ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

ÉDOUARD HUSSON

Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 8 (1906), p. 73-152

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__73_0>

RECHERCHE DES INTÉGRALES ALGÉBRIQUES

DANS LE MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT AUTOUR D'UN POINT FIXE,

PAR M. ÉDOUARD HUSSON,

Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée de Lille.

INTRODUCTION.

1. Le système des six équations différentielles définissant le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe admet trois intégrales premières algébriques et un dernier multiplicateur égal à l'unité.

Le problème de l'intégration formelle ou réduction aux quadratures est, par suite, ramené à la recherche d'une quatrième intégrale première, non fonction des intégrales connues.

Cette quatrième intégrale existe et est algébrique dans les deux cas particuliers, devenus classiques, d'Euler et de Lagrange.

Dans un Mémoire remarquable (*Acta mathematica,* t. XII) M^me^ Kovalevsky a mis en évidence un nouveau cas d'intégrabilité, et a obtenu la quatrième intégrale algébrique correspondante par la formation de deux équations intégrales.

Dès la publication du Mémoire de M^me^ Kovalevsky, le problème de la recherche de tous les cas dans lesquels il existe une quatrième intégrale algébrique a été posé.

2. M. Poincaré [1] a démontré l'impossibilité de l'existence d'une nouvelle intégrale algébrique si l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension n'est pas de révolution. En même temps, l'illustre géomètre a signalé dans une Note l'existence de résultats importants obtenus par M^me^ Kovalevsky.

« Je crois savoir, écrivait M. Poincaré, que M^me^ Kovalesky a découvert de

[1] *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* t. I.

nouveaux cas d'intégrabilité. Les notes qu'on a retrouvées après sa mort sont, malheureusement, insuffisantes pour permettre de reconstituer ses démonstrations et ses calculs. »

L'étude des problèmes de Mécanique admettant des intégrales algébriques a été mise au concours pour le prix Bordin de 1894, et dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (mars 1894) MM. Appell et Poincaré ont donné une indication d'où il résulte que la méthode employée par M[me] Kovalevsky était vraisemblablement celle des équations intégrales.

Le Mémoire présenté par M. Painlevé et couronné par l'Académie des Sciences contient les résultats les plus importants sur les propriétés générales des intégrales premières des équations de la Dynamique.

L'on peut préjuger que les recherches de l'éminent analyste premettront de décider, non seulement de l'existence d'une intégrale algébrique ou de nature déterminée, mais encore de la nature même de toutes les solutions possibles.

3. Un Mémoire intéressant, présenté au concours par M. Roger Liouville et inséré dans le Tome XX des *Acta mathematica,* contient des résultats dignes d'attention, relativement au mouvement du solide pesant autour d'un point fixe. M. R. Liouville s'est proposé d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une quatrième intégrale algébrique; depuis 1896 les conditions qu'il a indiquées ont été reproduites dans la plupart des Traités classiques et dans les journaux scientifiques

Les paragraphes I et III du Mémoire, consacrés à la recherche des conditions nécessaires, paraissent d'abord satisfaisants; mais une étude plus attentive permet de constater que les démonstrations sont au moins insuffisantes, et qu'il est impossible d'accepter les conclusions.

En fait, quoique les conditions trouvées par M. R. Liouville soient nécessaires, on ne peut les déduire des calculs indiqués, et, de plus, ces conditions ne sont pas suffisantes.

4. J'ai dû reprendre complètement, en admettant le résultat de M. Poincaré, la recherche des conditions d'existence d'une nouvelle intégrale algébrique.

On peut résumer les méthodes employées avec succès pour résoudre des questions du même genre, en disant qu'elles consistent à exprimer l'existence pour une solution particulière, et ensuite pour toutes les solutions infiniment voisines.

On peut opérer directement comme dans la méthode de Bruns (1), dont l'esprit

(1) *Problème des trois corps* (*Acta mathematica,* t. XI).

consiste à exprimer que l'intégrale algébrique convient pour les grandes vitesses, c'est-à-dire pour le mouvement rectiligne ou sensiblement rectiligne.

On peut introduire un paramètre dans les termes des équations différentielles, qui semblent avoir un rôle essentiel, et exprimer que l'intégrale convient pour la valeur nulle du paramètre et ensuite pour les valeurs infiniment petites. C'est sous cet aspect qu'apparaissent les recherches célèbres de M. Poincaré, sur le problème des trois corps, et de M. Painlevé [1], sur la généralisation du théorème de Bruns.

La méthode revient aussi à ordonner l'intégrale par rapport à certaines variables et l'on obtient ainsi une vérification et une interprétation précieuse des équations aux dérivées partielles qui se présentent.

5. Le Chapitre I a été dirigé, en se bornant aux cas de la Mécanique, vers la recherche explicite d'une intégrale possible.

J'établis d'abord, en perfectionnant une méthode employée par M. R. Liouville, que toute intégrale première algébrique est une combinaison algébrique d'intégrales premières rationnelles entières.

Pour la recherche des intégrales rationnelles entières j'ai utilisé les variables complexes, qui sont indiquées dans l'étude du cas de M^me^ Kovalevsky.

Il semble que la symétrie du système différentiel exige que l'on ordonne l'intégrale par rapport aux composantes p, q, r de la rotation instantanée, mais, si l'on opère ainsi, on constate que les systèmes d'équations aux dérivées partielles qui se présentent admettent toujours des polynomes comme solutions. On construit une série algébrique, dont les premiers termes peuvent être des polynomes, satisfaisant formellement au système différentiel. Pour obtenir des conditions d'existence d'une intégrale algébrique, il est nécessaire de calculer le $n^{\text{ième}}$ terme et d'arrêter le développement à ce $n^{\text{ième}}$ terme. Il n'y a exception, peut-être, que dans quelques cas particuliers.

C'est sans doute cette singularité qui ajoute à la difficulté du problème et qui contribue à infirmer les raisonnements de M. Liouville.

En ordonnant l'intégrale par rapport à $y_1 = p + qi$, $z_1 = \gamma + i\gamma'$, γ'' j'ai repris les solutions particulières indiquées par M. R. Liouville (§ III).

J'ai essayé en général d'éviter la recherche, parfois délicate, de relations algébriques entre transcendantes, et d'utiliser le plus possible la forme rationnelle entière de l'intégrale.

En appliquant sous ses divers aspects la méthode esquissée pour le calcul des termes successifs de l'intégrale ordonnée j'ai obtenu, en supposant les conditions initiales arbitraires, le résultat suivant :

---

(1) *Bulletin astronomique,* 1898.

Toute intégrale algébrique est une combinaison algébrique des intégrales classiques, sauf dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Mme Kovalevsky.

6. Dans le Chapitre II, j'ai repris l'étude du problème en employant une seconde méthode ayant même point de départ, mais dont les développements sont assez différents.

J'ai cherché à démontrer l'impossibilité de l'existence d'une intégrale algébrique nouvelle, cette intégrale étant présentée sous une forme quelconque, les lettres A, B, C désignant les moments d'inertie de la Mécanique ou des nombres positifs arbitraires.

En remplaçant y_1, z_1, γ'' par λy_1, λz_1, $\lambda\gamma''$ on déduit du système différentiel définissant le mouvement un système différentiel dépendant d'un paramètre λ; ce nouveau système doit admettre, quel que soit λ, une intégrale première algébrique non fonction des intégrales classiques.

On obtient des conditions nécessaires d'existence en écrivant la propriété précédente pour $\lambda = 0$, et ensuite pour λ infiniment petit.

Pour cela, on développe l'intégrale générale du système différentiel suivant les puissances de λ, et en substituant dans le développement de l'intégrale première suivant les puissances de λ ou de $\lambda^{\frac{1}{p}}$ on écrit que cette intégrale première prend une valeur constante.

Dans ce Chapitre II, il est nécessaire d'exprimer constamment que des transcendantes dépendant de paramètres arbitraires sont liées par une relation algébrique. J'ai pu arriver aux résultats sans considérer ces transcendantes dans toute leur généralité, soit à l'aide de lemmes abéliens préliminaires, soit en étudiant la nature de l'une de ces transcendantes.

On obtient finalement les conclusions du Chapitre II, quelle que soit la grandeur du rapport $\frac{C}{A}$.

Les méthodes d'intégration utilisées au Chapitre II peuvent s'appliquer pour achever les calculs dans le Chapitre I. Il suffit de ne laisser subsister qu'une variable, de façon à calculer les termes successifs de l'intégrale entière par quadratures.

J'ai tenu cependant à conserver les deux méthodes, car il m'a semblé qu'il pouvait être intéressant de juger de leurs avantages respectifs. La première, plus élémentaire, exige plus de calculs, mais elle donne des indications sur l'existence des intégrales premières particularisées, intégrales dont le résultat final fait ressortir l'importance. La seconde, plus délicate, mais plus concise, se rapproche, avec les modifications nécessaires, de la méthode appliquée systématiquement par M. Painlevé à la recherche des équations du second ordre, dont l'intégrale générale est uniforme.

En terminant ce travail, je suis heureux d'exprimer toute ma reconnaissance à MM. Appell et Painlevé pour leurs bienveillants conseils et l'affectueux intérêt qu'ils ont bien voulu prendre à mes recherches.

CHAPITRE I.

§ I. — Toute intégrale algébrique est une combinaison d'intégrales rationnelles entières.

7. Les équations différentielles du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe O peuvent toujours être ramenées à la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} = A_1 qr - \gamma' \sin\varepsilon, &&\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',\\ &A\frac{dq}{dt} = -A_1 rp + \gamma\sin\varepsilon - \gamma''\cos\varepsilon, &&\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,\\ &C\frac{dr}{dt} = \gamma'\cos\varepsilon, &&\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',\\ &\qquad A_1 = A - C. \end{aligned}\right.$$

Les axes Ox, Oy, Oz, liés au solide, sont trois axes de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie (supposé de révolution) relatif au point fixe, Oz l'axe de révolution, le plan xOz passant par le centre de gravité G, ε l'angle de OG avec le plan xOy.

En adoptant la forme précédente des équations différentielles on suppose $\frac{mg}{OG} = 1$, ce qui revient à adopter des unités convenables ou à imaginer que γ, γ', γ'' sont les produits des cosinus directeurs des axes liés au solide avec la direction de la pesanteur par la constante $\frac{mg}{OG}$.

On peut, pour les mêmes raisons, donner à A et C des valeurs numériques n'altérant pas le rapport $\frac{C}{A}$.

Les équations (1) ne sont pas altérées si l'on remplace p, q, r, γ, γ', γ'', t par λp, λq, λr, $\lambda^2\gamma$, $\lambda^2\gamma'$, $\lambda^2\gamma''$, $\lambda^{-1} t$.

Nous dirons qu'elles sont homogènes dans les dimensions, p, q, r étant de dimension 1; γ, γ', γ'' de dimension 2.

Théorème I. — *Toute intégrale première algébrique en p, q, r, γ, γ', γ'', et indépendante du temps, est une combinaison algébrique d'intégrales premières rationnelles et homogènes dans les dimensions.*

Ce théorème est bien connu. Je ne considérerai donc, dans ce qui suit, que des intégrales premières rationnelles en p, q, r, γ, γ', γ'', que j'appellerai simplement *intégrales rationnelles*. Si une telle intégrale est mise sous la forme $I = \frac{R}{S}$, je supposerai essentiellement que R et S sont deux polynomes en p, q, r, γ, γ', γ'', *ces polynomes étant premiers entre eux*, c'est-à-dire le quotient $\frac{R}{S}$ étant *irréductible*. J'appellerai *intégrale entière* toute intégrale I qui est un polynome en p, q, r, γ, γ', γ''.

Théorème II. — *Toute intégrale rationnelle est une combinaison algébrique d'intégrales rationnelles à coefficients réels.*

Soit en effet l'intégrale

$$I = \frac{R_1 + iR_2}{S_1 + iS_2}.$$

Les coefficients du système différentiel étant réels, l'expression

$$I' = \frac{R_1 - iR_2}{S_1 - iS_2}$$

est encore intégrale; il en est de même par suite des combinaisons réelles $I + I'$ et II'. De plus, ces deux combinaisons ne sont pas fonctions des intégrales connues, sinon il en serait de même de I.

Nous pourrons donc nous limiter aux intégrales rationnelles à coefficients réels [1].

Théorème III. — *Toute intégrale rationnelle, irréductible et homogène dans les dimensions, est le quotient de deux équations intégrales entières, les facteurs linéaires attachés à ces deux équations intégrales étant identiques.*

L'égalité $\frac{dI}{dt} = 0$ s'écrit

$$S\frac{dR}{dt} - R\frac{dS}{dt} = 0.$$

---

[1] Ces propriétés sont plus générales, ainsi que l'a montré M. Painlevé (*Bulletin astronomique*, 1898, p. 3-4).

Les polynomes R et S étant premiers entre eux, le polynome $\frac{dR}{dt}$ est divisible par R, et l'on a

$$\frac{dR}{dt} = \lambda R, \qquad \frac{dS}{dt} = \lambda S.$$

Nous désignerons les polynomes R et S, satisfaisant aux identités précédentes, sous le nom d'*équations intégrales*.

Le degré d'homogénéité du polynome $\frac{dR}{dt}$ surpasse d'une unité celui du polynome R. On a donc

$$\lambda = \lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des constantes numériques.

Nous donnerons au polynome quotient λ le nom généralement adopté de *facteur linéaire attaché à l'équation intégrale.*

Théorème IV. — *Toute équation intégrale entière, à coefficients réels, est nécessairement une intégrale.*

Soit R une équation intégrale entière, solution de l'équation

$$\frac{dR}{dt} = \lambda R = (\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r) R. \tag{2}$$

Ordonnons le polynome R suivant les puissances décroissantes de p, q, r. Soit

$$R = R_n + R_{n-1} + \ldots + R_0.$$

Le polynome R_n est homogène dans les dimensions et dépend en général de p, q, r, γ, γ', γ''. Égalons dans l'identité (2) les termes de plus haut degré en p, q, r, nous obtenons l'équation

$$\frac{A_1}{A} r \left(q \frac{\partial R_n}{\partial p} - p \frac{\partial R_n}{\partial q} \right) + \frac{\partial R_n}{\partial \gamma} (r\gamma' - q\gamma'') + \frac{\partial R_n}{\partial \gamma'} (p\gamma'' - r\gamma) + \frac{\partial R_n}{\partial \gamma''} (q\gamma - p\gamma') = \lambda R_n. \tag{3}$$

Donc, $\log R_n = \varphi$ satisfait à l'équation

$$\frac{A_1}{A} r \left(q \frac{\partial \varphi}{\partial p} - p \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} (r\gamma' - q\gamma'') + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma'} (p\gamma'' - r\gamma) + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma''} (q\gamma - p\gamma') = \lambda. \tag{4}$$

J'obtiens une solution particulière de l'équation (4) en cherchant une fonction φ_0, ne dépendant que de p, q, r et satisfaisant à l'équation

$$\frac{A_1}{A} r \left(q \frac{\partial \varphi_0}{\partial p} - p \frac{\partial \varphi_0}{\partial q} \right) = \lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r. \tag{5}$$

Si l'on remarque que toute fonction de r et de (p^2+q^2) annule le premier membre de l'équation (5), on est amené à substituer à la variable q la variable $\omega = p^2+q^2$. On a alors

$$\varphi_0(p, q, r) \equiv \psi_0(p, \omega, r),$$

$$\frac{A_1}{A} r \frac{\partial \psi_0}{\partial p} = \lambda_1 \frac{p}{\sqrt{\omega - p^2}} + \lambda_3 r \frac{1}{\sqrt{\omega - p^2}} + \lambda_2;$$

d'où

$$\frac{A_1}{A} r\psi_0 = + \lambda_2 p - \lambda_1 \sqrt{\omega - p^2} + \lambda_3 i r \log\left(p + i\sqrt{\omega - p^2}\right) + f(\omega, r).$$

On obtient donc la solution particulière

$$\varphi_0 = \frac{A}{A_1 r}(\lambda_2 p - \lambda_1 q) + i \frac{A\lambda_3}{A_1} \log(p + iq).$$

Et l'on en conclut

$$R_n = \varphi_1 e^{\varphi_0},$$

φ_1 étant un polynome en γ, γ', γ'' dont les coefficients dépendent de p, q, r d'une façon rationnelle ou non; ce polynome φ_1 satisfaisant à l'équation (3) débarrassée de son second membre. Cette condition exprime que la fonction φ_1 est une intégrale première du système différentiel

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} A \dfrac{dp}{dt} = A_1 qr, & A \dfrac{dq}{dt} = - A_1 rp, & \dfrac{dr}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', & \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, & \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{array} \right.$$

Ce système différentiel correspond au mouvement d'un solide pesant, fixé par son centre de gravité, l'ellipsoïde d'inertie étant de révolution. On en connaît les intégrales premières

$$r = \text{const.}, \qquad I_1 = p^2 + q^2 = \text{const.} = a^2,$$

$$I_2 = Ap\gamma + Aq\gamma' + Cr\gamma'' = \text{const.} = h, \qquad I_3 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = \text{const.} = b^2.$$

L'intégration du système (6) est classique. Posons, en introduisant les angles d'Euler,

$$p = a \sin\alpha, \qquad q = a\cos\alpha,$$

$$\gamma = b \sin\theta \sin\varphi, \qquad \gamma' = b \sin\theta \cos\varphi, \qquad \gamma'' = b\cos\theta.$$

Le système (6) devient

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{A_1}{A} rt, \qquad \frac{d\theta}{dt} = a \sin(\alpha - \varphi),$$

$$A a \sin\theta \cos(\alpha - \varphi) + C r \cos\theta = \frac{h}{b}.$$

L'angle θ est, par suite, donné par l'équation

$$\frac{d\gamma''}{\sqrt{A^2 a^2 (b^2 - \gamma''^2) - (h - C r \gamma'')^2}} = A\, dt,$$

et, en intégrant, γ'' est donné par l'équation

$$(7) \qquad \frac{(A^2 a^2 + C^2 r^2)\gamma'' - C r h}{A a \sqrt{(A^2 a^2 + C^2 r^2) b^2 - h^2}} = \cos\left(k + \frac{A^2 \sqrt{A^2 a^2 + C^2 r^2}}{A_1 r} \operatorname{arc\,cos} \frac{q}{a}\right),$$

k étant une constante arbitraire.

Si le système (6) admettait une intégrale première telle que φ_1, en associant cette intégrale à I_2 et I_3, on en déduirait $\gamma, \gamma', \gamma''$ comme fonctions algébriques de h, b et d'une constante arbitraire, ces fonctions dépendant de p, q, r d'une façon quelconque. Or, ceci est impossible d'après l'équation (7) qui montre que la constante arbitraire entre nécessairement d'une façon transcendante. Donc φ_1 ne peut contenir γ, γ', γ'' que sous la forme de fonctions de I_2 et I_3. Comme les intégrales premières du système (6) indépendantes de γ, γ', γ'' ou fonctions de I_2 et I_3 se réduisent évidemment à des fonctions de r et de $(p^2 + q^2)$, on a

$$\varphi_1 = \psi_1(I_2, I_3, p^2 + q^2, r),$$

et, par conséquent,

$$R_n = e^{\varphi_0} \psi_1(I_2, I_3, p^2 + q^2, r),$$

ψ_1 étant un polynome en I_2 et I_3,

$$e^{\varphi_0} = (p + qi)^{i \frac{A \lambda_3}{A_1}} e^{\frac{A}{A_1 r}(\lambda_2 p - \lambda_1 q)}.$$

Un terme quelconque de R_n supposé ordonné en I_2 et I_3 doit être algébrique, le coefficient d'un tel terme est de la forme

$$e^{\varphi_0} f(p^2 + q^2, r),$$

donc les facteurs transcendants de e^{φ_0} doivent porter sur des fonctions de $p^2 + q^2$ et de r, ce qui exige que les deux facteurs dont e^{φ_0} est le produit soient séparément algébriques.

On a donc

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad i\frac{A\lambda_3}{A_1} = \alpha,$$

α étant un nombre réel rationnel, et, par suite,

$$\lambda = -i\alpha\frac{A_1}{A}r.$$

Or, l'équation intégrale R est supposée à coefficient réels, donc λ est réel et, par conséquent, on a

$$\alpha = 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \frac{dR}{dt} = 0.$$

En rapprochant ce résultat de ceux déjà obtenus, on peut énoncer le théorème final suivant :

Théorème V. — *Toute intégrale algébrique est une combinaison algébrique d'intégrales entières homogènes dans les dimensions* [1].

La démonstration du théorème IV suppose que l'équation intégrale R dépend de p, q, r. Si R ne dépend que de γ, γ', γ'', on a, en égalant les coefficients de p, q, r dans l'équation différentielle (3),

$$\gamma''\frac{\partial R}{\partial \gamma'} - \gamma'\frac{\partial R}{\partial \gamma''} = \lambda_1 R,$$
$$\gamma\frac{\partial R}{\partial \gamma''} - \gamma''\frac{\partial R}{\partial \gamma} = \lambda_2 R,$$
$$\gamma'\frac{\partial R}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial R}{\partial \gamma'} = \lambda_3 R.$$

D'où par combinaison

$$0 = R(\lambda_1\gamma + \lambda_2\gamma' + \lambda_3\gamma'').$$

On en déduit

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = 0,$$

et, par suite,

$$R = f(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2).$$

---

(1) La première partie de la démonstration du théorème IV est empruntée au Mémoire de M. Liouville. Dans ce Mémoire, l'auteur suppose que R_n dépend seulement de p, q, r, ce qui est une restriction inadmissible. De plus, on peut opposer des objections au raisonnement employé.

Les résultats obtenus relativement aux équations intégrales ne sont établis que lorsque l'ellipsoïde d'inertie est de révolution. S'il n'en est pas ainsi, il peut exister des équations intégrales réelles, non intégrales. M. Hess (*Mathematische Annalen,* t. XXXVII) en a signalé un exemple. Le cas de M. Hess a fait l'objet d'études nombreuses. On peut consulter notamment les Mémoires de MM. Nekrassoff, Joukovsky, Tchapliguin, Appelroth (*Annales de Moscou,* 1892, 1893, 1894 et *Mathematische Annalen,* t. XLVII).

Remarque sur les équations intégrales. — Si R est une équation intégrale à coefficients imaginaires, soit $R = R_1 + iR_2$, le polynome $R' = R_1 - iR_2$ est aussi une équation intégrale. D'après les calculs relatifs au théorème IV les facteurs linéaires correspondant à R et R' sont égaux et de signes contraires, donc le produit RR' est une intégrale.

On voit que la notion d'équation intégrale ne permet pas, du moins dans le cas du corps solide pesant fixé par un point, d'obtenir *les intégrales* premières particularisées que l'on en pouvait espérer. Cependant, pour trouver des intégrales premières particularisées, on peut généraliser la notion d'équation intégrale en cherchant les polynomes R tels que $\frac{dR}{dt}$ soit divisible par une fonction des intégrales classiques, assujettie à être nulle à l'origine du mouvement. Un exemple a été signalé il y a quelques années par un géomètre russe, M. Goriatchov.

§ II. — Détermination d'une solution particulière et des solutions infiniment voisines.

