ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

CHARLES RIQUIER

Sur les séries bi-entières et sur l'extension du théorème de Laurent au cas d'un nombre quelconque de variables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 13 (1921), p. 1-59

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1921_3_13__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

SUR LES SÉRIES BI-ENTIÈRES

ET

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DE LAURENT

AU CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

Par CHARLES RIQUIER

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN

CHAPITRE PREMIER

SÉRIES BI-ENTIÈRES

Couronnes de convergence associées.

[**1**] Une série procédant suivant les puissances entières, *positives et négatives*, des n variables imaginaires $x, y, \ldots$, sera qualifiée de *bi-entière* par rapport à ces variables : il va de soi que, dans une pareille série, deux termes quelconques sont supposés *dissemblables*, c'est-à-dire qu'en désignant par $a, b, \ldots$ et $a', b', \ldots$ les exposants dont les variables $x, y, \ldots$ se trouvent respectivement affectées dans ces deux termes, les différences $a-a'$, $b-b'$, $\ldots$ ne sont pas toutes nulles.

Si, dans les termes de la série, on remplace les puissances négatives de $x, y, \ldots$ par les puissances positives correspondantes de n variables auxiliaires X, Y, ..., on obtient une deuxième série, entière par rapport aux $2n$ variables $x, y, \ldots$, X, Y, ..., mais incomplète par rapport à elles, puisqu'il n'y figure aucun terme contenant à la fois, soit x et X, soit y et Y, ... Cette deuxième série, comparée à la première, sera qualifiée d'*auxiliaire*.

[**2**] Considérons, dans le plan de notation graphique de chacune des n variables $x, y, \ldots$, une *couronne circulaire* limitée par un couple de circonférences ayant leur centre commun à l'origine (l'une de ces deux circonférences peut, éventuellement, être de rayon nul, l'autre, éventuellement, de rayon infini, et la couronne est essentiellement supposée ne contenir ni l'une ni l'autre) : en associant les n couronnes, nous obtiendrons, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, une région définie par n couples d'inégalités de la forme

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{ll} R'_x < \operatorname{mod} x < R_x & (0 \leqq R'_x < R_x), \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Traçons maintenant, dans la première des couronnes (1), extraite de l'espace $\big[[x]\big]$, un arc continu dépendant d'une seule indéterminée (réelle), ayant respectivement ses deux extrémités sur les deux circonférences qui limitent la couronne, et tous ses autres points à l'intérieur de cette dernière; soit $\mathfrak{A}_x$ l'ensemble que forment les divers points de l'arc, exclusion faite des deux points extrêmes (dont l'un peut, éventuellement, être à l'infini). Traçons de même, dans la deuxième des couronnes (1), extraite de l'espace $\big[[y]\big]$, un arc continu dépendant d'une seule indéterminée (réelle), ayant respectivement ses deux extrémités sur les deux circonférences qui limitent la couronne, et tous ses autres points à l'intérieur de cette dernière; soit $\mathfrak{A}_y$ l'ensemble que forment les divers points de l'arc, exclusion faite des deux points extrêmes (dont l'un peut, éventuellement, être à l'infini). Et ainsi de suite. (Il va sans dire que les n indéterminées dont dépendent respectivement ces n arcs sont elles-mêmes mutuellement indépendantes).

Considérons enfin, en même temps que la région (1) et les arcs $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \ldots$, une série bi-entière en $x, y, \ldots$

Cela étant, *si l'association* $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \ldots\ldots)$ *est pour la série proposée, bi-entière par rapport aux n variables* $x, y, \ldots$, *un lieu de convergence* [1], *la série auxiliaire correspondante* (n° **1**), *entière par rapport aux* $2n$ *variables*

$$x, y, \ldots\ldots, X, Y, \ldots\ldots,$$

admet comme rayons simultanés de convergence les $2n$ *quantités positives*

$$R_x, R_y, \ldots, \frac{1}{R'_x}, \frac{1}{R'_y}, \ldots,$$

ce qui entraîne, pour la série bi-entière proposée, les conséquences suivantes :

[1] On suppose que, pour chaque point du lieu, considéré isolément, la série, convenablement ordonnée, est convergente; cette loi d'ordination peut d'ailleurs varier d'un point à l'autre du lieu.

Elle est absolument convergente dans toute l'étendue de la région (1), *formée par l'association des couronnes, et sa somme*, $f(x, y, \ldots)$, indépendante de l'ordre et du groupement des termes, y *est une fonction olotrope de* $x, y, \ldots$

En outre, *la série bi-entière en* $x, y, \ldots$ *qui se déduit de la proposée par la dérivation d'ordres partiels* $\alpha, \beta, \ldots$, *exécutée séparément sur tous ses termes, admet aussi la région de convergence* (1), *et a pour somme* $\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f(x, y, \ldots)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}$.

Pour fixer les idées, nous supposerons, dans la démonstration qui suit, qu'il y a trois variables indépendantes, x, y, z.

I. — Dans une série bi-entière par rapport aux trois variables x, y, z, les termes peuvent se partager en huit groupes ($8 = 2^3$), suivant qu'ils appartiennent à l'un ou à l'autre des huit types suivants :

$a_{m,p,q} x^m y^p z^q$ (m, p, q positifs ou nuls);
$b_{m,p,q} x^{-m} y^p z^q$ (m positif, p et q positifs ou nuls);
$c_{m,p,q} x^m y^{-p} z^q$ (p positif, m et q positifs ou nuls);
$d_{m,p,q} x^m y^p z^{-q}$ (q positif, m et p positifs ou nuls);
$g_{m,p,q} x^m y^{-p} z^{-q}$ (p et q positifs, m positif ou nul);
$h_{m,p,q} x^{-m} y^p z^{-q}$ (m et q positifs, p positif ou nul);
$k_{m,p,q} x^{-m} y^{-p} z^q$ (m et p positifs, q positif ou nul);
$l_{m,p,q} x^{-m} y^{-p} z^{-q}$ (m, p, q positifs).

(Les lettres a, b, c, d, g, h, k, l, affectées d'indices, désignent des coefficients constants).

Abstraction faite de l'ordre des termes (indifférent, dans les hypothèses posées, en raison de la convergence absolue qui en résultera), notre série peut donc se désigner par la notation

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q + \sum b_{m,p,q} x^{-m} y^p z^q \\ &+ \sum c_{m,p,q} x^m y^{-p} z^q + \sum d_{m,p,q} x^m y^p z^{-q} \\ &+ \sum g_{m,p,q} x^m y^{-p} z^{-q} + \sum h_{m,p,q} x^{-m} y^p z^{-q} \\ &+ \sum k_{m,p,q} x^{-m} y^{-p} z^q + \sum l_{m,p,q} x^{-m} y^{-p} z^{-q}, \end{aligned} \right.$$

et la série auxiliaire par la notation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum a_{m,p,q}x^m y^p z^q + \sum b_{m,p,q}X^m y^p z^q \\ &+ \sum c_{m,p,q}x^m Y^p z^q + \sum d_{m,p,q}x^m y^p Z^q \\ &+ \sum g_{m,p,q}x^m Y^p Z^q + \sum h_{m,p,q}X^m y^p Z^q \\ &+ \sum k_{m,p,q}X^m Y^p z^q + \sum l_{m,p,q}X^m Y^p Z^q. \end{aligned}\right.$$

Si, dans cette dernière série, on suppose que la convergence absolue ait lieu pour certaines valeurs de x, y, z, X, Y, Z, elle ne pourra manquer d'avoir lieu pour les mêmes valeurs dans chacune des huit séries partielles

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} \sum a_{m,p,q}x^m y^p z^q, & \sum b_{m,p,q}X^m y^p z^q, \\ \sum c_{m,p,q}x^m Y^p z^q, & \sum d_{m,p,q}x^m y^p Z^q, \\ \sum g_{m,p,q}x^m Y^p Z^q, & \sum h_{m,p,q}X^m y^p Z^q, \\ \sum k_{m,p,q}X^m Y^p z^q, & \sum l_{m,p,q}X^m Y^p Z^q; \end{array}\right.$$

réciproquement, si, pour certaines valeurs de x, y, z, X, Y, Z, les huit séries partielles (4) sont toutes absolument convergentes, il en sera de même de la série (3).

En conséquence, *pour que la série auxiliaire* (3), entière (mais incomplète) par rapport aux six variables

$$x, y, z, X, Y, Z,$$

admette comme rayons simultanés de convergence les six quantités positives

$$(5)\quad r_x, r_y, r_z, r_X, r_Y, r_Z,$$

il faut et il suffit que chacune des séries partielles (4) *admette comme rayons simultanés de convergence celles des quantités* (5) *qui se rapportent respectivement aux trois variables dont elle dépend.*

II. — Revenons à notre énoncé général.

Nous observerons tout d'abord ce qui suit.

Si, pour certaines valeurs (non nulles) de x, y, z, dont nous désignerons les modules respectifs par ρ_x, ρ_y, ρ_z, la série (2), convenablement ordonnée par rapport aux puissances positives de x, y, z, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, est convergente, la série auxiliaire (3), ordonnée de la même façon par rapport aux puissances de

$$x,\ y,\ z,\ X,\ Y,\ Z,$$

ne pourra manquer de l'être pour certaines valeurs de modules respectifs

$$\rho_x,\ \rho_y,\ \rho_z,\ \frac{1}{\rho_x},\ \frac{1}{\rho_y},\ \frac{1}{\rho_z}, \tag{6}$$

et, par suite, admettra les quantités (6) comme rayons simultanés de convergence. Si donc, dans la région formée par l'association des couronnes circulaires

$$\left\{\begin{array}{ll} R'_x < \operatorname{mod} x < R_x & (0 \leqq R'_x < R_x), \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ R'_z < \operatorname{mod} z < R_z & (0 \leqq R'_z < R_z), \end{array}\right. \tag{7}$$

l'association des arcs $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, spécifiés par notre énoncé, est pour la série (2) un lieu de convergence, tout système de quantités positives, ρ_x, ρ_y, ρ_z, vérifiant les inégalités

$$\begin{array}{l} R'_x < \rho_x < R_x, \\ R'_y < \rho_y < R_y, \\ R'_z < \rho_z < R_z \end{array}$$

sera tel, qu'en associant à ρ_x, ρ_y, ρ_z leurs inverses arithmétiques $\frac{1}{\rho_x}$, $\frac{1}{\rho_y}$, $\frac{1}{\rho_z}$, on obtiendra un système de rayons de convergence de la série auxiliaire (3).

Cela étant, désignons par ε une quantité positive à la fois inférieure aux trois différences

$$R_x - R'_x, \qquad R_y - R'_y, \qquad R_z - R'_z,$$

et d'ailleurs de petitesse arbitraire : on aura alors, manifestement,

$$\begin{array}{lll} R'_x < R'_x + \varepsilon < R_x, & R'_y < R'_y + \varepsilon < R_y, & R'_z < R'_z + \varepsilon < R_z, \\ R'_x < R_x - \varepsilon < R_x, & R'_y < R_y - \varepsilon < R_y, & R'_z < R_z - \varepsilon < R_z. \end{array}$$

En conséquence, si, après avoir formé le Tableau à trois colonnes

$$(8) \qquad \begin{cases} R'_x + \varepsilon, & R'_y + \varepsilon, & R'_z + \varepsilon, \\ R_x - \varepsilon, & R_y - \varepsilon, & R_z - \varepsilon, \end{cases}$$

on associe entre elles trois quantités respectivement extraites de ces colonnes, les trois quantités dont il s'agit et leurs inverses arithmétiques constituent un système de rayons de convergence de la série auxiliaire. Or, on peut, de huit manières différentes, associer comme il vient d'être dit les quantités du Tableau (8), ce qui conduit, ainsi que nous allons le voir, à huit conclusions concernant respectivement les rayons de convergence des huit séries partielles (4).

En prenant d'abord dans le Tableau (8) les trois quantités

$$R'_x + \varepsilon, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (3) admet les rayons de convergence

$$R'_x + \varepsilon, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon, \quad \frac{1}{R'_x + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_z + \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum l_{m,p,q} X^m Y^p Z^q$$

admet les rayons de convergence

$$\frac{1}{R'_x + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_z + \varepsilon},$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons de convergence

$$\frac{1}{R'_x}, \quad \frac{1}{R'_y}, \quad \frac{1}{R'_z}.$$

En prenant dans le Tableau (8) la combinaison

$$R_x - \varepsilon, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (3) admet les rayons de convergence

$$R_x - \varepsilon, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon, \quad \frac{1}{R_x - \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_z + \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum g_{m,p,q}\,x^m\,Y^p Z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x - \varepsilon, \qquad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \qquad \frac{1}{R'_z + \varepsilon},$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$R_x, \qquad \frac{1}{R'_y}, \qquad \frac{1}{R'_z}.$$

La considération des combinaisons

$$R'_x + \varepsilon, \qquad R_y - \varepsilon, \qquad R'_z + \varepsilon$$

et

$$R'_x + \varepsilon, \qquad R'_y + \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

extraites du Tableau (8), montrera de même que les séries partielles

$$\sum h_{m,p,q}\,X^m y^p Z^q,$$

$$\sum k_{m,p,q}\,X^m\,Y^p z^q$$

admettent comme rayons de convergence, l'une les quantités

$$\frac{1}{R'_x}, \qquad R_y, \qquad \frac{1}{R'_z},$$

l'autre les quantités

$$\frac{1}{R'_x}, \qquad \frac{1}{R'_y}, \qquad R_z.$$

En prenant dans le Tableau (8) la combinaison

$$R'_x + \varepsilon, \qquad R_y - \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (3) admet les rayons de convergence

$$R'_x + \varepsilon, \quad R_y - \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon, \quad \frac{1}{R'_x + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_y - \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_z - \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum b_{m,p,q} X^m y^p z^q$$

admet les rayons de convergence

$$\frac{1}{R'_x + \varepsilon}, \quad R_y - \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon,$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$\frac{1}{R'_x}, \quad R_y, \quad R_z.$$

La considération des combinaisons

$$R_x - \varepsilon, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon$$

et

$$R_x - \varepsilon, \quad R_y - \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon,$$

extraites du Tableau (8), montrera de même que les séries partielles

$$\sum c_{m,p,q} x^m Y^p z^q,$$

$$\sum d_{m,p,q} x^m y^p Z^q$$

admettent comme rayons de convergence, l'une les quantités

$$R_x, \quad \frac{1}{R'_y}, \quad R_z,$$

l'autre les quantités

$$R_x, \quad R_y, \quad \frac{1}{R'_z}.$$

Enfin, si l'on prend dans le Tableau (8) la combinaison

$$R_x - \varepsilon, \qquad R_y - \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (3) admet les rayons de convergence

$$R_x - \varepsilon, \quad R_y - \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon, \quad \frac{1}{R_x - \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_y - \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_z - \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x - \varepsilon, \qquad R_y - \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$R_x, \qquad R_y, \qquad R_z.$$

Ainsi donc, en supposant, comme nous l'avons fait, que l'association des arcs $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ soit pour la série (2) un lieu de convergence, il en résulte nécessairement ce qui suit :

Si aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad X, \quad Y, \quad Z$$

de la série auxiliaire (3) on fait correspondre respectivement les quantités

$$(9) \qquad R_x, \quad R_y, \quad R_z, \quad \frac{1}{R'_x}, \quad \frac{1}{R'_y}, \quad \frac{1}{R'_z},$$

chacune des séries partielles (4) admet comme rayons simultanés de convergence celles des quantités (9) qui se rapportent respectivement aux trois variables dont elle dépend. La série auxiliaire (3), entière par rapport aux six variables

$$(10) \qquad x, \quad y, \quad z, \quad X, \quad Y, \quad Z,$$

admet donc, en vertu de I, les rayons de convergence (9), et converge absolument dans toute l'étendue de la région

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{mod} x < R_x, & \operatorname{mod} X < \dfrac{1}{R'_x}, \\ \operatorname{mod} y < R_y, & \operatorname{mod} Y < \dfrac{1}{R'_y}, \\ \operatorname{mod} z < R_z, & \operatorname{mod} Z < \dfrac{1}{R'_z}; \end{array}\right.$$

sa somme, $F(x, y, z, X, Y, Z)$, y est d'ailleurs une fonction olotrope des six variables (10). Or, les relations (7) peuvent s'écrire

$$\begin{array}{ll} \operatorname{mod} x < R_x, & \operatorname{mod} \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{R'_x}, \\ \operatorname{mod} y < R_y, & \operatorname{mod} \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{R'_y}, \\ \operatorname{mod} z < R_z, & \operatorname{mod} \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{R'_z}: \end{array}$$

si donc, sans toucher aux variables x, y, z, on effectue dans la série (3) les substitutions

$$(12)\qquad X = \frac{1}{x}, \qquad Y = \frac{1}{y}, \qquad Z = \frac{1}{z},$$

la série (2), qui en résulte, est absolument convergente dans la région (7), et sa somme,

$$f(x, y, z) = F\left(x, y, z, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right),$$

est, dans cette même région, en vertu du principe général de la composition des fonctions olotropes, une fonction olotrope de x, y, z.

