

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T. LEVI-CIVITA

## Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série, tome 4 (1902), p. 5-44*

<[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1902\\_2\\_4\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1902_2_4_5_0)>

© Université Paul Sabatier, 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

ANNALES  
DE LA  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

---

SUR LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE  
ENGENDRÉ PAR LA  
TRANSLATION UNIFORME D'UNE CHARGE ÉLECTRIQUE  
PARALLÈLEMENT A UN PLAN CONDUCTEUR INDÉFINI,

PAR M. T. LEVI-CIVITA,  
à Padoue.

---

PRÉFACE.

Dans une Conférence (<sup>1</sup>) tenue en septembre dernier, M. Righi a renseigné la Société italienne de Physique sur la question, si discutée aujourd'hui, de la production d'un champ magnétique par la convection électrique.

Après avoir rappelé les différentes expériences (depuis celles de Rowland jusqu'aux dernières de M. Crémieu et de M. Adams), il les a analysées avec sa critique pénétrante, en signalant les points faibles et ceux qui restent simplement douteux.

Parmi ceux-ci l'éminent physicien compte les perturbations du champ magnétique provenant du conducteur, que l'on emploie généralement dans ces expériences pour mettre l'aiguille aimantée à l'abri des actions électrostatiques.

Il est évident, dit-il, qu'un diaphragme métallique de conductivité finie n'arrête pas les actions magnétiques, mais il exerce sans doute une influence et l'on

---

(<sup>1</sup>) Voir *Nuovo Cimento*, 5<sup>e</sup> série, t. II; octobre 1901.

n'a pas le droit de la négliger. Malheureusement nous ne sommes pas en mesure d'apprécier cette influence, comme il serait nécessaire pour une bonne discussion des résultats expérimentaux.

Ceux qui cultivent la Physique mathématique pourraient fournir à cet égard des indications assez précises en déterminant, ne fût-ce autre chose, le champ électromagnétique engendré par une charge électrique qui se meut avec une vitesse constante sur une droite parallèle à un plan conducteur indéfini.

Peu après sa conférence M. Righi a bien voulu attirer mon attention sur cette recherche. Voilà l'origine du présent Mémoire.

On y trouvera une solution rigoureuse du problème énoncé et une solution approchée, qui, tout en différant de la première par des quantités absolument insignifiantes au point de vue pratique, prête mieux à l'étude soit qualitative, soit quantitative du champ.

On est conduit aux résultats suivants :

Soient  $\alpha$  le rapport entre la vitesse de convection et celle de la lumière;  $30k$  la résistance ohmique de l'unité de surface du plan conducteur (exprimée en ohms);  $h = \frac{2\pi\alpha}{k}$ ; de façon que, dans les conditions expérimentales ordinaires,  $\alpha$  et  $k$  sont des nombres très petits (de l'ordre de  $10^{-6}$  dans l'exemple cité au n° 18), pendant que  $h$  est généralement fini.

Au delà de l'écran conducteur, les forces électrique et magnétique dérivent l'une et l'autre d'un potentiel (aux termes en  $\alpha^2$  près).

La force électrique est négligeable; la force magnétique est à peu près égale au produit par  $\frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}}$  de celle qui s'exercerait si le plan conducteur n'existe pas (*voir*, pour plus d'exactitude, le n° 18). Elle est donc réduite au moins de la moitié et pourrait être interceptée, à l'instar de la force électrique, seulement pour une conductivité infinie ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ).

C'est justement ce que prévoyait M. Righi.

Quelques mots encore sur la position analytique du problème.

Les équations de Hertz à elles seules ne suffiraient pas, tout en tenant compte des conditions (de continuité, régularité, etc.) qui sont imposées aux composantes des forces électromagnétiques.

Une discussion facile montre en effet que, pour rendre la question déterminée, il faut se donner (parmi les conditions dites *aux limites*) deux relations qui devront être vérifiées sur le plan conducteur et qui traduiront précisément cette qualité. Nous ne pourrons y parvenir sans sortir de la théorie hertzienne pure.

En effet, ce qui caractérise un conducteur est sans contredit la loi de Ohm. Mais, au point de vue de Hertz, on n'a là que la définition du courant (de ses deux composantes dans notre cas), et il n'en résulte naturellement aucune relation nouvelle entre les composantes des forces électromagnétiques.

Il faut donc avoir recours à quelque autre hypothèse.

Or l'expérience ne nous donne à cet égard aucun renseignement; bien au contraire, il s'agit en quelque sorte de la devancer.

D'autre part, on n'entrevoit même pas, parmi les éléments de la théorie de Hertz, deux relations qui puissent paraître justifiées *a priori*.

D'après cela, j'ai été conduit à m'appuyer sur une théorie un peu plus restreinte que celle de Hertz, où l'on a affaire non pas précisément aux équations différentielles de Hertz, mais à un certain système de leurs intégrales.

C'est ce qui arrive dans la théorie originale de Maxwell, dans celles de M. Lorentz et de M. Larmor (<sup>1</sup>), qui, d'ailleurs, n'en diffèrent pas, tant qu'il s'agit, comme à présent, de milieux isotropes en repos.

C'est ce qui arrive aussi dans la théorie de Helmholtz, dès qu'on lui ajoute simplement l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie (*voir* Chap. I).

On a bien, dans le cadre de ces théories, tout ce qu'il faut pour que notre question et d'autres analogues deviennent parfaitement déterminées.

J'ai préféré la dernière (celle de Helmholtz modifiée) parce que les principes sont peut-être plus simples, et à mon avis très suggestifs.

Ce ne serait pas une raison suffisante. Mais on peut démontrer qu'on serait conduit à la même solution aussi en partant des intégrales de Maxwell. Je me borne à signaler cette conclusion, qui se rattache à la remarque suivante, d'ordre plus général :

Les deux théories intégrales ne sont pas identiques. Elles s'accordent naturellement dans le domaine différentiel, mais elles s'accordent encore sur quelques détails importants non envisagés par la théorie de Hertz.

On a besoin de ces compléments pour toutes les questions qui appartiennent au même type du problème simple étudié ici. Parmi ces questions, il y en a une notamment (celle de l'influence d'un écran conducteur sur le champ magnétique d'un courant *variable*) où l'on peut s'attendre à ce que les résultats obtenus par la théorie seront accessibles sans peine au contrôle de l'expérience (pendant que dans le cas actuel on se trouve presque à la limite des quantités appréciables par l'observation).

Je me propose de revenir prochainement sur ce point.

---

(<sup>1</sup>) Elles sont résumées, dans la seconde édition du Traité classique de M. Poincaré : *Électricité et Optique*. Voici les citations des Ouvrages des deux savants contenant l'exposé de leurs théories : LORENTZ, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leyde; 1895.—LARMOR, *Aether and matter*, Cambridge; 1900.

## CHAPITRE I.

### RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS D'ÉLECTRODYNAMIQUE.

---

1. J'ai démontré autrefois (<sup>1</sup>) qu'on peut retrouver les traits essentiels de la théorie de Maxwell même en partant des lois classiques. Il suffit de les compléter par l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie.