8. Prenons comme nouvelles variables

$$y_1 = p + qi, \qquad z_1 = \gamma + i\gamma',$$
$$y_2 = p - qi, \qquad z_2 = \gamma - i\gamma'.$$

Le système différentiel (1) devient, en changeant t en $-it$,

$$(8) \quad \begin{cases} A\dfrac{dy_1}{dt} = -A_1 r y_1 + z_1 \sin\varepsilon - \gamma'' \cos\varepsilon, & \dfrac{dz_1}{dt} = \gamma'' y_1 - r z_1, \\ A\dfrac{dy_2}{dt} = A_1 r y_2 + \gamma'' \cos\varepsilon - z_2 \sin\varepsilon, & \dfrac{dz_2}{dt} = r z_2 - \gamma'' y_2, \\ 2C\dfrac{dr}{dt} = \cos\varepsilon (z_2 - z_1), & 2\dfrac{d\gamma''}{dt} = y_2 z_1 - y_1 z_2. \end{cases}$$

Soit y_2^0, r_0, z_2^0 la solution du système (8) correspondant à

$$y_1 = z_1 = \gamma'' = 0.$$

Ce système se réduit à

$$(O) \quad \begin{cases} A\dfrac{dy_2^0}{dt} = A_1 r_0 y_2^0 - z_2^0 \sin\varepsilon, \\ 2C\dfrac{dr_0}{dt} = z_2^0 \cos\varepsilon, \\ \dfrac{dz_2^0}{dt} = r_0 z_2^0. \end{cases}$$

Les solutions infiniment voisines des précédentes sont obtenues en faisant le changement de variables

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned} y_1 &= \eta_1 + \eta'_1, & z_2 &= \xi_1 + \xi'_1,\\ y_2 &= y_2^0 + \eta_2 + \eta'_2, & z_2 &= z_2^0 + \xi_2 + \xi'_2,\\ r &= r_0 + \eta_3 + \eta'_3, & \gamma'' &= \xi_3 + \xi'_3,\end{aligned}\right.$$

η_1, η_2, η_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 étant du premier ordre infinitésimal;
η'_1, η'_2, η'_3, ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, d'ordre infinitésimal supérieur.

Les quantités du premier ordre infinitésimal définissent la solution infiniment voisine du premier ordre par le système

$$(\mathrm{I})\qquad\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\frac{d\eta_1}{dt} &= -\mathrm{A}_1 r_0\eta_1 + \xi_1\sin\varepsilon - \xi_3\cos\varepsilon,\\ \frac{d\xi_1}{dt} &= -r_0\xi_1,\\ 2\frac{d\xi_3}{dt} &= y_2^0\xi_1 - z_2^0\eta_1,\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}')\qquad\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\frac{d\eta_2}{dt} &= \mathrm{A}_1(r_0\eta_2 + y_2^0\eta_3) + \xi_3\cos\varepsilon - \xi_2\sin\varepsilon,\\ \frac{d\xi_2}{dt} &= r_0\xi_2 + z_2^0\eta_3 - y_2^0\xi_3,\\ 2\mathrm{C}\frac{d\eta_3}{dt} &= (\xi_2 - \xi_1)\cos\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Le système (1) admet les intégrales premières classiques

$$h_1 = \mathrm{A}(p^2+q^2) + \mathrm{C}r^2 - 2(\gamma\cos\varepsilon + \gamma''\sin\varepsilon) = \text{const.},$$

$$h_2 = 2\mathrm{A}p\gamma + 2\mathrm{A}q\gamma' + 2\mathrm{C}r\gamma'' = \text{const.},$$

$$h_3 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = \text{const.},$$

qui deviennent pour le système (8)

$$h_1 = \mathrm{A}y_1y_2 + \mathrm{C}r^2 - (z_1+z_2)\cos\varepsilon - 2\gamma''\sin\varepsilon = \text{const.},$$

$$h_2 = \mathrm{A}(y_2z_1 + z_2y_1) + 2\mathrm{C}r\gamma'' = \text{const.},$$

$$h_3 = z_1z_2 + \gamma''^2 = \text{const.}$$

En faisant le changement de variables défini par les équations (9) on en déduit que les systèmes (O) et (I) admettent les intégrales

$$H_1 = C r_0^2 - z_2^0 \cos\varepsilon = C a^2 = \text{const.},$$
$$H_2 = A(y_2^0 \xi_1 + z_2^0 \eta_1) + 2 C r_0 \xi_3 = \text{const.},$$
$$H_3 = z_2^0 \xi_1 = \text{const.},$$

ce que l'on vérifie d'une façon immédiate.

Pour éviter de nombreuses exceptions nous écarterons le cas de Lagrange.

L'intégrale première H_1 donne z_2^0 en fonction algébrique de r_0.

Dans la suite nous exprimerons fréquemment y_2^0 en fonction de z_2^0 ou r_0.

Pour déterminer cette expression on a l'équation différentielle

$$\frac{dy_2^0}{dz_2^0} = \frac{A_1}{A} \frac{y_2^0}{z_2^0} - \frac{\sin\varepsilon}{A} \frac{1}{r_0}.$$

Cette équation s'écrit, en intégrant,

$$y_2^0 (z_2^0)^{-\frac{A_1}{A}} = \text{const.} - \frac{\sin\varepsilon}{AC^{\frac{1}{2}}} \int (z_2^0)^{\frac{C}{A}-1} (z_2^0 \cos\varepsilon + H_1)^{-\frac{1}{2}} dz_2^0,$$

ou bien

$$y_2^0 (z_2^0)^{-\frac{A_1}{A}} = \text{const.} - \frac{2 \sin\varepsilon}{A} \left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} \int (r_0^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} dr_0.$$

Nous calculerons aussi, en général, ξ_1, η_1 à l'aide des intégrales premières H_2 et H_3, ce qui nous permettra d'écrire l'équation différentielle donnant ξ_3 sous la forme

$$\frac{d\xi_3}{dt} = \frac{C}{A} r_0 \xi_3 + H_3 \frac{y_2^0}{z_2^0} - \frac{1}{2A} H_2,$$

H_1, H_2, H_3 étant, dans ces équations, des constantes arbitraires.

§ III. — Il est nécessaire que le rapport $\frac{C}{A}$ soit rationnel.

9. Soit I une intégrale entière homogène dans les dimensions. En ordonnant le polynome I suivant les puissances croissantes de y_1, z_1, γ'', on a

$$I = f_0(y_2, z_2, r) + f_1(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) + \ldots + f_k(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) = \text{const.}$$

L'intégrale I convient pour toutes les solutions du système (8). On a donc, en particulier

$$f_0(y_2^0, z_2^0, r_0) = \text{const.}$$

Le premier terme de l'intégrale I ordonnée est une intégrale première algébrique du système (O).

Si f_0 dépend de y_2^0, on en conclut que y_2^0 s'exprime algébriquement à l'aide de z_2^0 ou r_0.

Or, en revenant à l'expression de y_2^0 en fonction de z_2^0 ou r_0, on voit que y_2^0, est une fonction linéaire d'une constante arbitraire; il en résulte que les deux expressions

$$(z_2^0)^{\frac{C}{A}-1}, \quad \sin\varepsilon \int (r_0^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} dr_0$$

sont des fonctions algébriques de r_0 ou z_2^0.

En considérant la première de ces deux expressions on en conclut que $\frac{C}{A}$ doit être un nombre rationnel.

Donc, si $\frac{C}{A}$ est irrationnel, f_0 est indépendant de y_2^0 et l'on a, par suite,

$$f_0 \equiv F_0(H_1).$$

Pour exprimer f_0 en fonction de H_1 il nous suffit d'éliminer z_2^0, donc F_0 est un polynome en H_1.

En retranchant à l'intégrale I l'intégrale connue $F_0(h_1)$ nous ferons disparaître le premier terme de l'intégrale I; donc si $\frac{C}{A}$ est irrationnel on peut toujours amener l'intégrale I ordonnée à la forme

$$I = f_1(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) + f_2(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) + \ldots,$$

f_1 dépendant de y_1, z_1, γ'' et étant par rapport à ces lettres d'un degré quelconque d'homogénéité.

10. Si, dans l'intégrale I, on effectue le changement de variables défini par les équations (9), les termes d'ordre infinitésimal minimum se réduisent à $f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0)$. Donc

$$f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0) = \text{const.}$$

est intégrale première des systèmes (O), (I).

On obtient aussi ce résultat en égalant à zéro l'ensemble des termes de degré minimum, en y_1, z_1, γ'', du polynome $\frac{dI}{dt}$.

A l'aide des intégrales connues H_2 et H_3 nous calculons ξ_1, η_1 et, en transportant dans f_1, on a

$$f_1 \equiv F_1(H_2, H_3, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0),$$

F_1 étant un polynome en H_2, H_3, ξ_3, y_2^0, r_0, les coefficients étant rationnels en z_2^0.

F_1 est homogène en H_2, H_3, ξ_3. Nous pouvons toujours négliger les puissances de H_3 qui se trouvent en facteur dans F_1 puisque H_3 est intégrale; donc, en faisant $H_3 = 0$ et en supprimant les indices zéro, le système

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A\dfrac{dy_2}{dt} = A_1 r y_2 - z_2 \sin\varepsilon, & 2C\dfrac{dr}{dt} = z_2\cos\varepsilon, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = r z_2, & \dfrac{d\xi_3}{dt} = \dfrac{C}{A} r\xi_3 - \dfrac{1}{2A} H_2 \end{array} \right.$$

doit admettre une intégrale de la forme

$$I_1 = \frac{1}{z_2^p}[\xi_3^m \varphi(y_2, z_2, r) + \xi_3^{m-1} H_2 \varphi_1(y_2, z_2, r) + \ldots + H_2^m \varphi_m(y_2, z_2, r)] = \text{const.},$$

φ_k étant un polynome en y_2, z_2, r.

Puisque H_2 est intégrale première on peut toujours négliger les puissances de H_2 qui se trouvent en facteur dans I_1, c'est-à-dire supposer φ non identiquement nul.

Le système (II *bis*) déduit du système (II) en faisant $H_2 = 0$ admet, par suite, l'intégrale première algébrique

$$(a) \qquad J_1 = \frac{1}{z_2^p} \xi_3^m \varphi(y_2, z_2, r) = \text{const.}$$

Calculons les solutions du système (II *bis*) en fonction de z_2 ou r. On a

$$\xi_3 = k z_2^{\frac{C}{A}},$$

et en se reportant à l'expression de y_2 on voit que l'égalité (a) exprime, si ε est différent de zéro, que l'intégrale

$$\int (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A} - 1} dr$$

est liée algébriquement aux expressions r et $(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A} - 1}$.

Au lieu de démontrer directement, lorsque $\frac{C}{A}$ est irrationnel, l'impossibilité d'une telle liaison, nous chercherons à utiliser la forme algébrique simple de J_1 en substituant, à l'équation (a), l'équation différentielle équivalente

$$(b) \qquad \frac{dJ_1}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \left(p - m\frac{C}{A}\right) r\varphi.$$

Soit

$$\varphi = y_2^\alpha \psi(z_2, r) + y_2^{\alpha-1}\psi_1(z_2, r) + \ldots + \psi_\alpha(z_2, r).$$

L'égalité des coefficients de y_2^α dans l'équation (b) donne

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(p - m\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - \alpha\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}}\right) r\psi$$

ou bien, en exprimant ψ en z_2 à l'aide de l'intégrale H_1,

$$\frac{d\psi}{dz_2} = \left(p - m\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - \alpha\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}}\right)\frac{\psi}{z_2},$$

et, en intégrant,

$$\psi = \psi' z_2^{p - m\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - \alpha\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}}},$$

ψ' étant une fonction de H_1.

ψ étant un polynome en r et z_2, l'exposant $\left(p - m\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - \alpha\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}}\right)$ doit être un nombre entier positif. Ce qui exige, si $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ est irrationnel,

$$\alpha = m, \qquad p \geqq m.$$

L'intégrale entière étant supposée homogène dans les dimensions, on a donc

$$\psi = \lambda(\mathrm{C}r^2 - z_2\cos\varepsilon)^n z_2^{p-m},$$

λ étant une constante numérique.

L'égalité des coefficients de $y_2^{\alpha-1}$ dans l'équation (b) donne, pour déterminer ψ_1,

$$(10) \qquad \frac{d\psi_1}{dt} = \left(p - m + 1 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) r\psi_1 + \frac{\lambda m \sin\varepsilon}{\mathrm{A}}(\mathrm{C}r^2 - z_2\cos\varepsilon)^n z_2^{p-m+1}.$$

L'intégrale générale de cette équation (10) est visiblement transcendante; pour chercher s'il existe un polynome solution particulière nous l'écrirons

$$(11) \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} r z_2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial r}\frac{\cos\varepsilon}{2\mathrm{C}} z_2 = \left(p - m + 1 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) r\psi_1 + \lambda'(\mathrm{C}r^2 - z_2\cos\varepsilon)^n z_2^{p-m+1},$$

$$\lambda' = \frac{\lambda m \sin\varepsilon}{\mathrm{A}}.$$

Sous cette forme, on voit que ψ_1 est nécessairement divisible par z_2^{p-m+1}. On a, en posant $\psi_1 = z_2^{p-m+1}\psi_1'$,

$$(12) \qquad \frac{\partial\psi_1'}{\partial z_2} r z_2 + \frac{\partial\psi_1'}{\partial r}\frac{\cos\varepsilon}{2\mathrm{C}} z_2 = -\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} r\psi_1' + \lambda'(\mathrm{C}r^2 + z_2\cos\varepsilon)^n.$$

Le polynome ψ'_1, homogène dans les dimensions, est nécessairement de degré $2n-1$ d'homogénéité. Soit

$$\psi'_1 = B_1 z_2^{n-1} r + B_2 z_2^{n-2} r^3 + \ldots + B_n r^{2n-1}$$

et

$$\frac{C}{A} = \rho.$$

L'équation (12) donne pour déterminer $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les égalités

$$\rho B_n = \lambda' C^n,$$

$$(1+\rho) B_{n-1} + \frac{\cos\varepsilon}{2C}(2n-1) B_n = -\lambda' \cos\varepsilon\, n\, C^{n-1},$$

$$(2+\rho) B_{n-2} + \frac{\cos\varepsilon}{2C}(2n-3) B_{n-1} = \lambda' \cos^2\varepsilon \frac{n(n-1)}{1.2} C^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n-1+\rho) B_1 + \frac{\cos\varepsilon}{2C} 3 B_2 = (-1)^{n-1} \lambda' \cos^{n-1}\varepsilon \frac{n(n-1)\ldots 3.2}{1.2\ldots(n-1)} C,$$

$$\frac{\cos\varepsilon}{2C} 1 B_1 = (-1)^n \lambda' \cos^n\varepsilon \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}.$$

Les n premières égalités donnent successivement $B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, B_1$ par la formule générale

$$\begin{aligned} B_{n-p} = (-1)^p \lambda' \cos^p\varepsilon \frac{C^{n-p}}{2^p} \Bigg[& \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}{1.2.\ .p} \frac{1}{\rho} \\ & + \frac{1}{1} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2p+1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{1}{\rho+1} \\ & + \frac{1.3}{1.2} \frac{(2n-5)\ldots(2n-2p+1)}{1.2\ldots(p-2)} \frac{1}{\rho+2} + \ldots \\ & + \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2\ldots p} \frac{1}{\rho+p} \Bigg]. \end{aligned}$$

La $(n+1)^{\text{ième}}$ égalité supposée divisée par $(\rho+n)$ donne la condition de possibilité sous la forme

$$\begin{aligned} 0 = \lambda' \cos^n\varepsilon \Bigg[& \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1} \frac{1.3\ldots(2n-3)}{1.2\ldots(n-1)} \frac{1}{\rho+1} \\ & + \frac{1.3}{1.2} \frac{1.3\ldots(2n-5)}{1.2\ldots(n-2)} \frac{1}{\rho+2} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \frac{1.3\ldots(2n-7)}{1.2\ldots(n-3)} \frac{1}{\rho+3} + \ldots \\ & + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n} \frac{1}{\rho+n} \Bigg]. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'interpolation de Newton cette condition s'écrit :

$$(13) \qquad \lambda' \cos\varepsilon (2\rho+1)(2\rho+3)(2\rho+5)\ldots(2\rho+2n-1) = 0.$$

En écartant le cas de Lagrange on peut supposer $\cos\varepsilon$ différent de zéro et, comme $\rho = \frac{C}{A}$ est irrationnel et positif, on a nécessairement

$$\lambda' = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda m \sin\varepsilon = 0.$$

$\lambda = 0$ équivaut à une impossibilité.

Si $m = 0$, I_1 se réduit à une fonction de y_2, z_2, r; or si $\frac{C}{A}$ est irrationnel, il résulte du n° 9 que I_1 est un polynome en H_2 et H_3 qui ne peut dépendre que de H_1. Donc I_1 est un polynome en H_1, H_2, H_3 ; par suite, en retranchant à l'intégrale I une fonction convenable des intégrales connues h_1, h_2, h_3 on fera disparaître le premier terme de f_1 et, en répétant la même opération, l'expression f_1 elle-même. On fera de même disparaître f_2, f_3, ..., ce qui équivaut à dire que la seule intégrale possible est une fonction des intégrales classiques. Donc si $\frac{C}{A}$ est irrationnel il est nécessaire que l'on ait

$$\sin\varepsilon = 0.$$

Le premier terme de I_1 se réduit alors à

$$\frac{\xi_3^m}{z_2^p}\lambda(Cr^2 - z_2)_n y_2^m z_2^{p-m} = \left(\frac{\xi_3 y_2}{z_2}\right)^m \lambda(Cr^2 - z_2)^n.$$

Nous pouvons remarquer que nous rencontrons un système différentiel déduit du système général admettant une nouvelle intégrale algébrique $\frac{\xi_3 y_2}{z_2}$ rationnelle sans qu'il existe une intégrale entière équivalente. Ce fait indique que les résultats du paragraphe I doivent être établis avec la plus grande rigueur.

11. Le premier terme de I_1 étant déterminé, exprimons que I_1 est intégrale du système (II) en introduisant l'hypothèse $\sin\varepsilon = 0$.

Nous obtenons l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\left[\frac{C}{A} r\xi_3 - \frac{1}{2A}H_2\right] & [m\xi_3^{m-1}\varphi + (m-1)\xi_3^{m-2}H_2\varphi_1 + \ldots + H_2^{m-1}\varphi_{m-1}] \\ & + \xi_3^m \frac{d\varphi}{dt} + \xi_3^{m-1} H_2 \frac{d\varphi_1}{dt} + \ldots + H_2^m \frac{d\varphi_m}{dt} \\ & - pr[\xi_3^m\varphi + \xi_3^{m-1}H_2\varphi_1 + \ldots + H_2^m\varphi_m] = 0.\end{aligned}$$

Le coefficient de ξ_3^m est nul d'après la détermination de φ.

Le coefficient de ξ_3^{m-1} égalé à zéro donne, pour déterminer φ_1, l'équation

$$\frac{A_1}{A} r y_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} + r z_2 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2} + \frac{z_2}{2C}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \left[(m-1)\frac{C}{A} - p\right] r\varphi_1 = \frac{\lambda m}{2A}(Cr^2 - z_2)^n y_2^m z_2^{p-m}.$$

L'opération indiquée par le premier membre n'altère pas le degré en y_2, donc les termes de φ_1 de degré différent de m en y_2 satisfont à l'équation sans second membre. Soient

$$y_2^m \psi_1(r, z_2)$$

les termes de φ_1 de degré m en y_2. Le polynome ψ_1 satisfait à l'équation

$$r z_2 \frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} + \frac{z_2}{2C}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \left(p - m + \frac{C}{A}\right) r\psi_1 + \frac{\lambda m}{2A}(Cr^2 - z_2)^n z_2^{p-m}.$$

C'est une équation différentielle du type de l'équation (11) dans laquelle on remplacerait p par $p-1$, A par $-$A.

Donc le nombre irrationnel $\frac{-C}{A}$ doit être racine de l'équation (13) en ρ, à moins que l'on ait

$$\lambda m = 0.$$

La première condition exige que le nombre $\frac{2C}{A}$ soit entier et est inadmissible.

La seconde équivaut également à une impossibilité ainsi que nous l'avons démontré précédemment.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Pour qu'il existe une intégrale algébrique non fonction des intégrales classiques, il faut que le rapport $\frac{C}{A}$ *soit rationnel.*

§ IV. — Conditions d'existence du premier terme de l'intégrale ordonnée.

12. Nous supposons $\frac{C}{A}$ rationnel.

L'intégrale entière à obtenir étant ordonnée en y_1, z_1, γ'' se présente sous la forme

$$I = f_0(y_2, z_2, r) + f_1(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) + \ldots + f_k(y_1, z_1, \gamma'', z_2, r).$$

Si le terme $f_0(y_2, z_2, r)$ existe, l'expression

$$f_0(y_2^0, z_2^0, r_0) = \text{const.}$$

est intégrale première algébrique du système (O).

Si f_0 est indépendant de y_2^0, nous avons vu (n° 9) que l'on peut toujours faire disparaître le premier terme f_0.

Si f_0 dépend de y_2^0, comme z_2^0 s'exprime algébriquement en r_0, la fonction y_2^0 s'exprime algébriquement à l'aide de r_0 ou z_2^0.

Or, en supprimant les indices zéro, on a

$$y_2 z_2^{-\frac{A_1}{A}} = \text{const.} - \frac{\sin\varepsilon}{A C^{\frac{1}{2}}} \int z_2^{\frac{C}{A}-1} (z_2 \cos\varepsilon + H_1)^{-\frac{1}{2}} dz_2$$

ou

$$y_2 z_2^{-\frac{A_1}{A}} = \text{const.} - \frac{2\sin\varepsilon}{A} \left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} \int (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} dr.$$

Pour que y_2 soit une fonction algébrique de z_2 ou r, il faut et il suffit :

ou bien que l'on ait $\varepsilon = 0$,
ou bien que l'intégrale figurant au second membre des équations précédentes soit algébrique.

Cette intégrale, exprimée en z_2, est une intégrale binome portant sur une différentielle algébrique. Si cette intégrale binome est algébrique, elle s'exprime, en particulier, à l'aide des fonctions élémentaires, ce qui exige, d'après un résultat connu [1], que l'un des deux nombres

$$\frac{C}{A} - 1, \quad \frac{C}{A} - \frac{3}{2}$$

soit entier. Donc, en nous bornant aux cas de la Mécanique, le nombre $\frac{2C}{A}$ doit prendre l'une des valeurs 1, 2, 3, 4.

Pour les valeurs 1, 3, l'intégrale considérée, exprimée à l'aide de r, devient, à une constante près,

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \quad \int \sqrt{r^2 - a^2}\, dr.$$

Ces deux intégrales sont connues, elles sont transcendantes.

Pour les valeurs 2, 4, l'intégrale considérée se réduit à un polynome entier en r.

Nous arrivons aux conclusions suivantes :

S'il existe une intégrale entière nouvelle :

ou bien elle s'annule pour $y_1 = z_1 = \gamma'' = 0$,

---

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I.

ou bien y_2^0 est une fonction algébrique de r_0 ou z_2^0, et l'on a soit $\varepsilon = 0$, soit $\frac{C}{A}$ entier.

Dans le second cas, le système (O) admet une nouvelle intégrale première algébrique qui est

$$H_4 = y_2 z_2^{\frac{C}{A}-1} = \text{const.} \qquad \text{pour } \varepsilon = 0,$$

$$H_4 = y_2 z_2 + 4\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{\cos\varepsilon} r\left(z_2\cos\varepsilon - \frac{2}{3}Cr^2\right) = \text{const.} \qquad \text{pour } \frac{C}{A} = 2.$$

Le système (O) ne peut admettre aucune intégrale première indépendante du temps, distincte de H_1 et H_4, sinon y_2^0, z_2^0, r_0 seraient des constantes. On a donc nécessairement

$$f_0(y_2, z_2, r) = F_0(H_1, H_4),$$

F_0 étant algébrique en H_1 et H_4.