Il reste à prouver que la série bi-entière déduite de (2) par une même dérivation partielle exécutée séparément sur tous les termes admet, elle aussi, la région de convergence (7), et qu'elle a pour somme la dérivée semblable de $f(x, y, z)$.

Supposons tout d'abord qu'il s'agisse d'une dérivation première, de celle, par exemple, qui intéresse la variable x. Si l'on considère la série auxiliaire (3), qui converge absolument dans toute l'étendue du domaine (11) et a pour somme

$F(x, y, z, X, Y, Z)$, il résulte de la règle de différentiation des fonctions composées que la dérivée première $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ s'obtient en opérant dans la fonction

$$\frac{\partial F(x, y, z, X, Y, Z)}{\partial x} - X^2 \frac{\partial F(x, y, z, X, Y, Z)}{\partial X} \tag{13}$$

les substitutions (12). Or, pour exécuter sur la fonction $F(x, y, z, X, Y, Z)$ une dérivation quelconque, il suffit, d'après les propriétés des séries entières, de l'exécuter séparément sur tous les termes de la série (3), ce qui donne une nouvelle série entière, absolument convergente dans le domaine (11) : en conséquence, si l'on considère les deux séries entières qui expriment respectivement

$$\frac{\partial F(x, y, z, X, Y, Z)}{\partial x} \quad \text{et} \quad - X^2 \frac{\partial F(x, y, z, X, Y, Z)}{\partial X},$$

savoir

$$\begin{gathered} \sum m a_{m,p,q} x^{m-1} y^p z^q + \sum m c_{m,p,q} x^{m-1} Y^p z^q \\ + \sum m d_{m,p,q} x^{m-1} y^p Z^q + \sum m g_{m,p,q} x^{m-1} Y^p Z^q \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} - \sum m b_{m,p,q} X^{m+1} y^p z^q - \sum m h_{m,p,q} X^{m+1} y^p Z^q \\ - \sum m k_{m,p,q} X^{m+1} Y^p z^q - \sum m l_{m,p,q} X^{m+1} Y^p Z^q, \end{gathered}$$

la série formée avec leurs termes élémentaires, tous dissemblables, sera absolument convergente dans le domaine (11) et exprimera la fonction (13). Cette série étant formée, il ne reste plus, pour achever le calcul de $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$, qu'à effectuer dans ses divers termes, comme nous l'avons dit, les substitutions (12); la série résultante,

$$\begin{gathered} \sum m a_{m,p,q} x^{m-1} y^p z^q - \sum m b_{m,p,q} x^{-(m+1)} y^p z^q \\ + \sum m c_{m,p,q} x^{m-1} y^{-p} z^q + \sum m d_{m,p,q} x^{m-1} y^p z^{-q} \\ + \sum m g_{m,p,q} x^{m-1} y^{-p} z^{-q} - \sum m h_{m,p,q} x^{-(m+1)} y^p z^{-q} \\ - \sum m k_{m,p,q} x^{-(m+1)} y^{-p} z^q - \sum m l_{m,p,q} x^{-(m+1)} y^{-p} z^{-q}, \end{gathered}$$

a elle-même, comme on le voit, tous ses termes dissemblables, par suite est bi-entière en x, y, z, et sa convergence absolue est assurée dans toute l'étendue de la région (7) : or, elle est précisément identique à celle que l'on obtiendrait en différentiant terme à terme par rapport à x la série bi-entière (2).

Ainsi, le point que nous avions en vue se trouve établi dans le cas d'une dérivation première. Cela étant, l'application répétée du même raisonnement prouvera son exactitude dans le cas d'une dérivation d'ordre quelconque.

[**3**] Au lieu de considérer, comme nous venons de le faire, une série bi-entière par rapport à toutes les variables sans distinction, on peut aussi partager les variables en deux groupes,

$$x, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y, \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et examiner le cas où la série proposée est entière par rapport aux variables $x, \ldots\ldots$ du premier groupe, bi-entière par rapport aux variables $y, \ldots\ldots$ du second. Si, dans les termes de cette série, on remplace les puissances négatives de $y, \ldots\ldots$ par les puissances positives correspondantes de variables auxiliaires, $Y, \ldots\ldots$, on obtient une série *auxiliaire*, entière par rapport aux diverses variables

$$x, \ldots\ldots, y, \ldots\ldots, Y, \ldots\ldots,$$

mais incomplète par rapport à elles, puisqu'il n'y figure aucun terme contenant à la fois une variable du groupe $y, \ldots\ldots$ et la variable auxiliaire correspondante.

Cela posé, considérons, d'une part, une série qui soit entière par rapport aux variables $x, \ldots\ldots$ et bi-entière par rapport aux variables $y, \ldots\ldots$; décrivons, d'autre part, dans le plan de notation de chacune des variables $x, \ldots$, une circonférence *unique* ayant l'origine pour centre, puis, dans le plan de notation de chacune des variables $y, \ldots\ldots$, un *couple* de circonférences ayant de même l'origine pour centre. Les diverses circonférences décrites délimitent, dans l'espace $\big[[x, \ldots\ldots, y, \ldots\ldots]\big]$, une région définie par des inégalités de la forme

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{mod} x < R_x & (0 < R_x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . & \end{array}\right.$$

Finalement, sur les circonférences décrites dans les plans de notation des variables $x, \ldots$, prenons respectivement des valeurs $x_1, \ldots$ (de modules respectifs $R_x, \ldots$); puis, intérieurement à chacune des couronnes délimitées dans les plans de notation des variables $y, \ldots$, traçons (comme au n° [**2**]) un arc continu ayant ses deux extrémités sur les deux circonférences extrêmes de la couronne, et désignons ces divers arcs par $\mathfrak{A}_y$, ..., exclusion étant faite, pour chacun, de ses deux extrémités.

Cela étant, *si l'association* $(x_1, \ldots, \mathfrak{A}_y, \ldots)$ *est pour la série proposée, dépendant de* $x, \ldots, y, \ldots$, *un lieu de convergence, la série auxiliaire correspondante, entière en*

$$x, \ldots\ldots, y, \ldots\ldots, Y, \ldots\ldots,$$

admet comme rayons simultanés de convergence les quantités positives

$$R_x, \ldots\ldots, R_y, \ldots\ldots, \frac{1}{R'_y}, \ldots\ldots,$$

ce qui entraîne, pour la série proposée, les conséquences suivantes :

Elle est absolument convergente dans toute l'étendue de la région (14), *formée par l'association des aires et couronnes circulaires, et sa somme,* $f(x, \ldots, y, \ldots)$, indépendante de l'ordre et du groupement des termes, *y est une fonction olotrope de* $x, \ldots, y, \ldots$

En outre, *la série, de même nature que la proposée, qui s'en déduit par la dérivation d'ordres partiels* $\alpha, \ldots, \beta, \ldots$ *exécutée séparément sur tous ses termes, admet aussi la région de convergence* (14), *et a pour somme*

$$\frac{\partial^{\alpha+\cdots+\beta+\cdots} f(x, \ldots, y, \ldots)}{\partial x^\alpha \ldots \partial y^\beta \ldots}.$$

Démonstration toute semblable à celle du numéro précédent [1].

---

[1] Pour fixer les idées, supposons qu'il y ait trois variables indépendantes x, y, z, et que la série proposée soit entière par rapport à la variable x, bi-entière par rapport à chacune des deux variables y et z. Conformément aux indications ci-dessus, traçons alors, dans le plan des x, une circonférence *unique* ayant l'origine pour centre, puis, dans le plan de chacune des deux variables y et z, un *couple* de circonférences ayant de même l'origine pour centre. Les diverses circonférences décrites délimiteront, dans l'espace $[[x, y, z]]$, une région définie par des inégalités de la forme

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{mod} x < R_x & (0 < R_x), \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ R'_z < \operatorname{mod} z < R_z & (0 \leqq R'_z < R_z). \end{array} \right.$$

Finalement, sur la circonférence décrite dans le plan des x, prenons une valeur x_1 (de module R_x); puis, intérieurement à chacune des couronnes délimitées dans le plan des y et dans celui des z, traçons un arc continu ayant ses deux extrémités sur les deux circonférences extrêmes de la couronne, et désignons par $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ les arcs ainsi obtenus, exclusion étant faite, pour chacun, de ses deux extrémités.

Comme nous l'avons annoncé, et comme on va le voir, la démonstration est toute semblable à celle du n° **2**.

I. — Dans une série entière par rapport à x et bi-entière par rapport à y, z, les termes peuvent se partager en quatre groupes ($4 = 2^2$), suivant qu'ils appartiennent à l'un ou à l'autre des quatre types suivants :

$$\begin{array}{ll} a_{m,p,q} x^m y^p z^q & (m,\ p,\ q \text{ positifs ou nuls}); \\ c_{m,p,q} x^m y^{-p} z^q & (p \text{ positif, } m \text{ et } q \text{ positifs ou nuls}); \\ d_{m,p,q} x^m y^p z^{-q} & (q \text{ positif, } m \text{ et } p \text{ positifs ou nuls}); \\ g_{m,p,q} x^m y^{-p} z^{-q} & (p \text{ et } q \text{ positifs, } m \text{ positif ou nul}). \end{array}$$

Abstraction faite de l'ordre des termes, notre série peut donc se désigner par la notation

$$(16)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q + \sum c_{m,p,q} x^m y^{-p} z^q \\ + \sum d_{m,p,q} x^m y^p z^{-q} + \sum g_{m,p,q} x^m y^{-p} z^{-q}, \end{array} \right.$$

et la série auxiliaire par la notation

$$(17)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q + \sum c_{m,p,q} x^m \mathrm{Y}^p z^q \\ + \sum d_{m,p,q} x^m y^p \mathrm{Z}^q + \sum g_{m,p,q} x^m \mathrm{Y}^p \mathrm{Z}^q. \end{array} \right.$$

Si, dans cette dernière série, on suppose que la convergence absolue ait lieu pour certaines valeurs de x, y, z, Y, Z, elle ne pourra manquer d'avoir lieu pour les mêmes valeurs dans chacune des quatre séries partielles

$$(18)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q, & \sum c_{m,p,q} x^m \mathrm{Y}^p z^q, \\ \sum d_{m,p,q} x^m y^p \mathrm{Z}^q, & \sum g_{m,p,q} x^m \mathrm{Y}^p \mathrm{Z}^q; \end{array} \right.$$

réciproquement, si, pour certaines valeurs de x, y, z, Y, Z, les quatre séries partielles (18) sont toutes absolument convergentes, il en sera de même de la série (17).

En conséquence, *pour que la série auxiliaire* (17), entière (mais incomplète) par rapport aux variables

$$x,\quad y,\quad z,\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z},$$

admette comme rayons simultanés de convergence les quantités positives

$$(19)\qquad r_x,\quad r_y,\quad r_z,\quad r_{\mathrm{Y}},\quad r_{\mathrm{Z}},$$

il faut et il suffit que chacune des séries partielles (18) *admette comme rayons simultanés de convergence celles des quantités* (19) *qui se rapportent respectivement aux trois variables dont elle dépend.*

II. — Revenons à l'énoncé qu'il s'agit d'établir.

Nous observerons tout d'abord ce qui suit.

Si, pour la valeur $x = x_1$ (de module R_x) et pour certaines valeurs (non nulles) de y, z, dont nous désignerons les modules respectifs par ρ_y, ρ_z, la série (16), convenablement ordonnée par rapport aux puissances positives de x, y, z, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, est convergente, la série auxiliaire (17), ordonnée de la même façon par rapport aux puissances de

$$x, \quad y, \quad z, \quad Y, \quad Z,$$

ne pourra manquer de l'être pour certaines valeurs de modules respectifs

$$R_x, \quad \rho_y, \quad \rho_z, \quad \frac{1}{\rho_y}, \quad \frac{1}{\rho_z}, \tag{20}$$

et, par suite, admettra les quantités (20) comme rayons simultanés de convergence. Si donc l'association (x_1, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$) est, pour la série (16), un lieu de convergence, tout couple de quantités positives, ρ_y, ρ_z, vérifiant les inégalités

$$R'_y < \rho_y < R_y, \qquad R'_z < \rho_z < R_z,$$

sera tel, qu'en leur associant R_x, $\frac{1}{\rho_y}$ et $\frac{1}{\rho_z}$, on obtient un système de rayons de convergence de la série auxiliaire (17).

Cela étant, désignons par ε une quantité positive à la fois inférieure aux deux différences

$$R_y - R'_y, \qquad R_z - R'_z,$$

et d'ailleurs de petitesse arbitraire. On aura alors, manifestement,

$$R'_y < R'_y + \varepsilon < R_y, \qquad R'_z < R'_z + \varepsilon < R_z,$$
$$R'_y < R_y - \varepsilon < R_y, \qquad R'_z < R_z - \varepsilon < R_z.$$

En conséquence, si, après avoir formé le Tableau à deux colonnes

$$\begin{cases} R'_y + \varepsilon, & R'_z + \varepsilon, \\ R_y - \varepsilon, & R_z - \varepsilon, \end{cases} \tag{21}$$

on associe entre elles deux quantités respectivement extraites de ces colonnes, les deux quantités dont il s'agit, leurs inverses arithmétiques et la quantité R_x constituent un système de rayons de convergence de la série auxiliaire. Or, on peut, de quatre manières différentes, associer comme il vient d'être dit les quantités du Tableau (21), ce qui conduit, ainsi que nous allons le voir, à quatre conclusions concernant respectivement les rayons de convergence des quatre séries partielles (18).