La théorie de Helmholtz conduit alors aux équations de Hertz.

Voici, en peu de mots, cette déduction.

2. *Généralités.* — Envisageons un milieu homogène S, indéfini et en repos, siège de phénomènes électrodynamiques.

Soient, pour un point quelconque P(x, y, z), et dans un instant quelconque t, e(x, y, z, t) la densité électrique; u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t) les composantes du courant rapportées à l'unité de volume : e dS représente alors la quantité d'électricité contenue dans le volume dS à l'instant t; u dy dz dt est la quantité d'électricité qui traverse, pendant le temps dt suivissant à t, l'aire dy dz normale à l'axe des x; de même v dz dx dt est la quantité d'électricité, etc.

Je suppose e, u, v, w finies et continues avec toutes les dérivées des deux premiers ordres. Je suppose, en outre, que ces fonctions s'annulent à l'infini, de façon que les intégrales  $\int_S \frac{e}{r} dS$ ,  $\int_S \frac{u}{r} dS$ , ..., étendues à tout l'espace S, aient un sens (pour toute valeur de t), r étant la distance du point variable d'intégration à un point fixe quelconque.

3. *Principes de conservation de l'électricité.* — Entre e, u, v, w on a l'équation de continuité, qui s'écrit

$$(1) \quad \frac{de}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Il va sans dire que e dS, u dy dz dt, v dz dx dt, w dx dy dt (qui sont toutes des quantités d'électricité) doivent être mesurées de la même façon, en unités électrostatiques par exemple. A ce système se rapporteront alors les valeurs numériques de e, u, v, w.

---

(<sup>1</sup>) *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana* (*Nuovo Cimento*, août 1897).

*4. Loi de Coulomb.* — *Potentiel électrostatique retardé.* — Conformément à la loi de Coulomb, le potentiel électrostatique (en supposant pour simplifier la constante diélectrique, ou pouvoir inducteur spécifique de notre milieu, égale à l'unité) est

$$\int_S \frac{e(x', y', z', t)}{r} dS,$$

où l'on désigne par  $x', y', z'$  les variables d'intégration, par  $x, y, z$  les coordonnées du point quelconque P, auquel se rapporte le potentiel, par  $r$  la distance de P au point  $P'(x', y', z')$ .

Je pose, A étant une constante, l'inverse de la vitesse de la lumière dans S,

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{e} &= e(x', y', z', t - Ar), \\ F &= \int_S \frac{\bar{e}}{r} dS. \end{aligned}$$

On appelle  $F$  *potentiel électrostatique retardé*. Chaque élément  $\frac{\bar{e}}{r} dS$  de  $F$  est, on peut dire, le potentiel d'une action partie de  $P'$  avec une anticipation  $Ar$  sur l'instant auquel on l'envisage au point P.

Par conséquent, en prenant  $F$ , au lieu de  $\int_S \frac{e}{r} dS$ , comme potentiel électrostatique, tout se passe comme si les actions élémentaires, envisagées par la loi de Coulomb, se propageaient en ligne droite de leurs origines à P avec la vitesse de la lumière.

*5. Potentiel vecteur retardé. — Loi de Biot et Savart. — Force magnétique.* — Le vecteur dont les composantes suivant les axes coordonnés sont

$$(3) \quad U = A \int_S \frac{\bar{u}}{r} dS, \quad V = A \int_S \frac{\bar{v}}{r} dS, \quad W = A \int_S \frac{\bar{w}}{r} dS$$

sera notre *potentiel vecteur*. Il diffère du potentiel vecteur ordinaire par la substitution de

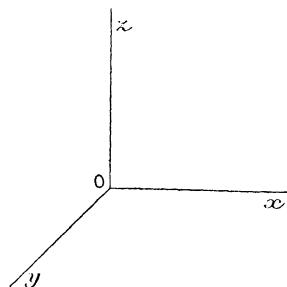
$$\begin{aligned} \bar{u} &= u(x', y', z', t - Ar), \\ \bar{v} &= v(x', y', z', t - Ar), \\ \bar{w} &= w(x', y', z', t - Ar), \end{aligned}$$

à  $u(x', y', z', t)$ ,  $v(x', y', z', t)$ ,  $w(x', y', z', t)$  : ce qui correspond, comme tout à l'heure, à une propagation par ondes sphériques avec la vitesse  $\frac{1}{A}$ .

La force magnétique du champ, d'après la loi élémentaire de Biot et Savart

(dite parfois aussi *loi de Laplace*), est définie comme le tourbillon (*curl* des Anglais) du potentiel vecteur, changé toutefois de sens si les axes sont orientés comme dans la *fig. 1*, ce que nous voulons supposer.

Fig. 1.



Dès lors, en combinant la loi de Biot et Savart avec notre hypothèse sur la vitesse de propagation, on a, pour les composantes L, M, N de la force magnétique, les expressions suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} L = \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \\ M = \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \\ N = \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}. \end{cases}$$

6. *Loi d'induction de F. Neumann. — Force électrique.* — Les dérivées de  $-AU$ ,  $-AV$ ,  $-AW$ , par rapport à  $t$ , donnent les composantes de la force électromotrice d'induction : c'est la loi potentielle de F. Neumann, où l'on a seulement remplacé le potentiel vecteur ordinaire par le potentiel retardé.

Lorsqu'il n'y a pas de forces électromotrices extérieures (d'origine chimique, thermoélectrique, etc.) la force électrique totale (X, Y, Z) est la somme de la composante électrostatique et de celle provenant de l'induction.

On a donc

$$(II) \quad \begin{cases} X = -\frac{dF}{dx} - A \frac{dU}{dt}, \\ Y = -\frac{dF}{dy} - A \frac{dV}{dt}, \\ Z = -\frac{dF}{dz} - A \frac{dW}{dt}. \end{cases}$$

7. *Propriétés des fonctions F, U, V, W. — Tout potentiel retardé*

$$F = \int_S \frac{\bar{e}}{r} dS$$

satisfait à l'équation

$$\square F \equiv \Delta_2 F - A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi e.$$

C'est l'analogue de l'équation de Poisson, et l'on peut la vérifier de la même façon (¹).