Pour former F_0, il suffit d'exprimer z_2 et y_2 en fonction de r à l'aide des intégrales H_1 et H_4 et de substituer dans f_0. Le seul dénominateur possible est une puissance de $(r^2 - a^2)$, il disparaît nécessairement, et, par suite, F_0 est un polynome en H_1 et H_4.

13. Pour obtenir des conditions nécessaires d'existence d'une intégrale algébrique nouvelle, il nous reste à examiner le cas où l'intégrale s'annule pour

$$y_1 = z_1 = \gamma'' = 0.$$

On a

$$I = f_1(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) + f_2 + \ldots + f_k.$$

Comme nous l'avons vu (n° 10), l'expression $f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0)$ garde nécessairement une valeur constante. Donc le système (O), (I) admet l'intégrale première entière

$$(14) \qquad f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0) = \text{const.}$$

Nous connaissons, pour le système (O), (I), les trois intégrales premières entières H_1, H_2, H_3. Pour trouver l'intégrale première algébrique la plus générale, et, par suite, pour trouver f_1, exprimons η_1, ξ_1 et z_2^0 à l'aide des intégrales connues en fonction de ξ_3, y_2^0, r_0 et de H_1, H_2, H_3 considérées comme constantes arbitraires. En substituant dans l'égalité (14), nous obtenons

$$(15) \qquad f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0) = F_1(H_1, H_2, H_3, \xi_3, y_2^0, r_0) = \text{const.}$$

Les calculs n'introduisent aucune irrationalité, le seul dénominateur est une puissance de $(Cr_0^2 - H_1)$, donc F_1 est le quotient d'un polynome en H_1, H_2, H_3, ξ_3, y_2^0, r_0 par une puissance de $(Cr_0^2 - H_1)$.

Si F_1 est indépendante de ξ_3, y_2^0, r_0, le dénominateur en particulier disparaît, et l'on a

$$f_1 = F_1(H_1, H_2, H_3),$$

F_1 étant un polynome en H_1, H_2, H_3.

On peut toujours supposer que ce cas ne se présente pas, car il suffit de retrancher à l'intégrale entière I le polynome $F_1(h_1, h_2, h_3)$ fonction des intégrales classiques pour faire disparaître le premier terme f_1.

La fonction F_1 ne peut être indépendante de ξ_3 et y_2^0 sans être indépendante de r_0, sinon r_0 serait une constante, ce qui est impossible, le cas de Lagrange étant excepté.

Exprimons ξ_3 et y_2^0 en fonction de z_2^0 ou r_0. On a, en supprimant les indices zéro,

$$(16)\quad \begin{cases} y_2 z_2^{\frac{C}{A}-1} = \text{const.} - 2\dfrac{\sin\varepsilon}{A}\left(\dfrac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} \displaystyle\int (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1}\,dr \\ \dfrac{d\xi_3}{dr} = \dfrac{C}{A}\dfrac{2r}{r^2 - a^2}\xi_3 + \dfrac{2H_3\cos\varepsilon}{C}\dfrac{y_2}{(r^2 - a^2)^2} - \dfrac{H_2}{A}\dfrac{1}{r^2 - a^2}. \end{cases}$$

L'égalité (15) montre que les fonctions $\xi_3(r), y_2(r)$ définies par ces équations et la variable r doivent être liées par une relation algébrique dépendant de l'une au moins des expressions ξ_3 et y_2.

Si y_2 est une fonction algébrique de r, cette relation (15) peut toujours exister en étant indépendante de ξ_3.

Je dis qu'il en est nécessairement ainsi.

14. Supposons y_2 non algébrique.

En considérant $\xi_3(r)$ et $y_2(r)$ comme définis par les équations (16), nous ne pouvons déterminer la relation (15) qu'à un facteur constant près en H_1, H_2, H_3, comme F_1 est un polynome en H_2 et H_3, nous pouvons, par conséquent, admettre que ce polynome ne s'évanouit ni pour $H_2 = 0$ ni pour $H_3 = 0$.

Si nous faisons $H_3 = 0$, il en résulte que la fonction $y_2(r)$ et la fonction particulière $\xi_3(r)$ définie par l'équation

$$\frac{d\xi_3}{dr} = \frac{C}{A}\frac{2r}{r^2 - a^2}\xi_3 - \frac{H_2}{A}\frac{1}{r^2 - a^2}$$

ou bien

$$\xi_3 = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}\left[\text{const.} - \frac{H_2}{A}\int\frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1+\frac{C}{A}}}\right]$$

doivent être liées avec la variable r par une relation algébrique, cette relation pouvant ne dépendre que de deux des trois lettres ξ_3, y_2, r.

Comme $y_2(r)$ est transcendant, il en résulte que les deux intégrales

$$\int \frac{dr}{(r^2-a^2)^{1+\frac{C}{A}}}, \qquad \int (r^2-a^2)^{\frac{C}{A}-1}\, dr$$

doivent être liées par une relation de même nature.

Posons $\frac{C}{A} = \frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}$ étant une fraction irréductible, et considérons la courbe

$$r^2 = a^2(1+x^m). \tag{17}$$

Les intégrales précédentes se réduisent, à des facteurs constants près, aux intégrales hyperelliptiques,

$$w = \int \frac{dx}{x^{p+1}\sqrt{1+x^m}}, \qquad w_1 = \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{1+x^m}},$$

attachées à la courbe algébrique (17).

15. Lemme. — *Si deux intégrales abéliennes transcendantes,* J *et* J_1, *attachées à une même courbe algébrique*

$$f(x, y) = 0,$$

sont liées avec les variables x et y par une relation algébrique, cette relation est nécessairement de la forme

$$kJ + k_1 J_1 = \varphi(x, y),$$

k et k_1 étant des constantes numériques, φ étant une fonction rationnelle de x et y.

On peut toujours supposer J racine d'une équation irréductible, à coefficients rationnels irréductibles en J_1, x et y. Soit

$$J^\alpha + R_1 J^{\alpha-1} + R_2 J^{\alpha-2} + \ldots + R_\alpha = 0. \tag{18}$$

On en déduit, par dérivation,

$$\left(\alpha \frac{dJ}{dx} + \frac{dR_1}{dx}\right) J^{\alpha-1} + \left[(\alpha-1) R_1 \frac{dJ}{dx} + \frac{dR_2}{dx}\right] J^{\alpha-2} + \ldots = 0.$$

Cette nouvelle équation est à coefficients rationnels en J_1, x et y; comme elle est de degré inférieur à α, elle se réduit à une identité. On a donc, en particulier,

$$\alpha \frac{dJ}{dx} + \frac{dR_1}{dx} \equiv 0$$

et, en intégrant,

$$\alpha J + R_1 = \text{const.}$$

α est différent de zéro car J_1 est transcendant; donc cette dernière équation ne peut être une identité et, par suite, l'équation (18) est nécessairement du premier degré en J et en J_1. Soit

$$J = \frac{J_1 R_1 + R_2}{J_1 R_3 + R_4},$$

R_1, R_2, R_3, R_4 étant rationnels en x et y. On en déduit

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{(J_1 R_3 + R_4)\left(J_1 \frac{dR_1}{dx} + R_1 \frac{dJ_1}{dx} + \frac{dR_2}{dx}\right) - (J_1 R_1 + R_2)\left(J_1 \frac{dR_3}{dx} + R_3 \frac{dJ_1}{dx} + \frac{dR_4}{dx}\right)}{(J_1 R_3 + R_4)^2}.$$

Cette équation ne peut contenir J_1, sinon J_1 serait algébrique, donc le second membre est une fonction rationnelle de J_1 indépendante de J_1.

Soit R_3 différent de zéro; on aura, en particulier,

$$\left[-R_1 \frac{R_4}{R_3} + R_2\right]\left[-\frac{dR_3}{dx}\frac{R_4}{R_3} + R_3 \frac{dJ_1}{dx} + \frac{dR_4}{dx}\right] = 0.$$

Si le premier facteur était nul, J serait algébrique; on a donc

$$\frac{dJ_1}{dx} = -\frac{R_3 \frac{dR_4}{dx} - R_4 \frac{dR_3}{dx}}{R_3^2},$$

d'où

$$J_1 = -\frac{R_4}{R_3} + \text{const.}$$

J_1 serait algébrique, ce qui est impossible. On a, par suite,

$$R_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad J = J_1 R_1 + R_2.$$

Il en résulte

$$\frac{dJ}{dx} = J_1 \frac{dR_1}{dx} + R_1 \frac{dJ_1}{dx} + \frac{dR_2}{dx},$$

ce qui exige

$$\frac{dR_1}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_1 = \text{const.}$$

et le lemme est démontré.

Lorsqu'une intégrale abélienne est algébrique, on sait qu'elle se réduit à une fonction rationnelle. Le résultat précédent comprend le cas où une seule des intégrales abéliennes J et J_1 est algébrique.

16. Supposons la courbe (17) de genre n différent de zéro. On a

$$m = 2n + 1 \quad \text{ou} \quad m = 2n + 2,$$

car l'équation

$$1 + x^m = 0$$

a toutes ses racines distinctes.

Pour rechercher, d'après le lemme précédent, les combinaisons linéaires et à coefficients constants des intégrales w et w_1 se réduisant à une fonction rationnelle, nous exprimerons w et w_1 à l'aide de $2n$ intégrales de première et seconde espèce formant un système fondamental.

M. Hermite a étudié la réduction des intégrales hyperelliptiques à un système d'intégrales simples des trois espèces.

On peut, en particulier, par des opérations élémentaires, exprimer toute intégrale

$$J_\alpha = \int \frac{x^\alpha\, dx}{r}$$

comme somme d'une fonction rationnelle de r et x et des intégrales J_{-1}, J_0, J_1, ..., J_{2n}.

Étudions la nature de J_α.

Les seuls pôles aux points critiques logarithmiques possibles de J_α sont les points ($x = 0$, $r = \pm a$), ($1 + x^m = 0$, $r = 0$) et les points à l'infini.

Soit $x = x_0$ une racine de l'équation $1 + x^m = 0$, dans le domaine du point $x = x_0$, $r = 0$, on a

$$\frac{x^\alpha}{r} = \frac{x^\alpha}{a\sqrt{1 + x^m}} = (x - x_0)^{-\frac{1}{2}}\, P(x - x_0),$$

P étant une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $(x - x_0)$. L'intégrale J_α est régulière pour $x = x_0$.

Dans le domaine des points $x = 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x^m}} = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^{2m} + \ldots.$$

Si $\alpha \geqq 0$, J_α est une fonction régulière.

Si $\alpha = -1 -$ mult. de m, les points ($x = 0$, $r = \pm a$) sont des points critiques logarithmiques. Pour les autres valeurs entières et négatives de α, les mêmes points sont des pôles.

Pour étudier la nature des points à l'infini, posons $x = \frac{1}{z}$; on a

$$J_\alpha = -\int \frac{dz}{z^{\alpha+2-\frac{m}{2}}\sqrt{1+z^m}}.$$

La fonction $\frac{1}{\sqrt{1+z^m}}$ est régulière pour $z = 0$.

Donc, si m est impair, J_α admet le point à l'infini comme point régulier ou comme pôle.

Si m est pair, le point à l'infini ne sera point critique logarithmique que pour $\alpha = n +$ multiple de m.

Nous arrivons aux résultats suivants :

ϖ est une intégrale de seconde espèce avec les deux pôles $r = \pm a$;
ϖ_1 est une intégrale de première espèce ou une intégrale de seconde espèce avec pôles à l'infini.

Si $m = 2n+2$, J_0, J_1, ..., J_{n-1} sont de première espèce, J_n de troisième espèce, J_{n+1}, J_{n+2}, ..., J_{2n} de seconde espèce.

Si $m = 2n+1$, J_0, J_1, ..., J_{n-1} sont de première espèce, J_n, J_{n+1}, ..., J_{2n-1} sont de seconde espèce, J_{2n} est algébrique.

Rappelons que, quelle que soit la parité de m, les $2n$ intégrales de première et de seconde espèce comprises dans la suite J_0, J_1, ..., J_{m-2} constituent un système fondamental d'intégrales abéliennes [1].

17. Pour exprimer ϖ et ϖ_1 à l'aide des intégrales J_0, J_1, ..., J_{m-2}, appliquons la méthode classique de M. Hermite.

L'identité

$$1 = (1+x^m) - x^{q+1}x^{m-q-1}$$

permet d'écrire

$$\int \frac{dx}{x^{q+1}\sqrt{1+x^m}} = \int \frac{\sqrt{1+x^m}\,dx}{x^{q+1}} - \int \frac{dx}{x^{q-m+1}\sqrt{1+x^m}}$$

et, en intégrant par parties le premier terme du second membre,

$$(19)\qquad \int \frac{dx}{x^{q+1}\sqrt{1+x^m}} = \frac{m-2q}{2q}\int \frac{dx}{x^{q-m+1}\sqrt{1+x^m}} + \text{fonct. ration. de } r \text{ et } x.$$

[1] APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, n° 155.

L'identité

$$\frac{d}{dx}\left[2x^{s-m}\sqrt{1+x^m}\right] = (2s-m)\frac{x^{s-1}}{\sqrt{1+x^m}} + 2(s-m)\frac{x^{s-m-1}}{\sqrt{1+x^m}}$$

donne, en intégrant,

$$(20) \qquad \int \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt{1+x^m}} = -2\frac{s-m}{2s-m}\int \frac{x^{s-m-1}\,dx}{\sqrt{1+x^m}} + \text{fonction rationnelle de } r \text{ et } x.$$

Les formules (19) et (20) sont toujours applicables lorsqu'il ne s'introduit pas de coefficient numérique infini ou bien encore lorsque les intégrales des premiers membres ne sont pas de troisième espèce.

En utilisant ces formules pour w, w_1 et ensuite successivement pour les intégrales rencontrées dans le calcul, on aura

$$w = \lambda \int \frac{x^{\beta m-p-1}\,dx}{\sqrt{1+x^m}} + \text{fonction rationnelle de } r \text{ et } x,$$

$$w_1 = \lambda_1 \int \frac{x^{p-\beta_1 m-1}\,dx}{\sqrt{1+x^m}} + \text{fonction rationnelle de } r \text{ et } x,$$

λ, λ_1 étant des constantes numériques, β, β_1 des entiers indiquant le nombre des opérations.

Les intégrales figurant aux seconds membres sont de première ou seconde espèce, puisqu'il en est de même des intégrales w et w_1.

Les calculs indiqués pourront donc toujours s'effectuer et w, w_1 seront exprimés à l'aide des $2n$ intégrales de première et seconde espèce du système fondamental signalé, lorsque les exposants

$$(\beta m - p - 1), \quad (p - \beta_1 m - 1)$$

appartiendront à la suite

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (m-2).$$

Comme aucune combinaison linéaire et à coefficients constants de deux intégrales distinctes du système fondamental ne se réduit à une fonction rationnelle, pour que w, w_1 et r soient liées par une relation algébrique, il faut : ou bien que w et w_1 s'expriment à l'aide de la même intégrale du système fondamental; ou bien que l'une des intégrales w, w_1 soit algébrique.

Les conditions précédentes s'écrivent, en se reportant aux formules de récurrence (19) et (20),

$$\frac{p}{m} = \frac{\beta + \beta_1}{2},$$

$$\frac{p}{m} = \frac{2\beta - 1}{2},$$

$$\frac{p}{m} = \beta_1;$$

on a donc nécessairement : soit $m = 1$, soit $m = 2$.

En résumé, *pour que les intégrales hyperelliptiques* ϖ, ϖ_1 *et la variable indépendante* r *soient liées par une relation algébrique, il faut que le genre de la courbe* (17) *soit nul, ou encore que le rapport* $\frac{2C}{A}$ *soit entier.*

18. Supposons la courbe (17) de genre nul.

Soit d'abord $\frac{C}{A}$ entier et, par suite, égal à 1 ou 2.

L'intégrale ϖ_1 est un polynome entier en r, y_2 est algébrique.

Les formules de réduction sont inapplicables à ϖ, donc ϖ est de troisième espèce, les valeurs de ϖ sont d'ailleurs

$$\int \frac{dr}{r^2 - a^2}, \quad \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^3}$$

et l'on aperçoit les deux points singuliers logarithmiques $r = \pm a$.

Soit $\frac{2C}{A}$ égal à un entier impair et, par suite, à 1 ou 3.

Les formules de réduction sont applicables à ϖ et elles montrent que cette intégrale est algébrique; elles ne le sont pas à ϖ_1, donc ϖ_1 est de troisième espèce, ce que nous avons d'ailleurs constaté directement au n° **12**.

L'étude du cas particulier $H_3 = 0$ nous conduit aux conclusions suivantes :

Pour qu'il existe une intégrale algébrique nouvelle il faut : ou bien que y_2^0 *soit une fonction algébrique de* r_0 *et, par suite, que l'on ait, soit* $\varepsilon = 0$, *soit* $\frac{C}{A}$ *entier; ou bien que* $\frac{2C}{A}$ *soit un entier impair.*

19. Examinons, en supposant H_3 arbitraire, le cas où $\frac{2C}{A}$ est un entier impair, y_2^0 n'étant pas une fonction algébrique de r_0.

La valeur la plus générale de ξ_3 est donnée par la formule

$$\xi_3 = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}} \left[-\frac{H_2}{A} \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1+\frac{C}{A}}} + \frac{2H_3 \cos\varepsilon}{C} \int \frac{y_2\, dr}{(r^2 - a^2)^{2+\frac{C}{A}}} \right],$$

ou bien

$$\xi_3 = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}(\lambda_1 w + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3), \tag{21}$$

en posant

$$w_2 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}+1}}, \qquad w_3 = \int \frac{w_1\, dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}+1}},$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des constantes arbitraires.

Pour vérifier si $\xi_3(r)$ peut être une fonction algébrique de r et y_2^0 ou w_1, étudions la nature des fonctions $\xi_3(r)$, $w_1(r)$ dans le domaine des points $r = \pm a$.

Soit $\frac{2C}{A} = 2n - 1$, n étant égal à 1 ou 2. On a

$$w_1 = \int (r^2 - a^2)^{n-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Dans le domaine du point $r = a$, on a

$$\frac{(r^2 - a^2)_{n-1}}{\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{1}{(r - a)^{\frac{1}{2}}} P(r - a)$$

et, par suite,

$$w_1 = (r - a)^{\frac{1}{2}} P_1(r - a) + \text{const.},$$

$P(r - a)$, $P_1(r - a)$ étant des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $(r - a)$.

L'intégrale w_1 admet donc le point $r = a$ comme point algébrique. Il en est de même des intégrales w et w_3, la première comme étant algébrique, la seconde d'après le développement de w_1.

L'intégrale w_2 admet évidemment les deux points singuliers logarithmiques $r = \pm a$, il en est donc de même de ξ_3.

Or toute fonction algébrique de w_1 et r ne peut admettre le point $r = a$ que comme point algébrique, donc ξ_3 ne peut être une fonction algébrique de w_1 et r ou de y_2^0 et r.

Nous arrivons finalement aux conditions nécessaires et suffisantes d'existence du premier terme de l'intégrale ordonnée :

Théorème. — *Pour qu'il existe une intégrale algébrique non fonction des intégrales classiques il faut : ou bien que le centre de gravité du solide soit situé dans le plan équatorial de l'ellipsoïde d'inertie, le rapport* $\frac{C}{A}$ *étant rationnel; ou bien que le rapport* $\frac{C}{A}$ *soit entier.*

Dans tous les cas, y_2^0 est algébrique et le système (O) admet l'intégrale première algébrique nouvelle H_4 (n° 12).

20. Lorsque les conditions nécessaires précédentes sont satisfaites, il nous reste à calculer

$$f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3; y_2^0, z_2^0, r_0) = F_1(H_1, H_2, H_3; \xi_3, y_2^0, r_0).$$

Si F_1 contient effectivement ξ_3, en égalant F_1 à une constante arbitraire, on en déduit que $\xi_3(r)$ est une fonction algébrique de r, et cela quelles que soient les constantes arbitraires H_1, H_2, H_3.

Or ξ_3 est donné par l'équation (21) et dépend des trois intégrales ϖ, ϖ_2, ϖ_3. Les constantes λ_1, λ_2, λ_3 sont arbitraires, sans liaisons et indépendantes de H_1 ; comme ϖ, ϖ_2, ϖ_3 ne dépendent que de H_1, ces trois expressions sont séparément algébriques.

Or nous avons montré, aux n^{os} 17 et 18, que ϖ n'est algébrique que dans les deux cas [1]

$$\frac{2C}{A} = 1, \qquad \frac{2C}{A} = 3.$$

Mais, dans ces conditions, ϖ_2 admet (n° 19) les deux points singuliers logarithmiques $r = \pm a$, donc ξ_3 ne peut, dans aucun cas, être une fonction algébrique de r et, par conséquent, F_1 est indépendante de ξ_3.

$F_1(H_1, H_2, H_3, y_0^2, r_0)$ est alors intégrale du système (O) et, par suite, se réduit à une fonction de H_1, H_2, H_3, H_4.

Théorème. — *Lorsque les conditions nécessaires indiquées au n° 19 sont satisfaites, le système* (O) *admet une intégrale algébrique* H_4 *distincte de* H_1. *Le premier terme de l'intégrale entière* I *ordonnée est une fonction de* H_1, H_2, H_3, H_4,

$$f_1 = F_1(H_1, H_2, H_3, H_4).$$

Ce résultat comprend celui obtenu lorsque le premier terme [2] de l'intégrale ordonnée est indépendant de y_1, z_1, γ''. Dans la suite, nous pourrons donc nous placer immédiatement dans le cas le plus général.

On peut toujours supposer que F_1 *contient effectivement* H_4.

---

(1) Cette propriété résulte aussi de la théorie des intégrales binomes.

(2) On peut montrer facilement, en appliquant la méthode utilisée dans la suite, que, s'il existe une intégrale nouvelle, on peut toujours admettre que cette intégrale s'annule pour $y_1 = z_1 = \gamma'' = 0$. Mais ce fait est sans importance pour la démonstration du résultat final.

S'il n'en était pas ainsi, $F_1(H_1, H_2, H_3)$ serait, comme nous l'avons montré, un polynome en H_1, H_2, H_3 et il suffirait de retrancher à l'intégrale entière à calculer la fonction $F_1(h_1, h_2, h_3)$ des intégrales classiques pour faire disparaître le terme f_1 de moindre degré en y_1, z_1, γ''.

§ V. — Étude du cas $\frac{2C}{A} = 4$. Second terme de l'intégrale. Impossibilité.

21. Nous supposerons $A = 1$, $C = 2$.

Pour atteindre le second terme de l'intégrale entière I on peut, en continuant la méthode des solutions infiniment voisines, déterminer le système différentiel définissant les termes du second ordre infinitésimal du développement des six variables y_1, z_1, γ'', y_2, z_2, r. En poussant le développement de I jusqu'à la même approximation on obtiendra une intégrale entière, dépendant de f_2, de ce système différentiel, soit

$$I_2 = \text{const.}$$

L'équation équivalente

$$\frac{dI_2}{dt} = 0$$

fournit un certain nombre d'équations aux dérivées partielles dans le système (O) (I) seulement. Celles dépendant uniquement de f_1 sont satisfaites d'elles-mêmes, une seule dépend de f_2 et détermine cette expression.