En prenant d'abord dans le Tableau (21) les deux quantités

$$R'_y + \varepsilon, \qquad R'_z + \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (17) admet les rayons de convergence

$$R_x, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R'_z + \varepsilon, \quad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R'_z + \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum g_{m,p,q}\, x^m Y^p Z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x, \qquad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \qquad \frac{1}{R'_z + \varepsilon},$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$R_x, \qquad \frac{1}{R'_y}, \qquad \frac{1}{R'_z}.$$

En prenant dans le Tableau (21) la combinaison

$$R'_y + \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (17) admet les rayons de convergence

$$R_x, \quad R'_y + \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon, \quad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_z - \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum c_{m,p,q} x^m Y^p z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x, \qquad \frac{1}{R'_y + \varepsilon}, \qquad R_z - \varepsilon,$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$R_x, \qquad \frac{1}{R'_y}, \qquad R_z.$$

La considération de la combinaison

$$R_y - \varepsilon, \qquad R'_z + \varepsilon,$$

extraite du Tableau (21), montrera de même que la série partielle

$$\sum d_{m,p,q} x^m y^p Z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x, \qquad R_y, \qquad \frac{1}{R'_z}.$$

Enfin, si l'on prend dans le Tableau (21) la combinaison

$$R_y - \varepsilon, \qquad R_z - \varepsilon,$$

on voit que la série auxiliaire (17) admet les rayons de convergence

$$R_x, \quad R_y - \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon, \quad \frac{1}{R_y - \varepsilon}, \quad \frac{1}{R_z - \varepsilon};$$

il en résulte (I) que la série partielle

$$\sum a_{m,p,q} x^m y^p z^q$$

admet les rayons de convergence

$$R_x, \quad R_y - \varepsilon, \quad R_z - \varepsilon,$$

et par suite, à cause de la petitesse arbitraire de ε, les rayons

$$R_x, \quad R_y, \quad R_z.$$

Ainsi donc, en supposant, comme nous l'avons fait, que l'association $(x_1, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z)$ soit pour la série (16) un lieu de convergence, il en résulte nécessairement ce qui suit :

Si aux variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad Y, \quad Z$$

de la série auxiliaire (17) on fait correspondre respectivement les quantités

$$(22) \qquad R_x, \quad R_y, \quad R_z, \quad \frac{1}{R'_y}, \quad \frac{1}{R'_z},$$

chacune des séries partielles (18) admet comme rayons simultanés de convergence celles des quantités (22) qui se rapportent respectivement aux trois variables dont elle dépend. La série auxiliaire (17), entière par rapport aux cinq variables

$$(23) \qquad x, \quad y, \quad z, \quad Y, \quad Z,$$

admet donc, en vertu de I, les rayons de convergence (22), et converge absolument dans toute l'étendue de la région

$$(24) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \bmod x < R_x, & \\ \bmod y < R_y, & \bmod Y < \dfrac{1}{R'_y}, \\ \bmod z < R_z, & \bmod Z < \dfrac{1}{R'_z}; \end{array}\right.$$

sa somme, $F(x, y, z, Y, Z)$, y est d'ailleurs une fonction olotrope des cinq variables (23). Or, les relations (15) peuvent s'écrire

$$\begin{array}{ll} \bmod x < R_x, & \\ \bmod y < R_y, & \bmod \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{R'_y}, \\ \bmod z < R_z, & \bmod \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{R'_z}: \end{array}$$

si donc, sans toucher aux variables x, y, z, on effectue sur la série (17) les substitutions

$$Y = \frac{1}{y}, \qquad Z = \frac{1}{z},$$

Condition de nullité identique de la somme d'une série bi-entière.

[**4**] Il nous faut tout d'abord établir un lemme.

Considérons les r expressions

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 u + \beta_1 v + \ldots\ldots, \\ \alpha_2 u + \beta_2 v + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_r u + \beta_r v + \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $u, v, \ldots.$ désignent n entiers algébriques indéterminés, et les lettres $\alpha, \beta, \ldots.,$ affectées d'indices, des entiers algébriques donnés. *Si, pour chaque couple d'entiers distincts, h, k, pris dans la suite* $1, 2, \ldots., r$, *les n différences*

$$\alpha_h - \alpha_k, \qquad \beta_h - \beta_k, \qquad \ldots..$$

ne sont pas toutes nulles, on peut, suivant quelque loi déterminée, trouver pour les n entiers algébriques $u, v, \ldots..$ un système de valeurs telles, que les valeurs (algébriques) *correspondantes des r expressions* (25) *soient toutes distinctes entre elles.*

Pour fixer les idées, nous supposerons $n = 3$.

---

la série (16), qui en résulte, est absolument convergente dans la région (15), et sa somme,

$$f(x, y, z) = \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right),$$

est, dans cette même région, en vertu du principe général de la composition des fonctions olotropes, une fonction olotrope de x, y, z.

Il reste à prouver que la série de même nature déduite de (16) par une même dérivation partielle exécutée séparément sur tous les termes admet, elle aussi, la région de convergence (15), et qu'elle a pour somme la dérivée semblable de $f(x, y, z)$.

Supposons tout d'abord qu'il s'agisse d'une dérivation première. Si cette dérivation intéresse l'une des deux variables y et z, le raisonnement est identique à celui que nous avons exposé vers la fin de l'alinéa II du n° **2.** Si elle intéresse la variable x, il devient plus simple encore, et cette simplicité nous dispense d'y insister. Ainsi se trouve assurée, pour toute dérivation première, l'exactitude du point que nous avons en vue. Après quoi l'application répétée du même raisonnement permettra de passer à une dérivation d'ordre quelconque.

I. — Considérons les s expressions

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1 w, \\ \lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2 w, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_s u + \mu_s v + \nu_s w, \end{array}\right.$$

où u, v, w désignent trois entiers algébriques indéterminés, et les lettres λ, μ, ν, affectées d'indices, des entiers algébriques donnés; ces derniers sont quelconques, sous la seule restriction *que, dans chacune des expressions* (26), *les coefficients de* u, v, w *ne soient pas nuls à la fois.*

Cela étant, *on peut, suivant quelque loi déterminée, trouver pour les entiers algébriques* u, v, w *un système de valeurs telles, que les valeurs correspondantes des* s *expressions* (26) *soient toutes différentes de zéro.*

Partageons en effet les expressions (26) en trois groupes comprenant respectivement :

le premier, toutes celles qui contiennent u d'une façon *effective* (c'est-à-dire où le coefficient de cette indéterminée est différent de zéro);

le deuxième, toutes celles qui, sans contenir u, contiennent v d'une façon effective;

le troisième et dernier, les diverses expressions restantes, qui ne peuvent contenir ni u, ni v, mais qui toutes contiennent nécessairement w d'une façon effective.

Soient, pour fixer les idées,

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1 w, \\ \lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2 w, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_f u + \mu_f v + \nu_f w, \end{array}\right.$$

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_{f+1} v + \nu_{f+1} w, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \mu_{f+g} v + \nu_{f+g} w, \end{array}\right.$$

$$(29)\qquad \left\{\begin{array}{l} \nu_{f+g+1} w, \\ \dots\dots, \\ \nu_s w \end{array}\right.$$

les trois groupes ainsi obtenus : en vertu même du mode de formation de ceux-ci, les s coefficients

$$\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots, \lambda_f, \\ \mu_{f+1}, \ldots\ldots\ldots, \mu_{f+g}, \\ \nu_{f+g+1}, \ldots\ldots\ldots, \nu_s \end{array}$$

sont tous différents de zéro.

Cela étant, l'hypothèse numérique $w = 1$, introduite dans les groupes (27), (28), (29), les transforme respectivement en

$$(30) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1, \\ \lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_f u + \mu_f v + \nu_f, \end{array} \right.$$

$$(31) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{f+1} v + \nu_{f+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_{f+g} v + \nu_{f+g}, \end{array} \right.$$

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \nu_{f+g+1}, \\ \ldots\ldots, \\ \nu_s; \end{array} \right.$$

de ces nouveaux groupes, le premier, (30), ne contient plus d'autre indéterminée que u et v, le deuxième, (31), d'autre indéterminée que v, et le dernier, (32), se compose d'entiers fixes, tous différents de zéro.

Considérons maintenant les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{f+1} v + \nu_{f+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mu_{f+g} v + \nu_{f+g} = 0, \end{array} \right.$$

que l'on obtient en égalant à zéro les diverses expressions (31), et dont chacune est résoluble par rapport à v : en désignant par v' le premier entier de la suite indéfinie 1, 2, ... qui ne satifasse à aucune d'entre elles, l'hypothèse numérique $v = v'$, introduite dans les groupes (30) et (31), les transforme respectivement en

$$(33)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 u + \mu_1 v' + \nu_1, \\ \lambda_2 u + \mu_2 v' + \nu_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots ; \\ \lambda_f u + \mu_f v' + \nu_f, \end{array}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu_{f+1} v' + \nu_{f+1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \mu_{f+g} v' + \nu_{f+g}; \end{array}\right.$$

de ces nouveaux groupes; le premier, (33), ne contient plus d'autre indéterminée que u, et le deuxième, (34), se compose d'entiers fixes, tous différents de zéro.

Considérons enfin les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 u + \mu_1 v' + \nu_1 = 0, \\ \lambda_2 u + \mu_2 v' + \nu_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_f u + \mu_f v' + \nu_f = 0, \end{array}\right.$$

que l'on obtient en égalant à zéro les diverses expressions (33), et dont chacune est résoluble par rapport à u : en désignant par u' le premier entier de la suite indéfinie 1, 2, ... qui ne satisfasse à aucune d'entre elles, l'hypothèse numérique $u = u'$, introduite dans le groupe (33), le transforme en

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 u' + \mu_1 v' + \nu_1, \\ \lambda_2 u' + \mu_2 v' + \nu_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_f u' + \mu_f v' + \nu_f, \end{array}\right.$$

et fournit ainsi un groupe composé d'entiers fixes, tous différents de zéro.

En résumé donc, le système des valeurs entières

$$w = 1, \qquad v = v', \qquad u = u',$$

obtenu par l'application du mécanisme que nous venons de décrire, donne aux expressions (26) des valeurs toutes différentes de zéro.

Et ce mécanisme, ainsi qu'on l'aperçoit sans peine, peut être varié d'une foule de manières.

II. — Revenons à notre énoncé général en supposant, comme nous l'avons dit, $n = 3$, et considérons les r expressions

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_r u + \beta_r v + \gamma_r w, \end{array}\right.$$

où u, v, w désignent trois entiers algébriques indéterminés, et les lettres α, β, γ, affectées d'indices, des entiers algébriques donnés; on suppose que, pour chaque couple d'entiers distincts, h, k, pris dans la suite $1, 2, \dots, r$, les trois différences

$$\alpha_h - \alpha_k, \qquad \beta_h - \beta_k, \qquad \gamma_h - \gamma_k$$

ne sont pas toutes nulles, et il s'agit d'établir que l'on peut, suivant quelque loi déterminée, trouver pour les entiers u, v, w un système de valeurs telles, que les valeurs correspondantes des r expressions (35) soient toutes distinctes entre elles. En d'autres termes, il s'agit d'établir que si l'on forme les $\frac{r(r-1)}{2}$ expressions

$$(\alpha_h - \alpha_k)u + (\beta_h - \beta_k)v + (\gamma_h - \gamma_k)w,$$

on peut, suivant quelque loi déterminée, trouver pour les entiers u, v, w un système de valeurs telles, que les valeurs correspondantes de ces $\frac{r(r-1)}{2}$ expressions soient toutes différentes de zéro.

Or, c'est ce qui résulte immédiatement de l'alinéa I.

[5] Nous pouvons formuler maintenant la propriété suivante :

Désignant par a, b, ... des entiers algébriques indéterminés, en nombre n, on suppose que les divers systèmes de valeurs particulières dont ces entiers sont susceptibles se trouvent rangés suivant une loi arbitraire, mais sans omission ni répétition, sur la file illimitée

$$(a_1, b_1, \dots), (a_2, b_2, \dots), \dots\dots, (a_k, b_k, \dots), \dots\dots,$$

et on considère un système de $2n+1$ variantes [1] associées,

$$\left\{\begin{array}{l} u_k, v_k, \dots\dots, \\ \mathrm{N}_k, \\ \upsilon_k, \varphi_k, \dots\dots, \end{array}\right.$$

---

[1] Nous nommons *variante* un nombre variable dépendant d'un entier positif indéterminé, ou *indice*, auquel on peut donner des valeurs arbitraires.

défini comme il suit : les n premières, u_k, v_k, ..., sont, pour toute valeur de l'indice k, des entiers algébriques rendant distinctes entre elles les valeurs des k expressions

$$\begin{cases} a_1 u_k + b_1 v_k + \ldots\ldots, \\ a_2 u_k + b_2 v_k + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_k u_k + b_k v_k + \ldots\ldots \end{cases}$$

(d'après ce qui a été vu au n° **4**, cette condition peut être réalisée d'une foule de manières); la variante suivante, N_k, est, pour toute valeur de k, un entier positif au moins égal à la plus grande des valeurs absolues de ces mêmes expressions; les n dernières, υ_k, φ_k, ..., sont réelles et complètement arbitraires.

Soient maintenant $x, y, \ldots.$ des variables indépendantes imaginaires en nombre n, et r_x, r_y, ... des constantes positives (>0) en même nombre; sur les circonférences de rayons r_x, r_y, ... respectivement décrites des origines comme centres dans les plans de notation graphique des n variables $x, y, \ldots$, on considère le groupe, $\mathfrak{g}_k$, des $2N_k + 1$ points

$$(36)\qquad \begin{cases} x = r_x e^{i\left(\upsilon_k + \frac{2l\pi u_k}{2N_k+1}\right)}, \\ y = r_y e^{i\left(\varphi_k + \frac{2l\pi v_k}{2N_k+1}\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots;\right. \\ \left. l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2N_k\right) \end{cases}$$

(obtenu en inscrivant dans chacune des n circonférences un certain polygone régulier de $2N_k + 1$ sommets, et associant les sommets de même rang des n polygones).

Cela étant, *si une série bi-entière en $x, y, \ldots.$,*

$$(37)\qquad A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} \ldots + \ldots\ldots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \ldots + \ldots\ldots$$

(où les A désignent des coefficients constants), *est absolument convergente sur les circonférences de rayons r_x, r_y, ... respectivement décrites des origines comme centres, et si, quelque petite que soit la constante positive ω, la suite formée par les groupes*

$$(38)\qquad \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \mathfrak{g}_k,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

en renferme une infinité en tous les points desquels la somme de la série (considérée exclusivement sur les circonférences dont il s'agit) *présente un module moindre que* ω, *les coefficients de la série sont tous nuls.*

Par exemple, la nullité de la somme de la série en tous les points des groupes (38) entraîne la nullité de tous les coefficients.

I. — *Si l'on désigne par* m *un entier positif, et par* s *un entier algébrique, la somme des puissances* $s^{\text{ièmes}}$ *des* m *quantités*

$$(39) \qquad e^0 = 1, \quad e^{\frac{2\pi i}{m}}, \quad e^{\frac{4\pi i}{m}}, \quad \dots\dots\dots, \quad e^{\frac{2(m-1)\pi i}{m}}$$

est égale à m *ou à zéro, suivant que* s *est ou non divisible par* m.

Effectivement, les quantités (39) sont données par la formule

$$e^{\frac{2k\pi i}{m}} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

et l'on a, puisque s est entier,

$$\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^s = e^{\frac{2ks\pi i}{m}}.$$

Si donc s est divisible par m, $\frac{s}{m}$ est égal à un certain entier h, et l'on a

$$e^{\frac{2ks\pi i}{m}} = e^{2kh\pi i} = 1;$$

chaque terme de la somme à calculer a donc pour valeur l'unité, d'où résulte que cette somme a pour valeur m. Si au contraire s n'est pas divisible par m, $\frac{s}{m}$ n'est pas un entier, et la quantité $e^{\frac{2s\pi i}{m}}$, raison de la progression géométrique

$$e^0, \quad e^{\frac{2s\pi i}{m}}, \quad e^{\frac{4s\pi i}{m}}, \quad \dots\dots\dots, \quad e^{\frac{2(m-1)s\pi i}{m}},$$

qu'il s'agit de sommer, est différente de 1 : on a alors, en vertu d'une identité algébrique élémentaire,

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} e^{\frac{2ks\pi i}{m}} = \frac{e^0 - e^{\frac{2ms\pi i}{m}}}{1 - e^{\frac{2s\pi i}{m}}} = \frac{e^0 - e^{2s\pi i}}{1 - e^{\frac{2s\pi i}{m}}} = 0.$$

II. — *Soient m un entier positif;*

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots\ldots$$

n entiers algébriques;

$$u,\ v,\ \ldots\ldots$$

n autres entiers algébriques;

$$\upsilon,\ \varphi,\ \ldots\ldots$$

n valeurs réelles quelconques;

$$r_x,\ r_y,\ \ldots\ldots$$

n valeurs positives quelconques.

Cela étant, *si, dans le monôme*

$$x^\alpha y^\beta \ldots\ldots,$$

on opère successivement les m substitutions

$$(40)\qquad \begin{cases} x = r_x e^{i\left(\upsilon + \frac{2l\pi u}{m}\right)}, \\ y = r_y e^{i\left(\varphi + \frac{2l\pi v}{m}\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ m-1), \end{cases}$$

la somme des m résultats est égale à

$$m r_x^\alpha r_y^\beta \ldots\ldots e^{i(\alpha\upsilon + \beta\varphi + \ldots)}$$

ou à zéro, suivant que l'entier

$$\alpha u + \beta v + \ldots\ldots$$

est ou non divisible par m.