Nous avons ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} \square F = -4\pi e, \\ \square U = -4\pi A u; \\ \square V = -4\pi A v, \\ \square W = -4\pi A w. \end{cases}$$

De plus les fonctions  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  sont liées entre elles par la relation

$$(5) \quad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut écrire, avec la notation des dérivées partielles,

$$\frac{d\bar{u}}{dx'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} - A \frac{du}{dt} \frac{dr}{dx'}.$$

Or

$$\frac{dU}{dx} = A \int_S \left( \bar{u} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} + \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{1}{r} \right) dS,$$

d'où, puisque  $\bar{u}$  dépend de  $x$  uniquement par l'intermédiaire de l'argument  $t - Ar$ , et que d'ailleurs  $\frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'}$ ,

$$\frac{dU}{dx} = -A \int_S \bar{u} \frac{d}{dx'} \frac{1}{r} dS + A \int_S A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \frac{1}{r} dS.$$

Transformons la première intégrale par la formule de Green. L'intégration étant étendue à tout l'espace, il vient

$$\frac{dU}{dx} = A \int_S \left( \frac{d\bar{u}}{dx'} + A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \right) \frac{1}{r} dS,$$

(¹) Voir, par exemple, VOLTERRA, *Sul principio di Huygens* (*Nuovo Cimento*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXI, XXXII, XXXIII; 1892-1893), ou bien encore POINCARÉ, *Oscillations électriques*, n° 40.

ou bien, à cause de l'identité, rappelée ci-dessus,

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx} = A \int_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} \frac{1}{r} dS.$$

De même

$$\frac{d\mathbf{V}}{dy} = A \int_S \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} \frac{1}{r} dS,$$

$$\frac{d\mathbf{W}}{dz} = A \int_S \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} \frac{1}{r} dS,$$

et en ajoutant

$$\frac{d\mathbf{U}}{dx} + \frac{d\mathbf{V}}{dy} + \frac{d\mathbf{W}}{dz} = A \int_S \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dS.$$

L'équation de continuité (1), appliquée aux fonctions  $\bar{e}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , devient évidemment

$$\frac{d\bar{e}}{dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} = 0;$$

le second membre de l'équation qui précède est donc égal à  $-A \int_S \frac{d\bar{e}}{dt} \frac{1}{r} dS$ ,

c'est-à-dire à  $-A \frac{dF}{dt}$ .

C. Q. F. D.

**8. Vérification des équations de Hertz.** — En éliminant la fonction  $F$  des équations (II), et ayant égard aux équations (I), il vient tout de suite

$$(6) \quad \begin{cases} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}. \end{cases}$$

C'est le premier groupe des équations de Hertz.

Dérivons maintenant la première des équations (II) par rapport à  $t$ ; multiplions par  $A$ , en remplaçant  $-A^2 \frac{d^2 U}{dt^2}$  par sa valeur  $-\Delta_2 U - 4\pi A u$ . Nous obtenons

$$A \frac{dX}{dt} = -A \frac{d^2 F}{dt dx} - \Delta_2 U - 4\pi A u.$$

Les deux dernières équations (I) donnent, d'ailleurs,

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} \right) - \Delta_2 U.$$

En tenant compte de (5), et en retranchant de la précédente, il reste simplement

$$(7) \quad A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Les deux équations

$$(7) \quad \begin{cases} A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w \end{cases}$$

s'établissent de la même manière, et l'on a ainsi retrouvé le second groupe de Hertz.

Les équations (I) donnent encore

$$(8) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

pendant que les équations (II), en ayant égard à (5) et à la relation

$$\Delta_2 F - A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi e,$$

donnent

$$(9) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi e.$$

9. *Charges et courants de surface.* — *Discontinuités qui en dérivent dans les forces électromagnétiques.* — En nous plaçant au point de vue des actions à distance, qui nous a conduit aux équations (I), (II), il est presque évident que ces dernières s'étendent au cas où il y aurait, sur quelque surface  $\sigma$  du milieu indéfini  $S$ , des distributions à deux dimensions de charges et de courants. Il suffit d'ajouter aux expressions des potentiels  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  les intégrales doubles correspondant à ces distributions.

On n'a rien à modifier aux équations (4), (5), ..., (9) pour les points non situés sur les surfaces  $\sigma$ ; mais on doit prendre garde aux discontinuités que l'on rencontrera en les traversant.

Il importe surtout de reconnaître celles qui se produisent dans les composantes des forces électrique et magnétique. On les détermine aisément (en fonction des charges et des courants de surface) à l'aide des formules bien connues, se rapportant aux dérivées premières des potentiels de surface, formules qui sont valables même pour les potentiels retardés (<sup>1</sup>).

---

(<sup>1</sup>) VOLTERRA, *loco citato*, t. XXXI.

On peut encore montrer que (charges et courants de surface satisfaisant, bien entendu, au principe de la conservation de l'électricité) les discontinuités qui se produisent dans les forces électromagnétiques ne diffèrent pas de celles que l'on mettrait au jour en suivant la voie indiquée par Hertz.

Du reste, au point de vue physique, une telle démonstration ne serait pas nécessaire; l'identité apparaît d'elle-même.

Pour nous en rendre compte, voyons en quoi consiste ce principe de Hertz. Nous envisagerons, pour plus de netteté, le cas d'une portion de surface  $\sigma$  parallèle au plan  $z=0$ .

Ce qui arrive pour des distributions superficielles, situées sur  $\sigma$ , doit être cherché par un passage à la limite, en considérant d'abord une couche  $\tau$  d'épaisseur  $g$  limitée d'un côté par  $\sigma$ , et exprimant ensuite que les équations indéfinies (6), (7), (8), (9) continuent à subsister dans  $\tau$ , lorsqu'on suppose que  $e$ ,  $u$ ,  $v$  grandissent indéfiniment, pendant que  $g$  décroît, de manière toutefois que les limites de  $ge$ ,  $gu$ ,  $gv$  restent finies.

Ce même passage à la limite introduit, dans les équations (I), (II), les termes correspondant aux distributions de surface sur  $\sigma$ .

Dès que l'on a affaire à la même cause, les effets (dans notre cas, les discontinuités des forces électromagnétiques à travers  $\sigma$ ) doivent être les mêmes quelle que soit la voie que l'on choisit pour les évaluer.

**10. Remarque.** — On peut présenter les considérations qui précèdent sous une forme valable pour tout milieu isotrope, même s'il est polarisable, c'est-à-dire s'il est doué d'un pouvoir inducteur spécifique et d'une perméabilité magnétique quelconque.

C'est ce que j'ai fait dans le Mémoire du *Nuovo Cimento* cité plus haut.



## CHAPITRE II.

### TRANSFORMATION DES POTENTIELS RETARDÉS.

---

**11. Transformation directe des potentiels dans le cas où le mouvement des charges se réduit à une translation.** — Dès que l'on a affaire à un mouvement de translation, tout système  $\Omega\xi\eta\zeta$ , qui est animé, par rapport aux axes fixes  $Oxyz$ , de la même translation, doit rester invariablement lié aux charges. La densité  $e$  de leur distribution est donc une fonction de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , indépendante de  $t$ .

Complétons la définition des axes mobiles en choisissant, par exemple,  $Oxyz$  comme position initiale (pour  $t=0$ ) du trièdre  $\Omega\xi\eta\zeta$ . On a alors, entre les coordonnées  $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$  d'une même particule électrisée par rapport aux deux systèmes, les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x = \xi + \varphi, \\ y = \eta + \psi, \\ z = \zeta + \chi, \end{cases}$$

les  $\varphi, \psi, \chi$  étant des fonctions données du temps  $t$ , qui se réduisent à 0, pour  $t=0$ .