Nous obtiendrons plus facilement le même résultat en égalant à zéro les termes des divers degrés en y_1, z_1, γ'' de l'équation

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Les termes de moindre degré définissent f_1, leur somme est nulle.

Les termes de degré immédiatement supérieur donnent

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial z_1} y_1\gamma'' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\gamma''\cos\varepsilon - \frac{\partial f_1}{\partial z_2} y_2\gamma'' - \frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{1}{4}z_1\cos\varepsilon \\
&\qquad + (ry_1 + z_1\sin\varepsilon - \gamma''\cos\varepsilon)\frac{\partial f_2}{\partial y_1} - rz_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1} \\
&\qquad + \frac{1}{2}(y_2 z_1 - z_2 y_1)\frac{\partial f_2}{\partial \gamma''} - (ry_2 + z_2\sin\varepsilon)\frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \frac{1}{4}z_2\cos\varepsilon\frac{\partial f_2}{\partial r} + rz_2\frac{\partial f_2}{\partial z_2} = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation exprime, en considérant les fonctions $f_1(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0)$, $f_2(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0)$, que la solution la plus générale du système (O) (I) satisfait à l'équation

$$\frac{d}{dt} f_2(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2^0, z_2^0, r_0) + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} \eta_1 \xi_3 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2^0} \xi_3 \cos\varepsilon - \frac{\partial f_1}{\partial z_2^0} y_2^0 \xi_3 - \frac{\partial f_1}{\partial r_0} \frac{1}{4} \xi_1 \cos\varepsilon = 0.$$

Cette équation donne f_2.

Les intégrales premières connues du système (O)(I) sont, en supprimant les indices zéro,

$$\begin{aligned}
&H_1 = 2r^2 - z_2 \cos\varepsilon = 2a^2,\\
&H_2 = y_2 \xi_1 + z_2 \eta_1 + 4r\xi_3,\\
&H_3 = \xi_1 z_2,\\
&H_4 = y_2 z_2 + \frac{4 \operatorname{tang}\varepsilon}{\cos\varepsilon} r \left(z_2 \cos\varepsilon - \frac{4}{3} r^2\right) = y_2 z_2 + \frac{4 \operatorname{tang}\varepsilon}{\cos\varepsilon} r \left(\frac{2}{3} r^2 - H_1\right).
\end{aligned}$$

Nous tirons de ces intégrales η_1, ξ_1, y_2, z_2 en fonction entière de H_1, H_2, H_3, H_4, ξ_3, rationnelle de r.

En portant ces valeurs dans f_1, cette expression prend une valeur rationnelle, le seul dénominateur étant $2r^2 - H_1$. Comme nous savons que f_1 s'exprime en fonction de H_1, H_2, H_3, H_4; ξ_3 disparaît ainsi que le dénominateur et f_1 devient un polynome

$$F_1(H_1, H_2, H_3, H_4).$$

L'équation différentielle donnant $f_2(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2, z_2, r)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
(22)\quad \frac{df_2}{dt} &+ \frac{\partial F_1}{\partial H_1}(y_2\xi_3 - r\xi_1)\cos\varepsilon + \frac{\partial F_1}{\partial H_3}(\eta_1 z_2 - \xi_1 y_2)\xi_3\\
&+ \frac{\partial F_1}{\partial H_4}\left[\xi_3 z_2 \cos\varepsilon - y_2\xi_3(y_2 + 4r \operatorname{tang}\varepsilon) - \xi_1 \sin\varepsilon\left(z_2 - \frac{4r^2}{\cos\varepsilon}\right)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{d}{dt}\left(\eta_1 y_2 - \frac{1}{2}\xi_3 \sin\varepsilon\right) = -\xi_3 y_2 \cos\varepsilon,$$

on peut intégrer de suite les termes en $\frac{\partial F_1}{\partial H_1}$, $\frac{\partial F_1}{\partial H_3}$.

Posons

$$f_2 = \varphi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial H_1}\left(\eta_1 y_2 - \frac{1}{2}\xi_3 \sin\varepsilon - \xi_1 \cos\varepsilon\right) + \xi_3^2 \frac{\partial F_1}{\partial H_3}.$$

L'équation (22) s'écrit

$$(23)\quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \left[-\xi_3 z_2 \cos\varepsilon + y_2\xi_3(y_2 + 4r \operatorname{tang}\varepsilon) + \xi_1 \sin\varepsilon\left(z_2 - \frac{4r^2}{\cos\varepsilon}\right)\right]\frac{\partial F_1}{\partial H_4}.$$

Exprimons φ_2 en fonction de ξ_3, r et des intégrales connues. Soit

$$\varphi_2 = \Phi_2(\xi_3, r, H_1, H_2, H_3, H_4);$$

Φ_2, rationnel par rapport aux six arguments dont il dépend, est un polynome entier en ξ_3, H_2, H_3, H_4.

Au point de vue de l'intégration de l'équation (23), H_1, H_2, H_3, H_4 peuvent être considérés comme des constantes indépendantes, sous la condition que, dans cette équation, η_1, ξ_1, y_2, z_2 soient supposés implicitement remplacés en fonction de H_1, H_2, H_3, H_4, ξ_3, r. Notons que ξ_1, y_2, z_2 ne dépendent que de r et que l'on a

$$\frac{d\xi_3}{dt} = 2r\xi_3 + H_3\frac{y_2}{z_2} - \frac{1}{2}H_2,$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}(r^2 - a^2).$$

22. Soit

$$\Phi_2 = \psi\xi_3^m + \psi_1\xi_3^{m-1} + \ldots + \psi_m,$$

ψ_i étant une fonction rationnelle de r.

Si m est supérieur à 2, en égalant dans l'équation (23) les coefficients de ξ_3^m et ξ_3^{m-1}, on obtient, pour déterminer ψ et ψ_1, les deux équations différentielles

$$\frac{d\psi}{dr}\frac{1}{2}(r^2 - a^2) + 2mr\psi = 0,$$

$$\frac{d\psi_1}{dr}\frac{1}{2}(r^2 - a^2) + 2(m-1)r\psi_1 + m\psi\left(H_3\frac{y_2}{z_2} - \frac{1}{2}H_2\right) = 0.$$

On en tire

$$\psi = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^{2m}},$$

et en posant

$$\psi_1 = \frac{\psi'_1}{(r^2 - a^2)^{2(m-1)}},$$

on obtient

$$\frac{d\psi'_1}{dr} = \frac{2m\lambda}{(r^2 - a^2)^3}\left[\frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{4}\cos^2\varepsilon H_3H_4\frac{1}{(r^2 - a^2)^2} - H_3\sin\varepsilon\frac{r\left(\frac{2}{3}r^2 - H_1\right)}{(r^2 - a^2)^2}\right];$$

ψ'_1 devant être une fonction rationnelle de r.

Les deux premières fractions rationnelles du second membre donnent séparément des résidus différents de zéro, la troisième s'intègre rationnellement en posant $r^2 = u$; donc comme H_2, H_3, H_4 sont des constantes sans liaisons, on a nécessairement $\lambda = 0$.

23. La fonction Φ_2 est au plus du second degré en ξ_3. Soit

$$\Phi_2 = \psi\xi_3^2 + \psi_1\xi_3 + \psi_2.$$

On a

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{d\varphi_2}{dt} = (2\psi\xi_3 + \psi_1)\left(2r\xi_3 + \mathrm{H}_3\frac{y_2}{z_2} - \frac{1}{2}\mathrm{H}_2\right)$$
$$+\left(\xi_3^2\frac{d\psi}{dr} + \xi_3\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{d\psi_2}{dr}\right)\frac{1}{2}(r^2 - a^2),$$

$$\psi = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^4}.$$

En égalant dans l'équation (23) les coefficients de ξ_3 et ξ_3^0, on obtient

$$(24)\qquad \frac{d\psi_1}{dr}\frac{1}{2}(r^2 - a^2) + 2r\psi_1 = 2\psi\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_3\frac{y_2}{z_2}\right)$$
$$+[-\cos\varepsilon\, z_2 + y_2(y_2 + 4r\,\mathrm{tang}\,\varepsilon)]\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_4},$$

$$(25)\qquad \frac{d\psi_2}{dr}\frac{1}{2}(r^2 - a^2) = \psi_1\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_3\frac{y_2}{z_2}\right) + \mathrm{H}_3\frac{\sin\varepsilon}{z_2}\left(z_2 - \frac{4r^2}{\cos\varepsilon}\right)\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_4}.$$

En intégrant l'équation (24), sans second membre, on est amené à poser

$$\psi_1 = \frac{\psi_1'}{(r^2 - a^2)^2},$$

$$\frac{d\psi_1'}{dr} = \frac{4\lambda}{(r^2 - a^2)^3}\left[\frac{1}{2}\mathrm{H}_2 - \frac{1}{4}\mathrm{H}_3\mathrm{H}_4\cos^2\varepsilon\frac{1}{(r^2 - a^2)^2} + \mathrm{H}_3\sin\varepsilon\frac{r\left(\frac{2}{3}r^2 - \mathrm{H}_1\right)}{(r^2 - a^2)^2}\right] - 4\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_4}(r^2 - a^2)^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_4}\left[\mathrm{H}_4\cos\varepsilon - 4\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\, r\left(\frac{2}{3}r^2 - \mathrm{H}_1\right)\right]\left(\mathrm{H}_4\cos\varepsilon + \frac{16}{3}r^3\,\mathrm{tang}\,\varepsilon\right)\frac{1}{r^2 - a^2}.$$

Les fractions rationnelles du second membre, dont les numérateurs sont des fonctions paires de r, ne sont pas altérées par le changement de r en $-r$, elles donnent donc des fractions simples résiduelles de la forme

$$k\left(\frac{1}{a + r} + \frac{1}{a - r}\right).$$

Les fractions dont les numérateurs sont des fonctions impaires de r sont

$$\frac{r\left(\frac{2}{3}r^2 - \mathrm{H}_1\right)}{(r^2 - a^2)^5},\qquad 2\sin\varepsilon\,\mathrm{H}_4\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{H}_4}\frac{r\left(\frac{2}{3}r_2 + \mathrm{H}_1\right)}{r^2 - a^2}.$$

En posant $r^2 - a^2 = u$, on voit que la première est algébrique.

La seconde donne comme fractions résiduelles

$$\sin\varepsilon H_4 \frac{\partial F_1}{\partial H_4}\left(\frac{2}{3}a^2 + H_1\right)\left(\frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r}\right).$$

Donc, pour que ψ_1' soit algébrique, il faut que l'on ait à la fois

$$\Sigma k = 0, \qquad \sin\varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial H_4} = 0.$$

Comme F_1 *doit dépendre effectivement de* H_4, *on a nécessairement*

$$\varepsilon = 0.$$

24. En introduisant la condition précédente, l'équation qui donne ψ_1' devient

$$(26) \qquad \frac{d\psi_1'}{dr} = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^3}\left[2H_2 - H_3 H_4 \frac{1}{(r^2-a^2)^2}\right] + \frac{1}{2}H_4^2 \frac{\partial F_1}{\partial H_4}\frac{1}{r^2 - a^2} - 4\frac{\partial F_1}{\partial H_4}(r^2 - a^2)^2.$$

En intégrant par décomposition en fractions rationnelles simples ou bien par parties on en déduit

$$\psi_1' = \lambda' + r\left[\frac{a_0}{(r^2-a^2)^4} + \frac{a_1}{(r^2-a^2)^3} + \frac{a_2}{(r^2-a^2)^2} + \frac{a_3}{r^2-a^2}\right] - 4\frac{\partial F_1}{\partial H_4} r\left[\frac{(r^2-a^2)^2}{5} + b_1(r^2 - a^2) + b_2\right],$$

λ' étant une constante arbitraire, a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 des constantes connues.

25. L'équation (25) donnant ψ_2 s'écrit

$$\frac{d\psi_2}{dr} = \frac{\psi_1'}{(r^2-a^2)^3}\left[H_2 - \frac{1}{2}H_3 H_4 \frac{1}{(r^2-a^2)^2}\right].$$

On en déduit

$$\psi_2 = \lambda' \int \frac{dr}{(r^2-a^2)^3}\left[H_2 - \frac{1}{2}H_3 H_4 \frac{1}{(r^2-a^2)^2}\right] - \frac{2}{5}\frac{\partial F_1}{\partial H_4} H_2 \int \frac{2r\,dr}{r^2-a^2} + \psi_2'(r).$$

En intégrant

$$\psi_2 = d\lambda'[\log(r-a) - \log(r+a)] - \frac{2}{5}H_2 \frac{\partial F_1}{\partial H_4}[\log(r-a) + \log(r+a)] + \psi_3'(r),$$

ψ_2' et ψ_3' étant des fonctions rationnelles de r.

Pour que ψ_2 soit une fonction algébrique de r, nulle ou non, il faut et il suffit que les coefficients de $\log(r-a)$ et $\log(r+a)$ soient séparément nuls. On a donc

$$\lambda' = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial H_4} = 0,$$

ce qui, comme nous l'avons expliqué, montre que l'on peut faire disparaître, à l'aide des intégrales classiques, le terme de moindre degré en y_1, z_1, γ'' de l'intégrale entière I. Nous avons indiqué que ce fait équivaut à une impossibilité. Pour le montrer de la façon la plus évidente, désignons par n le degré d'homogénéité de l'intégrale I. En retranchant une fonction des intégrales classiques, de façon à faire disparaître le terme de moindre degré, on ne change pas le degré n d'homogénéité. Le polynome le plus général de degré n d'homogénéité n'a qu'un nombre fini de termes; donc, en répétant l'opération de soustraction un nombre suffisant de fois, ce nombre étant fini, on amènera l'intégrale ou bien à être identiquement nulle ou bien à être du degré maximum en y_1, z_1, γ''. Dans ce dernier cas, l'intégrale serait homogène en y_1, z_1, γ'' et indépendante de y_2, z_2, r. Or, il n'existe aucune combinaison de H_1, H_2, H_3 qui soit indépendante de y_2^0, z_2^0, r_0; donc ce dernier cas est impossible.

En résumé, nous avons obtenu le résultat suivant :

Lorsque

$$\frac{2C}{A} = 4,$$

toute intégrale algébrique est une combinaison algébrique des trois intégrales classiques, excepté dans le cas particulier où le centre de gravité du corps solide se trouve sur l'axe de l'ellipsoïde d'inertie supposé de révolution.

§ VI. — Le centre de gravité du solide est dans le plan équatorial de l'ellipsoïde d'inertie.

26. Nous écarterons les cas déjà étudiés,

$$\frac{2C}{A} = 2, \qquad \frac{2C}{A} = 4.$$

Le système (O) (I) prend la forme simple

$$(\mathrm{O}) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{dy_2}{dt} &= A_1 r y_2, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{2C} z_2 = \frac{1}{2}(r^2 - a^2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= r z_2 \end{aligned} \right.$$

et

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned}
&A\frac{d\eta_1}{dt} = -A_1 r\eta_1 - \xi_3,\\
&\frac{d\xi_1}{dt} = -r\xi_1,\\
&\frac{d\xi_3}{dt} = \frac{1}{2}(y_2\xi_1 - z_2\eta_1) = \frac{C}{A}r\xi_3 + H_3\frac{y_2}{z_2} - \frac{1}{2A}H_2.
\end{aligned}\right.
$$

Ce système admet les quatre intégrales algébriques

$$
\begin{aligned}
&H_1 = Cr^2 - z_2 = Ca^2,\\
&H_2 = A(y_2\xi_1 + z_2\eta_1) + 2Cr\xi_3,\\
&H_3 = \xi_1 z_2,\\
&H_4 = y_2 z_2^{\frac{C}{A}-1}.
\end{aligned}
$$

L'intégrale entière à obtenir

$$I = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$$

étant ordonnée suivant les puissances croissantes de y_1, z_1, γ'', supposons que le premier terme f_1 soit de degré n par rapport à ces variables. Égalons à zéro l'ensemble des termes de degré $(n+1)$ de l'équation

$$\frac{dI}{dt} = 0,$$

nous obtenons, pour déterminer f_2, l'équation aux dérivées partielles

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{A}(A_1 r y_1 + \gamma'')\frac{\partial f_2}{\partial y_1} - r z_1\frac{\partial f_2}{\partial z_1} + \frac{1}{2}(y_2 z_1 - z_2 y_1)\frac{\partial f_2}{\partial \gamma''} + \frac{A_1}{A} r y_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\\
&+ r z_2\frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2C}z_2\frac{\partial f_2}{\partial r} + y_1\gamma''\frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \frac{1}{A}\gamma''\frac{\partial f_1}{\partial y_2} - y_2\gamma''\frac{\partial f_1}{\partial z_2} - \frac{1}{2C}z_1\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0.
\end{aligned}
$$

Remplaçons dans cette équation y_1, z_1, γ'' par η_1, ξ_1, ξ_3 et nous constatons qu'elle exprime que *la solution la plus générale* du système (O) (I) satisfait à la relation

$$\frac{d}{dt}f_2(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2, z_2, r) + \eta_1\xi_3\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A}\xi_3\frac{\partial f_1}{\partial y_2} - y_2\xi_3\frac{\partial f_1}{\partial z_2} - \frac{1}{2C}\xi_1\frac{\partial f_1}{\partial r} = 0.$$

Résolvons les intégrales H_1, H_2, H_3, H_4 par rapport à z_2, η_1, ξ_1, y_2, les valeurs obtenues sont entières en ξ_3, H_2, H_3, H_4 algébriques en H_1 et r; le seul dénominateur est une puissance entière ou fractionnaire de $(Cr^2 - H_1)$.

Si nous portons ces valeurs dans f_1, les termes en ξ_3 et r disparaîtront, puisque f_1 est une fonction de H_1, H_2, H_3, H_4 ; en particulier, le numérateur de la fonction obtenue sera divisible par la puissance de $(Cr^2 - H_1)$ qui constitue son dénominateur. On aura, par suite,

$$f_1 = F_1(H_1, H_2, H_3, H_4),$$

F_1 étant un polynome.

27. L'équation différentielle en f_2 s'écrit alors

$$\frac{df_2}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial H_1}(y_2\xi_3 - r\xi_1)$$
$$+ \frac{\partial F_1}{\partial H_3}(\eta_1 z_2 - \xi_1 y_2)\xi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial H_4}\left[\frac{1}{A} z_2^{\frac{C}{A}-1} + \left(1 - \frac{C}{A}\right) y_2^2 z_2^{\frac{C}{A}-2}\right]\xi_3 = 0.$$

Le terme correspondant à la dérivation par rapport à H_2 disparaît de lui-même. En remarquant que l'on a

$$\frac{d}{dt}(A\eta_1 y_2) = -y_2\xi_3,$$

on intègre de suite les termes en $\frac{\partial F_1}{\partial H_1}$, $\frac{\partial F_1}{\partial H_3}$ et l'on est amené à poser

$$f_2 = \varphi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial H_1}(A\eta_1 y_2 - \xi_1) + \xi_3^2 \frac{\partial F_1}{\partial H_3}.$$

Si l'on utilise pour φ_2 la résolution adoptée précédemment pour f_1, on a

$$\varphi_2 = \Phi_2(\xi_3, r, H_1, H_2, H_3, H_4),$$

Φ_2 étant un polynome en ξ_3, H_2, H_3, H_4 les coefficients de ce polynome étant algébriques en r et H_1.

L'expression Φ_2 est donnée par l'équation

$$(27) \qquad \frac{d\Phi_2}{dt} = \xi_3\left[-\frac{1}{A} z_2^{\frac{C}{A}-1} + \left(\frac{C}{A} - 1\right) H_4^2 z_2^{-\frac{C}{A}}\right]\frac{\partial F_1}{\partial H_4}.$$

Soit

$$\Phi_2 = \psi\xi_3^m + \psi_1\xi_3^{m-1} + \ldots + \psi_m,$$

ψ_i étant une fonction algébrique de r, dont les seules irrationalités proviennent des puissances entières de $(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1}$.

Comme la *solution la plus générale* du système (O) (I) satisfait à l'équation (27), nous pouvons, au point de vue de la recherche de Φ_2, considérer H_1, H_2, H_3, H_4 comme des constantes indépendantes.

On a

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = [m\psi\xi_3^{m-1} + (m-1)\psi_1\xi_3^{m-2} + \ldots + \psi_{m-1}]\left(\frac{C}{A} r\xi_3 + H_3 H_4 z_2^{-\frac{C}{A}} - \frac{1}{2A} H_2\right)$$
$$+ \left(\frac{d\psi}{dr}\xi_3^m + \frac{d\psi_1}{dr}\xi_3^{m-1} + \ldots + \frac{d\psi_m}{dr}\right)\frac{1}{2}(r^2 - a^2).$$

Si m est supérieur à 2, en égalant dans l'équation (27) les coefficients de ξ_3^m et ξ_3^{m-1}, on obtient

$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{d\psi}{dr} + m\frac{C}{A} r\psi = 0,$$
$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{d\psi_1}{dr} + (m-1)\frac{C}{A} r\psi_1 = m\psi\left(\frac{1}{2A} H_2 - H_3 H_4 z_2^{-\frac{C}{A}}\right),$$

d'où l'on tire

$$\psi = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^{m\frac{C}{A}}}$$

et, en posant

$$\psi_1 = \frac{\psi'_1}{(r^2 - a^2)^{(m-1)\frac{C}{A}}},$$

$$\frac{d\psi'_1}{dr} = 2\lambda m\left(\frac{1}{2A} H_2 - H_3 H_4 z_2^{-\frac{C}{A}}\right)\frac{1}{(r^2 - a^2)^{1+\frac{C}{A}}}.$$

En intégrant

$$\psi'_1 = m\lambda\left[\frac{H_2}{A}\int\frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1+\frac{C}{A}}} - 2\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{C}{A}} H_3 H_4 \int\frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1+\frac{2C}{A}}}\right].$$

Comme H_1, H_2, H_3, H_4 sont des constantes sans aucune liaison, la somme d'intégrales entre crochets ne peut être une fonction algébrique de r que si ces deux intégrales sont séparément algébriques; il est visible, en effet, que ces intégrales ne dépendent que de r et H_1.

