\frac{1+\lambda G}{G}}\left[\mu - \int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{G}{1+\lambda G}}\,du\right], \qquad \lambda \text{ et } \mu = \text{const.}$$

Pour $\lambda$ donné, on a $\infty^1$ congruences dans lesquelles les développables se correspondent et correspondent à un réseau conjugué tracé sur (S).

---

[1] *Sur la déformation des systèmes cycliques*, Annales de l'École Normale Supérieure, 1930.

Les développables de la congruence des axes d'un système cyclique, correspondent comme on sait aux lignes de courbure des trajectoires orthogonales des cercles. Les surfaces orthogonales aux cercles des $\infty^2$ systèmes cycliques correspondant aux variations de $\lambda$ et de $\mu$, sont donc telles que leurs lignes de courbure correspondent à un réseau conjugué de (S).

Si $\lambda = 0$, on a les congruences des axes des systèmes cycliques normaux à (S) et arbitrairement déformables avec (S).

Pour ces congruences les différents segments focaux sont vus du point de contact sous un angle droit.

Envisageons la congruence *la plus générale*, formée de droites situées dans les plans tangents à une surface (S), et telle que les différents segments focaux ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de (S), d'être vus des points de contact correspondants sous des angles droits.

I étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact M, sur le rayon correspondant FF', on a :

$$\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}} = \overline{\mathrm{MI}}^2.$$

$\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}}$ *ne dépendant que de* $\overline{\mathrm{MI}}$, il résulte de ce qui précède que (S) est nécessairement applicable sur une surface de révolution, et l'on voit immédiatement que :

*Les seules congruences formées de droites situées dans les plans tangents à une surface* (S), *telles que les différents segments focaux, soient vus des points de contact correspondants, sous des angles restant droits au cours d'une déformation arbitraire de* (S), *sont les congruences des axes des systèmes cycliques normaux aux déformées des surfaces de révolution, et arbitrairement déformables avec ces surfaces.*

## III. — Congruences arbitrairement déformables avec conservation de la somme $\rho_1 + \rho_2$. — Cas particulier $\rho_1 + \rho_2 = 0$.

Écrivons que $\rho_1 + \rho_2$ est une fonction déterminée des deux paramètres $u$ et $v$, qui fixent le point de contact sur (S).

Nous obtenons, eu égard à la relation (3) du n° I :

$$2\mathrm{G}\left[\frac{a}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{du}\mathrm{D} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\left(a\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} - \sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{D}' + \frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\sqrt{\mathrm{G}}}\left(\sqrt{\mathrm{E}} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)\mathrm{D}''\right]$$
$$+ f(u, v)\left[\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mathrm{D}'' + \frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\mathrm{D}'\right] = 0.$$

Pour que $\rho_1 + \rho_2$ reste la même fonction $f(u, v)$ au cours d'une déformation arbitraire de (S), il faut et il suffit que la congruence soit telle que les coefficients de D, D', D'', dans l'équation ci-dessus, soient identiquement nuls.

D'où le système :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \\ a\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \sqrt{E}\dfrac{\partial a}{\partial v} = 0, \\ 2\sqrt{EG}\left(\sqrt{E} + \dfrac{\partial a}{\partial u}\right) + f(u, v)\dfrac{\partial E}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

La première équation (6) donne $G = f(v)$ [on peut prendre $G = 1$], et exprime le résultat suivant :

A. — *Les rayons d'une congruence* (C) *répondant à la question sont parallèles aux tangentes à une famille de géodésiques de* (S).

La détermination complète des congruences (C), exige l'étude du système des deux dernières équations (6).

Nous nous limiterons au cas particulier où $\rho_1 + \rho_2 = f(u, v) = 0$; mais, avant d'aller plus loin, nous ferons une application immédiate de la proposition (A), à la détermination de *toutes* les congruences (C) telles qu'au cours d'une déformation *arbitraire* de l'une (S) de leurs nappes focales [les rayons sont entraînés dans la déformation], les différents segments focaux restent inchangés.

Prenons sur (S), pour lignes $u =$ const. les courbes tangentes aux rayons de la congruence, et pour $v =$ const. leurs trajectoires orthogonales.