Effectivement, si, désignant par t une valeur réelle quelconque, on fait

$$x = r_x e^{i(\upsilon + tu)}, \quad y = r_y e^{i(\varphi + tv)}, \quad \ldots\ldots,$$

on a

$$x^\alpha y^\beta \ldots\ldots = r_x^{\ \alpha} r_y^{\ \beta} \ldots\ldots e^{i(\alpha\upsilon+\beta\varphi+\ldots)} e^{it(\alpha u+\beta v+\ldots)}$$
$$= r_x^{\ \alpha} r_y^{\ \beta} \ldots\ldots e^{i(\alpha\upsilon+\beta\varphi+\ldots)} (e^{it})^{\alpha u+\beta v+\ldots};$$

si donc on donne à t, comme dans les substitutions (40), les m valeurs successives

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \frac{2(m-1)\pi}{m},$$

la somme des m résultats a pour valeur le produit de

$$r_x^{\ \alpha} r_y^{\ \beta} \ldots\ldots e^{i(\alpha\upsilon+\beta\varphi+\ldots)}$$

par la somme

$$(e^0)^{\alpha u+\beta v+\ldots} + \left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^{\alpha u+\beta v+\ldots} + \left(e^{\frac{4\pi i}{m}}\right)^{\alpha u+\beta v+\ldots}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \left(e^{\frac{2(m-1)\pi i}{m}}\right)^{\alpha u+\beta v+\ldots}.$$

Cela étant, il suffit de se reporter à l'alinéa I.

III. — *Les mêmes notations étant adoptées que dans notre énoncé général, si l'on désigne en outre par* $P_k(x, y, \ldots.)$ *la somme,*

$$A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} \ldots + \ldots\ldots\ldots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \ldots,$$

des k *premiers termes de la série* (37), *le polynôme*

$$(41) \quad \begin{cases} P_{p+q}(x, y, \ldots) = A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + A_p x^{a_p} y^{b_p} \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{p+q} x^{a_{p+q}} y^{b_{p+q}} \ldots \end{cases}$$

acquiert, pour quelqu'une des $2N_{p+q}+1$ *substitutions*

$$(42) \quad \begin{cases} x = r_x e^{i\left(\upsilon_{p+q} + \frac{2l\pi u_{p+q}}{2N_{p+q}+1}\right)}, \\ y = r_y e^{i\left(\varphi_{p+q} + \frac{2l\pi v_{p+q}}{2N_{p+q}+1}\right)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 2N_{p+q}), \end{cases}$$

un module supérieur ou au moins égal à la quantité

$$r_x^{\ a_p} r_y^{\ b_p} \ldots \bmod A_p.$$

[Les substitutions (42) se déduisent des substitutions (36) en supposant dans ces dernières $k = p + q$].

Effectivement, l'identité (41) peut s'écrire sous la forme

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} x^{-a_p}y^{-b_p}\ldots \mathrm{P}_{p+q}(x, y, \ldots) = \mathrm{A}_1 x^{a_1-a_p}y^{b_1-b_p}\ldots &+ \mathrm{A}_2 x^{a_2-a_p}y^{b_2-b_p}\ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{A}_p x^0 y^0 \ldots \\ &+ \ldots\ldots + \mathrm{A}_{p+q} x^{a_{p+q}-a_p} y^{b_{p+q}-b_p}\ldots \end{aligned}\right.$$

Dans cette dernière identité, opérons les $2\mathrm{N}_{p+q} + 1$ substitutions (42), et ajoutons membre à membre les $2\mathrm{N}_{p+q} + 1$ relations ainsi obtenues. En vertu de l'alinéa II, les $2\mathrm{N}_{p+q} + 1$ résultats partiels provenant de l'un des monômes,

$$\mathrm{A}x^\alpha y^\beta \ldots,$$

qui figurent au second membre de (43), ont pour somme, ou bien

$$(2\mathrm{N}_{p+q} + 1)\mathrm{A}r_x^{\ \alpha} r_y^{\ \beta} \ldots e^{i(\alpha\upsilon_{p+q} + \beta\varphi_{p+q} + \ldots)},$$

ou bien zéro, suivant que, pour le monôme considéré, l'entier $\alpha\upsilon_{p+q} + \beta\varphi_{p+q} + \ldots$ est ou non divisible par $2\mathrm{N}_{p+q} + 1$. D'autre part, pour les divers monômes dont il s'agit, cet entier prend des valeurs algébriques toutes distinctes entre elles, avec des valeurs absolues toutes inférieures à $2\mathrm{N}_{p+q} + 1$: car, d'après la définition même des variantes u_k, v_k, $\ldots$, N_k, les $p + q$ expressions

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 u_{p+q} + b_1 v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ a_2 u_{p+q} + b_2 v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{p+q} u_{p+q} + b_{p+q} v_{p+q} + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

ont des valeurs algébriques toutes distinctes entre elles, avec des valeurs absolues au plus égales à N_{p+q}, et il en résulte manifestement que les $p + q$ expressions

$$\left\{\begin{array}{l} (a_1 - a_p) u_{p+q} + (b_1 - b_p) v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ (a_2 - a_p) u_{p+q} + (b_2 - b_p) v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad 0 \,.\, u_{p+q} + 0 \,.\, v_{p+q} + \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{p+q} - a_p) u_{p+q} + (b_{p+q} - b_p) v_{p+q} + \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} (a_1 u_{p+q} + b_1 v_{p+q} + \ldots\ldots) - (a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots), \\ (a_2 u_{p+q} + b_2 v_{p+q} + \ldots\ldots) - (a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots) - (a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (a_{p+q} u_{p+q} + b_{p+q} v_{p+q} + \ldots\ldots) - (a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\ldots), \end{cases}$$

ont elles-mêmes des valeurs algébriques toutes distinctes entre elles, avec des valeurs absolues au plus égales à $2N_{p+q}$. En conséquence, et exception faite pour le monôme $A_p x^0 y^0 \ldots$, auquel correspond une valeur nulle de $\alpha u_{p+q} + \beta v_{p+q} + \ldots$ (puisque, pour lui, les exposants α, β, $\ldots$ sont tous nuls), les résultats partiels fournis par un même monôme du second membre de (43) ont une somme nulle, et, dans les $2N_{p+q} + 1$ relations précédemment ajoutées membre à membre, les seconds membres ont pour somme $(2N_{p+q} + 1)A_p$. En multipliant alors par $r_x^{a_p} r_y^{b_p} \ldots$ les deux membres de la relation obtenue par addition, il viendra

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{l=2N_{p+q}} & e^{-i\left[a_p \upsilon_{p+q} + b_p \varphi_{p+q} + \ldots + \frac{2l\pi}{2N_{p+q}+1}\left(a_p u_{p+q} + b_p v_{p+q} + \ldots\right)\right]} \\ & \times P_{p+q}\left[r_x e^{i\left(\upsilon_{p+q} + \frac{2l\pi u_{p+q}}{2N_{p+q}+1}\right)}, r_y e^{i\left(\varphi_{p+q} + \frac{2l\pi v_{p+q}}{2N_{p+q}+1}\right)}, \ldots\right] \\ = {} & (2N_{p+q} + 1) A_p r_x^{a_p} r_y^{b_p} \ldots \end{aligned}$$

Dans cette dernière relation, la somme des $2N_{p+q} + 1$ termes du premier membre a même module que le second membre; elle a donc pour module

$$(2N_{p+q} + 1) r_x^{a_p} r_y^{b_p} \ldots \bmod A_p,$$

et il résulte de là que quelqu'un de ces $2N_{p+q} + 1$ termes possède un module au moins égal à

$$r_x^{a_p} r_y^{b_p} \ldots \bmod A_p; \tag{44}$$

dès lors, quelqu'une des substitutions (42) rend le module de $P_{p+q}(x, y, \ldots)$ au moins égal à la quantité (44). C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. — Revenons à notre énoncé général et à la série bi-entière proposée (37) : cette dernière est supposée absolument convergente sur les circonférences de rayons r_x, r_y, $\ldots$ respectivement décrites des origines comme centres, et, quelque petite que soit la constante positive ω, la suite formée par les groupes (38) en renferme une infinité en tous les points desquels la somme de la série (considérée exclusivement sur les circonférences dont il s'agit) présente un module moindre que ω. Cela étant, il s'agit d'établir qu'en désignant par p un entier positif donné, on a nécessairement $\mathrm{mod}\, A_p = 0$.

Posons en effet, comme ci-dessus (III),

$$P_k(x, y, \ldots) = A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} \ldots + \ldots\ldots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \ldots;$$

posons, de plus,

$$R_k(x, y, \ldots) = A_{k+1} x^{a_{k+1}} y^{b_{k+1}} \ldots + A_{k+2} x^{a_{k+2}} y^{b_{k+2}} \ldots + \ldots\ldots,$$

et

$$\varepsilon_k(x, y, \ldots) = \mathrm{mod}\, P_k(x, y, \ldots) - \mathrm{mod}\, R_k(x, y, \ldots). \tag{45}$$

En désignant par α une constante positive arbitrairement petite, il résulte de notre hypothèse que, pour une infinité de valeurs de q, la somme,

$$P_{p+q}(x, y, \ldots) + R_{p+q}(x, y, \ldots),$$

de la série (37) présente, en tous les points du groupe (42), un module moindre que $\frac{\alpha}{2}$; à plus forte raison en est-il de même de $\varepsilon_{p+q}(x, y, \ldots)$. D'autre part, la série bi-entière (37) étant absolument convergente sur les circonférences de rayons r_x, r_y, ..., la quantité

$$r_x^{a_{k+1}} r_y^{b_{k+1}} \ldots \mathrm{mod}\, A_{k+1} + r_x^{a_{k+2}} r_y^{b_{k+2}} \ldots \mathrm{mod}\, A_{k+2} + \ldots$$

tombe, à partir de k suffisamment grand, au-dessous de $\frac{\alpha}{2}$: à plus forte raison le module de $R_{p+q}(x, y, \ldots)$, est-il, à partir de q suffisamment grand, moindre que $\frac{\alpha}{2}$ tout le long de ces circonférences. En conséquence, la somme

$$\varepsilon_{p+q}(x, y, \ldots) + \mathrm{mod}\, R_{p+q}(x, y, \ldots),$$

qui n'est autre, d'après (45), que le module de $P_{p+q}(x, y, \ldots)$, présente, pour quelque valeur de q, en tous les points du groupe (42), un module moindre que α. Finalement, en vertu de l'alinéa III, on a, quel que soit q, en l'un au moins des points (42),

$$r_x^{a_p} r_y^{b_p} \ldots \mathrm{mod}\, A_p \leqq \mathrm{mod}\, P_{p+q}(x, y, \ldots);$$

et comme, pour quelque valeur de q, le second membre de cette inégalité, évalué en l'un quelconque des points (42), tombe au-dessous de α, le premier membre, $r_x^{a_p} r_y^{b_p} \dots \bmod A_p$, indépendant de q, et où p a une valeur fixe, est nécessairement inférieur à α; il est donc rigoureusement nul, puisque la petitesse de α est arbitraire. Les rayons $r_x, r_y, \dots$ étant d'ailleurs plus grands que zéro, on ne peut manquer d'avoir $\bmod A_p = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

[**6**] *Lorsqu'une série bi-entière en $x, y, \dots$ admet,* comme dans l'énoncé du n° **2**, *une région de convergence formée de couronnes circulaires associées, il faut et il suffit, pour que sa somme y soit identiquement nulle, que les coefficients de la série soient tous nuls.*

La condition est évidemment suffisante, et sa nécessité, comme on va le voir, se déduit immédiatement de la propriété exposée au numéro précédent.

En effet, si, dans chacune des couronnes circulaires, on trace, entre les deux circonférences qui la limitent, une circonférence concentrique, la série est absolument convergente tout le long des circonférences intérieures ainsi tracées; soient $r_x, r_y, \dots$ les rayons de ces dernières. Les mêmes notations étant adoptées qu'au n° **5**, la somme de la série, constamment nulle par hypothèse, l'est, en particulier, en tous les points des groupes (38); la série a donc nécessairement tous ses coefficients nuls.

On déduit de là le corollaire suivant, qu'il nous suffira de formuler :

Lorsque deux séries bi-entières en $x, y, \dots$ admettent une région de convergence commune formée de couronnes circulaires associées, il faut et il suffit, pour que leurs sommes y soient identiquement égales, que leurs termes semblables soient pourvus de coefficients respectivement égaux.

Examen de quelques cas où la somme d'une série bi-entière peut devenir infinie.

[**7**] Supposons que la série bi-entière

$$A_1 x^{a_1} y^{b_1} \dots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} \dots + \dots\dots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \dots + \dots\dots$$

converge dans la région

$$\begin{cases} R'_x < \bmod x & (0 \leqq R'_x), \\ R'_y < \bmod y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

[qui se déduit de (1) en y supposant infinie la constante positive R_x]; supposons, de plus, qu'elle contienne quelque terme *effectif* (c'est-à-dire à coefficient non nul) *où l'exposant de x soit supérieur à zéro.*

Cela étant, *la substitution aux n variables $x, y, \ldots.$ de n variantes respectives convenablement choisies, dont la première est infinie, transforme la somme $f(x, y, \ldots)$ de la série en une variante également infinie.*

Considérons en effet, dans la série, un terme effectif, $A_p x^{a_p} y^{b_p} \ldots$, où l'exposant a_p de x soit plus grand que zéro, et posons, comme plus haut (n° **5**, IV),

$$P_k(x, y, \ldots) = A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} \ldots + \ldots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \ldots,$$
$$R_k(x, y, \ldots) = A_{k+1} x^{a_{k+1}} y^{b_{k+1}} \ldots + A_{k+2} x^{a_{k+2}} y^{b_{k+2}} \ldots + \ldots,$$

d'où

$$f(x, y, \ldots) = P_k(x, y, \ldots) + R_k(x, y, \ldots). \tag{46}$$

Si, dans la région de convergence supposée, on considère n circonférences déterminées, respectivement décrites des origines comme centres, la série est absolument convergente tout le long de ces circonférences, et il existe dès lors, pour toute constante positive donnée, quelque valeur de k à partir de laquelle le module de $R_k(x, y, \ldots)$ tombe au-dessous de cette constante, de quelque façon que les valeurs de $x, y, \ldots$ aient été prises sur les circonférences en question; ou bien, si l'on fait $k = p + q$, quelque valeur de q à partir de laquelle le module de $R_{p+q}(x, y, \ldots)$ satisfait à cette même condition.

Donnons-nous maintenant à volonté $n + 1$ variantes positives dépendant d'un même indice g,

$$\xi_g, \quad \eta_g, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \varepsilon_g,$$

sous les seules conditions : 1° que l'on ne cesse d'avoir

$$R'_x < \xi_g, \quad R'_y < \eta_g < R_y, \quad \ldots\ldots\ldots;$$

2° que ces $n + 1$ variantes soient, la première, ξ_g, infinie avec g, la dernière, ε_g, infiniment petite, et chacune des autres, $\eta_g, \ldots.$, constamment comprise entre deux limites fixes, finies et différentes de zéro. Une valeur déterminée (quelconque) étant attribuée à l'indice g, si l'on fait varier $x, y, \ldots$ sur les circonférences de rayons respectifs $\xi_g, \eta_g, \ldots$, le module de $R_{p+q}(x, y, \ldots)$ tombera, à partir de q suffisamment grand, au-dessous de ε_g, de quelque façon que les valeurs $x, y, \ldots$ aient été prises sur elles. Choisissons alors, suivant une loi déterminée, une valeur, q_g, de q, donnant lieu à la relation

$$\operatorname{mod} R_{p+q_g}(x, y, \ldots) < \varepsilon_g,$$

désignons par υ_k, φ_k, ... des variantes réelles quelconques, en nombre n, et, attribuant à la notation N_k le même sens qu'au n° **5**, considérons les $2N_{p+q_g}$ substitutions qui se déduisent des formules (42) en y supposant

$$r_x, \quad r_y, \quad \ldots\ldots, \quad q$$

respectivement égaux à

$$\xi_g, \quad \eta_g, \quad \ldots\ldots, \quad q_g :$$

en vertu de l'alinéa III du n° **5**, le polynôme $P_{p+q_g}(x, y, \ldots)$ acquiert, pour quelqu'une d'entre elles, un module au moins égal à

$$\xi_g^{a_p}\eta_g^{b_p} \ldots\ldots \bmod A_p;$$

nous conviendrons, par exemple, de prendre la première qui jouit de cette propriété, et nous nommerons x_g, y_g, ... les valeurs correspondantes de x, y, ..., qui ont pour modules respectifs ξ_g, η_g, ..., et dont la première est, par suite, infinie avec g.