La première intégrale est celle désignée par ϖ, n^{os} 18 et 19, et nous avons démontré qu'elle ne peut être algébrique que dans les deux cas :

$$\frac{2C}{A} = 1, \qquad \frac{2C}{A} = 3.$$

Comme, dans ces conditions, la seconde intégrale admet les deux points singuliers logarithmiques $r = \pm a$, il est impossible que ψ'_1 soit algébrique sans que l'on ait

$$\lambda = 0;$$

on a donc nécessairement

$$m = 2$$

et, par suite,

$$\Phi_2 = \psi \xi_3^2 + \psi_1 \xi_3 + \psi_2,$$

$$\psi = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}}}.$$

28. L'équation (27) donne pour déterminer ψ_1 et ψ_2 les deux relations

$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{C}{A} r \psi_1 \tag{28}$$

$$= 2\psi\left(\frac{1}{2A} H_2 - H_3 H_4 z_2^{-\frac{C}{A}}\right) + \left[-\frac{1}{A} z_2^{\frac{C}{A}-1} + \left(\frac{C}{A} - 1\right) H_4^2 z_2^{-\frac{C}{A}}\right] \frac{\partial F_1}{\partial H_4};$$

$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{\partial \psi_2}{dr} = \psi_1 \left(\frac{1}{2A} H_2 - H_3 H_4 z_2^{-\frac{C}{A}}\right). \tag{29}$$

En posant

$$\psi_1 = \frac{\psi'_1}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}},$$

l'équation (28) devient

$$\frac{d\psi'_1}{dr} = 4\lambda \left[\frac{H_2}{2A} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1 + \frac{C}{A}}} - H_3 H_4 \left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{C}{A}} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1 + \frac{2C}{A}}}\right] \tag{30}$$

$$- 2 \frac{\partial F_1}{\partial H_4} \left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{C}\right)^{1 - \frac{C}{A}} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{2 - \frac{2C}{A}}} + \left(1 - \frac{C}{A}\right)\left(\frac{1}{C}\right)^{\frac{C}{A}} H_4^2 \frac{1}{r^2 - a^2}\right].$$

En intégrant on voit que ψ'_1 est, à des constantes de multiplication près, la somme des transcendantes :

$$v = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1 + \frac{C}{A}}}, \qquad v_1 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1 + \frac{2C}{A}}},$$

$$v_2 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{2 - \frac{2C}{A}}}, \qquad v_3 = \int \frac{dr}{r^2 - a^2} = \frac{1}{2a}[\log(r - a) - \log(r + a)].$$

Les multiplicateurs de v_2 et v_3 sont des constantes sans aucune liaison et ces intégrales ne dépendent que de r et H_1. La partie correspondante de ψ'_1 se présente sous la forme

$$\frac{\partial F_1}{\partial H_4}[k_2 v_2 + k_3 H_4^2 v_3],$$

k_2 et k_3 étant des constantes numériques non nulles, abstraction faite du cas $A = C$. H_1 étant fixé, on peut donner à H_4 une valeur complètement arbitraire, donc la fonction entre crochets admettra toutes les singularités des intégrales v_2 et v_3.

On peut supposer $\frac{\partial F_1}{\partial H_4}$ différent de zéro, car nous avons vu que l'hypothèse contraire équivaut à l'impossibilité. Il en résulte que la partie de l'intégrale ψ'_1 coorrespondant à v_2 et v_3 admet dans tous les cas possibles les deux points singuliers logarithmiques $r = \pm a$ de v_3. Par suite, pour que ψ'_1 puisse être une fonction algébrique de r, il faut que l'une au moins des deux intégrales abéliennes v et v_1 admette les deux points singuliers logarithmiques précédents.

29. Supposons d'abord $\frac{2C}{A}$ non entier.

Les deux expressions v et v_1 sont des intégrales de la forme

$$w = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{p}{m}}},$$

$\frac{p}{m}$ étant une fraction irréductible supérieure à l'unité, le dénominateur m ne se réduisant pas à l'unité.

Étudions l'intégrale w dans le domaine du point $r = a$ par exemple.

Dans ce domaine, la formule de Taylor donne le développement, en série convergente, suivant :

$$\frac{1}{(r+a)^{\frac{p}{m}}} = a_0 + a_1(r-a) + a_2(r-a)^2 + \ldots + a_\alpha(r-a)^\alpha + \ldots.$$

Par suite, on a le développement également convergent :

$$\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{p}{m}}} = a_0(r-a)^{-\frac{p}{m}} + a_1(r-a)^{1-\frac{p}{m}} + \ldots + a_\alpha(r-a)^{\alpha-\frac{p}{m}} + \ldots.$$

Donc, si le nombre $\frac{2C}{A}$ n'est pas entier, aucune des deux intégrales v et v_1 n'admet les points $r = \pm a$ comme points singuliers logarithmiques et il y a impossibilité.

Lorsque le nombre $\frac{2C}{A}$ est entier, il ne peut, en Mécanique, prendre que l'une des valeurs 1, 2, 3, 4.

Nous obtenons par suite le résultat suivant :

Pour qu'il existe une intégrale algébrique ne se réduisant pas à une combinaison des intégrales classiques il faut, le cas de Lagrange étant excepté :

1° *Que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension du corps solide soit de révolution ;*

2° *Que le centre de gravité soit situé dans le plan équatorial de cet ellipsoïde ;*

3° *Que le rapport* $\frac{2C}{A}$ *prenne une des valeurs* 1, 3.

§ VII. — Étude du cas $\frac{2C}{A} = 3$. Démonstration de l'impossibilité.

30. En supposant $C = 3$, $A = 2$, on a

$$\psi = \frac{\lambda}{(r^2 - a^2)^3}, \qquad \psi_1 = \frac{\psi_1'}{(r^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\begin{aligned}\psi_1' = {} & \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \lambda H_3 H_4 r \left[\frac{2}{3a^2}\frac{1}{(r^2 - a^2)^3} - \frac{5}{6a^4}\frac{1}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{5}{4a^6}\frac{1}{r^2 - a^2}\right] \\ & - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F_1}{\partial H_4} r[(r^2 - a^2) - 2a^2] + \frac{\lambda H_2}{3a^4} r \left[-\frac{a^2}{(r^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\right] + \lambda',\end{aligned}$$

avec la condition

$$5\lambda H_3 + 4a^6 H_4 \frac{\partial F_1}{\partial H_4} = 0, \tag{31}$$

exprimant que l'intégration de l'équation (30) n'introduit pas de transcendantes.

L'équation (29) s'écrit :

$$\frac{d\psi_2}{dr} = 2\psi_1' \left[\frac{1}{4} H_2 \frac{1}{(r^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} H_3 H_4 \frac{1}{(r^2 - a^2)^4}\right].$$

Tous les termes du second membre s'intègrent algébriquement sauf le terme en λ'; la constante λ' est nulle et l'on a

$$\begin{aligned}\psi_2 = {} & 3\lambda H_3^2 H_4^2\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{z_2^6} - \frac{1}{2a^4}\frac{1}{z_2^5} + \frac{5}{16a^6}\frac{1}{z_2^4}\right) + H_3 H_4 \frac{\partial F_1}{\partial H_4}\left(\frac{2a^2}{z_2^3} - \frac{1}{2z_2^2}\right) \\ & + \frac{3\lambda H_2^2}{4a^4}\left(\frac{a^2}{z_2^3} - \frac{1}{z_2^2}\right) - 3\lambda H_2 H_3 H_4\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{z_2^{\frac{9}{2}}} - \frac{3}{4a^4}\frac{1}{z_2^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{8a^6}\frac{1}{z_2^{\frac{5}{2}}}\right) \\ & - \frac{1}{2}H_2\frac{\partial F_1}{\partial H_4}\left(\frac{2a^2}{z_2^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{z_2^{\frac{1}{2}}}\right),\end{aligned}$$

$$f_2 = \xi_3^2\psi + \xi_3\psi_1 + \psi_2 + \xi_3^2\frac{\partial F_1}{\partial H_3} + (2\eta_1 y_2 - \xi_1)\frac{\partial F_1}{\partial H_1} + F_2(H_1, H_2, H_3, H_4),$$

F_2 étant une constante d'intégration.

31. *Calcul du troisième terme de l'intégrale.* — En égalant à zéro l'ensemble des termes de degré $(n+2)$ du polynome $\frac{dI}{dt}$, on obtient pour déterminer f_3 l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}f_3(\eta_1, \xi_1, \xi_3, y_2, z_2, r) + \eta_1\xi_3\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + \frac{1}{2}\xi_3\frac{\partial f_2}{\partial y_2} - y_2\xi_3\frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{1}{6}\xi_1\frac{\partial f_2}{\partial r} = 0.$$

Nous exprimons f_3 à l'aide de ξ_3, r, H_1, H_2, H_3, H_4 et en procédant comme dans le calcul de f_2 les diverses équations jouiront des propriétés qui ont été signalées.

Pour la recherche des conditions d'existence de f_3, on peut négliger la constante F_2; on sait, en effet, calculer les termes correspondants en remplaçant dans l'expression de f_2 la fonction F_1 par F_2.

En utilisant une remarque faite dans le calcul de f_2 on est amené à poser

$$\begin{aligned}f_3 = {} & \Phi_3(\xi_3, r, H_1, H_2, H_3, H_4) + \frac{1}{2}(2\eta_1 y_2 - \xi_1)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1^2} \\ & + \xi_3^2(2\eta_1 y_2 - \xi_1)\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1\,\partial H_3} + \frac{2}{3}\xi_3^3\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_3^2},\end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}(32)\quad & \frac{d\Phi_3}{dt} + (H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\xi_3 - H_3 r z_2^{-1})\left(\xi_3^2\frac{\partial\psi}{\partial H_1} + \xi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial H_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial H_1}\right) \\ & + \xi_3\left(-3r\xi_3 - 2H_3H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}H_2\right)\left(\xi_3^2\frac{\partial\psi}{\partial H_3} + \xi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial H_3} + \frac{\partial\psi_2}{\partial H_3}\right) \\ & + \frac{1}{2}\xi_3\left(z_2^{\frac{1}{2}} - H_4^2 z_2^{-\frac{3}{2}}\right)\Bigg[\xi_3^2\frac{\partial\psi}{\partial H_4} + \xi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial H_4} + \frac{\partial\psi_2}{\partial H_4} \\ & \qquad + \xi_3^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_3\,\partial H_4} - \left(6H_4 r z_2^{-\frac{3}{2}}\xi_3 + \ldots\right)\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1\,\partial H_4}\Bigg] \\ & - H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\xi_3\left(\xi_3^2\frac{\partial\psi}{\partial z_2} + \xi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial z_2} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z_2}\right) - \frac{1}{6}H_3 z_2^{-1}\xi_3\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = 0.\end{aligned}$$

32. En comparant l'équation (32) à l'équation analogue (27), on en conclut que l'on peut poser

$$\Phi_3 = \xi_3^5 G + \xi_3^4 G_1 + \xi_3^3 G_2 + \xi_3^2 G_3 + \xi_3 G_4 + G_5,$$

G, G_1, ..., G_5 étant des fonctions algébriques de r.

On a

$$\frac{d\Phi_3}{dt} = \left(\frac{3}{2} r\xi_3 + H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right)\frac{\partial \Phi_3}{\partial \xi_3} + \frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{d\Phi_3}{dr}.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de ξ_3 dans l'équation (32), on obtient les relations :

$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{dG}{dr} + \frac{15}{2} r G = 0,$$

$$\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{dG_1}{dr} + 6 r G_1 + 5 G\left(H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right) - 3 r \frac{\partial \psi}{\partial H_3} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{dG_2}{dr} &+ \frac{9}{2} r G_2 + 4 G_1\left(H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right)\\ &+ H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \psi}{\partial H_1} - 2\left(H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right)\frac{\partial \psi}{\partial H_3}\\ &+ \frac{1}{2}\left(z_2^{\frac{1}{2}} - H_4^2 z_2^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial H_4} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial H_3\, \partial H_4}\right) - H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \psi}{\partial z_2} - 3 r \frac{\partial \psi_1}{\partial H_3} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(r^2 - a^2)\frac{dG_3}{dr} &+ 3 r G_3 + 3 G_2\left(H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right) - H_3 r z_2^{-1}\frac{\partial \psi}{\partial H_1}\\ &+ H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \psi_1}{\partial H_1} - 2\left(H_3 H_4 z_2^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} H_2\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial H_3} + \frac{1}{2}\left(z_2^{\frac{1}{2}} - H_4^2 z_2^{-\frac{3}{2}}\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial H_4}\\ &- H_4 z_2^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} - 3 H_4 r (z_2^{-1} - H_4^2 z_2^{-3})\frac{\partial^2 F_1}{\partial H_1\, \partial H_4} - 3 r \frac{\partial \psi_2}{\partial H_3} = 0,\end{aligned}$$

. . . . ;

on en déduit

$$G = \frac{\rho}{(r^2 - a^2)^{\frac{15}{2}}}, \qquad G_1 = \frac{G'_1}{(r^2 - a^2)^6};$$

$$\frac{dG'_1}{dr} = 10\rho\left[\frac{\frac{1}{4} H_2}{(r^2 - a^2)^{\frac{5}{2}}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} H_3 H_4 \frac{1}{(r^2 - a^2)^4}\right] + 6\frac{\partial \lambda}{\partial H_3} r (r^2 - a^2)^2.$$

Pour que G'_1 soit algébrique il faut et il suffit que ρ soit nul.

On a, par suite,

$$G=0, \qquad G'_1=\frac{\partial\lambda}{\partial H_3}(r^2-a^2)^3+\rho_1.$$

33. Si l'on pose

$$G_2=\frac{G'_2}{(r^2-a^2)^{\frac{9}{2}}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dG'_2}{dr}&+8\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial H_3}(r^2-a^2)^3+\rho_1\right]\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}H_3H_4\frac{1}{(r^2-a^2)}-\frac{1}{4}H_2\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{5}{2}}}\right]\\&+2(r^2-a^2)^{\frac{7}{2}}\left[H_4z_2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial H_1}-\frac{\partial\psi}{\partial z_2}\right)+\frac{1}{2}\left(z_2^{\frac{1}{2}}-H_4^2z_2^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial H_4}+\frac{\partial^2F_1}{\partial H_3\,\partial H_4}\right)-3r\frac{\partial\psi_1}{\partial H_3}\right]=0.\end{aligned}$$

En intégrant, la seule partie irrationnelle pouvant fournir des transcendantes dans l'expression de G'_2 est

$$w=+\frac{H_2}{a^4}\frac{\partial\lambda}{\partial H_3}\int(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}}[a^4+2r^2(2r^2-3a^2)]\,dr.$$

Si l'on prend comme nouvelle variable

$$u=\frac{1}{r}\sqrt{r^2-a^2},$$

on trouve de suite

$$w=+\frac{H_2}{3a^4}\frac{\partial\lambda}{\partial H_3}r(2r^2-3a^2)(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}.$$

La seule transcendante qui s'introduit dans le calcul de G'_2 est $\log\frac{r-a}{r+a}$, en écrivant qu'elle disparaît on détermine la constante ρ_1 et l'on obtient

$$\begin{aligned}G'_2=&\frac{1}{3a^4}H_2\frac{\partial\lambda}{\partial H_3}r\left[2(r^2-a^2)^{\frac{5}{2}}-a^2(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\right]\\&-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2F_1}{\partial H_3\,\partial H_4}r[(r^2-a^2)^4-2a^2(r^2-a^2)^3]\\&+r\left(b_1z_2^2+b_2z_2+b_3+\frac{b_4}{z_2}+\frac{b_5}{z_2^2}+\frac{b_6}{z_2^3}+\frac{b_7}{z_2^{\frac{1}{2}}}+\frac{b_8}{z_2^{\frac{3}{2}}}\right)+\rho_2.\end{aligned}$$

Les quantités b étant des constantes connues, ρ_2 une constante arbitraire.

34. Pour déterminer G_3 nous sommes amenés à prendre

$$G_3=\frac{G'_3}{(r^2-a^2)^3}.$$

La fonction algébrique G'_3 est donnée par l'équation

$$\frac{dG'_3}{dr}+6G'_2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}H_3H_4\frac{1}{(r^2-a^2)^4}-\frac{H_2}{4}\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{5}{2}}}\right]-\frac{2}{9}H_3rz_2\frac{\partial\psi}{\partial H_1}$$
$$+\frac{2}{9}H_4z_2^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\psi_1}{\partial H_1}-\frac{4}{9}\left(H_3H_4z_2^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}H_2z_2^2\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial H_3}+\frac{1}{9}\left(z_2^{\frac{5}{2}}-H_4^2z_2^{\frac{1}{2}}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial H_4}$$
$$-\frac{2}{9}H_4z_2^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_2}-\frac{2}{3}H_4r(z_2-H_4^2z_2^{-1})\frac{\partial^2F_1}{\partial H_1\,\partial H_4}-\frac{2}{3}rz_2^2\frac{\partial\psi_2}{\partial H_3}=0.$$

Tous les termes de cette équation sont de la forme

$$\frac{\rho_2}{(r^2-a^2)^{\frac{5}{2}}},\quad\frac{\rho_2}{(r^2-a^2)^4},\quad k_nr(r^2-a^2)^{\frac{n}{2}}.$$

L'intégration introduit les transcendantes

$$\log\frac{r-a}{r+a}\quad\text{et}\quad\log(r^2-a^2).$$

On a donc

$$\rho_2=0,\qquad\Sigma k_{-2}=0.$$

La seconde condition s'écrit

$$H_4^2\frac{\partial}{\partial H_1}\left(\frac{5\lambda H_3}{4a^6}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial H_4}\left(\frac{5\lambda H_3H_4}{4a^6}\right)-a^2H_4^2\frac{\partial^2F_1}{\partial H_4^2}+H_4^3\frac{\partial^2F_1}{\partial H_1\,\partial H_4}+a^2H_4\frac{\partial F_1}{\partial H_4}=0,$$

ou bien, en utilisant la relation (31),

$$3a^2H_4\frac{\partial F_1}{\partial H_4}=0,$$

ce qui équivaut à une impossibilité.

Nous pouvons donc énoncer finalement le résultat suivant :

Lorsque les conditions initiales sont arbitraires, toute intégrale algébrique est une combinaison algébrique des intégrales classiques. Il y a seulement exception dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Mme Kovalevsky.

On sait que Mme Kovalevsky s'est proposé de déterminer les conditions dans lesquelles les paramètres qui définissent la position du corps solide pesant, mobile autour d'un point fixe, sont des fonctions méromorphes du temps t, pour toutes les valeurs de t. La démonstration donnée par Mme Kovalevsky suppose que ces fonctions admettent effectivement des pôles, mais le résultat a été étendu par la suite aux fonctions uniformes les plus générales.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Lorsque les conditions initiales sont arbitraires, les seuls cas dans lesquels il existe une intégrale algébrique non fonction des intégrales classiques sont ceux pour lesquels les paramètres définissant la position du solide en fonction du temps t sont des fonctions uniformes quel que soit t, et inversement.

CHAPITRE II.

SECONDE MÉTHODE.

§ I. — Recherche d'une solution particulière.

1. Nous avons montré (Chap. I, n° 8) que le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe est défini par le système différentiel

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dy_1}{dt} = -A_1 r y_1 + z_1 \sin\varepsilon - \gamma'' \cos\varepsilon,\\ &A\frac{dy_2}{dt} = \quad A_1 r y_2 + \gamma'' \cos\varepsilon - z_2 \sin\varepsilon,\\ &2C\frac{dr}{dt} = \cos\varepsilon(z_2 - z_1),\\ &\frac{dz_1}{dt} = \gamma'' y_1 - r z_1,\\ &\frac{dz_2}{dt} = r z_2 - \gamma'' y_2,\\ &2\frac{d\gamma''}{dt} = y_2 z_1 - y_1 z_2.\end{aligned}\right.$$

Ce système admet les intégrales premières

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} Ay_1 y_2 + Cr^2 - (z_1 + z_2)\cos\varepsilon - 2\gamma''\sin\varepsilon &= \text{const.},\\ A(y_1 z_2 + y_2 z_1) + 2Cr\gamma'' &= \text{const.},\\ z_1 z_2 + \gamma''^2 &= \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace y_1, z_1, γ'' par λy_1, λz_1, $\lambda\gamma''$ sans changer y_2, z_2, r, λ désignant un paramètre arbitraire, les équations (1) deviennent

$$
(1\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dy_1}{dt} &= -A_1 r y_1 + z_1 \sin\varepsilon - \gamma'' \cos\varepsilon,\\
A\frac{dy_2}{dt} &= A_1 r y_2 - z_2 \sin\varepsilon + \lambda\gamma'' \cos\varepsilon,\\
2C\frac{dr}{dt} &= \cos\varepsilon(z_2 - \lambda z_1),\\
\frac{dz_1}{dt} &= -r z_1 + \lambda\gamma'' y_1,\\
\frac{dz_2}{dt} &= r z_2 - \lambda\gamma'' y_2,\\
2\frac{d\gamma''}{dt} &= y_2 z_1 - y_1 z_2.
\end{aligned}
\right.
$$

Le système différentiel (1 *bis*) admet les intégrales premières

$$
(2\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
Cr^2 - z_2\cos\varepsilon + \lambda(Ay_1y_2 - z_1\cos\varepsilon - 2\gamma''\sin\varepsilon) &= h_1,\\
A(y_1z_2 + y_2z_1) + 2Cr\gamma'' &= h_2,\\
z_1z_2 + \lambda\gamma''^2 &= h_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous supposerons essentiellement que h_1, h_2, h_3 *sont des constantes arbitraires indépendantes de* λ.

Nous n'introduirons pas le temps t; nous exprimerons les grandeurs y_1, y_2, z_1, z_2, γ'' en fonction de r. Ceci est toujours possible, sauf dans le cas où r est une constante, c'est-à-dire dans le cas de Lagrange.

Les relations (2 *bis*) donnent y_1, z_1, z_2 en fonction de y_2, γ'', r et l'on peut remplacer le système différentiel (1 *bis*) par le système des deux équations du premier ordre,

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dr} &= \frac{2C}{A\cos\varepsilon}\,\frac{A_1 r y_2 - z_2\sin\varepsilon + \lambda\gamma''\cos\varepsilon}{z_2 - \lambda z_1},\\
\frac{d\gamma''}{dr} &= \frac{C}{\cos\varepsilon}\,\frac{y_2z_1 - y_1z_2}{z_2 - \lambda z_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les seconds membres sont supposés exprimés en fonction de h_1, h_2, h_3, λ, y_2, γ'', r et dépendent algébriquement de ces grandeurs.

2. Pour $\lambda = 0$, le système (1 *bis*) se décompose en les deux systèmes

séparés :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{dy_2}{dt} &= A_1 r y_2 - z_2 \sin\varepsilon, \\ \frac{dz_2}{dt} &= r z_2, \\ 2C\frac{dr}{dt} &= z_2 \cos\varepsilon; \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{dy_1}{dt} &= - A_1 r y_1 + z_1 \sin\varepsilon - \gamma'' \cos\varepsilon, \\ \frac{dz_1}{dt} &= - r z_1, \\ 2\frac{d\gamma''}{dt} &= y_2 z_1 - y_1 z_2. \end{aligned}\right.$$

Le système (4), (5) admet les intégrales premières

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} Cr^2 - z_2 \cos\varepsilon &= h_1 = Ca^2, \\ A(y_1 z_2 + y_2 z_1) + 2Cr\gamma'' &= h_2, \\ z_1 z_2 &= h_3. \end{aligned}\right.$$

Dans la suite, y_1, y_2, z_1, z_2, γ'' désigneront, jusqu'à l'étude progressive de l'intégrale, les solutions des systèmes (4), (5) exprimées en fonction de r.

En adjoignant aux relations (6), résolues par rapport à y_1, z_1, z_2, les deux équations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_2}{dr} &= \frac{A_1}{A}\,\frac{2r}{r^2 - a^2}\,y_2 - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon, \\ \frac{d\gamma''}{dr} &= \frac{y_2 z_1 - y_1 z_2}{r^2 - a^2}, \end{aligned}\right.$$

on obtient un système équivalent au système (4), (5).

Les équations (7) s'écrivent :

$$(8)\quad y_2 = (r^2 - a^2)^{\frac{A_1}{A}}\left[\text{const.} - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{A_1}{A}}}\right],$$

$$(9)\quad \frac{d\gamma''}{dr} = \frac{C}{A}\,\frac{2r}{r^2 - a^2}\,\gamma'' + \frac{2h_3 \cos\varepsilon}{C}\,\frac{y_2}{(r^2 - a^2)^2} - \frac{h_2}{A}\,\frac{1}{r^2 - a^2};$$

ce sont les équations (3) dans le cas particulier $\lambda = 0$.