La somme des distances des foyers portés par le rayon $(u, v)$, à la tangente à la courbe $v =$ const., se réduit ici au segment focal. Cette somme restant invariable quand (S) se déforme, le théorème (A) prouve que les courbes $u =$ const. sont des géodésiques de (S), et que (C) est une congruence de normales.

*Les seules solutions du problème sont donc les congruences de normales.*

En particulier, les *seules* congruences dont les segments focaux conservent une longueur constante $a$, au cours d'une déformation arbitraire de l'une de leurs nappes focales, sont les congruences (pseudo-sphériques), admettant pour nappes focales des surfaces pseudo-sphériques de courbure $-\dfrac{1}{a^2}$.

*Recherche des congruences* (C) *pour lesquelles* $\rho_1 + \rho_2 = 0$. — Il revient au même de dire que les foyers, situés sur chaque rayon, sont équidistants du point de contact correspondant, et le restent au cours d'une déformation arbitraire de (S).

(S) étant rapportée, comme il a été expliqué plus haut, au système formé par une famille de géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, il faut et il suffit, pour que les congruences (C) existent, que l'on puisse déterminer $a$ satisfaisant aux deux dernières équations (6) où l'on remplace G par 1 et $f(u, v)$ par zéro :

$$(6') \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} - \sqrt{\mathrm{E}}\dfrac{\partial a}{\partial v} = 0, \\ \sqrt{\mathrm{E}} + \dfrac{\partial a}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité est :

$$a\frac{\partial^2 \log\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

$a = 0$ ne pouvant vérifier le système, on a nécessairement :

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

d'où l'on déduit [en changeant le paramètre $u$], $\mathrm{E} = \mathrm{V}$, V étant fonction de $v$ seul.

*Les seules surfaces susceptibles de fournir des solutions du problème, sont encore les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

D'ailleurs, à toute surface de cette espèce, on peut attacher $\infty^1$ congruences du type qui nous intéresse, obtenues par l'intégration du système (6') où E est une fonction donnée de $v$. On trouve :

$$(7) \qquad a = \sqrt{\mathrm{E}}\,(c - u) \qquad [c = \text{constante arbitraire}].$$

(7) conduit à la définition suivante, des congruences (C) attachées à une surface quelconque (S) applicable sur une surface de révolution.

*Soit, sur* (S), *une transformée de méridien fixe* $(\mathcal{M}_0)$. M *étant un point quelconque de* (S), *pour avoir le point* I, *où le rayon* D *d'une congruence* (C), *coupe la tangente* MT *à la transformée de parallèle* ($\pi$) *passant par* M, *il suffit de prendre le point où la développante de* ($\pi$), *ayant son point de rebroussement sur* $(\mathcal{M}_0)$, *coupe* MT.

La surface moyenne de (C) est engendrée, comme on le voit, par l'ensemble des développantes des transformées de parallèles de (S) ayant leur point de rebroussement sur une même transformée de méridien $(\mathcal{M}_0)$.

En faisant varier $(\mathcal{M}_0)$, on obtient les $\infty^1$ congruences (C) précédemment déterminées.

Notons cette propriété, sur laquelle nous reviendrons plus loin :

Pour chaque configuration de (S), les $\infty^1$ congruences ci-dessus, ont même enveloppée moyenne. Cette enveloppée moyenne est la nappe de développée de (S) lieu des centres de courbure des transformées des méridiens.

*Développables des congruences* (C). — Cherchons les développables des congruences (C) définies par (7).

Leur équation est l'équation (2) du n° I. En tenant compte des expressions de $e, g, \ldots F_1, G_1$, on trouve :

$$\mathrm{D}\,du^2 - \mathrm{D}''\,dv^2 = 0. \tag{8}$$

La constante $c$ n'intervient pas dans (8). Il en résulte que, sur les $\infty^1$ congruences correspondant à une même configuration de (S), *les développables se correspondent, et correspondent* (G. Darboux) *à un réseau conjugué tracé sur* (S).