Dans un instant quelconque  $t$  la vitesse des charges électriques est, pour tout point du champ,  $(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt})$ .

Or la quantité d'électricité qui traverse dans le temps  $dt$  l'aire élémentaire  $dy dz$  (c'est-à-dire la charge d'un parallélépipède ayant  $dy dz$  pour base et  $\frac{d\varphi}{dt} dt$  pour hauteur) est exprimée par  $e \frac{d\varphi}{dt} dy dz dt$ .

Comme  $u dy dz dt$  représente par définition la même quantité, il s'ensuit que

$$(2) \quad \begin{cases} u = e \frac{d\varphi}{dt}, \\ v = e \frac{d\psi}{dt}, \\ w = e \frac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Occupons-nous d'abord du potentiel électrostatique

$$\mathbf{F} = \int_S \frac{\bar{e}}{r} d\mathbf{S}.$$

La densité  $e$  ne dépend que de  $\xi, \eta, \zeta$ , c'est-à-dire, d'après (1), de  $x - \varphi, y - \psi, z - \chi$ ; on a donc l'identité

$$(3) \quad e(x, y, z, t) = e(x - \varphi, y - \psi, z - \chi);$$

d'où

$$\bar{e} = e(x' - \bar{\varphi}, y' - \bar{\psi}, z' - \bar{\chi}),$$

en convenant de désigner, pour une fonction quelconque, le changement de  $t$  en  $t - Ar$ , par un trait superposé.

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 - \varphi = x' - \bar{\varphi}, \\ y_1 - \psi = y' - \bar{\psi}, \\ z_1 - \chi = z' - \bar{\chi}, \end{cases}$$

et appelons  $D$  le déterminant fonctionnel de  $x_1, y_1, z_1$  par rapport à  $x', y', z'$ .

Ayant

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx'} &= 1 - A \frac{d\bar{\varphi}}{dx'} = 1 - A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{x - x'}{r}, \\ \frac{dx_1}{dy'} &= -A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{y - y'}{r}, \\ \frac{dx_1}{dz'} &= -A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{z - z'}{r}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

on trouve tout de suite

$$(5) \quad D = 1 - A \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{x - x'}{r} + \frac{d\bar{\psi}}{dt} \frac{y - y'}{r} + \frac{d\bar{\chi}}{dt} \frac{z - z'}{r} \right).$$

En adoptant, dans  $F$ ,  $x_1, y_1, z_1$  au lieu de  $x', y', z'$ , pour variables d'intégration <sup>(1)</sup>, il vient, d'après (3),

$$(6) \quad F = \int_S \frac{e(x_1 - \varphi, y_1 - \psi, z_1 - \chi)}{r|D|} dS = \int_S \frac{e(x_1, y_1, z_1, t)}{r|D|} dS.$$

Tout se passe donc comme si chaque charge élémentaire agissait avec le potentiel  $\frac{1}{r|D|}$ .

D'une façon plus précise cette expression transformée de  $F$  correspond à la loi élémentaire suivante :

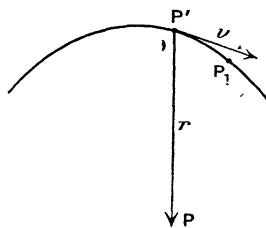
La charge, qui occupe dans un instant quelconque  $t$  une position quelconque  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , agit sur le point envisagé  $P(x, y, z)$  avec le potentiel (rapporté à l'unité de charge)  $\frac{1}{r|D|}$ , où  $r$  représente la distance de  $P$ , non pas à  $P_1$ , mais à un certain point  $P'(x', y', z')$ , qui dépend de  $P$  et de  $P_1$  d'après (4);  $D$  étant défini par l'équation (5).

Il est aisément d'apercevoir la signification géométrique du point  $P'$ .

(1) La transformation est légitime, toutes les fois que  $D$  ne s'annule pas, ce qui arrive notamment lorsque la vitesse de translation ne dépasse pas celle de la lumière (*voir* plus loin).

La comparaison de (1) et (4) montre, en effet, que  $P'$  est la position occupée à l'instant  $t - Ar$  par la charge qui occupe à l'instant  $t$  la position  $P_1$  (fig. 2).

Fig. 2.



C'est justement la position de ladite charge, d'où une action, se propageant avec la vitesse  $\frac{1}{A}$ , atteint  $P$  à l'instant  $t$ .

$v$  étant la vitesse de la charge en  $P'$ , c'est-à-dire à l'instant  $t - Ar$ , les composantes de  $v$  ne sont autre chose que  $\frac{d\phi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\chi}{dt}$ . On a donc

$$(5') D = 1 - A v \cos(\hat{\vee} r),$$

la direction positive de  $r$  allant de  $P'$  à  $P$ .

On voit bien que  $D$  reste toujours positif [ce qui garantit la légitimité de la transformation (4) et l'univocité de la correspondance entre les points  $P_1$  et  $P'$ ] si, comme nous le supposerons désormais,

$$Av < 1,$$

c'est-à-dire si la vitesse des charges reste inférieure à celle de la lumière.

Le potentiel électrostatique élémentaire se présente donc sous la forme

$$\frac{1}{r[1 - A v \cos(\hat{\vee} r)]}.$$

Ce résultat est dû à M. Wiechert (1).

Pour le potentiel vecteur on est évidemment conduit à des conclusions analogues.

A cause de (2), les expressions transformées de  $U, V, W$  se tirent de  $F$  en y remplaçant  $e$  par  $Au = Ae \frac{d\phi}{dt}, Av = Ae \frac{d\psi}{dt}, Aw = Ae \frac{d\chi}{dt}$ .

(1) *Elektrodynamische Elementargesetze* (*Archives Néerlandaises*, 2<sup>e</sup> série, t. V) (Volume jubilaire en l'honneur de M. Lorentz); 1900.

Il sera plus commode, dans ce qui va suivre, de se rapporter aux axes mobiles. Les coordonnées des points  $P, P_1, P'$  seront alors naturellement désignées par  $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi', \eta', \zeta'$ , et les expressions des potentiels (où il convient, bien entendu, d'introduire, même comme variables d'intégration, les coordonnées  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  au lieu de  $x_1, y_1, z_1$ ) s'écrivent

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \int_S \frac{e(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r[1 - A \nu \cos(\widehat{\nu r})]} dS; \\ U = \int_S \frac{A u(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r[1 - A \nu \cos(\widehat{\nu r})]} dS, \\ V = \int_S \frac{A v(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r[1 - A \nu \cos(\widehat{\nu r})]} dS, \\ W = \int_S \frac{A w(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r[1 - A \nu \cos(\widehat{\nu r})]} dS, \end{array} \right.$$

$r$  et  $\nu$  ayant la signification définie tout à l'heure.

Ces formules, nous le verrons bientôt, sont valables pour un mouvement quelconque des charges. Ici les trois dernières se réduisent simplement à

$$U = A \frac{d\phi}{dt} F, \quad V = A \frac{d\psi}{dt} F, \quad W = A \frac{d\chi}{dt} F.$$

42. *Cas d'une charge unique.* — Supposons que la fonction  $e(\xi, \eta, \zeta)$  soit généralement nulle, en dehors d'un très petit espace  $\tau$  entourant le point  $\Omega$ .