Cela étant, de la relation générale (46) on tire, notamment,

$$f(x_g, y_g, \ldots) = P_{p+q_g}(x_g, y_g, \ldots) + R_{p+q_g}(x_g, y_g, \ldots),$$

d'où

$$\bmod f(x_g, y_g, \ldots) \geqq \bmod P_{p+q_g}(x_g, y_g, \ldots) - \bmod R_{p+q_g}(x_g, y_g, \ldots),$$

et, à plus forte raison,

$$\bmod f(x_g, y_g, \ldots) \geqq \xi_g^{a_p}\eta_g^{b_p} \ldots \bmod A_p - \varepsilon_g.$$

Or, a_p et mod A_p étant supérieurs à zéro, ξ_g infini avec g, et chacune des variantes η_g, ... comprise, quel que soit g, entre deux limites fixes, finies et différentes de zéro, le produit $\xi_g^{a_p}\eta_g^{b_p} \ldots \bmod A_p$ est infini; ε_g est d'ailleurs infiniment petit : le second membre de la relation précédente est donc infini, et, à plus forte raison, le premier.

[**8**] Supposons que la série bi-entière

$$A_1 x^{a_1} y^{b_1} \ldots + A_2 x^{a_2} y^{b_2} + \ldots\ldots + A_k x^{a_k} y^{b_k} \ldots + \ldots\ldots$$

converge dans la région

$$\left\{\begin{array}{ll} o < \operatorname{mod} x < R_x & (R_x > o, \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (o \leqq R'_y < R_y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui se déduit de (1) en y supposant nulle la constante R'_x; supposons, de plus, qu'elle contienne quelque terme *effectif* (c'est-à-dire à coefficient non nul) *où l'exposant de x soit négatif.*

Cela étant, *la substitution à x, y, ... de n variantes respectives convenablement choisies, dont la première tend vers zéro sans jamais s'annuler, transforme la somme de la série en une variante infinie.*

Cette propriété se ramène à la précédente à l'aide du changement de variable

$$x = \frac{1}{x'}.$$

[**9**] Les énoncés des nos **7** et **8** contiennent comme cas particuliers respectifs les deux suivants :

Si une série bi-entière en x, admettant la région de convergence

$$\operatorname{mod} x > R'_x \qquad (R'x \geqq o),$$

contient quelque terme effectif à exposant positif ($>$ o), *la substitution à x d'une variante infinie convenablement choisie transforme la somme de la série en une variante également infinie.*

Si une série bi-entière en x, admettant la région de convergence

$$o < \operatorname{mod} x < R_x \qquad (R_x > o),$$

contient quelque terme effectif à exposant négatif, la substitution à x d'une variante convenablement choisie, tendant vers zéro sans jamais s'annuler, transforme la somme de la série en une variante infinie.

CHAPITRE II

Extension du théorème de Laurent au cas d'un nombre quelconque de variables.

Fonctions olotropes de n variables imaginaires admettant par rapport à chacune de celles-ci la période 2π; développement de ces fonctions en séries bi-entières d'exponentielles.

[**10**] Dans la première partie du chapitre I, nous avons fait voir que la somme d'une série procédant suivant les puissances entières, positives et négatives, des variables dont elle dépend, définit, dans une région de convergence, une fonction olotrope de ces variables : le présent chapitre II a pour objet l'examen des propositions réciproques.

Nous adopterons tout d'abord, au sujet des notations qui servent à définir une couronne circulaire, la convention suivante :

Considérons, dans le plan de notation graphique d'une variable imaginaire x, la couronne circulaire ayant pour centre l'origine et pour rayons R' et $R (0 \leqq R' < R)$: si, comme on est toujours libre de le faire, on pose

$$R' = e^{-r'}, \qquad R = e^{-r},$$

ou, en d'autres termes, si l'on désigne par r et r' les logarithmes népériens arithmétiques de $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'} (r < r' \leqq + \infty)$, la double inégalité

$$R' < \operatorname{mod} x < R,$$

qui définit la couronne circulaire en question, pourra tout aussi bien s'écrire sous la forme

$$e^{-r'} < \operatorname{mod} x < e^{-r}.$$

Dans ce qui suit, nous emploierons presque constamment cette dernière écriture.

Considérons maintenant, dans les plans de notation graphique des n variables imaginaires x, y, ..., les couronnes circulaires

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} e^{-r'_x} < \operatorname{mod} x < e^{-r_x} & (r_x < r'_x \leqq +\infty), \\ e^{-r'_y} < \operatorname{mod} y < e^{-r_y} & (r_y < r'_y \leqq +\infty), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{array}\right.$$

Posons ensuite

$$(2)\qquad x = e^{iz}, \qquad y = e^{iw}, \quad \dots\dots,$$

relations où

$$z = s + it, \qquad w = u + iv, \quad \dots\dots$$

désignent n variables nouvelles, et considérons, dans les plans de notation graphique de ces dernières, les bandes que définissent les inégalités

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} r_x < t < r'_x, \\ r_y < v < r'_y, \\ \dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

et dont chacune est, dans son plan, parallèle à l'axe des quantités réelles. A tout point $(z, w, \dots)$ de la région (3) correspond, en vertu des formules (2), un point déterminé de l'espace $[[x, y, \dots]]$, et ce point est situé dans la région (1) : car les inégalités (3) peuvent s'écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} -r'_x < -t < -r_x, \\ -r'_y < -v < -r_y, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

ou

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} e^{-r'_x} < e^{-t} < e^{-r_x}, \\ e^{-r'_y} < e^{-v} < e^{-r_y}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

et, d'autre part, les formules

$$x = e^{iz} = e^{i(s+it)}, \qquad y = e^{iw} = e^{i(u+iv)}, \quad \dots\dots$$

donnent

$$(5)\qquad \operatorname{mod} x = e^{-t}, \qquad \operatorname{mod} y = e^{-v}, \quad \dots\dots,$$

d'où résultent, par comparaison avec (4), les inégalités (1).

Inversement, à tout point x de la première couronne (1) correspondent, en vertu de la première formule (2), qui peut s'écrire sous la forme $z = \frac{1}{i} Lx$, une infinité de points du plan des z, tous situés sur une même parallèle à l'axe des quantités réelles, et dont les coordonnées s forment une progression arithmétique de raison 2π, indéfinie dans deux sens opposés ; ces points sont d'ailleurs situés dans la première bande (3), car la première ligne de (1), combinée avec la première formule (5), entraîne la première ligne de (4), ou, ce qui revient au même, la première ligne de (3). De même, à tout point y de la deuxième couronne (1) correspondent, en vertu de la deuxième formule (2), qui peut s'écrire sous la forme $w = \frac{1}{i} Ly$, une infinité de points du plan des w, tous situés sur une même parallèle à l'axe des quantités réelles, et dont les coordonnées u forment une progression arithmétique de raison 2π indéfinie dans deux sens opposés; les points dont il s'agit sont d'ailleurs situés dans la deuxième bande (3). Et ainsi jusqu'à la dernière des n couronnes (1). En conséquence, à tout point $(x, y, \ldots.)$ de la région (1) correspondent dans la région (3) une infinité de points $(z, w, \ldots.)$ qui se déduisent de l'un quelconque d'entre eux en ajoutant à chacune de ses n coordonnées (imaginaires) un multiple entier arbitraire de 2π.

Cela posé :

I. — *Pour qu'une série*

$$(6) \qquad \sum A_{\alpha,\beta\ldots} e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots,$$

bi-entière par rapport aux n exponentielles e^{iz}, e^{iw}, ..., admette la région de convergence (3), *il faut et il suffit qu'en opérant dans chacun de ses termes la substitution* (2), *la série bi-entière en $x, y, \ldots.$,*

$$(7) \qquad \sum A_{\alpha,\beta\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots,$$

qui en résulte, admette la région de convergence (1). Il suffit, pour l'apercevoir, d'observer que, lorsque le point $(z, w, \ldots)$ décrit toute la région (3), le point $(x, y, \ldots.)$ décrit (avec répétition) toute la région (1).

Cette condition étant supposée satisfaite, la série (7), absolument convergente dans toute l'étendue de la région (1), y définit, comme nous l'avons vu au chapitre I, une certaine fonction olotrope, $F(x, y, \ldots)$; il résulte alors du principe général de la composition des fonctions olotropes que *la série proposée* (6), *absolument conver-*

gente dans toute l'étendue de la région (3), y *définit* elle-même *une certaine fonction olotrope,*

$$f(z, w, \ldots\ldots) = \mathrm{F}(e^{iz}, e^{iw}, \ldots\ldots); \tag{8}$$

il est d'ailleurs manifeste que *cette dernière,* $f(z, w, \ldots.)$, *admet par rapport à chacune des variables la période* 2π, puisque tout terme de la série (6) jouit de cette propriété.

Il est bon de noter enfin que *la série bi-entière en* e^{iz}, e^{iw}, ... *obtenue en exécutant séparément sur tous les termes de la proposée* (6) *la dérivation d'ordres partiels* p, q, ... *admet, elle aussi, la région de convergence* (3), *et a pour somme* $\dfrac{\partial^{p+q+\cdots} f(z, w, \ldots.)}{\partial z^p \partial w^q \ldots.}$.

Effectivement, supposons d'abord qu'il s'agisse d'une dérivation première, celle, par exemple, qui intéresse la variable z. De la formule (8) on déduit, par l'algorithme des fonctions composées,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} i e^{iz} = i x \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}; \tag{9}$$

il résulte d'ailleurs du n° **2** qu'une série déduite de (7) par une même dérivation partielle exécutée sur tous ses termes admet, comme (7), la région de convergence (1), et exprime la dérivée semblable de $\mathrm{F}(x, y, \ldots.)$: en conséquence, la série

$$\sum \alpha \mathrm{A}_{\alpha, \beta, \ldots} x^{\alpha-1} y^{\beta} \ldots$$

admet la région de convergence (1) et exprime $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$; par suite, la série

$$i x \sum \alpha \mathrm{A}_{\alpha, \beta, \ldots} x^{\alpha-1} y^{\beta} \ldots \quad \text{ou} \quad \sum i \alpha \mathrm{A}_{\alpha, \beta, \ldots} x^{\alpha} y^{\beta} \ldots \tag{10}$$

admet cette même région de convergence et exprime $i x \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$. Si, dans cette dernière, (10), on opère finalement les substitutions (2), la série résultante,

$$\sum i \alpha \mathrm{A}_{\alpha, \beta, \ldots} e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots, \tag{11}$$

admettra, d'après ce qui a été dit au début du présent alinéa I, la région de convergence (3), et exprimera, en vertu de la formule (9), la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$. Or, la série (11) est précisément celle qu'on obtient en exécutant séparément sur tous les termes de (6) une dérivation première relative à z.

Ainsi, le point que nous avions en vue se trouve établi dans le cas d'une dérivation première. Cela étant, l'application répétée du même raisonnement prouvera son exactitude dans le cas d'une dérivation d'ordre quelconque ([1]).

II. — *Si une fonction*, $F(x, y, \ldots)$, *des variables imaginaires* $x, y, \ldots$. *peut, à l'intérieur des couronnes circulaires* (1), *se représenter par la somme d'une série bi-entière en* $x, y, \ldots$,

$$\sum A_{\alpha, \beta, \ldots} x^\alpha y^\beta \ldots\ldots,$$

la fonction des variables imaginaires $z, w, \ldots$. *qui s'en déduit par la substitution* (2) *peut, à l'intérieur des bandes* (3), *se représenter par la somme de la série*

$$\sum A_{\alpha, \beta, \ldots} e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots\ldots.$$

Car si l'on a, dans toute l'étendue de la région (1),

$$F(x, y, \ldots) = \sum A_{\alpha, \beta, \ldots} x^\alpha y^\beta \ldots\ldots,$$

([1]) On peut noter au passage l'observation suivante :

Considérons, dans le plan de notation graphique de chacune des n variables imaginaires $z, w, \ldots$, une bande indéfinie parallèle à l'axe des quantités réelles et *comprenant cet axe dans son intérieur*. Cela étant, *pour que la série* (6), *bi-entière par rapport aux* n *exponentielles* e^{iz}, e^{iw}, ..., *admette comme région de convergence une semblable association de* n *bandes, il faut et il suffit que la série auxiliaire* (n° **2**) *correspondant à* (7) *admette quelque système de rayons de convergence tous supérieurs à l'unité.*

Effectivement, une association de n bandes, dont chacune, considérée dans son plan, est parallèle à l'axe des quantités réelles et comprend cet axe dans son intérieur, peut se représenter par les inégalités (3), où $r_x, r_y, \ldots$. désignent des constantes toutes *négatives*, et $r'_x, r'_y, \ldots$. des constantes toutes *positives;* réciproquement.

Cela étant, si la série (6) admet la région de convergence (3), la série (7), d'après ce qui précède (I), admettra la région de convergence (1), et, par suite (n° **2**), la série auxiliaire qui correspond à (7) admettra comme rayons simultanés de convergence les quantités

$$(12) \qquad e^{-r_x}, \quad e^{-r_y}, \quad \ldots\ldots, \quad e^{r'_x}, \quad e^{r'_y}, \quad \ldots\ldots,$$

toutes supérieures à l'unité. La condition posée est donc nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante. Considérant, en effet, la série auxiliaire qui correspond à (7), supposons qu'elle admette des rayons simultanés de convergence tous supérieurs à l'unité : ceux-ci pourront être représentés par les notations (12), où $r_x, r_y, \ldots$. désignent des constantes toutes négatives, et $r'_x, r'_y, \ldots$. des constantes toutes positives. En vertu de notre proposition du n° **2**, la série (7) admettra alors la région de convergence (1), d'où résulte, en vertu de ce qui précède (I), que la série (6) admettra la région de convergence (3).

on a évidemment, dans toute l'étendue de la région (3),

$$F(e^{iz}, e^{iw}, \ldots) = \sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots\ldots$$

Réciproquement, *si une fonction*, $f(z, w, \ldots)$, *des variables imaginaires* z, w, ... *peut, à l'intérieur des bandes* (3), *se représenter par la somme d'une série bi-entière en* e^{iz}, e^{iw}, ...,

$$\sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots\ldots,$$

les formules (2) *la transforment en une fonction des variables imaginaires* x, y, ... *qui, à l'intérieur des couronnes circulaires* (1), *peut se représenter par la somme de la série*

$$\sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, x^\alpha y^\beta \ldots\ldots$$

Car si l'on a, dans toute l'étendue de la région (3),

$$f(z, w, \ldots) = \sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots,$$

la série

$$\sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, x^\alpha y^\beta \ldots\ldots$$

admet, en vertu de I, la région de convergence (1), et y définit une certaine fonction olotrope, $F(x, y, \ldots)$, en sorte qu'on a, dans toute l'étendue de (1), l'identité

$$F(x, y, \ldots) = \sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, x^\alpha y^\beta \ldots\ldots :$$

on aura donc, dans toute l'étendue de (3), l'identité

$$F(e^{iz}, e^{iw}, \ldots) = \sum A_{\alpha,\beta,\ldots}\, e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots = f(z, w, \ldots),$$

d'où résulte que $F(x, y, \ldots)$ est la fonction qui se déduit de $f(z, w, \ldots.)$ par la transformation (2). Cette fonction transformée peut donc, dans toute la région (1), s'exprimer par la série $\Sigma A_{\alpha,\beta,\ldots}\, x^\alpha y^\beta \ldots\ldots$

[**11**] *Toute fonction des variables imaginaires*

$$z = s + it, \qquad w = u + iv, \qquad \ldots\ldots,$$

olotrope à l'intérieur des bandes (3), *et admettant, par rapport à chacune des variables z, w, ..., la période 2π, peut, et d'une seule manière, se représenter, dans les mêmes limites, par la somme d'une série bi-entière en e^{iz}, e^{iw}, ...*

I. — Une pareille représentation n'est évidemment possible que d'une seule manière : car s'il y en avait deux, distinctes entre elles, il résulte de l'alinéa II du numéro précédent que la fonction de x, y, ... déduite de la proposée par la transformation (2) pourrait, de deux manières distinctes, se représenter dans la région (1) par la somme d'une série bi-entière en x, y, ... Or, c'est là une conclusion contraire à notre énoncé final du n° **6**.