*Cas où* (S) *a la forme révolutive.* — Il convient dans ce cas d'ajouter la propriété suivante :

*Les plans focaux issus d'un même rayon d'une congruence* (C) *attachée à* (S), *sont symétriques par rapport au plan tangent correspondant.*

Il suffit, pour établir la propriété, de montrer que les tangentes aux images sphériques des développables, font le même angle avec la direction $(X_1, Y_1, Z_1)$.

Les paramètres directeurs des tangentes aux images des développables au point $(u, v)$, sont les valeurs prises par $dX_2$, $dY_2$, $dZ_2$, lorsqu'on remplace successivement $du$ et $dv$ par des quantités proportionnelles à $\sqrt{\mathrm{D}''}$, $\sqrt{\mathrm{D}}$, et à $\sqrt{\mathrm{D}''}$, $-\sqrt{\mathrm{D}}$; conformément à l'équation (8).

On trouve pour les paramètres directeurs de la tangente à l'une des images sphériques :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{D}''\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_1 + \mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{D}}\,X_3, \\ \beta &= \mathrm{D}''\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}Y_1 + \mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{D}}\,Y_3, \\ \gamma &= \mathrm{D}''\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}Z_1 + \mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{D}}\,Z_3; \end{aligned}\right.$$

et pour ceux de la tangente à l'autre image :

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' = \mathrm{D}''\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}X_1 - \mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{D}}\,X_3; \\ &\beta' = \ldots, \qquad\qquad \gamma' = \ldots. \end{aligned}\right.$$

Il est clair que les directions trouvées sont symétriques par rapport à la direction $X_1$, $Y_1$, $Z_1$.

Il est à noter, qu'il résulte de l'équation (8), que les développables des congruences (C) attachées à une surface de révolution déterminée (S), ne sont réelles que si la courbure de (S) est positive.

## IV. — Sur une propriété caractéristique des surfaces applicables sur les développées de surfaces minima.

Cherchons les congruences (C) étudiées au n° précédent, qui jouissent de la propriété supplémentaire de rester normales au cours d'une déformation arbitraire de (S).

Il faut et il suffit pour cela, que $f = f'$.

Eu égard aux expressions de $f$ et $f'$, données au n° I, et compte tenu de l'expression (7) de $a$, on obtient l'équation :

$$D D'' - D'^2 - \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

qui, au moyen de l'expression de la courbure totale de (S)

$$\frac{D D'' - D'^2}{E} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2},$$

s'écrit :

$$\sqrt{E} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

L'intégration est immédiate, et donne :

$$E = cv + d \qquad [c \text{ et } d = \text{const.}].$$

En changeant les paramètres, on peut prendre $d = 0$, $c = 1$.

L'élément linéaire des surfaces (S), auxquelles on peut associer des congruences (C) normales arbitrairement déformables avec (S), est donc :

$$ds^2 = v\,du^2 + dv^2,$$

définissant, comme on sait, *les surfaces applicables sur les développées des surfaces minima.*

On peut donc énoncer cette propriété *caractéristique*, de ces surfaces.

*Les seules surfaces* (S), *auxquelles on peut associer des congruences formées de droites situées dans leurs plans tangents, ne cessant au cours d'une déformation arbitraire de* (S), *de rester normales et d'avoir leurs couples de foyers associés équidistants du point de contact correspondant, sont les surfaces applicables sur les développées de surface minima.*

A chacune de ces surfaces, on peut attacher $\infty^1$ congruences (C) du type en question, définies par la construction indiquée au n° précédent.

Les surfaces orthogonales aux rayons des $\infty^1$ congruences (C) attachées à une même déformée (S) de développée de surface minima, ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure.

On sait l'intérêt que présente cette propriété, eu égard au problème de la recherche des couples de surfaces applicables [1].

Ici l'intérêt est accru du fait que l'on sait déformer *complètement* (S).

## V. — Congruences normales à plans focaux équidistants d'un point fixe.

Nous avons observé au n° III, que les congruences (C) attachées à une même déformée de surface de révolution (S), admettent la même enveloppée moyenne.

Envisageons deux congruences distinctes (C) et (C') attachées à (S).