En posant

$$\gamma'' = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}\,\Gamma'',$$

l'équation (9) s'écrit :

$$(9\ bis)\qquad \frac{d\Gamma''}{dr} = \frac{2h_3\cos\varepsilon}{C}\,\frac{y_2}{(r^2-a^2)^{\frac{C}{A}+2}} - \frac{h_2}{A}\,\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{C}{A}+1}}.$$

3. Soit, pour le système (1),

$$f(y_1, z_1, \gamma'', y_2, z_2, r) = \text{const.}$$

une quatrième intégrale première algébrique et indépendante du temps.

Le système (1 *bis*) admet, quel que soit λ, l'intégrale première algébrique

$$f(\lambda y_1, \lambda z_1, \lambda\gamma'', y_2, z_2, r) = \text{const.}$$

Si l'on y substitue les expressions de y_1, z_1, z_2 tirées des relations (2 *bis*), on en déduit que le système (3) admet une intégrale première de la forme

$$F(h_1, h_2, h_3, \lambda, y_2, \gamma'', r) = \text{const.},$$

F étant algébrique par rapport à toutes les lettres h_1, h_2, h_3, λ, y_2, γ'', r.

L'expression F ne peut être indépendante de y_2 et γ'' sinon, ou bien r serait une constante et l'on se trouverait dans le cas de Lagrange, ou bien F serait indépendante de y_2, γ'' et r et par suite l'intégrale première f se réduirait à une fonction des intégrales classiques.

On peut toujours multiplier l'expression F par une puissance de λ choisie de telle sorte que la fonction F de λ n'admette le point $\lambda = 0$ ni comme zéro, ni comme pôle. La fonction F est alors développable dans le domaine du point $\lambda = 0$ suivant les puissances croissantes et positives de λ ou de $\lambda^{\frac{1}{p}}$. Dans ce développement les coefficients des diverses puissances de λ sont des fonctions algébriques de h_1, h_2, h_3, y_2, γ'', r.

Je puis toujours supposer que, pour $\lambda = 0$, F ne se réduit pas à une simple fonction de h_1, h_2, h_3.

En effet, poussons le développement de F suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{p}}$ jusqu'au premier terme dont le coefficient ne se réduit pas à une fonction de h_1, h_2, h_3. Soit

$$F = \Phi(h_1, h_2, h_3, \lambda) + \lambda^{\frac{\alpha}{p}} F_0(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) + \lambda^{\frac{\alpha+1}{p}} F_1(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) + \ldots$$

En remplaçant F par la différence

$$\frac{F - \Phi(h_1, h_2, h_3, \lambda)}{\lambda^{\frac{\alpha}{p}}},$$

ce qui revient à retrancher à l'intégrale première f une fonction des intégrales classiques, nous voyons que nous pouvons toujours supposer que l'on ait

$$F = F_0(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) + \lambda^{\frac{1}{p}} F_1(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) + \lambda^{\frac{2}{p}} F_2 + \ldots,$$

F_0 n'étant pas indépendante de y_2, γ'' et r.

En faisant $\lambda = 0$, nous en déduisons que le système (8), (9) admet l'intégrale première algébrique

$$(10) \qquad F_0(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r) = \text{const.},$$

F_0 ne peut être indépendante de y_2 et γ'' sinon r serait une constante.

L'égalité (10) montre que les fonctions $y_2(r)$, $\gamma''(r)$, solutions des équations (8), (9) et la variable indépendante r sont liées par une relation algébrique. En exprimant cette propriété, nous obtiendrons des conditions nécessaires d'existence d'une intégrale algébrique nouvelle pour le système différentiel (1).

§ II. — Lemmes abéliens auxiliaires.

4. Lemme I. — *Soit* $P(x)$ *un polynome entier en* x, *admettant au moins deux racines distinctes, et*

$$J(x) = \int \frac{dx}{y(x)}, \qquad y(x) = P^{\alpha}.$$

Si $J(x)$ *s'exprime algébriquement à l'aide de* x *et* y, α *est un nombre rationnel.*

Supposons en effet que α ne soit pas un nombre réel commensurable, et soit $x = a$ un zéro d'ordre m du polynome $P(x)$. On a

$$y(x) = (x-a)^{m\alpha} y_1(x),$$

$y_1(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x = a$.

La fonction $\frac{1}{y_1}$ est aussi holomorphe pour $x = a$ puisque $y_1(a)$ est différent de zéro ; on a donc

$$J(x) = \int \frac{dx}{(x-a)^{m\alpha} y_1} = \int \frac{1}{(x-a)^{m\alpha}} [c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots]\, dx.$$

En intégrant

$$J(x) = \frac{1}{(x-a)^{m\alpha-1}}[c'_0 + c'_1(x-a) + c'_2(x-a)^2 + \ldots] + C,$$

$c'_0, c'_1, c'_2, \ldots$ étant des constantes numériques, C une constante arbitraire.

Dans le domaine du point $x = a$ on a, d'après l'égalité précédente,

$$(11) \qquad y(x)J(x) = \varphi(x) + CP^\alpha,$$

$\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe.

Si la fonction $J(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x et y il en est de même de $J(x)$ augmentée d'une constante.

Il nous suffit donc de considérer la fonction $J(x)$ pour laquelle la constante C introduite par l'intégration dans le domaine du point $x = a$ est nulle.

Le produit $y(x)$ $J(x)$ s'exprime algébriquement en x et y.

Soit

$$y(x)J(x) = f(x, y).$$

On a en particulier, dans le domaine du point $x = a$,

$$(12) \qquad \varphi(x) = f(x, y).$$

Donnons à x une valeur x_0 voisine de a et faisons décrire au point représentatif de x, à partir de x_0, un nombre quelconque de cercles de centre a; le premier membre de l'égalité (12) garde la même valeur et $y(x)$ prend une infinité de valeurs. Or si la fonction algébrique $f(x_0, y)$ dépend effectivement de y, elle ne peut garder la même valeur que pour un nombre fini de valeurs de y; il faut donc pour que l'égalité (12) soit possible que la fonction f soit indépendante de y, c'est-à-dire que l'on ait

$$(13) \qquad y(x)J(x) = f(x).$$

$f(x)$ est une fonction algébrique dont les seuls points singuliers possibles sont ceux de $y(x)$ et ceux de $J(x)$, ces points sont les zéros du polynome $P(x)$.

La fonction $f(x)$ est holomorphe dans le voisinage du zéro particulier $x = a$. Dans le voisinage de tout autre zéro $x = b$ du polynome P, on a, d'après l'égalité (11),

$$f(x) = \varphi_1(x) + C_1 P^\alpha,$$

φ_1 étant holomorphe, C_1 une constante d'intégration déterminée.

Comme P^α admet le point $x = b$ comme point singulier transcendant, cette égalité exige que l'on ait $C_1 = 0$. On peut aussi, pour le prouver, reprendre le raisonnement qui a été utilisé pour l'équation (12).

La fonction algébrique $f(x)$ est donc holomorphe pour toute valeur de x, elle se réduit par conséquent à un polynome entier en x.

Pour trouver le degré du polynome $f(x)$, cherchons le développement du produit $y(x)\,J(x)$ pour x infiniment grand.

Posons

$$x = \frac{1}{z}.$$

Si le polynome $P(x)$ est de degré n, on a

$$y = P^\alpha = \frac{1}{z^{n\alpha}} y_2(z),$$

$y_2(z)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $z = 0$:

$$J(x) = -\int z^{n\alpha-2}(d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots)\,dz,$$

ou bien

$$J(x) = z^{n\alpha-1}(d'_0 + d'_1 z + d'_2 z^2 + \ldots) + C'$$

et, par suite,

$$f(x) = y(x) J(x) = \frac{1}{z}\psi(z) + C' y_2(z) \frac{1}{z^{n\alpha}},$$

$\psi(z)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $z = 0$.

D'après un raisonnement indiqué, la constante C' est nécessairement nulle et l'on voit que le polynome $f(x)$ est de l'ordre de x pour x infiniment grand. Le polynome f est donc de la forme

$$f = cx + d.$$

Pour calculer P on a, en prenant la dérivée logarithmique de l'égalité (13),

$$\frac{f'}{f} = \alpha \frac{P'}{P} + \frac{1}{f},$$

d'où

$$\frac{P'}{P} = \frac{c-1}{c\alpha} \frac{c}{cx+d},$$

$$P = k(cx+d)^{\frac{c-1}{c\alpha}}.$$

L'exposant $\frac{c-1}{c\alpha}$ est nécessairement un nombre entier positif et l'on voit que P ne peut être un polynome ayant plusieurs racines distinctes si α n'est pas un nombre rationnel.

5. Lemme II. — *Si deux intégrales abéliennes* $J(x)$ *et* $J_1(x)$, *toutes deux*

transcendantes, vérifient une relation algébrique en J, J_1 *et* x, *cette relation est nécessairement de la forme*

$$J_1 = kJ + \varphi(x),$$

k *étant une constante,* $\varphi(x)$ *étant une fonction algébrique.*

Nous avons indiqué (Chap. I, n° 15) une première démonstration en utilisant la forme que l'on peut donner, *a priori,* à la relation algébrique liant J, J_1 et x.

On peut en présenter une seconde dans l'ordre d'idées du Chapitre II.

Il est loisible de supposer les deux intégrales abéliennes J et J_1 attachées à la même courbe, soit

$$f(x, y) = 0.$$

Résolvons la relation liant J, J_1 et x par rapport à J_1. Ceci est toujours possible, sinon J serait une fonction algébrique de x. On a donc

$$J_1 = \psi(J, x),$$

ψ étant algébrique en J et x.

Puisque l'intégrale J n'est pas algébrique, il existe dans le plan des x (ou sur la surface de Riemann correspondant à la courbe f) au moins un contour fermé C, d'origine arbitraire, ramenant x et y à leurs valeurs initiales et le long duquel J s'accroît d'une période ω.

Quand x parcourt le contour C, J_1 ne peut que s'augmenter d'une période ω_1; on a, par conséquent,

$$\omega_1 = \psi(J + \omega, x) - \psi(J, x), \tag{14}$$

et cela quelle que soit l'origine x sur le contour C.

L'équation (14) dans laquelle on regarde J *et* x *comme deux variables indépendantes* ne peut renfermer J sinon on en tirerait J comme fonction algébrique de x. On a donc l'identité

$$\frac{\partial \psi(J + \omega, x)}{\partial J} - \frac{\partial \psi(J, x)}{\partial J} \equiv 0.$$

Cette identité montre que la *fonction algébrique* $\frac{\partial \psi(J, x)}{\partial J}$ *de* J *admet la période* ω, ce qui exige qu'elle soit indépendante de J.

Il en résulte, par intégration,

$$J_1 = \psi(J, x) \equiv J\alpha(x) + \beta(x),$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ étant deux fonctions algébriques.

On en déduit

$$\frac{dJ_1}{dx} = J\frac{d\alpha}{dx} + \alpha\frac{dJ}{dx} + \frac{d\beta}{dx}.$$

Tous les termes de cette égalité sont algébriques en x sauf le terme en J; comme J est une transcendante, on a nécessairement

$$\frac{d\alpha}{dx} \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = k.$$

On a, de plus,

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{dJ_1}{dx} - \alpha\frac{dJ}{dx}.$$

Donc $\frac{d\beta}{dx}$ est rationnel en x et y, il en est de même par suite de la fonction algébrique $\beta(x)$ et l'on a

$$J_1 = kJ + \varphi(x, y),$$

k désignant une constante et φ une fonction rationnelle de x et y.

L'équation (14) devient alors

$$k = \frac{\omega_1}{\omega},$$

ce qui donne une signification de la constante k.

6. Corollaire. — *Soient les deux intégrales abéliennes* J *et* J_1,

$$J = \int \frac{y\,dx}{x^2 - a^2}, \qquad J_1 = \int \frac{dx}{y(x^2 - a^2)},$$

la courbe à laquelle elles sont attachées étant

$$y = (x^2 - a^2)^{\frac{p}{m}},$$

où p et m sont des entiers positifs et premiers entre eux. Il est impossible que J, J_1 *et x soient liés par une relation algébrique, à moins que le nombre* $\frac{2p}{m}$ *ne soit entier, c'est-à-dire que l'une des intégrales* J *ou* J_1 *soit algébrique.*

En effet, si J et J_1 sont transcendantes, on a, dans le cas de liaison algébrique,

$$J_1 = kJ + \varphi(x, y).$$

On en déduit, en particulier, quand x parcourt le contour C défini précédemment,

$$\omega_1 = \int_C \frac{dJ_1}{dx} dx = k \int_C \frac{dJ}{dx} dx = k\omega. \tag{15}$$

Avant de parcourir le contour C, tournons une seule fois, dans le plan de x, autour du point $x = a$ en supposant, comme on peut l'admettre, que le contour C passe dans le domaine de ce point. La variable x reprend sa valeur initiale, y est multiplié par $e^{2i\pi\frac{p}{m}}$, $\frac{dJ_1}{dx}$ par $e^{-2i\pi\frac{p}{m}}$, $\frac{dJ}{dx}$ par $e^{2i\pi\frac{p}{m}}$. L'égalité (15) devient alors

$$\omega_1 e^{-2i\pi\frac{p}{m}} = k\omega e^{2i\pi\frac{p}{m}}. \tag{16}$$

On en déduit, par comparaison des égalités (15) et (16),

$$e^{2i\pi\frac{2p}{m}} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{2p}{m} = n,$$

n étant un nombre entier.

Si la condition précédente est satisfaite, les deux intégrales J et J_1 ne sont pas transcendantes, une seule est algébrique.

En effet, supposons d'abord le nombre $\frac{p}{m}$ entier, l'intégrale J se réduit à un polynome entier en x. L'intégrale J_1 admet les deux points singuliers logarithmiques $x = \pm a$ comme on le voit immédiatement en développant sa différentielle dans le domaine de ces points.

Supposons ensuite que le quotient $\frac{2p}{m}$ soit un entier impair, l'intégrale J_1 est algébrique, l'intégrale J contient des transcendantes logarithmiques. Ces intégrales seront calculées dans la suite à l'aide de formules de récurrence classiques, mais on peut montrer rapidement le fait précédent de la façon suivante. Posons

$$\frac{2p}{m} = 2n + 1, \qquad \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = z.$$

On a

$$J = \alpha \int \frac{z^{2n}\, dz}{(1 - z^2)^{n+1}}, \qquad J_1 = \alpha_1 \int \frac{(1 - z^2)^n\, dz}{z^{2n+2}}.$$

L'intégrale J admet les deux points singuliers logarithmiques $z = \pm 1$, l'intégrale J_1 est une fonction rationnelle de z.

On voit donc que si J et J_1 sont transcendantes, il est impossible que J, J_1 et x soient liées par une relation algébrique.

Si J et J_1 ne sont pas transcendantes, ce sont des intégrales binomes qui s'expriment en particulier à l'aide des fonctions élémentaires, ce qui exige, d'après un résultat connu, que le nombre $\frac{2p}{m}$ soit entier.

Nous venons de montrer que cette condition nécessaire est suffisante pour que J ou J_1 soit algébrique.

7. Lemme III. — *Soit* $J(x)$ *une intégrale abélienne transcendante attachée à la courbe* $f(xy)=0$ *et soit*

$$K(x)=\int J(x)\rho(x,y)\,dx,$$

ρ *étant une fonction rationnelle de* x *et* y.

Si J, K *et* x *vérifient une relation algébrique, l'intégrale abélienne*

$$\int \rho(x,y)\,dx$$

s'exprime algébriquement à l'aide de J *et* x.

La relation algébrique liant J, K et x dépend de K, sinon J serait algébrique; on en déduit

$$K=\varphi(J,x),$$

φ étant algébrique en J et x.

Faisons parcourir à la variable x un contour fermé C ramenant x et y à leurs valeurs initiales et augmentant l'intégrale J d'une période ω. L'expression $K(x)$ se transforme en $K_1(x)$ et l'on a

$$K_1(x)-K(x)=\varphi(J+\omega,x)-\varphi(J,x)=\psi(J,x).$$

D'autre part, en dérivant l'expression initiale $K(x)$, on a, en utilisant le même contour C,

$$\frac{dK_1}{dx}-\frac{dK}{dx}=(J+\omega)\rho-J\rho=\omega\rho(x,y),$$

et, en intégrant,

$$\psi(J,x)=\omega\int\rho(x,y)\,dx.$$

Comme ψ est algébrique en J et x le lemme est démontré.

Le lemme II indique la forme de l'expression ψ et il en résulte que l'on a nécessairement

$$\int\rho(xy)\,dx=\frac{k}{\omega}J+\varphi_1(x,y), \tag{17}$$

φ_1 étant une fonction rationnelle de x et y.

Il est facile de déduire de l'égalité (17) la forme de la relation algébrique liant J, K et x, lorsque cette relation existe.

En intégrant par parties l'expression initiale $K(x)$, on a, en effet,

$$K(x) = J\left(\frac{k}{2\omega}J + \varphi_1\right) - \int \varphi_1(x, y)\frac{dJ}{dx}dx.$$

Le dernier terme du second membre est une intégrale abélienne qui doit s'exprimer algébriquement en J et x; donc, d'après le lemme II, l'expression $K(x)$ s'écrit :

$$K(x) = \frac{k}{2\omega}J^2 + a(x, y)\,J + b(x, y),$$

$a(x, y)$ et $b(x, y)$ étant des fonctions rationnelles de x et y.

Nous n'aurons pas dans la suite à utiliser ce dernier résultat; il nous suffira de nous borner à l'énoncé du lemme III.

§ III. — Conditions nécessaires d'existence de l'intégrale algébrique.

8. Revenons à l'égalité (10) et cherchons à exprimer que le système (8), (9) admet une intégrale première algébrique.

Je dis que *s'il existe une intégrale algébrique nouvelle la fonction* $y_2(r)$ *est algébrique.*

Si γ'' ne figure pas dans F_0, cette propriété résulte immédiatement de l'égalité (10).

Si γ'' figure dans F_0, la fonction $\gamma''(r)$ s'exprime algébriquement à l'aide de r et y_2. Or on a

$$y_2 = (r^2 - a^2)^{1-\frac{C}{A}}J, \qquad J = \text{const.} - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1-\frac{C}{A}}},$$

$$\gamma'' = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}\Gamma'',$$

$$\Gamma'' = \lambda_0 + \lambda_1 \int \frac{J\,dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}+1}} + \lambda_2 \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}+1}},$$

λ_0, λ_1, λ_2 étant, d'après l'équation (9 *bis*), des constantes arbitraires et indépendantes.

La fonction $\gamma''(r)$ est un polynome en λ_0, λ_1, λ_2, *comme* $y_2(r)$ *est indépendant de ces arbitraires,* tous les termes de ce polynome s'expriment algébriquement en fonction de r et y_2. Les trois expressions

$$J_0 = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}}, \qquad J_1 = \int \frac{dr}{(r^2-a^2)^{1+\frac{C}{A}}}, \qquad J_2 = \int \frac{J\,dr}{(r^2-a^2)^{1+\frac{2C}{A}}}$$

s'expriment donc algébriquement à l'aide de r et y_2.

En utilisant en particulier J_0 et J_1 on en déduit, en éliminant y_2, que ces deux expressions et r sont liées par une relation algébrique.

Si cette relation dépend de J_1, d'après le lemme I, $\left(1+\frac{C}{A}\right)$ et par suite $\frac{C}{A}$ est nécessairement rationnel; si cette relation est indépendante de J_1, J_0 est algébrique et l'on obtient le même résultat.

En résumé, *si γ'' figure dans F_0, le rapport $\frac{C}{A}$ est rationnel,* et ceci que $y_2(r)$ soit ou non une fonction transcendante de r.

9. Supposons $\frac{C}{A} = \frac{p}{m}$, la fraction $\frac{p}{m}$ étant irréductible.

L'expression J_1 doit s'exprimer algébriquement à l'aide de r et y_2 ou de r et J.

Les intégrales J et J_1 ont été étudiées à ce point de vue (n^os 5 et 6). D'après le corollaire du lemme II, ceci n'est possible que si le nombre $\frac{2C}{A}$ est entier.

Notons que ce résultat s'applique quel que soit J, algébrique ou transcendant.

Si $\frac{C}{A}$ est entier, J_1 (transcendant) ne s'exprime pas en fonction algébrique de r et J (algébrique).

Si $\frac{2C}{A}$ est un entier impair, J_1 est algébrique.

Donc F_0 *ne peut renfermer γ'' que si le rapport $\frac{2C}{A}$ est un entier impair.*

10. Soit $\frac{2C}{A} = 2n - 1$. Il nous reste à exprimer que l'intégrale J_2 se réduit à une fonction algébrique de r et y_2 ou de r et J.

Supposons d'abord ε différent de zéro, l'intégrale J est transcendante, donc, d'après le lemme III, l'intégrale

$$J_3 = \int \frac{dr}{(r^2-a^2)^{1+\frac{2C}{A}}} = \int \frac{dr}{(r^2-a^2)^{2n}}$$

doit s'exprimer algébriquement à l'aide de r et de J ou bien encore à l'aide de r

et de l'intégrale

$$J' = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1-\frac{C}{A}}} = \int (r^2 - a^2)^{n-1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Les intégrales J_3 et J' se calculent élémentairement à l'aide de formules de récurrence classiques, et l'on a

$$J_3 = \varphi\,(r) + \alpha\, \log \frac{r-a}{r+a},$$

$$J' = \varphi_1(r) + \alpha_1 \log\left(r + \sqrt{r^2 - a^2}\right),$$

φ et φ_1 étant des fonctions algébriques, α et α_1 des constantes différentes de zéro.

Les points $r = \pm a$ sont donc des points critiques algébriques de J' et par suite de toute fonction algébrique de r et J'; comme ces points sont des points singuliers logarithmiques de J_3, il est impossible que J_3 s'exprime algébriquement à l'aide de r et J.

On peut aussi obtenir ce résultat en développant $\frac{dJ_3}{dx}$, $\frac{dJ'}{dx}$ dans le voisinage des points $r = \pm a$.

Soit ensuite $\varepsilon = 0$, l'intégrale J se réduit à une constante, donc J_2 se réduit à J_3 et par suite J_3 doit être une fonction algébrique de r, ce qui est impossible ([1]).

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

Théorème. — *Dans aucun cas l'expression* F_0 *ne peut dépendre de* y''. *La fonction* $y_2(r)$ *est par suite toujours algébrique.*

11. La fonction $y_2(r)$ est une somme de deux termes dont l'un est multiplié par un facteur constant arbitraire; comme les deux termes sont indépendants de cette arbitraire, ils sont séparément algébriques.

Donc les deux expressions

$$(r^2 - a^2)^{1-\frac{C}{A}}, \quad \frac{2C}{A} \operatorname{tang} \varepsilon \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{1-\frac{C}{A}}} = \frac{2C}{A} \operatorname{tang} \varepsilon\, J'$$

sont algébriques.

En considérant la première de ces deux expressions, on en déduit que le rapport $\frac{C}{A}$ est nécessairement rationnel.

([1]) Au lieu d'appliquer le lemme III, on peut établir les résultats du n° 10 en développant directement $\frac{dJ_2}{dx}$ et $\frac{dJ}{dx}$ dans le voisinage des points $r = \pm a$.

On obtient aussi ce résultat en appliquant directement le lemme 1 à la fonction $y_2(r)$.

Considérons la seconde expression.

Si ε est nul, elle se réduit à zéro, elle est par suite algébrique.