Reste à établir la possibilité spécifiée. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'il y ait deux variables indépendantes,

$$z = s + it, \qquad w = u + iv,$$

et nous examinerons le cas d'une fonction, $f(z, w)$, olotrope à l'intérieur du système de bandes

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} r_x < t < r'_x, \\ r_y < v < r'_y, \end{cases}$$

et admettant par rapport à chacune des deux variables z, w la période 2π.

Considérons à cet effet, en même temps que les deux bandes données (13), deux bandes partielles qui leur soient respectivement *intérieures*, et qui en soient rapprochées par leurs bords autant qu'on le voudra; ces bandes partielles seront définies par les relations

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} r_x + \delta < t < r'_x - \delta, \\ r_y + \delta < v < r'_y - \delta, \end{cases}$$

où δ désigne une constante positive de petitesse arbitraire. Si l'on a égard, d'une part à cette petitesse arbitraire, d'autre part à la remarque faite au début du présent alinéa I, il est clair que la possibilité du développement, une fois établi pour l'intérieur des bandes (14), le sera par là même pour l'intérieur des bandes (13).

On se trouve donc ramené à établir la possibilité du développement pour l'intérieur des bandes (14). C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

II. — Désignant par $z_1 = s_1 + it_1$ une valeur particulière attribuée à z dans la première des deux bandes (14), découpons dans cette bande, par deux parallèles à l'axe des t dont la distance mutuelle soit égale à 2π, un rectangle, ABCD, contenant dans son *intérieur* le point z_1 (*fig.* 1) : en désignant par α une certaine quantité réelle, les côtés CD, AB, DA, CB, indéfiniment prolongés, ont respectivement pour équations

$$s = \alpha, \qquad s = \alpha + 2\pi, \qquad t = r_x + \delta, \qquad t = r'_x - \delta.$$

Désignant de même par $w_1 = u_1 + iv_1$ une valeur particulière attribuée à w dans la seconde des deux bandes (14), découpons dans cette bande, par deux parallèles à l'axe des v dont la distance mutuelle soit égale à 2π, un rectangle, EFGH, contenant dans son *intérieur* le point w_1 (*fig.* 1) : en désignant par β une certaine quantité réelle, les côtés GH, EF, HE, GF, indéfiniment prolongés, ont respectivement pour équations

$$u = \beta, \qquad u = \beta + 2\pi, \qquad v = r_y + \delta, \qquad v = r'_y - \delta.$$

Considérons maintenant le quotient

$$\frac{z - z_1}{1 - e^{i(z-z_1)}},$$

fonction de la seule variable z : ce quotient est visiblement olotrope dans quelque rectangle, $\mathfrak{S}_z$, comprenant à son intérieur le contour du rectangle ABCD et n'excédant pas la première des deux bandes (13); sa valeur numérique au point z_1 est d'ailleurs égale à $-\frac{1}{i}$.(1) Semblablement, le quotient

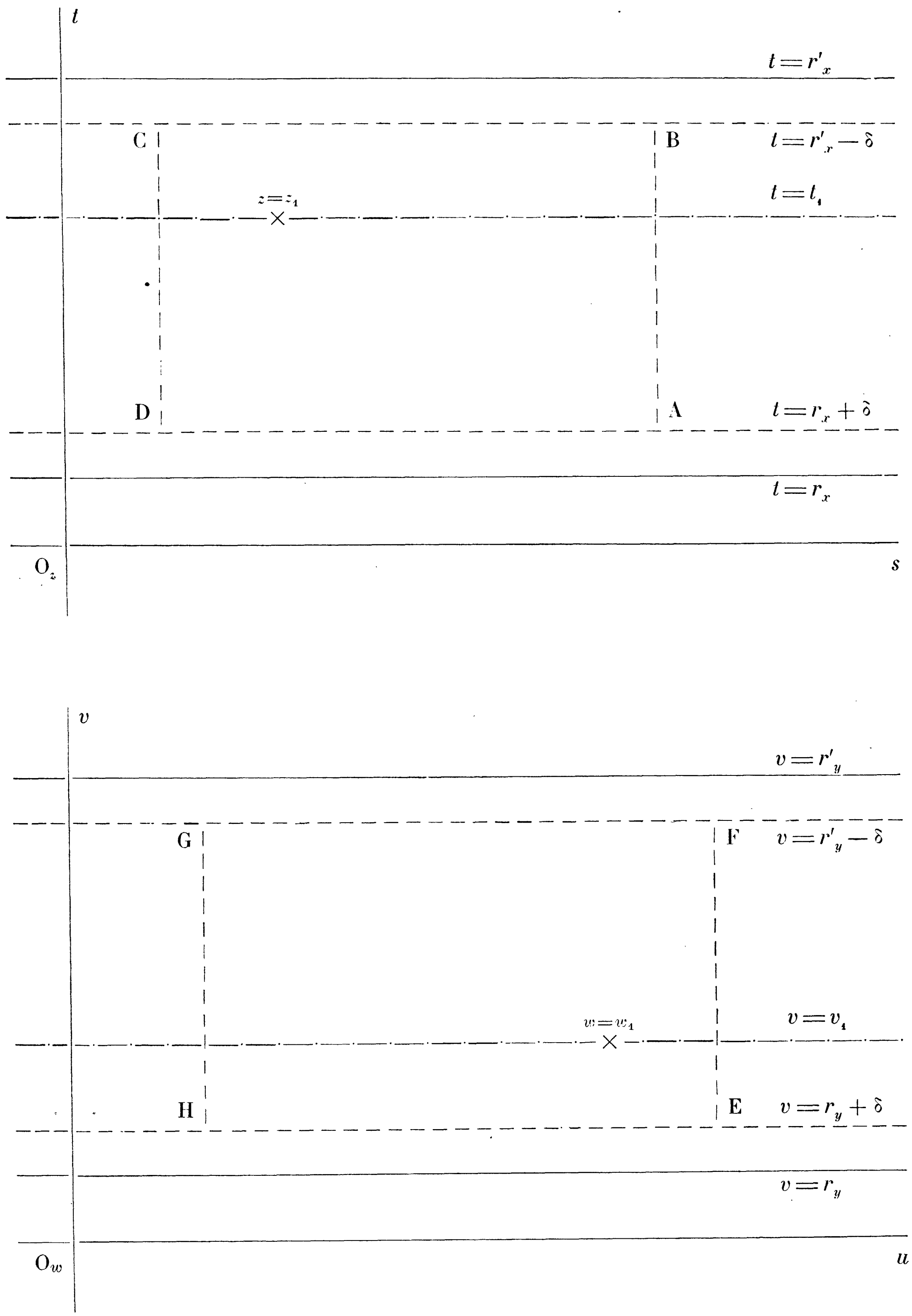
$$\frac{w - w_1}{1 - e^{i(w-w_1)}},$$

---

(1) En effet, si l'on désigne par k un entier arbitraire (positif, nul, ou négatif), le dénominateur $1 - e^{i(z-z_1)}$, indéfiniment olotrope, s'annule pour les diverses valeurs $z = z_1 + 2k\pi$, dont une seule, $z = z_1$, est un zéro du numérateur : toutes les autres sont donc des discontinuités du quotient.

Si, faisant abstraction de ces discontinuités, on considère la portion restante de l'espace $\big[[z]\big]$, le quotient y est déterminé pour toute valeur de z autre que z_1, et peut, dans le voisinage d'une semblable valeur, s'exprimer à l'aide d'un développement entier par rapport à l'accroissement de z.

Enfin, pour $z = z_1$, le quotient prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$: mais si, remplaçant



t
t = r'_x
C
B
t = r'_x − δ
z = z_1
t = t_1
D
A
t = r_x + δ
t = r_x
O_z
s
v
v = r'_y
G
F
v = r'_y − δ
w = w_1
v = v_1
H
E
v = r_y + δ
v = r_y
O_w
u

Fig. 1.

fonction de la seule variable w, est olotrope dans quelque rectangle, $\mathfrak{S}_w$, comprenant à son intérieur le contour du rectangle EFGH et n'excédant pas la deuxième bande (13), et il prend au point w_1 la valeur numérique $-\frac{1}{i}$. Il résulte de là que le produit

$$\frac{z - z_1}{1 - e^{i(z-z_1)}} \times \frac{w - w_1}{1 - e^{i(w-w_1)}},$$

dépendant des deux variables z, w, est olotrope dans la région, $(\mathfrak{S}_z, \mathfrak{S}_w)$, constituée par l'association des deux rectangles $\mathfrak{S}_z$, $\mathfrak{S}_w$, et qu'il prend au point (z_1, w_1) la valeur numérique $\frac{1}{i^2}$. En conséquence, si l'on a égard aux hypothèses faites sur $f(z, w)$ [alinéa I], la fonction

$$\varphi(z, w) = \frac{f(z, w) \cdot (z - z_1) \cdot (w - w_1)}{[1 - e^{i(z-z_1)}][1 - e^{i(w-w_1)}]},$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$f(z, w) \cdot \frac{z - z_1}{1 - e^{i(z-z_1)}} \cdot \frac{w - w_1}{1 - e^{i(w-w_1)}},$$

est olotrope dans cette même région $(\mathfrak{S}_z, \mathfrak{S}_w)$, et prend au point (z_1, w_1) la valeur numérique $\frac{1}{i^2} f(z_1, w_1)$.

---

l'exponentielle $e^{i(z-z_1)}$ par sa valeur

$$1 + \frac{i(z - z_1)}{1} + \frac{i^2(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots,$$

on l'écrit sous la forme

$$-\frac{z - z_1}{\frac{i(z - z_1)}{1} + \frac{i^2(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots},$$

et qu'on lui attribue conventionnellement, pour $z = z_1$, la valeur $-\frac{1}{i}$, il pourra, dans le voisinage de z_1, s'exprimer à l'aide de la formule

$$-\frac{1}{\frac{i}{1} + \frac{i^2(z - z_1)}{1 \cdot 2} + \ldots},$$

et, par suite, à l'aide d'un développement entier en $z - z_1$, ayant pour terme constant $-\frac{1}{i}$.

Considérons enfin la fonction

$$\psi(z, w) = \frac{f(z, w)}{[1 - e^{i(z-z_1)}][1 - e^{i(w-w_1)}]} : \tag{15}$$

cette dernière, égale à

$$\frac{\varphi(z, w)}{(z-z_1)(w-w_1)},$$

peut, d'après cela, être regardée comme le quotient par $(z-z_1)(w-w_1)$ d'une fonction de z, w olotrope dans la région $(\mathfrak{S}_z, \mathfrak{S}_w)$. Or, la région $(\mathfrak{S}_z, \mathfrak{S}_w)$ se trouvant constituée par l'association de deux aires rectangulaires, dont chacune est manifestement une « limite de région normale, limitée et monodromique » [1], il résulte d'une proposition classique (couramment appliquée dans le cas d'une seule variable, et pouvant s'étendre au cas de variables en nombre quelconque[2]) que la valeur de l'intégrale définie double

$$\int dw \int \psi(z, w)\,dz \quad \text{ou} \quad \int dw \int \frac{\varphi(z, w)}{(z-z_1)(w-w_1)}\,dz, \tag{16}$$

---

(1) Toute région *convexe* est par là même *monodromique*, ainsi qu'on peut rigoureusement l'établir (Voir *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° **73**).

Or, il est bien aisé de voir que, dans l'espace $\big[[z]\big]$ par exemple, la région définie à l'aide d'un système d'inégalités de la forme

$$s_0 < s < S, \qquad t_0 < t < T$$

satisfait à la définition de la convexité.

Soient, en effet, $z' = s' + it'$, $z'' = s'' + it''$ deux points arbitrairement choisis dans cette région, tels, par suite, que l'on ait

$$s_0 < s' < S, \qquad t_0 < t' < T,$$
$$s_0 < s'' < S, \qquad t_0 < t'' < T.$$

En désignant par μ une indéterminée réelle n'excédant pas l'intervalle de 0 à 1 $(0 \leqq \mu \leqq 1)$, on aura aussi, et cela quel que soit μ dans cet intervalle,

$$(1-\mu)s_0 + \mu s_0 < (1-\mu)s' + \mu s'' < (1-\mu)S + \mu S,$$
$$(1-\mu)t_0 + \mu t_0 < (1-\mu)t' + \mu t'' < (1-\mu)T + \mu T,$$

c'est-à-dire

$$s_0 < s' + \mu(s'' - s') < S, \qquad t_0 < t' + \mu(t'' - t') < T.$$

Le *segment rectiligne*,

$$z = z' + \mu(z'' - z') \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1),$$

qui joint les deux points z', z'', est donc situé tout entier dans la région considérée.

(2) *Sur l'intégration définie dans le cas d'un nombre quelconque de variables* (Mémoire non encore paru).

prise de A en A et de E en E sur les contours des rectangles ABCD, EFGH, parcourus dans le sens direct, est égale à $(2\pi i)^2 \varphi(z_1, w_1)$, et, par suite, à $4\pi^2 f(z_1, w_1)$.

Elle est d'ailleurs la somme des seize intégrales définies que l'on obtient en considérant, au lieu des contours ABCD et EFGH, parcourus dans le sens indiqué, les seize combinaisons des quatre côtés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ du premier rectangle avec les quatre côtés $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{HE}$ du second. Je dis que deux combinaisons obtenues en remplaçant l'un par l'autre, soit les deux côtés $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, parallèles à l'axe des t dans le premier rectangle, soit les deux côtés $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$, parallèles à l'axe des v dans le second, fournissent deux intégrales définies de valeurs opposées. S'il en est ainsi, les résultats fournis par les quatre combinaisons

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF}), \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}), \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GH}), \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HE}) \tag{17}$$

se trouveront respectivement détruits par ceux des quatre combinaisons

$$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}), \quad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FG}), \quad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{GH}), \quad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HE}); \tag{18}$$

de même, les résultats fournis par les deux combinaisons

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EF}) \tag{19}$$

se trouveront respectivement détruits par ceux des deux combinaisons

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{GH}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{GH}); \tag{20}$$

et il ne restera plus à considérer que les quatre combinaisons des deux côtés $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, parallèles à l'axe des s, avec les deux côtés $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{HE}$, parallèles à l'axe des u, c'est-à-dire

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FG}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{FG}), \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HE}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{HE}). \tag{21}$$

Pour établir la possibilité de cette simplification, considérons, par exemple, les deux combinaisons

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}), \quad (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FG}), \tag{22}$$

qui se correspondent dans (17) et (18), et comparons tout d'abord l'intégrale définie donnée par la première $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$, avec celle que donnerait le parcours $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FG})$.