Soient D et D' deux rayons homologues, M le point où le plan [DD'] touche (S), I et I' les projections de M sur D et D'.

Si par le point fixe O, on mène le vecteur (OK) équipollent à (II'), et par K la parallèle $\Delta$ à D et D', $\Delta$ engendre une certaine congruence ($\Gamma$).

Nous avons montré dans un autre travail [2], que ($\Gamma$), que nous avons appelée *différence géométrique* de (C) et (C'), admet pour enveloppée moyenne le point O.

Les notations étant celles du n° III, on a :

$$\overline{\mathrm{OK}} = \overline{\mathrm{MI'}} - \overline{\mathrm{MI}} = \sqrt{\mathrm{E}}\,(c' - u) - \sqrt{\mathrm{E}}\,(c - u) = m\sqrt{\mathrm{E}} \qquad [m = \text{const.}],$$

et le rayon $\Delta$ de ($\Gamma$) issu de K, est parallèle à la déformée de méridien de (S) passant par M.

Si (S) est *de révolution*, on a vu que les plans focaux des différentes congruences (C), sont symétriques par rapport aux plans tangents correspondants à (S). Une

---

(1) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV; § VII.

(2) *Sur les congruences à enveloppée moyenne donnée*, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1929.

homothétie de centre O et dont le rapport tend vers zéro, conduit immédiatement au résultat suivant :

Soit (S) une surface quelconque de révolution, M l'un quelconque de ses points. Par un point fixe O de l'espace, menons la parallèle à la tangente au parallèle passant par M. Portons sur cette parallèle une longueur OK égale à la distance du point M à l'axe de révolution, et menons par K la parallèle $\Delta$ à la tangente au méridien de M.

La congruence $(\Gamma)$, engendrée par $(\Delta)$, est une congruence à *foyers associés* équidistants du point O, et à *plans focaux* équidistants de ce même point.

Il est évident que toutes les congruences $(\Gamma)$ obtenues par la construction précédente, ont pour surface moyenne le plan mené par O perpendiculairement à l'axe de révolution.

Ces congruences ne sont autres que celles, formées par les tangentes communes aux différents couples de surfaces de révolution de même axe symétriques par rapport à un point de l'axe, que nous avons signalées dans un Mémoire antérieur (1).

Les congruences $(\Gamma)$ ci-dessus, ne constituent pas l'ensemble des congruences à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe. Cet ensemble, dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre facile à former, et jouit de cette propriété, que les congruences solutions, se transforment les unes dans les autres, par une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O.

Supposons que (S) soit une déformée de révolution de développée de surface minima. Les congruences $(\Gamma)$ correspondantes sont alors des congruences *normales à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe*. Ces congruences, qui ont en outre pour surface moyenne un plan passant par le point fixe, ne sont autres que celles que nous avons déterminées au n° 17 du Mémoire cité plus haut, et qui sont constituées par les tangentes communes aux différents couples de paraboloïdes de révolution homofocaux égaux.

Nous avons établi, dans un autre travail (2), que la connaissance d'une congruence normale à plans focaux équidistants d'un point fixe, entraîne celle d'une famille, dépendant d'autant de constantes que l'on veut, de surfaces pseudo-sphériques, définies par les images sphériques de leurs lignes de courbure.

Cette remarque justifiera la recherche, que nous ferons au numéro suivant, de toutes les congruences normales à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe.

Avant d'aborder ce problème particulier, nous donnerons quelques indications

---

(1) *Sur trois types de congruences rectilignes*, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1927.

(2) *Sur certaines congruences normales, dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations*, Annales de l'École Normale (3), XLVIII; 1931.

sur le problème général de la recherche des congruences normales à plans focaux équidistants d'un point fixe.

Prenons comme surface support d'une congruence normale, le lieu des projections de l'origine O sur ses différents rayons, et supposons la congruence rapportée à ses développables.