Si ε est différent de zéro, l'intégrale J' doit être algébrique.

Comme $\frac{C}{A}$ est rationnel, J' n'est autre que l'intégrale J étudiée au n° 6 et nous avons vu, en appliquant les propriétés des intégrales binomes, que le rapport $\frac{C}{A}$ doit se réduire à un nombre entier.

Nous obtenons finalement les conditions nécessaires d'existence suivantes :

THÉORÈME. — *Pour qu'il puisse exister une intégrale algébrique nouvelle, il faut : ou bien $\frac{C}{A}$ rationnel et ε nul, ou bien $\frac{C}{A}$ entier.*

12. Le premier terme $F_0(h_1, h_2, h_3, y_2, \gamma'', r)$ du développement de l'intégrale F étant le premier membre d'une intégrale première du système (8), (9), nous sommes amenés à chercher, lorsque les conditions nécessaires indiquées sont satisfaites, quelles sont les intégrales premières algébriques de ce système.

L'équation (8) donne l'intégrale algébrique

$$y_2(r^2-a^2)^{\frac{C}{A}-1} + \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon \int (r^2-a^2)^{\frac{C}{A}-1}\,dr = \text{const.},$$

ou encore

$$h_4 = y_2 z_2^{\frac{C}{A}-1} + \frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} \int (r^2-a^2)^{\frac{C}{A}-1}\,dr = \text{const.},$$

z_2 étant défini par la relation

$$Cr^2 - z_2\cos\varepsilon = h_1 = Ca^2.$$

Le système (8), (9) n'admet pas d'intégrale première algébrique distincte de h_4.

En effet, toute nouvelle intégrale première algébrique dépendrait nécessairement de γ'', sinon y_2 serait une constante; or, nous avons démontré qu'une telle intégrale ne peut exister. Cela revient aussi à dire que $\gamma''(r)$ ne peut être algébrique pour des valeurs arbitraires des constantes et cette propriété ressort nettement des calculs faits.

Le système (4), (5) ne saurait donc posséder d'autres intégrales premières algébriques et indépendantes du temps que les quatre intégrales h_1, h_2, h_3, h_4.

L'expression F_0 *est donc nécessairement une fonction de* h_1, h_2, h_3, h_4 *et dépend effectivement de* h_4.

§ IV. — Étude progressive de l'intégrale.

13. Revenons au système différentiel général (1 *bis*) ou au système (3) qui lui est équivalent.

Le système (3) définit $y_2(r)$, $\gamma''(r)$ en fonction de λ, et les équations (2 *bis*) permettent de calculer $y_1(r)$, $z_1(r)$, $z_2(r)$.

Nous désignerons par $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{\gamma''}$ les valeurs des fonctions y_1, y_2, z_1, z_2, γ'' pour $\lambda = 0$; ces valeurs sont définies par le système (8), (9) et les relations (6).

Substituons à la fonction $y_2(r)$ la fonction $u(r)$ définie par l'équation

$$u(r) = y_2 z_2^{\frac{C}{A}-1} + \frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} \int (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} dr, \tag{18}$$

y_2 est une fonction algébrique de u, z_2 et r, donc l'intégrale première

$$F(h_1, h_2, h_3, \lambda, y_2, \gamma'', r)$$

est algébrique en u, γ'', r, et son développement suivant les puissances de λ devient

$$F = F_0(h_1, h_2, h_3, u) + \lambda^{\frac{1}{p}} F_1(h_1, h_2, h_3, u, \gamma'', r) + \ldots + \lambda^{\frac{k}{p}} F_k(h_1, h_2, h_3, u, \gamma'', r) + \ldots. \tag{19}$$

Le premier terme F_0 dépend uniquement de h_1, h_2, h_3, u car pour $\lambda = 0$ u devient identique à h_4; F_0 dépend effectivement de u et, par suite, $\dfrac{\partial F_0}{\partial u}$ est différent de zéro [1].

Pour λ suffisamment petit, l'intégrale générale $\gamma''(r)$, $y_2(r)$ ou $u(r)$, du système (3) est développable suivant les puissances de λ. On a

$$\gamma'' = \overline{\gamma''} + \lambda\gamma''_1 + \lambda^2\gamma''_2 + \ldots,$$
$$u = h_4 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots,$$

h_4 étant une constante arbitraire.

---

[1] On pourrait, en résolvant l'équation $F = F_0(h_1, h_2, h_3, u)$ par rapport à u, amener le premier terme à se réduire à u, mais cette simplification ne se présente pas comme très utile.

Soient de même :

$$y_1 = \overline{y_1} + \lambda y'_1 + \lambda^2 y''_1 + \ldots,$$
$$y_2 = \overline{y_2} + \lambda y'_2 + \lambda^2 y''_2 + \ldots,$$
$$z_1 = \overline{z_1} + \lambda z'_1 + \lambda^2 z''_1 + \ldots,$$
$$z_2 = \overline{z_2} + \lambda z'_2 + \lambda^2 z''_2 + \ldots$$

les développements suivant les puissances de λ des fonctions $y_1(r)$, $y_2(r)$, $z_1(r)$, $z_2(r)$, ces développements étant donnés par les égalités (2 *bis*) et (18).

Remplaçons $u(r)$ et $\gamma''(r)$ par leurs développements dans l'égalité (19), le second membre prend une valeur constante (c'est-à-dire indépendante de r), cette constante étant une fonction de λ, h_1, h_2, h_3, h_4, ..., soit

$$F(h_1, h_2, h_3, \lambda, u, \gamma'', r) = \Phi(\lambda).$$

Donc, si nous développons $\Phi(\lambda)$ suivant les puissances croissantes de $\lambda^{\frac{1}{p}}$, les coefficients de tous les termes du développement seront séparément des constantes. L'égalité (19) donne

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) = {} & F_0(h_1, h_2, h_3, h_4) + \lambda^{\frac{1}{p}} F_1(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r) + \ldots \\ & + \lambda\left[u_1 \frac{\partial F_0(h_1, h_2, h_3, h_4)}{\partial h_4} + F_p(h_1, h_2, h_4, h_4, \overline{\gamma''}, r)\right] + \ldots \\ & + \lambda^2\left[u_2 \frac{\partial F_0}{\partial h_4} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial h_4^2} + u_1 \frac{\partial F_p(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r)}{\partial h_4} + \gamma''_1 \frac{\partial F_p}{\partial \overline{\gamma''}} + F_{2p}(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

en remarquant que h_1, h_2, h_3 sont supposées indépendantes de λ.

On a donc, en utilisant les termes correspondant aux puissances entières de λ,

$$(20) \qquad u_1 \frac{\partial F_0}{\partial h_4} + F_p(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r) = \text{const.}$$

$$(21) \qquad u_2 \frac{\partial F_0}{\partial h_4} + \gamma''_1 \frac{\partial F_p}{\partial \overline{\gamma''}} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial h_4^2} + u_1 \frac{\partial F_p}{\partial h_4} + F_{2p}(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r) = \text{const.}$$

....

Comme $\dfrac{\partial F_0(h_1, h_2, h_3, h_4)}{\partial h_4}$ est différent de zéro, l'égalité (20) exprime que u_1 est une fonction algébrique de $\overline{\gamma''}$ et r; cette condition étant satisfaite et u_1 calculé, l'égalité (20) donne F_p.

L'égalité (21) exprime que u_2, γ''_1, u_1, $\overline{\gamma''}$ sont liés par une relation algébrique et elle donne F_{2p}.

Nous discuterons successivement ces conditions.

14. La relation (18) donne, par dérivation, pour définir $u(r)$ l'équation différentielle

$$\frac{du}{dr} = 2\,C z_2^{\frac{C}{A}-2} \frac{\frac{z_2}{A}(A_1 r y_2 - z_2 \sin\varepsilon + \lambda\gamma'' \cos\varepsilon) + \left(\frac{C}{A} - 1\right) y_2 (r z_2 - \lambda \gamma'' y_2)}{\cos\varepsilon (z_2 - \lambda z_1)}$$
$$+ \frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1}$$

ou bien

$$\frac{du}{dr} = \frac{2\,C\lambda}{\cos\varepsilon} z_2^{\frac{C}{A}-2} \gamma'' \frac{\frac{\cos\varepsilon}{A} z_2 + \left(1 - \frac{C}{A}\right) y_2^2}{z_2 - \lambda z_1} - \frac{2\,C}{A} \operatorname{tang}\varepsilon \frac{z_2^{\frac{C}{A}}}{z_2 - \lambda z_1}$$
$$+ \frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1}.$$

Le second membre se présente sous la forme d'une fonction rationnelle explicite de λ.

Il vient, en développant cette fonction rationnelle suivant les puissances de λ,

$$\text{(22)}\quad \frac{du}{dr} = \frac{2\,C}{\cos\varepsilon} z_2^{\frac{C}{A}-3} \gamma'' \left[\frac{\cos\varepsilon}{A} z_2 + \left(1 - \frac{C}{A}\right) y_2^2\right] \left(\lambda + \frac{z_1}{z_2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2}\frac{z_1^2}{z_2^2}\lambda^3 + \ldots\right)$$
$$+ \frac{2\sin\varepsilon}{A}\left(\frac{C}{\cos\varepsilon}\right)^{\frac{C}{A}} (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} - \frac{2\,C}{A} \operatorname{tang}\varepsilon\, z_2^{\frac{C}{A}-1} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\lambda + \frac{1}{1.2}\frac{z_1^2}{z_2^2}\lambda^2 + \ldots\right).$$

En remplaçant, dans l'équation (22), $u(r)$, $\gamma''(r)$, $z_2(r)$, ... par leurs développements suivant les puissances de λ, nous obtiendrons, en égalant les coefficients des diverses puissances de λ, les équations différentielles définissant $u_1(r)$, $u_2(r)$, ...

Les termes indépendants de λ donnent

$$\frac{d\overline{u}}{dr} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad \overline{u} = \text{const.} = h_4.$$

Les termes en λ donnent

$$\text{(23)}\quad \frac{du_1}{dr} = \frac{2\,C}{\cos\varepsilon} (\overline{z}_2)^{\frac{C}{A}-3} \overline{\gamma''} \left[\frac{\cos\varepsilon}{A} \overline{z}_2 + \left(1 - \frac{C}{A}\right)(\overline{y}_2)^2\right]$$
$$- \frac{2\,C}{A} \operatorname{tang}\varepsilon (\overline{z}_2)^{\frac{C}{A}-2} \left[\left(\frac{C}{A} - 1\right) z_2' + \overline{z}_1\right].$$

L'intégrale première h_1 permet de calculer z_2' sous la forme

$$z_2' \cos\varepsilon = A\,\overline{y_1}\,\overline{y_2} - \overline{z}_1 \cos\varepsilon - 2\,\overline{\gamma''} \sin\varepsilon.$$

Enfin l'étude du cas particulier $\lambda = 0$ nous fournit les fonctions $\overline{\gamma''}, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots$ entrant dans le second membre de l'équation (23).

On a notamment, en posant

$$\overline{\gamma''} = (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}} \Gamma'',$$

$$(24) \qquad \frac{d\Gamma''}{dr} = \frac{2h_3 \cos\varepsilon}{C} \frac{\overline{y_2}}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}+2}} - \frac{h_2}{A} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}+1}}.$$

$$(25) \qquad \begin{cases} \overline{y_2} = \dfrac{1}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1}} \left[h'_4 - \dfrac{2C}{A} \operatorname{tang}\varepsilon \displaystyle\int (r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}-1} dr \right], \\ h'_4 = h_4 \left(\dfrac{\cos\varepsilon}{C} \right)^{\frac{C}{A}-1}. \end{cases}$$

§ V. — Étude du cas $\frac{C}{A}$ entier, ε différent de zéro.

15. Nous rencontrerons fréquemment dans la suite des intégrales hyperelliptiques de la forme

$$\int (r^2 - a^2)^\alpha dr \quad \text{ou} \quad \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^\alpha},$$

2α étant un nombre entier positif.

Ces intégrales se calculent élémentairement à l'aide de formules de récurrence.

On a, en intégrant par parties,

$$\int (r^2 - a^2)^\alpha dr = r(r^2 - a^2)^\alpha - 2\alpha \int r^2 (r^2 - a^2)^{\alpha-1} dr.$$

On en déduit

$$(a) \qquad \int (r^2 - a^2)^\alpha dr = \frac{r(r^2 - a^2)^\alpha}{2\alpha + 1} - \frac{2\alpha a^2}{2\alpha + 1} \int (r^2 - a^2)^{\alpha-1} dr$$

et, en changeant α en $-\alpha$,

$$(b) \qquad \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\alpha+1}} = -\frac{1}{2\alpha a^2} \frac{r}{(r^2 - a^2)^\alpha} - \frac{2\alpha - 1}{2\alpha a^2} \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^\alpha}.$$

Les formules de récurrence (a) et (b) sont classiques et s'appliquent, quelle que soit la nature du nombre α.

Soit $\frac{C}{A} = n$.

Pour satisfaire à la condition exprimée par la relation (20), étudions la nature de la fonction $\overline{\gamma}''(r)$ ou encore Γ''.

Posons

$$\Pi(r)=\int (r^2-a^2)^{n-1}\,dr,$$

$\Pi(r)$ étant la fonction primitive particulière s'annulant pour $r=0$; $\Pi(r)$ est un polynome fonction impaire de r.

Pour calculer $\Pi(r)$, on a, en appliquant la formule de récurrence (a),

$$\int (r^2-a^2)^{n-1}\,dr=\frac{r(r^2-a^2)^{n-1}}{2n-1}-\frac{2(n-1)a^2}{2n-1}\int (r^2-a^2)^{n-2}\,dr,$$

$$\int (r^2-a^2)^{n-2}\,dr=\frac{r(r^2-a^2)^{n-2}}{2n-3}-\frac{2(n-2)a^2}{2n-3}\int (r^2-a^2)^{n-3}\,dr,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int (r^2-a^2)^1\,dr\quad=\frac{r(r^2-a^2)}{3}\quad-\frac{2.1.a^2}{3}r.$$

Il en résulte

$$(26)\qquad \Pi(r)=r[a_0+a_1(r^2-a^2)+\ldots+a_{n-1}(r^2-a^2)^{n-1}],$$

a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} étant des constantes différentes de zéro.

Les équations (25) et (24) s'écrivent alors

$$\overline{y}_2=\frac{1}{(r^2-a^2)^{n-1}}\left[h'_4-\frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon\,\Pi(r)\right],$$

$$\Gamma''=\frac{2h_3h'_4\cos\varepsilon}{C}\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{2n+1}}-\frac{h_2}{A}\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{n+1}}-\frac{4h_3\sin\varepsilon}{A}\int\frac{\Pi(r)\,dr}{(r^2-a^2)^{2n+1}}.$$

La troisième intégrale figurant au second membre est une fonction rationnelle de r d'après l'égalité (26).

Pour calculer les deux autres, on a, en désignant par m un nombre entier et en appliquant la formule de récurrence (b),

$$\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{m+1}}=-\frac{1}{2ma^2}\frac{r}{(r^2-a^2)^m}-\frac{2m-1}{2ma^2}\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^m},$$

$$\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^m}=-\frac{1}{2(m-1)a^2}\frac{r}{(r^2-a^2)^{m-1}}-\frac{2m-3}{2(m-1)a^2}\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^2}=-\frac{1}{2.1.a^2}\frac{r}{r^2-a^2}-\frac{1}{2.1.a^2}\int\frac{dr}{r^2-a^2}.$$

Il en résulte

$$(27) \int \frac{dr}{(r^2-a^2)^{m+1}} = r\left[\frac{b_0}{(r^2-a^2)^m} + \frac{b_1}{(r^2-a^2)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{r^2-a^2}\right] + b_m \log\frac{r-a}{r+a},$$

b_0, b_1, b_2, ..., b_m étant des constantes différentes de zéro.

Les calculs précédents montrent que *la fonction* $\bar{\gamma}''(r)$ *est une fonction algébrique de* r *et de* $\log\frac{r-a}{r+a}$.

16. La constante $\frac{\partial F_0}{\partial h_4}$ étant différente de zéro, la relation (20) s'écrit

$$(28) \qquad u_1 = \varphi\left(r, \log\frac{r-a}{r+a}\right),$$

φ étant une fonction algébrique en r, et $\log\frac{r-a}{r+a}$.

Or l'équation différentielle (23) montre que $u_1(r)$ est un polynome entier en h_2, h_3, h_4, comme h_2, h_3, h_4 sont des constantes arbitraires sans aucune liaison, la condition précédente est satisfaite pour toutes les valeurs numériques de ces constantes, car $\log\frac{r-a}{r+a}$ en est indépendant.

En particulier pour $h_2 = h_3 = 0$, on a

$$\bar{\gamma}'' = k(r^2-a^2)^n,$$

k étant une constante arbitraire;

$$\frac{du_1}{dr} = \frac{2C}{\cos\varepsilon}(\bar{z}_2)^{\frac{C}{A}-3}\bar{\gamma}''\left[\frac{\cos\varepsilon}{A}\bar{z}_2 + \left(1-\frac{C}{A}\right)(\bar{y}_2)^2\right]$$
$$+ \frac{4C}{A}\left(\frac{C}{A}-1\right)\operatorname{tang}\varepsilon(\bar{z}_2)^{\frac{C}{A}-2}\bar{\gamma}''\left(\sin\varepsilon + \frac{Cr\bar{y}_2}{\bar{z}_2}\right)$$

et, par suite,

$$\frac{du_1}{dr} = \alpha(r^2-a^2)^{2n-2} + \left(1-\frac{C}{A}\right)r(r^2-a^2)^{n-2}[\alpha_1 + \alpha_2 \Pi(r)]$$
$$+ \alpha_3\left(1-\frac{C}{A}\right)\frac{1}{r^2-a^2}\left[h'_4 - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon\, \Pi(r)\right]^2.$$

α, α_1, α_2, α_3 sont des constantes numériques, la dernière étant toujours différente de zéro.

On en tire

$$u_1 = \alpha_3\left(1 - \frac{C}{A}\right)\int\left[h'_4 - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon\,\Pi(r)\right]^2 \frac{dr}{r^2 - a^2} + \text{fonct. algébrique de } r$$

ou bien

$$\begin{aligned} u_1 = {} & \frac{\alpha_3}{2a}\left(1 - \frac{C}{A}\right)\left[h'_4 - \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon\,\Pi(a)\right]^2 \log(r - a) \\ & - \frac{\alpha_3}{2a}\left(1 - \frac{C}{A}\right)\left[h'_4 + \frac{2C}{A}\operatorname{tang}\varepsilon\,\Pi(a)\right]^2 \log(r + a) + \text{fonct. algébrique de } r, \end{aligned}$$

en observant que $\Pi(r)$ étant une fonction impaire, $\Pi(-a) = -\Pi(a)$.

On a donc

$$u_1 = -\frac{4C}{A}\left(1 - \frac{C}{A}\right)\alpha_3\frac{\Pi(a)}{a}\operatorname{tang}\varepsilon\log(r^2 - a^2) + \text{fonct. alg. de } r \text{ et } \log\frac{r - a}{r + a}.$$

Je dis qu'il est nécessaire que le coefficient de $\log(r^2 - a^2)$ soit nul.

Si, en effet, il n'en est pas ainsi, la relation (28) s'écrit

$$(28\ bis) \qquad \log(r - a) + \log(r + a) = \varphi_1[r, \log(r - a) - \log(r + a)],$$

φ_1 étant une fonction algébrique de r et de la différence $[\log(r - a) - \log(r + a)]$. L'égalité (28 *bis*) ne peut être indépendante de $\log(r - a)$ et $\log(r + a)$ sans être aussi indépendante de leur somme et de leur différence, ce qui est visiblement impossible. Il suit de là que cette égalité n'est pas indépendante de $\log(r + a)$, sinon elle montrerait que $\log(r - a)$ est une fonction algébrique de r; on en tire, par conséquent,

$$(28\ ter) \qquad \log(r + a) = \varphi_2[r, \log(r - a)],$$

φ_2 étant une fonction algébrique de r et $\log(r - a)$.

Le second membre de l'égalité (28 *ter*) est une fonction de r admettant le point $r = -a$ comme point critique algébrique, donc cette égalité est impossible, et l'on a, par suite,

$$\left(1 - \frac{C}{A}\right)\operatorname{tang}\varepsilon\,\Pi(a) = 0.$$

Si $\Pi(a)$ était nul, le polynome impair $\Pi(r)$ serait divisible par $(r^2 - a^2)$ et, par suite, par $r(r^2 - a^2)^n$, ce qui est impossible car le polynome $\Pi(r)$ est seulement de degré $2n - 1$; d'ailleurs, l'égalité (26) donne $\Pi(a) = aa_0$, et l'on sait que a_0 est différent de zéro.

On a donc nécessairement

$$\left(1-\frac{C}{A}\right)\operatorname{tang}\varepsilon = 0.$$

Théorème. — *Pour qu'il existe une intégrale algébrique nouvelle, il faut :*

1° *Que le rapport* $\frac{C}{A}$ *soit rationnel;*

2° *Que le centre de gravité du solide soit situé dans le plan équatorial de l'ellipsoïde d'inertie supposé de révolution.*

La seule exception est le cas de Lagrange.

§ VI. — Étude du cas $\frac{C}{A}$ rationnel.

17. L'angle ε étant toujours nul, les équations utilisées se simplifient et deviennent

$$(29)\qquad \frac{du}{dr} = 2C z_2^{\frac{C}{A}-3}\gamma''\left[\frac{z_2}{A}+\left(1-\frac{C}{A}\right)y_2^2\right]\left[\lambda+\frac{z_1}{z_2}\lambda_3+\frac{1}{1.2}\frac{z_1^2}{z_2^2}\lambda_2+\ldots\right],$$

$$\bar{y}_2 = h_4(\bar{z}_2)^{1-\frac{C}{A}} = h'_4(r^2-a^2)^{1-\frac{C}{A}},$$

$$\bar{\gamma}'' = (r^2-a^2)^{\frac{C}{A}}\Gamma'';$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\Gamma''}{dr} &= \frac{2h_3h'_4}{C}\,\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{2C}{A}+1}} - \frac{h_2}{A}\,\frac{1}{(r^2-a^2)^{\frac{C}{A}+1}},\\ \frac{du_1}{dr} &= 2C^{\frac{C}{A}-2}\Gamma''\left[\frac{C}{A}(r^2-a^2)^{\frac{2C}{A}-2}+\left(1-\frac{C}{A}\right)h'^2_4\,\frac{1}{r^2-a^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Les équations (30) sont de la forme

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} \Gamma'' &= \lambda_1\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{\frac{2C}{A}+1}}+\lambda_2\int\frac{dr}{(r^2-a^2)^{\frac{C}{A}+1}} = \lambda_1\Gamma_1+\lambda_2\Gamma_2,\\ u_1 &= \int\Gamma''\left[\alpha(r^2-a^2)^{\frac{2C}{A}-2}+\lambda_3\frac{1}{r^2-a^2}\right]dr,\end{aligned}\right.$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des constantes arbitraires et indépendantes, α une constante numérique non nulle.

La fonction $u_1(r)$ doit être, d'après la relation (20), une fonction algébrique de r et Γ''.

Or nous avons montré que l'expression Γ'' est, dans tous les cas possibles, une intégrale abélienne transcendante; donc, d'après le lemme III, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'intégrale abélienne

$$J = \int \left[\alpha(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}-2} + \lambda_3 \frac{1}{r - a} \right] dr$$

s'exprime algébriquement en r et Γ''.