Si, considérant l'équation

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial w} = \psi(z, w),$$

à l'inconnue Ω, on l'intègre à partir du point initial, (A, F), du parcours $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$ avec une détermination initiale identiquement nulle, l'intégrale particulière obtenue est assimilable à une fonction olotrope proprement dite de z, w dans un système de rectangles suffisamment minces entourant respectivement les côtés AB, FG [1], et l'on pourra, à l'aide de cette intégrale particulière, former l'intégrale définie qui correspond au parcours $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$. Semblablement, si, à partir du point initial, (D, F), du parcours $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FG})$, on intègre l'équation (23) avec une détermination initiale identiquement nulle, la nouvelle intégrale particulière obtenue est assimilable à une fonction olotrope proprement dite dans un système de rectangles suffisamment minces entourant respectivement les côtés DC, FG, et l'on pourra, à l'aide de cette nouvelle intégrale particulière, former l'intégrale définie qui correspond au parcours $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FG})$. Or, la fonction $\psi(z, w)$, définie par la formule (15), admettant, comme son numérateur et son dénominateur, la période 2π par rapport à l'une quelconque des deux variables z, w, son développement taylorien à partir de (A, F) est le même qu'à partir de (D, F); d'autre part, les deux intégrales particulières considérées de (23) ont l'une et l'autre, comme nous l'avons supposé, une détermination initiale identiquement nulle : de la réunion de ces deux circonstances il résulte évidemment qu'elles ont l'une et l'autre le même développement taylorien, d'abord à partir de leurs points initiaux respectifs (A, F) et (D, F), puis à partir de deux points correspondants quelconques des parcours respectifs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$ et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{FG})$. En conséquence, les intégrales définies qui se rapportent respectivement à ces deux parcours ont la même valeur numérique, d'où résulte, si l'on revient aux deux parcours $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FG})$, que ceux-ci donnent des résultats opposés.

En raisonnant ainsi pour les diverses combinaisons qui se correspondent, soit dans (17) et (18), soit dans (19) et (20), on voit, comme nous l'avions annoncé, qu'il suffit de considérer les quatre combinaisons (21). On a donc, en remplaçant $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{CB}$, puis $\overrightarrow{FG}$ par $\overrightarrow{GF}$, et en tenant compte des changements de signe qui peuvent en résulter pour telle ou telle des quatre intégrales définies,

$$4\pi^2 f(z_1, w_1) = \int\int_{(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{GF})} - \int\int_{(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{GF})} - \int\int_{(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{HE})} + \int\int_{(\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{HE})}.$$

[1] Voir la note (2) de la page 44.

Finalement, et toujours en vertu de la nature périodique de la fonction $\psi(z, w)$ ou (15), on pourra, dans les quatre parcours

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{GF}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{GF}), \quad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{HE}), \quad (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{HE}),$$

opérer les changements suivants :

sur la droite $t = r_x + \delta$, remplacer le segment $\overrightarrow{DA}$, d'amplitude 2π, par le segment $\overrightarrow{D'A'}$, ayant pour abscisse initiale zéro et pour abscisse finale 2π;

sur la droite $t = r'_x - \delta$, remplacer le segment $\overrightarrow{CB}$ par celui, $\overrightarrow{C'B'}$, où l'abscisse croît de zéro à 2π;

et, de même, sur les droites $v = r_y + \delta$, $v = r'_y - \delta$, remplacer les segments respectifs $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{GF}$ par ceux, $\overrightarrow{H'E'}$, $\overrightarrow{G'F'}$, où l'abscisse croît de 0 à 2π (*fig.* 2).

Il viendra ainsi :

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\pi^2 f(z_1, w_1) = &\iint_{(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{G'F'})} - \iint_{(\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{G'F'})} - \iint_{(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{H'E'})} \\ &+ \iint_{(\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{H'E'})} \end{aligned} \right.$$

Nous allons, dans ce qui suit, transformer successivement les quatre termes du second membre de la formule (24).

III. — *A*. A cet effet, désignons par ε une constante positive moindre que δ; traçons ensuite par le point z_1, dans le plan de notation graphique de la variable z, la parallèle $t = t_1$ à l'axe des quantités réelles, et considérons les deux bandes comprises, l'une entre les deux droites $t = t_1 + \varepsilon$, $t = r'_x - \varepsilon$, l'autre entre les deux droites $t = t_1 - \varepsilon$, $t = r_x + \varepsilon$ (*fig.* 2) : chacune de ces deux bandes est manifestement une « limite de région normale, limitée et monodromique ». Traçons de même par le point w_1, dans le plan de notation graphique de la variable w, la parallèle $v = v_1$ à l'axe des quantités réelles, et considérons les deux bandes comprises, l'une entre les deux droites $v = v_1 + \varepsilon$, $v = r'_y - \varepsilon$, l'autre entre les deux droites $v = v_1 - \varepsilon$, $v = r_y + \varepsilon$ (*fig.* 2) : chacune de ces deux bandes est encore une « limite de région normale, limitée et monodromique ». On peut d'ailleurs, de quatre manières différentes, associer une des deux bandes du plan des z avec une des deux bandes du plan des w, et prendre :

soit la bande supérieure du plan des z avec la bande supérieure du plan des w;
soit la bande inférieure du plan des z avec la bande supérieure du plan des w;
soit la bande supérieure du plan des z avec la bande inférieure du plan des w;
soit, enfin, la bande inférieure du plan des z avec la bande inférieure du plan des w.

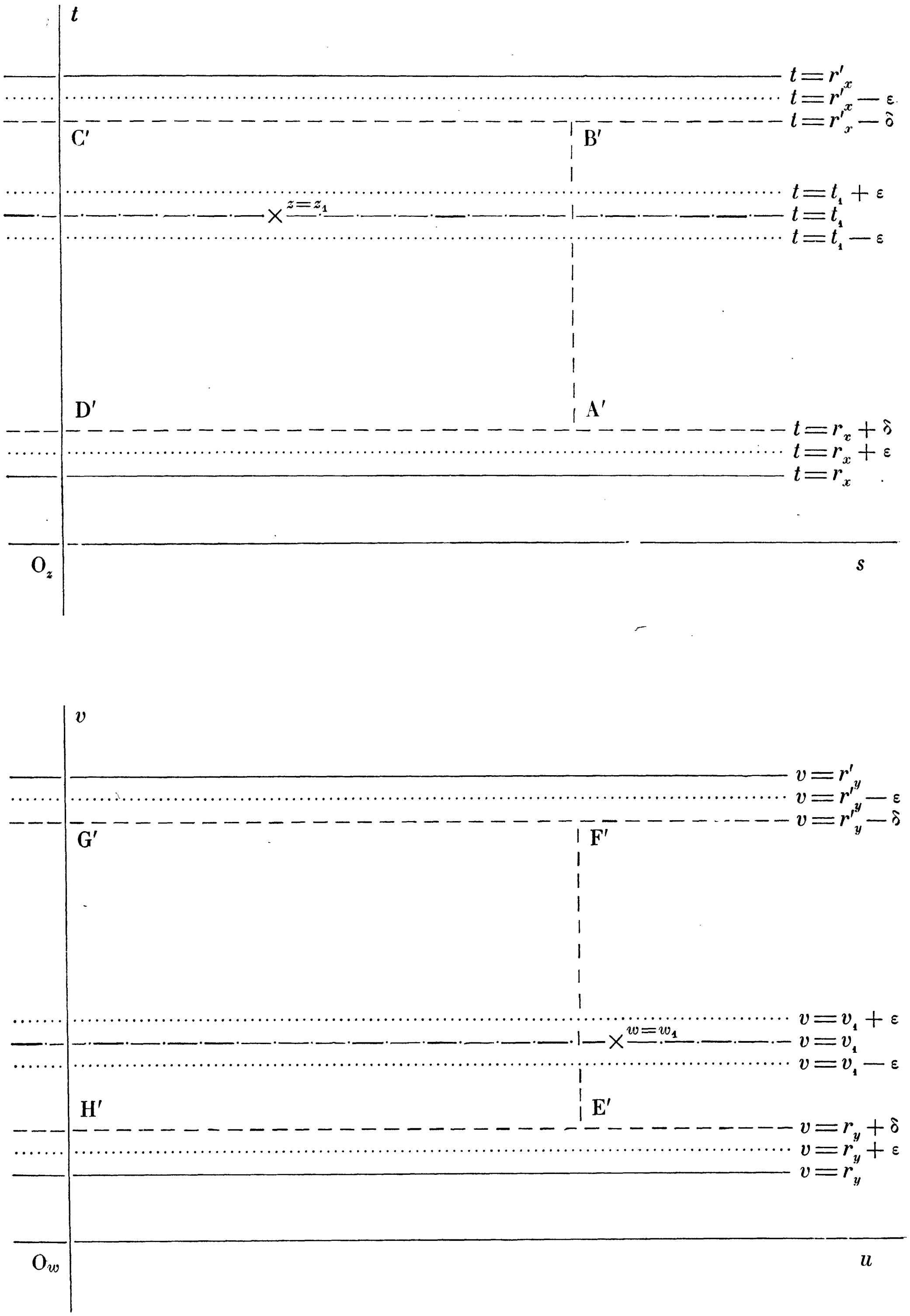

t
t = r'_x
t = r'_x — ε
t = r'_x — δ
C'
B'
t = t_1 + ε
z = z_1
t = t_1
t = t_1 — ε
D'
A'
t = r_x + δ
t = r_x + ε
t = r_x
O_z
s
v
v = r'_y
v = r'_y — ε
v = r'_y — δ
G'
F'
v = v_1 + ε
w = w_1
v = v_1
v = v_1 — ε
H'
E'
v = r_y + δ
v = r_y + ε
v = r_y
O_w
u

FIG. 2.

Dans l'une quelconque des quatre régions ainsi obtenues, la fonction $\psi(z, w)$, soumise aux signes $\int\int$, est olotrope.

B. Cela posé, pour transformer l'expression

$$\int\int_{(\overrightarrow{C'B'},\ \overrightarrow{G'F'})},$$

qui est la première des quatre intégrales figurant au second membre de (24), nous considérerons la région de l'espace $[[z, w]]$ formée par la première association de bandes.

Dans la bande supérieure du plan des z, le module de $e^{i(z-z_1)}$ est constamment moindre qu'une quantité positive fixe plus petite que 1 : on a en effet

$$e^{i(z-z_1)} = e^{i(s+it-s_1-it_1)} = e^{t_1-t}e^{i(s-s_1)},$$

d'où résulte que $e^{i(z-z_1)}$ a pour module e^{t_1-t}; ce module tombe d'ailleurs constamment au-dessous de la valeur $e^{-\varepsilon}$, qu'il acquiert sur le bord inférieur de la bande, et, par suite, au-dessous d'une quantité positive fixe, λ, moindre que 1. Donc, dans ces limites, la fraction $\frac{1}{1-e^{i(z-z_1)}}$ pourra se développer suivant la série

$$1 + e^{i(z-z_1)} + e^{2i(z-z_1)} + \ldots\ldots + e^{ki(z-z_1)} + \ldots\ldots,$$

entière par rapport à $e^{i(z-z_1)}$ avec des coefficients tous égaux à 1, et les termes de cette série garderont des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda^k + \ldots\ldots$$

De même, dans la bande supérieure du plan des w, le module, e^{v_1-v}, de $e^{i(w-w_1)}$ tombe constamment au-dessous de $e^{-\varepsilon}$, donc au-dessous d'une quantité positive fixe, μ, plus petite que 1 [1]. Dans ces limites, la fraction $\frac{1}{1-e^{i(w-w_1)}}$ pourra se développer suivant la série

$$1 + e^{i(w-w_1)} + e^{2i(w-w_1)} + \ldots\ldots + e^{li(w-w_1)} + \ldots\ldots,$$

[1] Les constantes λ, μ sont égales entre elles; ce détail n'a d'ailleurs aucune importance.

entière par rapport à $e^{i(w-w_1)}$ avec des coefficients tous égaux à 1, et les termes de cette série garderont des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$1+\mu+\mu^2+\ldots\ldots\ldots+\mu^l+\ldots\ldots.$$

En conséquence, dans toute la région formée par l'association des deux bandes supérieures, la quantité

$$\frac{1}{[1-e^{i(z-z_1)}][1-e^{i(w-w_1)}]}$$

pourra se développer suivant la série

$$\sum_{k,l} e^{ki(z-z_1)}e^{li(w-w_1)} \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots \\ l=0,1,2,\ldots \end{pmatrix},$$

entière par rapport aux deux exponentielles $e^{i(z-z_1)}$, $e^{i(w-w_1)}$ avec des coefficients tous égaux à 1, et la fonction $\psi(z, w)$ ou (15) suivant la série

$$\sum_{k,l} f(z,w)\, e^{ki(z-z_1)}e^{li(w-w_1)}. \tag{25}$$

D'ailleurs, la fonction $f(z, w)$, admettant par rapport à chacune de ses variables la période 2π, garde un module toujours inférieur à une certaine constante positive, M, dans la région que forment les deux bandes supérieures auxquelles on adjoindrait leurs bords; à plus forte raison ce module restera-t-il inférieur à M dans la région que forment les deux bandes supérieures, exclusion faite de leurs bords. Donc, dans tout l'intérieur des deux bandes, et en particulier sur les segments $\overrightarrow{C'B'}$, $\overrightarrow{G'F'}$, les termes de la série (25) conservent des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$\sum_{k,l} M\lambda^k\mu^l \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots \\ l=0,1,2,\ldots \end{pmatrix},$$

Cela étant, la première des quatre intégrales qui figurent au second membre de (24) pourra s'exprimer par la série (¹)

$$\sum_{k,l}\int\int_{(\overrightarrow{C'B'},\ \overrightarrow{G'F'})} f(z,w)\, e^{ki(z-z_1)}e^{li(w-w_1)}\,dz\,dw,$$

(¹) Voir la note (2) de la page 44.

ou bien, en mettant en dehors des signes $\int\int$ un facteur indépendant des variables z, w,

$$(26)\qquad \sum_{k,l} e^{-kiz_1}e^{-liw_1}\int\int_{(\overrightarrow{C'B'},\ \overrightarrow{G'F'})} f(z,w)\,e^{kiz}e^{liw}\,dz\,dw \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots \\ l=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}.$$

C. Transformons maintenant le deuxième terme du second membre de (24), savoir

$$-\int\int_{(\overrightarrow{D'A'},\ \overrightarrow{G'F'})}.$$

A cet effet, nous mettrons la quantité

$$\frac{f(z,w)}{[1-e^{i(z-z_1)}][1-e^{i(w-w_1)}]},$$

soumise aux signes $\int\int$, sous la forme

$$\frac{f(z,w)\,e^{i(z_1-z)}}{[e^{i(z_1-z)}-1][1-e^{i(w-w_1)}]};$$

il en résultera pour notre intégrale l'écriture

$$\int\int_{(\overrightarrow{D'A'},\ \overrightarrow{G'F'})}\frac{f(z,w)\,e^{i(z_1-z)}}{[1-e^{i(z_1-z)}][1-e^{i(w-w_1)}]}\,dz\,dw.$$

En même temps, nous considérerons la région de l'espace $[[z, w]]$ obtenue en associant la bande inférieure du plan des z avec la bande supérieure du plan des w.

Dans la bande inférieure du plan des z, le module, e^{t-t_1}, de $e^{i(z_1-z)}$ tombe constamment au-dessous de $e^{-\varepsilon}=\lambda<1$, valeur qu'il acquiert sur le bord supérieur de la bande. Dans la bande supérieure du plan des w, le module, e^{v_1-v}, de $e^{i(w-w_1)}$ tombe constamment au-dessous de μ, comme dans *B*. Donc, dans la région formée par l'association de ces deux bandes, la quantité

$$\frac{f(z,w)\,e^{i(z_1-z)}}{[1-e^{i(z_1-z)}][1-e^{i(w-w_1)}]}$$

pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,\,l} f(z,\ w)\, e^{(k+1)i(z_1-z)}\, e^{li(w-w_1)} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et les termes de cette dernière garderont des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$\sum_{k,\,l} \mathrm{M}' \lambda^{k+1} \mu^{l} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où M' désigne une constante positive convenablement choisie.