Désignons par X, Y, Z, les cosinus directeurs du rayon $(u, v)$. La surface support sera définie par les équations bien connues :

$$(9) \qquad \xi = \Delta(M, X), \qquad \eta = \Delta(M, Y), \qquad \zeta = \Delta(M, Z);$$

M est la distance du point $(\xi, \eta, \zeta)$ au plan tangent à l'une des surfaces orthogonales au rayon de la congruence, et $\Delta$ le paramètre différentiel mixte de Beltrami relatif au $ds^2$ de la représentation sphérique de la congruence :

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2.$$

Les coordonnées du point où le rayon $(u, v)$ perce une surface orthogonale sont :

$$(10) \qquad x = \Delta(M, X) + MX, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots.$$

Les surfaces (S) admettant pour images de leurs lignes de courbure les courbes $u$ et $v$ de la représentation sphérique, sont définies par l'équation de Laplace [1]

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}\frac{\partial M}{\partial v},$$

qui, en introduisant les dérivées secondes covariantes, s'écrit :

$$(11') \qquad M_{12} = 0.$$

Désignons par $M_1$ et $M_2$ les distances du point O aux plans principaux d'une (S).

$$(12) \qquad M_1 = Sx\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial X}{\partial u}, \qquad M_2 = Sx\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Si l'on tient compte des égalités bien connues :

$$Sx\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u}, \qquad Sx\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial M}{\partial v},$$

on peut écrire :

$$(12') \qquad \frac{\partial M}{\partial u} = \sqrt{e}M_1, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{g}M_2.$$

---

[1] Voir, par exemple, L. Bianchi, *Géométrie différentielle*, t. I, p. 263.

Eu égard à l'équation (11), la détermination des surfaces ayant la représentation sphérique voulue, dépend de l'intégration du système (Bianchi, *loc. cit.*)

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \dfrac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} M_2, & \dfrac{\partial M_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} M_1, \\ \dfrac{\partial M}{\partial u} = \sqrt{e} M_1, & \dfrac{\partial M}{\partial v} = \sqrt{g} M_2. \end{cases}$$

Pour les congruences qui nous intéressent [normales à plans focaux équidistants de O], on a $M_1 = M_2$, ce qui impose une forme particulière au $ds^2$ de l'image sphérique.

On tire des deux premières équations (13) :

$$\frac{\partial \log M_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log M_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v};$$

d'où :

$$(14)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right).$$

Telle est l'équation à laquelle doivent satisfaire les coefficients du $ds^2$ sphérique $ds^2 = e du^2 + g dv^2$, pour que les courbes $u$ et $v$ soient les images des lignes de courbure d'une surface dont les plans principaux sont équidistants de l'origine.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la recherche des $ds^2$ sphériques vérifiant (14), constitue un problème équivalent à celui de la recherche des surfaces pseudo-sphériques.

## VI. — **Congruences normales à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe.**

Les congruences normales à foyers associés équidistants du point fixe O, sont définies par les équations (9) où M est une solution de $\Delta_2 M = 0$ [1].

Exprimons que les plans focaux sont équidistants de O.

Il suffit d'écrire, eu égard aux (12′) que $M_1 = M_2$. On obtient ainsi l'équation :

$$(15)\quad \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial M}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial M}{\partial v}.$$

[1] Voir, par exemple, le Mémoire des *Annales de l'École Normale*, cité plus haut (1931).

Les congruences cherchées, sont définies par les formules (9) où M est solution du système

$$(16)\qquad \begin{cases} \Delta_2 M = 0, \qquad M_{12} = 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial M}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial M}{\partial v}. \end{cases}$$

Nous étudierons le système (16), en nous aidant de considérations géométriques, que suggère la connaissance *a priori*, de solutions formées par les tangentes communes aux couples de paraboloïdes de révolution homofocaux égaux, ayant pour foyer commun le point O.