On peut évidemment faire cette hypothèse sans renoncer à la condition (nécessaire pour la validité des considérations du premier Chapitre) que les dérivées premières et secondes de  $e$  soient partout finies et continues (<sup>1</sup>).

Il suffit d'imaginer une fonction quelconque, douée de cette propriété pour les points de  $\tau$ , qui s'annule sur le contour avec ses dérivées des deux premiers ordres. Il est partant permis de supposer en outre

$$\int_{\tau} e dS = m,$$

$m$  étant une constante donnée.

Ceci posé, le cas d'une charge unique  $m$ , placée à l'origine  $\Omega$  des axes mobiles, se déduit sans peine comme cas limite du numéro précédent, en faisant décroître indéfiniment l'espace  $\tau$ .

---

(<sup>1</sup>) A la vérité, on peut se tirer d'affaire avec des conditions moins restrictives; mais il ne vaut pas la peine d'y insister.

Les potentiels retardés se réduisent alors aux produits de  $m, A m \frac{d\varphi}{dt}, A m \frac{d\psi}{dt}$ ,  $A m \frac{d\chi}{dt}$  par

$$\frac{1}{r \left[ 1 - A v \cos(\hat{\nu} r) \right]}.$$

Le passage à la limite, dont nous nous sommes servi pour y arriver, permet évidemment d'affirmer (ce qu'on pourrait aussi vérifier directement) que ces potentiels élémentaires satisfont bien aux équations différentielles (4) et (5) du Chapitre précédent, ou plutôt (comme nous nous rapportons ici aux axes mobiles) à leurs transformées en coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$ .

Il va sans dire que la distance  $r$  et la vitesse  $v$  se rapportent, non pas à la position actuelle  $\Omega$  de la charge  $m$ , mais à la position antérieure, dont les coordonnées  $\xi', \eta', \zeta'$  sont définies, en fonction de  $\xi, \eta, \zeta, t$ , par

$$(7) \quad \begin{cases} \xi' = \varphi(t - Ar) - \varphi(t), \\ \eta' = \psi(t - Ar) - \psi(t), \\ \zeta' = \chi(t - Ar) - \chi(t) \end{cases}$$

$[r = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}]$ .

C'est ce qui résulte de l'équation (4), lorsqu'on y met en évidence les coordonnées  $\xi, \eta, \dots$ , en tenant compte de ce que (le point P, étant ici représenté par  $\Omega$ )

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0.$$

Pour arriver aux expressions définitives des potentiels, il faut éliminer les coordonnées auxiliaires  $\xi', \eta', \zeta'$  de  $\frac{1}{r D}$ . Voici comment on peut disposer le calcul.

Tout d'abord on tire, des équations (7),

$$(8) \quad \begin{aligned} r^2 &= (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 \\ &= [\xi + \varphi(t) - \varphi(t - Ar)]^2 \\ &\quad + [\eta + \psi(t) - \psi(t - Ar)]^2 \\ &\quad + [\zeta + \chi(t) - \chi(t - Ar)]^2, \end{aligned}$$

équation qui définit directement  $r$  en fonction de  $\xi, \eta, \zeta, t$ .

En la dérivant par rapport à  $A$ , il vient

$$r \frac{dr}{dA} = \left[ (\xi - \xi') \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + (\eta - \eta') \frac{d\bar{\psi}}{dt} + (\zeta - \zeta') \frac{d\bar{\chi}}{dt} \right] \left( r + A \frac{dr}{dA} \right).$$

Mais, d'après (5),

$$(5 \text{ bis}) \quad r \mathbf{D} = r - \mathbf{A} \left[ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} (\xi - \xi') + \frac{d\bar{\psi}}{dt} (\eta - \eta') + \frac{d\bar{\chi}}{dt} (\zeta - \zeta') \right];$$

d'où

$$r \mathbf{D} = r - \frac{\mathbf{A} r \frac{dr}{d\mathbf{A}}}{r + \mathbf{A} \frac{dr}{d\mathbf{A}}} = \frac{r^2}{r + \mathbf{A} \frac{dr}{d\mathbf{A}}},$$

$$\frac{1}{r \mathbf{D}} = \frac{1}{r} - \mathbf{A} \frac{d \frac{1}{r}}{d\mathbf{A}}.$$

*Remarque.* — Comme les fonctions  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$ , qui définissent le mouvement de  $\Omega$  sont censées être quelconques, ce qu'on vient de dire permet de construire en tout cas le champ électromagnétique dû à un mouvement d'une charge unique.

13. *Cas général d'une distribution et d'un mouvement quelconques.* — *Analogies hydrodynamiques.* — S'il s'agit d'un nombre quelconque de charges, on n'a qu'à faire la somme des potentiels élémentaires pour obtenir les expressions de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}$ .

Dans le cas d'une distribution continue  $m$ ,  $m \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $m \frac{d\psi}{dt}$ ,  $m \frac{d\chi}{dt}$  ne sont autres que

$$e d\mathbf{S}, \quad e \frac{d\varphi}{dt} d\mathbf{S} = u d\mathbf{S}, \quad e \frac{d\psi}{dt} d\mathbf{S} = v d\mathbf{S}, \quad e \frac{d\chi}{dt} d\mathbf{S} = w d\mathbf{S},$$

et l'on retrouve, par suite, les formules (6), qui restent ainsi démontrées en général, tandis qu'auparavant nous les avions établies seulement pour les mouvements de translation des charges.

Il ne serait pas difficile d'obtenir, même dans le cas général, la transformation des potentiels retardés par un calcul direct, mais il est inutile de s'y arrêter.

Je préfère faire remarquer qu'on peut concevoir l'action d'un champ donné (sur un point  $P$  et dans un instant  $t$ ) répartie entre les points du champ d'une infinité de manières. On peut notamment :

1° Attribuer à chaque point du champ la charge qui s'y trouvait à l'instant  $\bar{t}$ .

On a de la sorte les expressions primitives des potentiels retardés, tels qu'ils ont été définis au début du Chapitre précédent.

2° Attribuer à toute charge la position qu'elle occupait à l'instant  $\bar{t}$ .

C'est ce qu'on fait dans les expressions transformées (6).

Dans la forme originale les actions sont en quelque sorte réparties suivant le point de vue d'Euler.

Les expressions transformées correspondent, au contraire, au point de vue de Lagrange.

**14. Charge unique en mouvement de translation uniforme.** — Si  $c$  désigne la vitesse constante de translation, on a

$$\varphi(t) = ct, \quad \psi(t) = 0, \quad \chi(t) = 0,$$

en supposant l'axe  $\xi$  dirigé suivant la translation.

Les équations (7) et (8) se réduisent à

$$(7') \quad \dot{\xi} = -ar, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0,$$

$$(8') \quad r^2 = (\xi + ar)^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

où

$$(9) \quad a = \Lambda c$$

est une constante numérique plus petite que l'unité.