Cela étant, le deuxième terme du second membre de la formule (24) pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,\,l} \int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{D'A'}},\ \overrightarrow{\mathrm{G'F'}})} f(z,\ w)\, e^{(k+1)i(z_1-z)}\, e^{li(w-w_1)}\, dz\, dw,$$

ou bien, en mettant en dehors des signes $\int\!\!\int$ un facteur indépendant de z, w,

$$\sum_{k,\,l} e^{(k+1)iz_1}\, e^{-liw_1} \int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{D'A'}},\ \overrightarrow{\mathrm{G'F'}})} f(z,\ w)\, e^{-(k+1)iz}\, e^{liw}\, dz\, dw \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

D. Pour transformer à son tour le troisième terme du second membre de la formule (24), savoir

$$-\int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{C'B'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})},$$

nous mettrons la quantité soumise aux signes $\int\!\!\int$ sous la forme

$$\frac{f(z,\ w)\, e^{i(w_1-w)}}{\left[1 - e^{i(z-z_1)}\right]\left[e^{i(w_1-w)} - 1\right]};$$

il en résultera, pour ce troisième terme, l'écriture

$$\int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{C'B'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})} \frac{f(z,\ w)\, e^{i(w_1-w)}}{\left[1 - e^{i(z-z_1)}\right]\left[1 - e^{i(w_1-w)}\right]}\, dz\, dw.$$

En même temps, nous considérerons la région de l'espace $[[z, w]]$ obtenue en associant la bande supérieure du plan des z avec la bande inférieure du plan des w.

Dans la bande supérieure du plan des z, le module, e^{t_1-t}, de $e^{i(z-z_1)}$ tombe constamment, comme dans B, au-dessous de λ. Dans la bande inférieure du plan des w, le module, e^{v-v_1}, de $e^{i(w_1-w)}$ tombe constamment au-dessous de $e^{-\varepsilon}=\mu<1$, valeur qu'il acquiert sur le bord supérieur de la bande. Donc, dans la région formée par l'association de ces deux bandes, la quantité

$$\frac{f(z, w)\, e^{i(w_1-w)}}{\left[1-e^{i(z-z_1)}\right]\left[1-e^{i(w_1-w)}\right]}$$

pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,l} f(z, w)\, e^{ki(z-z_1)}\, e^{(l+1)i(w_1-w)} \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \ldots \\ l=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et les termes de cette dernière garderont des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$\sum_{k,l} \mathrm{M}''\lambda^k\mu^{l+1} \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \ldots \\ l=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où M'' désigne une constante positive convenablement choisie.

Cela étant, le troisième terme du second membre de la formule (24) pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,l} \int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{C'B'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})} f(z, w)\, e^{ki(z-z_1)}\, e^{(l+i)i(w_1-w)}\, dz\, dw,$$

ou bien, en mettant en dehors des signes $\int\int$ un facteur indépendant de z, w,

$$\sum_{k,l} e^{-kiz_1} e^{(l+1)iw_1} \int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{C'B'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})} f(z, w)\, e^{kiz}\, e^{-(l+1)iw}\, dz\, dw \qquad \begin{pmatrix} k=0, 1, 2, \ldots \\ l=0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

E. Pour transformer, enfin, le dernier terme du second membre de la formule (24), savoir

$$\int\!\!\int_{(\overrightarrow{\mathrm{D'A'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})},$$

nous mettrons la quantité soumise aux signes $\int\int$ sous la forme

$$\frac{f(z, w)\, e^{i(z_1-z)}\, e^{i(w_1-w)}]}{[1 - e^{i(z_1-z)}][1 - e^{i(w_1-w)}]}.$$

En même temps, nous considérerons la région de l'espace $[[z, w]]$ obtenue en associant la bande inférieure du plan des z avec la bande inférieure du plan des w.

Dans la bande inférieure du plan des z, le module, e^{t-t_1}, de $e^{i(z_1-z)}$ tombe constamment, comme dans C, au-dessous de λ; dans la bande inférieure du plan des w, le module, e^{v-v_1}, de $e^{i(w_1-w)}$ tombe constamment, comme dans D, au-dessous de μ. Donc, dans la région formée par l'association de ces deux bandes, la quantité soumise aux signes $\int\int$ pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,\, l} f(z, w)\, e^{(k+1)i(z_1-z)}\, e^{(l+1)i(w_1-w)} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

et les termes de cette dernière garderont des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants (positifs) de la série convergente

$$\sum_{k,\, l} \mathrm{M}'''\lambda^{k+1}\mu^{l+1} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

où M''' désigne une constante positive convenablement choisie.

Cela étant, le dernier terme du second membre de la formule (24) pourra s'exprimer par la série

$$\sum_{k,\, l} \int\int_{(\overrightarrow{\mathrm{D'A'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})} f(z, w)\, e^{(k+1)i(z_1-z)}\, e^{(l+1)i(w_1-w)}\, dz\, dw,$$

ou bien, en mettant en dehors des signes $\int\int$ un facteur indépendant de z, w,

$$\sum_{k,\, l} e^{(k+1)iz_1}\, e^{(l+1)iw_1} \int\int_{(\overrightarrow{\mathrm{D'A'}},\ \overrightarrow{\mathrm{H'E'}})} e^{-(k+1)iz}\, e^{-(l+1)iw} f(z, w)\, dz\, dw \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots \\ l = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

IV. — En rapprochant de la formule (24) les quatre résultats successivement obtenus dans l'alinéa III (B, C, D, E), on voit qu'en désignant par z_1, w_1, deux valeurs prises respectivement à l'intérieur de deux bandes (14), la quantité $f(z_1, w_1)$

peut se représenter à l'aide d'une série procédant suivant les puissances entières, positives et négatives, des deux exponentielles e^{iz_1}, e^{iw_1}, et que les coefficients de cette série sont indépendants du choix de (z_1, w_1) dans les limites spécifiées. On peut donc écrire la formule

$$f(z_1, w_1) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_{k,l}\, e^{kiz_1} e^{liw_1},$$

où $A_{k,l}$ désigne un coefficient constant, ou bien, en remplaçant les notations z_1, w_1 par les notations z, w,

$$f(z, w) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} A_{k,l}\, e^{kiz} e^{liw}.$$

C'est ce qu'il s'agissait d'établir (I).

Extension du théorème de Laurent.

[**12**] *Toute fonction des variables imaginaires x, y, ... olotrope à l'intérieur des couronnes circulaires*

$$\left\{\begin{array}{ll} R'_x < \operatorname{mod} x < R_x & (0 \leqq R'_x < R_x), \\ R'_y < \operatorname{mod} y < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{array}\right.$$

peut, dans ces limites, se représenter par la somme d'une série bi-entière en x, y, ...

Une pareille représentation n'est d'ailleurs possible que d'une seule manière.

Posons en effet

$$\begin{array}{ll} R'_x = e^{-r'_x}, & R_x = e^{-r_x}, \\ R'_y = e^{-r'_y}, & R_y = e^{-r_y}, \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array}$$

La fonction donnée, étant, par hypothèse, olotrope à l'intérieur des couronnes circulaires (1), devient, par la substitution

$$x = e^{iz}, \quad y = e^{iw}, \quad \dots\dots,$$

une fonction des variables

$$z = s + it, \quad w = u + iv, \quad \ldots\ldots$$

olotrope à l'intérieur des bandes (3) [voir au n° **10** les formules (1) et (3)] : cela résulte immédiatement du principe général de la composition des fonctions olotropes. Il est d'ailleurs manifeste que la fonction transformée admet la période 2π par rapport à chacune des variables $z, w, \ldots$. Elle pourra donc, en vertu de la proposition établie au numéro précédent **11**, se représenter dans la région (3) par la somme d'une série

$$\sum_{\alpha, \beta, \ldots} A_{\alpha, \beta, \ldots} e^{i\alpha z} e^{i\beta w} \ldots\ldots,$$

bi-entière en $e^{iz}, e^{iw}, \ldots$. En conséquence (n° **10**, II), la fonction proposée pourra, dans la région (1), se représenter par la somme de la série

$$\sum_{\alpha, \beta, \ldots} A_{\alpha, \beta, \ldots} x^{\alpha} y^{\beta} \ldots\ldots,$$

bi-entière en $x, y, \ldots$.

Une pareille représentation n'est d'ailleurs possible que d'une seule manière, en vertu de notre énoncé final du n° **6**.

[**13**] L'énoncé qui vient d'être formulé suppose que la fonction donnée soit olotrope dans la région formée par une association de couronnes circulaires : examinons le cas où la région supposée d'olotropie est formée par une association de couronnes circulaires et d'aires circulaires. Nous aurons alors l'énoncé suivant :

Toute fonction $f(x, \ldots, z, \ldots)$, des variables imaginaires

$$x, \quad \ldots\ldots, \quad z, \quad \ldots\ldots,$$

olotrope dans la région formée par l'association des aires circulaires

$$(27) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \text{mod}\, x < R_x & (0 < R_x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \right.$$

et des couronnes circulaires

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} R'_z < \text{mod}\, z < R_z & (0 \leqq R'_z < R_z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \end{array} \right.$$

peut, et d'une seule manière, se représenter dans ces limites par la somme d'une série entière en $x, \ldots$ et bi-entière en $z, \ldots$.

Effectivement, si la fonction $f(x, \ldots, z, \ldots)$ est olotrope dans la région spécifiée par l'énoncé, elle l'est, à plus forte raison, dans la région formée par l'association des couronnes circulaires

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 < \operatorname{mod} x < \mathrm{R}_x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{R}'_z < \operatorname{mod} z < \mathrm{R}_z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

et peut, dans toute l'étendue de (29), se représenter par la somme d'une série bi-entière en $x, \ldots, z, \ldots$. Je dis d'abord que les puissances négatives d'une variable quelconque du groupe $x, \ldots$, de la variable x par exemple, ne peuvent figurer dans ce développement.

En effet, si, sans excéder la région (29), on donne aux variables restantes du groupe $x, \ldots$ et aux diverses variables du groupe $z, \ldots$ des valeurs déterminées (quelconques), et que l'on fasse tendre x vers zéro, la somme du développement, qui ne cesse de représenter $f(x, \ldots, z, \ldots)$, tend vers une limite finie et déterminée. Si donc on ordonne le développement par rapport aux puissances entières, positives et négatives, de la variable x, tous les coefficients des puissances négatives de cette variable doivent s'annuler, parce que, dans l'hypothèse contraire, la somme pourrait devenir infinie pour x tendant vers zéro (n° **8**). Et comme cette nullité doit avoir lieu pour toutes valeurs attribuées aux variables autres que x à l'intérieur des couronnes circulaires correspondantes, il résulte de la proposition établie au n° **6** que les diverses séries qui servent de coefficients aux puissances négatives de x ont elles-mêmes leurs coefficients tous nuls. Le développement qui, dans la région (29), représente $f(x, \ldots, z, \ldots)$, ne contient donc aucun terme effectif où x figure avec un exposant négatif. Et le même raisonnement est applicable pour toute variable du groupe $x, \ldots$.

La fonction $f(x, \ldots, z, \ldots)$, olotrope, par hypothèse, dans la région [(27), (28)], peut donc, dans toute l'étendue de la région (29), se représenter par la somme d'un développement entier par rapport aux variables $x, \ldots$ et bi-entier par rapport aux variables $z, \ldots$. D'ailleurs, ce développement, absolument convergent, en vertu du n° **2**, dans la région de convergence (29), ne cessera évidemment pas de l'être si l'on y remplace par zéro telles ou telles des variables du groupe $x, \ldots$, et, par suite, il admet la région de convergence [(27), (28)] : il résulte de là (n° **3**) que sa somme, $\mathrm{F}(x, \ldots, z, \ldots)$, est olotrope dans cette région. Ainsi, les deux fonctions $f(x, \ldots, z, \ldots)$, $\mathrm{F}(x, \ldots, z, \ldots)$ sont l'une et l'autre olotropes dans la région [(27), (28)]. Cela étant, l'identité

$$f(x, \ldots, z, \ldots) = \mathrm{F}(x, \ldots, z, \ldots),$$

établie pour la région (29), a nécessairement lieu dans toute l'étendue de la région [(27), (28)].

La fonction $f(x, \ldots, z, \ldots)$ est donc représentable comme l'indique notre énoncé; cette représentation, en vertu du nº **6**, n'est d'ailleurs possible que d'une seule manière.

[**14**] Si, dans les plans de notation graphique des variables, on considère une association de couronnes et d'aires circulaires ayant pour centres des points donnés quelconques, on aura l'énoncé suivant :

Toute fonction des variables imaginaires $x, \ldots, z, \ldots$, olotrope dans la région formée par l'association des aires circulaires

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{mod}(x - x_0) < R_x & (0 < R_x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \end{array}\right.$$

de centres $x_0, \ldots$, avec les couronnes circulaires

$$\left\{\begin{array}{ll} R'_z < \operatorname{mod}(z - z_0) < R_z & (0 \leqq R'_z < R_z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \end{array}\right.$$

de centres $z_0, \ldots$, peut, et d'une seule manière, se représenter dans ces limites par la somme d'une série entière en $x - x_0, \ldots$ et bi-entière en $z - z_0, \ldots$

L'un ou l'autre des deux groupes de variables

$$\begin{array}{l} x, \ldots\ldots\ldots, \\ z, \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

peut d'ailleurs, éventuellement, ne pas exister. En conséquence :

Toute fonction des variables imaginaires $x, y, \ldots$, olotrope à l'intérieur des couronnes circulaires

$$\left\{\begin{array}{ll} R'_x < \operatorname{mod}(x - x_0) < R_x & (0 \leqq R'_x < R_x), \\ R'_y < \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y & (0 \leqq R'_y < R_y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \end{array}\right.$$

de centres $x_0, y_0, \ldots$, peut, et d'une seule manière, se représenter dans ces limites par la somme d'une série bi-entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$

Toute fonction des variables imaginaires x, y, ..., olotrope à l'intérieur des cercles

$$\begin{cases} \text{mod}\,(x - x_0) < R_x & (0 < R_x), \\ \text{mod}\,(y - y_0) < R_y & (0 < R_y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

de centres x_0, y_0, ..., *peut, et d'une seule manière, se représenter dans ces limites par la somme d'une série entière en* $x - x_0$, $y - y_0$, ... [1].

---

[1] Nous rappellerons ici l'application intéressante que l'on fait du théorème de Laurent à l'étude des discontinuités isolées des fonctions d'une seule variable imaginaire, x.

Considérant, dans l'espace $\big[[x]\big]$, une région normale, S, désignons par $f(x)$ une fonction dont la valeur soit bien définie dans toute l'étendue de cette région, sauf pour certaines valeurs de x, en nombre limité ou illimité, que nous supposerons être des singularités de la fonction; supposons en outre que ces singularités soient *isolées* les unes des autres, c'est-à-dire qu'un cercle ayant pour centre l'une quelconque d'entre elles, et de rayon suffisamment petit, n'en contienne aucune autre à son intérieur; supposons, enfin, que si l'on considère, dans S, un point quelconque, x_0, ne coïncidant avec aucune des singularités, on puisse toujours, autour de ce point pris comme centre, assigner quelque cercle dans tout l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ ne présente aucune singularité et soit représentable à l'aide d'un développement entier en $x - x_0$.

Cela étant, *les singularités de la fonction dans la région* S *ne peuvent être que polaires ou essentielles;* en d'autres termes, si l'on désigne par a l'une de ces singularités, on peut assigner quelque constante positive, δ, telle que, dans tout l'intérieur de la couronne circulaire

$$0 < \text{mod}\,(x - a) < \delta, \tag{30}$$

la fonction $f(x)$ soit représentable à l'aide d'une série procédant suivant les puissances entières, positives et négatives, de $x - a$.

Car, en supposant δ assez petit pour que le cercle de rayon δ décrit de a comme centre ne contienne aucune autre singularité, la fonction $f(x)$ est olotrope à l'intérieur de la couronne circulaire (30), et, par suite, représentable dans toute cette étendue à l'aide d'une pareille série.