Exprimons qu'une congruence définie par les formules (9), a pour surface moyenne un plan passant par O. La condition se traduit par l'équation

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Soit en tenant compte des valeurs de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ :

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \Delta(M, X) & \Delta(M, Y) & \Delta(M, Z) \\ \dfrac{\partial \Delta(M, X)}{\partial u} & \dfrac{\partial \Delta(M, Y)}{\partial u} & \dfrac{\partial \Delta(M, Z)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \Delta(M, X)}{\partial v} & \dfrac{\partial \Delta(M, Y)}{\partial v} & \dfrac{\partial \Delta(M, Z)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$(18)\qquad \alpha = \frac{M_{11}}{e}, \qquad \beta = \frac{M_{12}}{g}, \qquad \gamma = \frac{M_{12}}{e}, \qquad \delta = \frac{M_{22}}{g};$$

les $M_{ij}$ étant les dérivées secondes covariantes de M, les dérivées des paramètres différentiels ont les expressions bien connues :

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta(M, X)}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial X}{\partial v} - \dfrac{\partial M}{\partial u} X, \\ \dfrac{\partial \Delta(M, X)}{\partial v} = \gamma \dfrac{\partial X}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial X}{\partial v} - \dfrac{\partial M}{\partial v} X, \end{cases}$$

avec les analogues en Y et Z.

On a d'ailleurs

$$\alpha + \delta = \Delta_2 M. \tag{20}$$

En remplaçant les paramètres différentiels par leurs expressions :

$$\Delta(M, X) = \frac{1}{e} \frac{\partial M}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{g} \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}, \qquad \Delta(M, Y) = \ldots, \qquad \Delta(M, Z) = \ldots,$$

et en tenant compte des formules (18) et (19), l'équation (17) devient, après un développement facile :

$$\sqrt{eg}\,(\alpha + \delta) + g\beta + e\gamma = 0. \tag{21}$$

Si l'on a égard aux (16), (18), (20), on constate que (21) est vérifiée pour toutes les congruences que nous cherchons à déterminer. On peut donc énoncer ce résultat :

*Toutes les congruences normales à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe* O, *ont pour surface moyenne un plan passant par* O.

Mais, nous avons démontré[1] que *les seules congruences normales à surface moyenne plane et à foyers associés équidistants d'un point du plan moyen* sont les congruences formées par les tangentes communes aux couples de paraboloïdes de révolution homofocaux égaux.

On peut donc dire :

*Les congruences normales à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe, sont les congruences formées par les tangentes communes aux différents couples de paraboloïdes de révolution homofocaux égaux, et celles-là seulement.*

Dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale*, cité plus haut, nous avons montré que, si l'on fait tourner chaque rayon d'une congruence normale $(\Gamma)$ à plans focaux équidistants du point O, d'un angle droit, dans le plan qu'il détermine avec O, on obtient une nouvelle congruence *normale*, admettant pour image sphérique de ses développables l'image des lignes de courbure d'une surface pseudo-sphérique.

$(\Sigma)$ étant l'une quelconque des surfaces orthogonales aux rayons de $(\Gamma)$, toute surface inverse d'une surface $(\Sigma)$ dans une inversion de pôle O, fournit une nouvelle congruence du type $(\Gamma)$, qui peut être traitée de même; d'où la possibilité d'obtenir, par leur représentation sphérique, une infinité de surfaces pseudo-sphériques dépendant d'autant de constantes qu'on le veut.

---

[1] *Sur trois types de congruences rectilignes*, Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1927.

Pour les congruences $(\Gamma)$ que nous venons de déterminer, les surfaces orthogonales aux rayons se déduisent de l'une d'elles par rotation autour d'un axe issu de $O$, et l'inversion de ces surfaces donne une surface *unique* (à une rotation et une homothétie près).

Les surfaces, ayant même représentation sphérique qu'une surface pseudo-sphérique, orthogonales aux rayons des congruences déduites des congruences $(\Gamma)$ par la construction ci-dessus rappelée, se réduisent ici, comme il est aisé de le constater, à un cylindre droit ayant pour base une développante de cercle, et à son inverse par rapport au centre du cercle.

Seule, la dernière des deux surfaces, fournit une surface pseudo-sphérique, appartenant à la classe bien connue d'Enneper.

Le calcul ci-dessus, ne nous apporte rien de nouveau, quant à la détermination des surfaces pseudo-sphériques. Son intérêt réside dans la détermination *complète*, des congruences normales, à foyers et à plans focaux associés équidistants d'un point fixe.