L'intégrale J est un polynome entier en λ_3; donc, comme Γ'' est indépendante de la constante arbitraire λ_3, les deux intégrales

$$J_1 = \int (r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}-2} dr, \qquad J_2 = \int \frac{dr}{r^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{r - a}{r + a}$$

doivent s'exprimer algébriquement en r et Γ''.

Il résulte de l'expression de J_2 que J_1 et Γ'' doivent s'exprimer algébriquement en r et $\log \frac{r-a}{r+a}$, et, comme $\log \frac{r-a}{r+a}$ est indépendant des deux constantes arbitraires λ_1, λ_2, il en est de même des deux intégrales

$$\Gamma_1 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}+1}}, \qquad \Gamma_2 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{C}{A}+1}}.$$

Les deux intégrales Γ_1 et Γ_2 sont de la forme

$$K = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{m+1}},$$

m étant un nombre positif et rationnel.

Dans le domaine du point $r = a$, on a

$$\frac{1}{(r^2 - a^2)^{m+1}} = \frac{c_0}{(r - a)^{m+1}} + \frac{c_1}{(r - a)^m} + \frac{c_2}{(r - a)^{m-1}} + \ldots.$$

Donc, si le nombre $\frac{2C}{A}$ n'est pas entier, les deux intégrales abéliennes Γ_1 et Γ_2 admettent les deux points $r = \pm a$ comme points critiques algébriques. D'autre part, si le nombre $\frac{2C}{A}$ n'est pas entier, l'intégrale binome Γ_2 ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires; elle est donc transcendante et ne peut, par suite, être une combinaison algébrique de r et $\log \frac{r-a}{r+a}$.

Les conditions nécessaires d'existence d'une intégrale algébrique nouvelle se complètent donc par la condition $\frac{2C}{A}$ entier.

Si le rapport $\frac{2C}{A}$ est entier, on montre de suite, à l'aide des formules de récurrence indiquées, que J_1, Γ_1, Γ_2 sont des fonctions algébriques de r et $\log \frac{r-a}{r+a}$.

18. On peut aussi arriver rapidement au résultat précédent sans utiliser le lemme III.

Supposons $\frac{2C}{A}$ non entier.

L'étude de Γ_1 et Γ_2 nous a montré que la fonction Γ'' admet les deux points $r = \pm a$ comme points critiques algébriques.

L'expression $u_1(r)$ étant une fonction algébrique de r et Γ'' possède donc la même propriété.

Or $u_1(r)$ est un polynome entier en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; donc l'expression $u_1(r)$ satisfait à la condition précédente pour toutes les valeurs numériques des arbitraires λ_1, λ_2, λ_3.

En faisant

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

l'intégrale

$$J_3 = \int \Gamma_1 (r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A} - 2} dr$$

doit admettre les deux points $r = \pm a$ comme points algébriques.

En posant

$$\frac{2C}{A} = m,$$

on a, dans le domaine du point $r = a$,

$$\Gamma_1 = c' + \frac{c'_0}{(r-a)^m} + \frac{c'_1}{(r-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c'_p}{(r-a)^{m-p}} + \ldots,$$

et, par suite,

$$\Gamma_1 (r+a)^{m-2} = \frac{d_0}{(r-a)^m} + \frac{2}{m(m-1)} \frac{1}{(r-a)^{m-1}} + \frac{d_2}{(r-a)^{m-2}} + \ldots,$$

$$\frac{dJ_3}{dr} = \frac{d_0}{(r-a)^2} + \frac{2}{m(m-1)} \frac{1}{r-a} + d_2 + d_3(r-a) + \ldots.$$

Donc, si $\frac{2C}{A}$ n'est pas un nombre entier, J_3 admet les deux points $r = \pm a$

comme points singuliers logarithmiques et, par suite, $u_1(r)$ ne peut être une fonction algébrique de r et Γ''.

Si $\frac{2C}{A}$ est entier, on constatera par la suite que l'étude du cas particulier précédent ne peut donner aucun résultat.

19. Les conditions exprimées aux n^{os} 17 ou 18 ne sont pas nécessairement suffisantes pour que $u_1(r)$ s'exprime algébriquement à l'aide de r et Γ''.

Nous avons vu au n° 17 que Γ'' est une fonction algébrique de r et de $\log\frac{r-a}{r+a}$; cette propriété résulte d'ailleurs immédiatement des formules de récurrence (a) et (b) appliquées à Γ_1 et Γ_2.

La fonction $u_1(r)$ est un polynome entier en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; comme $\log\frac{r-a}{r+a}$ est indépendant de ces constantes arbitraires, tous les termes de ce polynome s'expriment algébriquement à l'aide de r et $\log\frac{r-a}{r+a}$. Donc, pour que l'égalité (20) soit vérifiée, il faut et il suffit que les quatre intégrales

$$J_3 = \int \Gamma_1 (r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}-2} dr, \qquad J_4 = \int \frac{\Gamma_1}{r^2 - a^2} dr,$$

$$J_5 = \int \Gamma_2 (r^2 - a^2)^{\frac{2C}{A}-2} dr, \qquad J_6 = \int \frac{\Gamma_2}{r^2 - a^2} dr$$

s'expriment algébriquement à l'aide de r et $\log\frac{r-a}{r+a}$.

Les calculs présentant des différences profondes suivant la parité du nombre entier $\frac{2C}{A}$, nous séparerons les deux cas.

§ VII. — Le rapport $\frac{C}{A}$ est entier. — Impossibilité.

20. Soit

$$\frac{C}{A} = n.$$

L'égalité (27) donne les expressions des intégrales Γ_1 et Γ_2. On a

$$\Gamma_2 = r\left[\frac{b_0}{(r^2-a^2)^n} + \frac{b_1}{(r^2-a^2)^{n-1}} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{r^2-a^2}\right] + b_n \log\frac{r-a}{r+a}.$$

Je dis que J_5 n'est pas une combinaison algébrique de r et $\log\frac{r-a}{r+a}$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}J_5 = & \int r(r^2-a^2)^{n-2}[b_0 + b_1(r^2-a^2) + \ldots + b_{n-1}(r^2-a^2)^{n+1}]\,dr \\ & + b_n \int (r^2-a^2)^{2n-2} \log\frac{r-a}{r+a}\,dr.\end{aligned}$$

Soit d'abord

$$n \geqq 2.$$

La première intégrale figurant dans l'expression J_5 est un polynome entier en r. Pour calculer la seconde, posons

$$\int (r^2-a^2)^{2n-2}\,dr = P(r).$$

$P(r)$ est un polynome entier en r ne renfermant que des puissances impaires. On a, en intégrant par parties,

$$\int (r^2-a^2)^{2n-2} \log\frac{r-a}{r+a}\,dr = P(r)\log\frac{r-a}{r+a} - \int P(r)\left(\frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a}\right)dr.$$

Comme $P(r)$ est une fonction impaire de r, on en déduit

$$J_5 = -P(a)\log(r^2-a^2) + \varphi\left(r, \log\frac{r-a}{r+a}\right),$$

φ étant une fonction algébrique de r et $\log\dfrac{r-a}{r+a}$.

Le raisonnement indiqué au n° 16 s'applique à J_5; cette expression ne peut se réduire à une fonction algébrique de r et $\log\dfrac{r-a}{r+a}$ que pour $P(a) = 0$ et, comme $P(a)$ est différent de zéro (n° 16), *il y a impossibilité.*

Les calculs qui seront effectués lorsque $\dfrac{2C}{A}$ est un entier impair montreront que J_3, J_4, J_6 s'expriment algébriquement à l'aide de r et $\log\dfrac{r-a}{r+a}$.

Examinons le cas $n = 1$ ou $A = C$. On a

$$J_5 = -\frac{1}{4a^2}\int\frac{2r\,dr}{r^2-a^2} - \frac{1}{4a^3}\int\log\frac{r-a}{r+a}\,dr.$$

Il s'introduit deux termes en $\log(r^2-a^2)$ et l'on voit que l'on a

$$J_5 = -\frac{1}{4a^3}\,r\log\frac{r-a}{r+a}.$$

Théorème. — *Le rapport $\frac{C}{A}$ étant entier, il n'existe d'intégrale algébrique nouvelle que dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension se réduit à une sphère.*

§ VIII. — Le rapport $\frac{2C}{A}$ est un entier impair.

21. Soit

$$\frac{2C}{A} = m = 2n - 1.$$

Je dis que J_3, J_4, J_5, J_6 s'expriment algébriquement à l'aide de r et de $\log\frac{r-a}{r+a}$.

On a

$$\Gamma_1 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{m+1}}, \qquad \Gamma_2 = \int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

L'égalité (27) donne

$$\Gamma_1 = r\left[\frac{b_0}{(r^2 - a^2)^m} + \frac{b_1}{(r^2 - a^2)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{r^2 - a^2}\right] + b_m \log\frac{r-a}{r+a}.$$

Pour calculer Γ_2 on a, en appliquant la formule de récurrence (b),

$$\int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = -\frac{1}{(2n-1)a^2}\,\frac{r}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{2(n-1)}{(2n-1)a^2}\int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n-1}{2}}},$$

$$\int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n-1}{2}}} = -\frac{1}{(2n-3)a^2}\,\frac{r}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n-3}{2}}} - \frac{2(n-2)}{(2n-3)a^2}\int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{2n-3}{2}}},$$

. . . . ,

$$\int \frac{dr}{(r^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{1 . a^2}\,\frac{r}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} - 0.$$

Il en résulte

$$\Gamma_2 = \frac{r}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{c_1}{(r^2 - a^2)^{n-1}} + \frac{c_2}{(r^2 - a^2)^{n-2}} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{r^2 - a^2} + c_n\right],$$

c_1, c_2, …, c_n étant des constantes.

La forme de l'expression Γ_2 montre que J_5 et J_6 sont des fonctions algébriques de r.

On a, d'après l'expression de Γ_1,

$$J_4 = \psi(r) + \int \frac{1}{r^2 - a^2} \log \frac{r-a}{r+a} \, dr,$$

ou bien

$$J_4 = \psi(r) + \frac{1}{4a}\left(\log \frac{r-a}{r+a}\right)^2,$$

$\psi(r)$ étant une fonction algébrique de r.

Pour calculer J_3 posons

$$P(r) = \int (r^2 - a^2)^{m-2} \, dr.$$

Supposons d'abord $\frac{2C}{A}$ différent de l'unité, m est un entier au moins égal à trois; par suite $P(r)$ est un polynome entier en r donné par l'égalité (26) :

$$P(r) = r[a_0 + a_1(r^2 - a^2) + \ldots + a_{m-2}(r^2 - a^2)^{m-2}].$$

On a, en intégrant par parties,

$$J_3 = \Gamma_1 P(r) - \int \frac{P(r)}{(r^2 - a^2)^{m+1}} \, dr.$$

D'après l'expression de $P(r)$, l'intégrale figurant au second membre se réduit à une fonction rationnelle de r, et l'on a

$$J_3 = b_m P(r) \log \frac{r-a}{r+a} + \psi_1(r),$$

ψ_1 étant une fonction algébrique de r (1).

Si $\frac{2C}{A}$ est égal à l'unité, les intégrales J_3 et J_4 sont identiques.

Donc, lorsque $\frac{2C}{A}$ est un entier impair, les fonctions u_1 et Γ'' s'expriment algébriquement à l'aide de r et $\log \frac{r-a}{r+a}$.

22. Lorsque $\frac{2C}{A}$ est un entier impair différent de l'unité, on obtient, d'après ce

(1) Ce résultat, étant indépendant de la parité du nombre $\frac{2C}{A}$, justifie les indications données aux nos 18 et 20 sur les intégrales non calculées explicitement.

qui précède, les résultats suivants :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma'' &= \overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} = \lambda_1 b_m \log\frac{r-a}{r+a} + \varphi(r),\\ u_1 &= \alpha\lambda_1 b_m \mathrm{P}(r)\log\frac{r-a}{r+a} + \frac{\lambda_3}{4a}\lambda_1 b_m\left(\log\frac{r-a}{r+a}\right)^2 + \varphi_1(r),\end{aligned}\right.$$

$\varphi(r)$ et $\varphi_1(r)$ désignant des fonctions algébriques de r.

En éliminant la transcendante $\log\frac{r-a}{r+a}$ entre les équations (32), on obtient la relation unique donnant u_1 comme fonction algébrique de r et $\overline{\gamma''}$. Cette relation est

$$u_1 = \alpha \mathrm{P}(r)\left[\overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} - \varphi(r)\right] + \frac{\lambda_3}{4a\lambda_1 b_m}\left[\overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} - \varphi(r)\right]^2 + \varphi_1(r).$$

Et, en remplaçant dans l'égalité (20), on en déduit

$$\mathrm{F}_p(h_1, h_2, h_3, h_4, \overline{\gamma''}, r) = -\frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial h_4}\left\{\alpha \mathrm{P}(r)\left[\overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} - \varphi\right] + \frac{\lambda_3}{4a\lambda_1 b_m}\left[\overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} - \varphi\right]^2\right\} + \text{const.}$$

En substituant u et γ'' aux lettres h_4 et $\overline{\gamma''}$, dans l'égalité précédente, on obtient le terme en λ du développement de l'intégrale algébrique F.

Les équations (32) et, par conséquent, le calcul de F_p ne s'appliquant pas lorsque le nombre $\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ est égal à l'unité, nous écarterons dans la suite le cas de M$^{\text{me}}$ Kovalevsky.

23. La relation (20) étant satisfaite, passons aux termes en λ^2 du développement de l'intégrale algébrique F et cherchons à satisfaire à la relation (21).

Les fonctions u_1 et $\overline{\gamma''}$ s'exprimant algébriquement à l'aide de r et $\log\frac{r-a}{r+a}$, la relation (21) est de la forme

$$u_2\frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial h_4} - \frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial h_4}\gamma''_1(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}}\left\{\alpha \mathrm{P}(r) + \frac{\lambda_3}{2a\lambda_1 b_m}\left[\overline{\gamma''}(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}} - \varphi(r)\right]\right\} = \Phi_1\left(r, \log\frac{r-a}{r+a}\right),$$

ou bien, comme $\frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial h_4}$ est différent de zéro,

$$(33)\quad \mathrm{V} = u_2 - \gamma''_1(r^2-a^2)^{-\frac{C}{A}}\left[\alpha \mathrm{P}(r) + \frac{\lambda_3}{2a}\log\frac{r-a}{r+a}\right] = \Phi\left(r, \log\frac{r-a}{r+a}\right),$$

Φ et Φ_1 étant des fonctions algébriques de r et $\log\frac{r-a}{r+a}$.

L'équation différentielle (29) s'écrit

$$\frac{du}{dr} = 2\mathrm{C}\, z_2^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-2}\gamma''\left[\frac{1}{\mathrm{A}} + \left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)z_2^{1-\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}u^2\right]\left(\lambda + \frac{z_1}{z_2}\lambda^2 + \frac{1}{1.2}\frac{z_1^2}{z_2^2}\lambda^3 + \ldots\right),$$

on en déduit en remplaçant u, γ'', z_1, z_2 par leurs développements en série, suivant les puissances de λ,

$$\begin{aligned}(34)\quad \frac{du_2}{dr} = {} & 2\mathrm{C}(\overline{z_2})^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-2}\gamma''_1\left[\frac{1}{\mathrm{A}} + \left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)(\overline{z_2})^{1-\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}h_4^2\right] + 4\mathrm{C}\left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)h_4(\overline{z_2})^{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-1}\overline{\gamma''}u_1 \\ & + 2\mathrm{C}(\overline{z_2})^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-3}\overline{\gamma''}z'_2\left[\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-2\right) + \left(\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{A}^2}-1\right)h_4^2(\overline{z_2})^{1-\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}\right] \\ & + 2\mathrm{C}\overline{z_1}(\overline{z_2})^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}-3}\overline{\gamma''}\left[\frac{1}{\mathrm{A}} + \left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)h_4^2(\overline{z_2})^{1-\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}\right].\end{aligned}$$

L'expression γ'' est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{d\gamma''}{dr} = \mathrm{C}\frac{y_2z_1 - y_1z_2}{z_2 - \lambda z_1} = \mathrm{C}\left[\frac{y_2z_1 - y_1z_2}{z_2} + \lambda(y_2z_1 - y_1z_2)\frac{z_1}{z_2^2} + \lambda^2(\ldots) + \ldots\right].$$

L'expression γ''_1 est donc solution de l'équation

$$(35)\qquad \frac{d\gamma''_1}{dr} = \mathrm{C}\left[y'_2\frac{\overline{z_1}}{z_2} + z'_1\frac{\overline{y_2}}{z_2} - z'_2\frac{\overline{y_2}\,\overline{z_1}}{(\overline{z_2})^2} - y'_1 + (\overline{y_2}\,\overline{z_1} - \overline{y_1}\,\overline{z_2})\frac{\overline{z_1}}{(\overline{z_2})^2}\right].$$

Les quantités y'_1, y'_2, z'_1, z'_2 sont déduites des équations (2 *bis*), correspondant aux intégrales classiques, à l'aide des relations conséquences,

$$\begin{gathered} z'_2 = \mathrm{A}\,\overline{y_1}\,\overline{y_2} - \overline{z_1}, \\ \overline{z_1}z'_2 + \overline{z_2}z'_1 + (\overline{\gamma''})^2 = 0, \\ \overline{y_1}z'_2 + \overline{z_2}y'_1 + \overline{y_2}z'_1 + \overline{z_1}y'_2 + \frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}r\gamma''_1 = 0, \\ y'_2 = u_1(\overline{z_2})^{1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}} + h_4\left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)(\overline{z_2})^{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}z'_2. \end{gathered}$$

L'expression V est une fonction des deux constantes arbitraires h_2 et h_3 ; comme $\log\frac{r-a}{r+a}$ est indépendant de ces constantes, la propriété exprimée par l'équation (33) est satisfaite pour toutes les valeurs numériques des constantes h_2 et h_3. On voit, d'ailleurs, que V est un polynome en h_2 et h_3 et, par suite, reste fini pour toute valeur de h_2 et h_3.

24. Examinons le cas particulier $h_2 = h_3 = 0$. On a

$$\overline{z}_1 = 0, \qquad z'_2 = \mathrm{A}\,\overline{y}_1\overline{y}_2,$$

$$\overline{y}_1 = -\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,r\,\frac{\overline{y''}}{\overline{z}_2}, \qquad z'_1 = -\frac{(\overline{y''})^2}{\overline{z}_2},$$

$$\overline{z}_2 y'_1 = -\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,r y''_1 - \overline{y}_1 z'_2 - \overline{y}_2 z'_1,$$

$$\overline{y''} = k(r^2 - a^2)^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}, \qquad u_1 = k\left[\alpha\,\mathrm{P}(r) + \frac{\lambda_3}{2a}\log\frac{r-a}{r+a}\right] + k'.$$

L'équation (35) devient

$$\frac{dy''_1}{dr} = \mathrm{C}\left(z'_1\,\frac{\overline{y}_2}{\overline{z}_2} - y'_1\right),$$

ou bien

$$\frac{dy''_1}{dr} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,\frac{2r}{r^2 - a^2}\,y''_1 + \frac{2}{\mathrm{C}}\,k^2 h'_4 (r^2 - a^2)^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - 1}\left(\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - 1 + \frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,\frac{a^2}{r^2 - a^2}\right).$$

En posant

$$y''_1 = (r^2 - a^2)^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}\,\Gamma''_1,$$

on a

$$\frac{d\Gamma''_1}{dr} = \frac{2}{\mathrm{C}}\,k^2 h'_4\left(\frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - 1 + \frac{2\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,\frac{a^2}{r^2 - a^2}\right)\frac{1}{r^2 - a^2}.$$

En appliquant la formule (27), on en déduit

$$\Gamma''_1 = 2\mathrm{C}^{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}\,k^2 h_4\left[-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\,\frac{r}{r^2 - a^2} + \frac{1}{2a}\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - 1\right)\log\frac{r-a}{r+a}\right] + k'',$$

k, k', k'' étant des constantes arbitraires.

L'équation (34) devient, dans les conditions particulières indiquées,

$$\begin{aligned}\frac{du_2}{dr} = {} & 2\mathrm{C}^{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} - 1}\,\Gamma''_1\left[\frac{(r^2 - a^2)^{m-2}}{\mathrm{A}} + \frac{\beta}{r^2 - a^2}\right] \\ & + 4\left(1 - \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)\mathrm{C}^{-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}}\,k h_4\,\frac{u_1}{r^2 - a^2} + r(r^2 - a^2)^{m-3}\left[\beta_1 + \frac{\beta_2}{(r^2 - a^2)^{m-1}}\right],\end{aligned}$$

β, β_1, β_2 étant des constantes déterminées.

Comme on a $m \geqq 3$, il en résulte

$$u_2 = \frac{4}{AC}\left(\frac{C}{A} - 1\right) h_4 k^2 \frac{1}{2a} \int (r^2 - a^2)^{m-2} \log \frac{r-a}{r+a} dr + \frac{8}{AC}\left(1 - \frac{C}{A}\right) h_4 k^2 \int \frac{P(r)}{r^2 - a^2} dr.$$

$$+ \text{ fonction algébrique de } r \text{ et } \log \frac{r-a}{r+a}.$$

Or, en intégrant par parties, il vient

$$\int (r^2 - a^2)^{m-2} \log \frac{r-a}{r+a} dr = P(r) \log \frac{r-a}{r+a} - 2a \int \frac{P(r)}{r^2 - a^2} dr.$$

On a donc

$$u_2 = \frac{12}{AC}\left(1 - \frac{C}{A}\right) h_4 k^2 \int \frac{P(r)}{r^2 - a^2} dr + \varphi\left(r, \log \frac{r-a}{r+a}\right).$$

En revenant à l'expression de $P(r)$, donnée par l'égalité (26),

$$u_2 = \frac{6}{AC}\left(1 - \frac{C}{A}\right) h_4 k^2 a_0 \log(r^2 - a^2) + \varphi_1\left(r, \log \frac{r-a}{r+a}\right),$$

$$a_0 = (-1)^{m-2} (2a^2)^{m-2} \frac{1.2.3\ldots(m-2)}{1.3.5\ldots(2m-3)},$$

φ et φ_1 étant des fonctions algébriques de r et $\log \frac{r-a}{r+a}$.

Dans les conditions particulières $h_2 = h_3 = 0$, γ''_1 est une fonction algébrique de r et $\log \frac{r-a}{r+a}$; donc, d'après l'équation (33), il doit en être de même de u_2. D'après un raisonnement indiqué au n° 16, ceci exige que l'on ait $a_0 = 0$; comme a_0 est évidemment différent de zéro, nous avons mis en évidence *l'impossibilité de l'existence de l'intégrale algébrique* F *lorsque* $\frac{2C}{A}$ *est différent de l'unité.* On obtient aussi le résultat très facilement en formant l'équation différentielle qui donne la fonction V et en utilisant les conditions $h_2 = h_3 = 0$. Cette équation différentielle est indépendante de u_2 et γ''_1, elle s'introduirait naturellement s'il était nécessaire de continuer le calcul.

Nous arrivons finalement aux conclusions suivantes :

Les conditions initiales étant supposées arbitraires, les lettres A, B, C *représentant les moments d'inertie ou des nombres positifs quelconques, toute* *intégrale première algébrique et indépendante du temps du système différentiel définissant le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe est une combinaison algébrique des intégrales classiques.*

Il n'y a exception que dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Mme Kovalevsky.