L'expression (5 bis) de  $rD$  devient

$$rD = r - a(\xi + ar) = (1 - a^2)r - a\xi.$$

Or, en multipliant par  $(1 - a^2)$ , on tire de (8')

$$[(1 - a^2)r - a\xi]^2 = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2),$$

ce qui donne

$$rD = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2).$$

Les potentiels élémentaires sont donc

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{\xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2)}}; \\ \mathbf{U} = a\mathbf{F}, \quad \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{W} = 0. \end{cases}$$

Les formules de transformation (1) étant à présent

$$x = \xi + ct, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

les opérations différentielles

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz}, \quad \Lambda \frac{d}{dt}$$

seront exprimées dans nos variables  $\xi, \eta, \zeta, t$  par

$$\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\zeta}, \quad A \frac{d}{dt} - a \frac{d}{d\xi},$$

d'où, pour toute fonction  $f$  des seules variables  $\xi, \eta, \zeta,$

$$\square f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} - A^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = (1 - a^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2}.$$

On voit bien que

$$\begin{aligned} \square F &= \square U = 0, \\ A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} &= \frac{d}{d\xi} (U - aF) = 0. \end{aligned}$$

C'est la vérification directe des équations (4) et (5) du Chapitre précédent.

Les expressions explicites des forces électromagnétiques du champ dérivent de (I) et (II), en y substituant les valeurs (10). Je n'y insiste pas davantage, car un tel champ a déjà été très bien étudié (1).

## CHAPITRE III.

### RÉSOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ.

**45. Données et mise en équation.** — Un conducteur placé dans un champ électrostatique s'électrise par influence. Un phénomène analogue doit évidemment se présenter lorsque le champ varie avec le temps. Seulement la distribution induite sera en général variable et il se produira des courants.

En tout cas, la présence d'un conducteur dans un champ donné entraîne des modifications du champ.

Selon notre point de vue la question de déterminer ces modifications revient au calcul des termes additionnels que la présence du conducteur introduit dans les expressions des potentiels retardés. En d'autres termes, il s'agit d'assigner les potentiels retardés correspondant à la distribution et aux courants induits sur le conducteur.

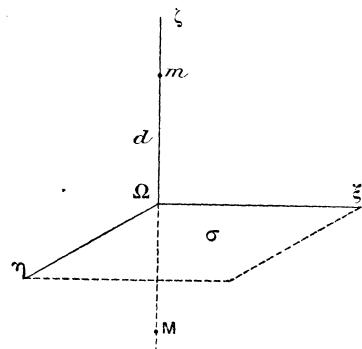
---

(1) HEAVISIDE, *Electrical papers*, Vol. II. — RIGHI, *Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche e da poli magnetici in movimento* (*Nuovo Cimento*, 5<sup>e</sup> série, t. II; août 1901).

Sans envisager ici le problème général, arrivons tout de suite au cas particulier qui forme l'objet de notre recherche.

Une charge donnée  $m$  se meut alors avec une vitesse constante  $c$  parallèlement à un plan conducteur indéfini  $\sigma$ , le milieu ambiant étant l'éther (*fig. 3*).

Fig. 3.



Choisissons un système d'axes mobiles  $\Omega\xi\eta\zeta$ , invariablement liés à  $m$ , ayant  $\sigma$  pour plan  $\zeta = 0$ , et  $m$  sur le demi-axe positif des  $\zeta$ . Les coordonnées de  $m$  sont alors  $0, 0, d > 0$ ,  $d$  étant la distance constante de  $m$  à  $\sigma$ .

S'il n'y avait pas de plan conducteur, les potentiels du champ seraient donnés par les formules (10) du Chapitre précédent en y changeant seulement  $\zeta$  en  $\zeta - d$ .

Mais le mouvement de  $m$  donne naissance à une distribution induite (variable) sur le plan conducteur et il lui correspond un potentiel électrostatique  $F_1$  et un potentiel vecteur  $U_1, V_1$  ( $W_1$  est évidemment nul, car le mouvement de l'électricité a lieu sur le plan  $\zeta = 0$ ).

Les potentiels du champ, modifié par la présence du plan conducteur, se présentent donc sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{m}{\Delta} + F_1, \\ U = \frac{ma}{\Delta} + U_1, \quad V = V_1, \quad W = 0, \end{array} \right.$$

en ayant posé pour abréger

$$(2) \quad \Delta^2 = \xi^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2].$$

Examinons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les inconnues  $F_1, U_1, V_1$  comme fonctions des variables  $\xi, \eta, \zeta, t$ .

Tout d'abord, eu égard au fait que le phénomène est stationnaire par rapport aux axes  $\Omega\xi\eta\zeta$ , ces fonctions ne dépendront pas explicitement du temps  $t$ .

Elles sont toutes des potentiels retardés (correspondant à des distributions de surface sur le plan  $\zeta = 0$ ); donc, d'après le numéro précédent, des solutions de l'équation

$$(3) \quad \square f \equiv (1 - a^2) \frac{d^2 f}{d\zeta^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = 0;$$

elles satisfont à l'équation (5) du Chapitre I, qui devient à présent

$$(4) \quad a \frac{d\mathbf{F}_1}{d\zeta} = \frac{d\mathbf{U}_1}{d\zeta} + \frac{d\mathbf{V}_1}{d\eta};$$

elles se comportent partout, même à l'infini et à la traversée du plan conducteur, comme des potentiels ordinaires (<sup>1</sup>). Leurs expressions analytiques (sous forme d'intégrales doubles étendues au plan  $\zeta = 0$ ) ne changent pas lorsqu'on change le signe de  $\zeta$ . Elles ont donc même valeur dans les points symétriques par rapport au plan  $\zeta = 0$ ; elles sont en somme des fonctions de l'argument  $|\zeta|$ .

Les conditions caractéristiques, relatives au plan  $\zeta = 0$ , peuvent alors être présentées sous la forme

$$(5) \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d\mathbf{F}_1}{d|\zeta|} = e_1, \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d\mathbf{U}_1}{d|\zeta|} = A u_1, \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d\mathbf{V}_1}{d|\zeta|} = A v_1,$$

$e_1, u_1, v_1$  étant la densité de la distribution et les composantes du courant induit.

Ce sont de nouvelles inconnues dont, pour le moment, on sait à peine qu'elles doivent vérifier l'équation de continuité.

Il n'y a pas lieu d'en tenir compte, car c'est une conséquence de (4). En effet, ladite équation  $\left( \frac{de_1}{dt} + \frac{du_1}{dx} + \frac{dv_1}{dy} = 0, \text{ par rapport aux axes fixes} \right)$  s'écrit

$$a \frac{de_1}{d\zeta} = A \left( \frac{du_1}{d\zeta} + \frac{dv_1}{d\eta} \right),$$

et cela résulte bien de (5) en ayant égard à (4).

Les équations (5) ne servent donc, peut-on dire, qu'à définir  $e_1, u_1, v_1$ .

Les prémisses générales du Chapitre I ne nous donnant pas d'autres renseignements sur les fonctions  $\mathbf{F}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1$ , on n'en a pas assez pour les déterminer.

(1) On pourrait même dire, en se rapportant aux variables  $\frac{\zeta}{\sqrt{1-a^2}}, \eta, \zeta$ , que les fonctions  $\mathbf{F}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1$  sont des potentiels ordinaires de distributions ayant pour siège le plan  $\zeta = 0$ . C'est ce qui résulterait directement de leurs expressions transformées. C'est d'ailleurs ce qui résulte de (3), d'après la façon dont se comportent lesdites fonctions.

On devait s'y attendre, car jusqu'à présent nous avons traité le plan conducteur simplement comme un siège d'électricité en mouvement.

Or ce qui caractérise les conducteurs est bien quelque chose de plus précis : *c'est la loi de Ohm*.

Pour les surfaces conductrices (isotropes) elle exprime que le courant est proportionnel à la composante tangentielle de la force électrique, et a la même direction.

Nous devons donc poser

$$(6) \quad X = Ak u_1, \quad Y = Ak v_1,$$

$k$  étant une constante, puisque nous supposons bien que le plan conducteur  $\sigma$  est homogène.

Quelle est la signification physique de cette constante  $k$  ?

Ayant choisi (n° 3) le système d'unités électrostatiques,  $Ak$  n'est autre chose que la résistance de l'unité de surface de notre plan conducteur, mesurée en unités électrostatiques. Or, si  $R_e$ ,  $R_m$ ,  $R_0$  sont les trois nombres qui mesurent une même résistance, respectivement en unités électrostatiques, en unités électromagnétiques et en ohms, on a (<sup>1</sup>)

$$R_e = A^2 R_m, \quad R_m = 10^9 R_0.$$

Il s'ensuit

$$k = A 10^9 R_0,$$

d'où, puisque  $\frac{1}{A} = 3 \cdot 10^{-10}$ ,

$$k = \frac{1}{30} R_0.$$

*La constante  $k$  est donc un trentième de la résistance de l'unité de surface du plan conducteur exprimée en ohms.*

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, une fois trouvées  $F_t$ ,  $U_t$ ,  $V_t$ , on a, d'après (1) et les formules (I), (II) du Chapitre I, les potentiels du champ.

Il faut, bien entendu, remplacer dans (I), (II) les symboles opératifs

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz}, \quad A \frac{d}{dt}$$

par les équivalents

$$\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\zeta}, \quad -a \frac{d}{d\xi}.$$

(1) Voir, par exemple, MASCART et JOUBERT, *Leçons, etc.*, t. I, p. 671-675.

On a ainsi

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{ll} L = & L_1, \\ M = -ma & \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi^2} + M_1, \\ N = ma & \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\eta^2} + N_1; \end{array} \right.$$

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X = -m(1-a^2) \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi^2} + X_1, \\ Y = -m & \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\eta^2} + Y_1, \\ Z = -m & \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi^2} + Z_1; \end{array} \right.$$

où

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_1 = & \frac{dV_1}{d\xi}, \\ M_1 = - & \frac{dU_1}{d\xi}, \\ N_1 = & \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}; \end{array} \right.$$

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{ll} X_1 = - & \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi}, \\ Y_1 = - & \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi}, \\ Z_1 = - & \frac{dF_1}{d\xi} \end{array} \right.$$

représentent évidemment les composantes des forces électromagnétiques du champ provenant de la distribution et des courants induits sur le plan  $\sigma$ . Les premiers termes, dans (III) et (IV), définissent, au contraire, le champ qui serait produit par le mouvement de  $m$ , s'il n'y avait pas de plan conducteur.

Nous avons désormais tout ce qu'il nous faut pour aborder la résolution mathématique de notre question. En effet, nous allons montrer que, en tenant compte des conditions qualitatives rappelées ci-dessus, les équations (4) et (6) suffisent bien à déterminer  $F_1, U_1, V_1$ .

**16. Expressions analytiques des potentiels retardés.** — Explicitons d'abord les équations (6) en y exprimant tout en fonction de nos inconnues  $F_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$ .

On a, d'après (IV) et (VI),

$$X = -m(1-a^2) \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\xi} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y = -m \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi},$$

et, par suite, en remplaçant  $Au_i$ ,  $Av_i$  par leurs valeurs (5),

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2) \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\xi}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\eta}. \end{cases}$$

Ces deux relations sont satisfaites en tout point du plan  $\zeta=0$ . Il est aisément d'en déduire deux autres valables en tout point de l'espace.

Remarquons pour cela que, d'après les propriétés dont doivent jouir  $F_i$ ,  $U_i$ ,  $V_i$ , les premiers membres des (6') sont deux fonctions de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$ , holomorphes pour toutes les valeurs réelles de  $\xi$ ,  $\eta$  et pour  $|\zeta| > 0$ , se réduisant respectivement à

$$m(1-a^2) \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\xi}, \quad m \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\eta}$$

pour  $|\zeta|=0$ , et vérifiant l'équation

$$\square f = 0.$$

Les fonctions  $m(1-a^2) \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\xi}$ ,  $m \frac{d \frac{I}{\Delta}}{d\eta}$  elles-mêmes satisfont à toutes ces conditions, pourvu seulement qu'on y remplace  $\zeta$  par  $-|\zeta|$  (autrement elles auraient des singularités au point  $m$ ).

Comme il n'en peut pas exister d'autres, on voit bien qu'en posant

$$(7) \quad \nabla^2 = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2]$$

on tire des (6') les équations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2) \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\xi^2}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\eta^2}, \end{cases}$$

vérifiées en tout point de l'espace.

Il s'agit maintenant d'intégrer le système formé des équations du premier ordre (8), de

$$(4) \quad a \frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta},$$

et des équations du second ordre

$$(9) \quad \square F_1 = 0, \quad \square U_1 = 0, \quad \square V_1 = 0,$$

$$\left[ \square = (1-a^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d^2}{d\zeta^2} \right],$$

qui sont bien compatibles, par des fonctions de  $\xi, \eta, |\zeta|$ , holomorphes dans le domaine indiqué tout à l'heure, et s'annulant pour  $|\zeta| = \infty$ , comme il convient à des potentiels de distributions situées sur le plan  $\zeta = 0$ .

Les conditions aux limites (6') sont alors nécessairement satisfaites.

*Détermination de  $F_1$ .* — En dérivant la première des équations (8) par rapport à  $\xi$ , la seconde par rapport à  $\eta$ , et ayant égard à (4), il vient

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|\zeta| d\xi} - \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - \frac{d^2 F_1}{d\eta^2} + a^2 \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} = m \left[ (1-a^2) \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\eta^2} \right],$$

d'où, à cause de

$$\square F_1 = 0, \quad \square \frac{1}{\nabla} = 0,$$

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|\zeta| d\xi} + \frac{d^2 F_1}{d|\zeta|^2} = -m \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|^2}.$$

En intégrant, par rapport à  $|\zeta|$ , depuis une valeur quelconque jusqu'à l'infini, on obtient

$$(10) \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{dF_1}{d\xi} + \frac{dF_1}{d|\zeta|} = -m \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|},$$

car les deux membres s'annulent pour  $|\zeta| = \infty$ .

Dans cette équation mettons en évidence  $F_1 + \frac{m}{\nabla}$  comme fonction inconnue. Elle s'écrit alors

$$(10') \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) + \frac{d}{d|\zeta|} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = m \frac{ak}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi},$$

et il est aisément d'en obtenir une solution par l'artifice suivant.

Posons

$$(11) \quad \tau^2 = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu \right)^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2],$$

$\mu$  étant une indéterminée.

On a évidemment

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=0} = \frac{1}{\nabla}, \quad \left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=\infty} = 0,$$

$$\square \frac{1}{\tau} = 0,$$

et en outre ( $\tau$  dépendant de  $\mu$  par l'intermédiaire des arguments  $\xi + \frac{ak}{2\pi} \mu$ ,  $|\zeta| + d + \mu$ )

$$\frac{d \frac{1}{\tau}}{d\mu} = \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|}.$$

D'après cela, la fonction

$$(12) \quad F_1 + \frac{m}{\nabla} = -m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu \quad (1)$$

satisfait bien à l'équation (10'). Mais elle satisfait encore à

$$\square \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = 0,$$

(1) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que la fonction sous le signe  $\frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi}$  reste finie et continue pour toute valeur de  $\mu \geq 0$  et devient infiniment petite du second ordre

pour  $\mu = \infty$ . Dès lors, l'intégrale de  $\frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi}$  entre 0 et  $\infty$  a un sens; elle est même une fonction régulière des arguments  $\xi, \eta, |\zeta|$  dans tout le champ réel (c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de  $\xi, \eta, \zeta$ ); elle peut être dérivée sous le signe, etc.

s'annule à l'infini et se comporte régulièrement pour toutes les valeurs réelles de  $\xi, \eta, \zeta$ , ayant seulement une discontinuité normale pour  $\zeta = 0$  (qui provient de l'argument  $|\zeta|$ ). Il en est de même pour  $F_1$ , dont on a ainsi achevé la recherche.

En effet, comme  $F_1$  doit satisfaire à (10), son expression ne pourrait différer de (12) que par une fonction arbitraire de  $\xi + \frac{ak}{2\pi} |\zeta|$ . Mais, d'après les autres conditions qui sont imposées à  $F_1$ , cette fonction de  $\xi + \frac{ak}{2\pi} |\zeta|$  devrait satisfaire à l'équation  $\square f = 0$  et s'annuler à l'infini. Dès lors, elle est identiquement nulle, ce qui démontre l'unicité de la solution fournie par (12).

*Détermination de  $V_1$ .* — La seconde des équations (8) peut être écrite

$$(8_b) \quad a \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\eta} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right).$$

Posons ( $v$  étant une nouvelle indéterminée)

$$(13) \quad \mathcal{C}^2 = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + av \right)^2 + (1 - a^2) \left[ v^2 + \left( |\zeta| + d + \mu + \frac{k}{2\pi} v \right)^2 \right],$$

d'où

$$\left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{v=0} = \frac{1}{\tau}, \quad \left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{v=\infty} = 0,$$

$$\square \frac{1}{\mathcal{C}} = 0, \quad \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{dv^2} = a \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi^2} + \frac{k}{2\pi} \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d|\zeta|^2}.$$

Ayant égard à (12), on reconnaît sans peine que

$$(14) \quad V_1 = m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi^2 d\eta} dv$$

est une solution de (8<sub>b</sub>).

On s'assure, comme tout à l'heure, que cette expression de  $V_1$  satisfait bien à toutes les autres conditions, et c'est la seule pour laquelle il en soit ainsi.

Une remarque s'impose toutefois à l'égard de l'intégrale double

$$\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi^2 d\eta} dv.$$

Tant qu'on n'a pas à la fois  $a = k = 0$ , la fonction sous le signe  $\frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi^2 d\eta}$  devient

infiniment petite du troisième ordre, lorsque le point représentatif  $(\mu, \nu)$  s'éloigne à l'infini d'une façon quelconque dans le premier quadrant. L'intégration est alors légitime et  $V_1$  est bien une fonction régulière de  $\xi, \eta, |\zeta|$ .

Mais il ne serait pas permis de supposer à la fois  $a = k = 0$ , puisqu'alors  $\mathcal{E}$  ne dépendrait plus de  $\nu$ , et l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \frac{\mathbf{I}}{\mathcal{E}}}{d\xi d\eta} d\nu$$

n'aurait pas de sens.

Cherchons donc directement ce qui se passe pour  $V_1$  (et pour  $U_1$ ) lorsque  $a = k = 0$ .

Ce n'est pas difficile, puisque, pour  $a = 0$ , quel que soit d'ailleurs  $k$ , on est reconduit au problème statique.

Il s'agit alors de l'influence d'une charge électrique  $m(0, 0, d)$  sur le plan conducteur  $\zeta = 0$ :  $U_1$  et  $V_1$  sont évidemment nuls, et il est bien connu que le potentiel électrostatique de la distribution induite se réduit à

$$F_1 = -\frac{m}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}}.$$

C'est bien ce qui résulte des (15), (14) et (12) en y faisant  $a = 0$ . Mais en surplus, nous pouvons maintenant affirmer, à l'égard de  $U_1$  et  $V_1$ , qu'ils s'annullent pour  $a = 0$ , même si  $k$  est aussi  $= 0$ , tandis que cette conclusion n'aurait pas été légitime d'après les formules (14) et (15), puisqu'elles n'ont plus de sens pour  $a = k = 0$ .

*Détermination de  $U_1$ .* — Attendu la forme de  $V_1$ , l'équation (4), c'est-à-dire

$$\frac{d(U_1 - aF_1)}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta} = 0,$$

nous donne après coup

$$(15) \quad U_1 - aF_1 = -m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{\mathbf{I}}{\mathcal{E}}}{d\eta^2} d\nu,$$

fonction régulière, etc.

Il nous reste à vérifier la première des équations (8), qu'on peut écrire

$$(8_a) \quad a \frac{d}{d\xi} (U_1 - aF_1) + \frac{k}{2\pi} \frac{d}{d|\zeta|} (U_1 - aF_1) \\ - (1 - a^2) \frac{d}{d\xi} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) + \frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d|\zeta|} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = m \frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 \frac{\mathbf{I}}{\mathcal{E}}}{d|\zeta|^2}.$$

Son premier membre, en y introduisant pour  $U_i - \alpha F_i$ ,  $F_i + \frac{m}{\nabla}$  leurs valeurs (15), (12), devient

$$\begin{aligned} & -m \frac{ak}{2\pi} \left[ \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2} \left( a \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d|\zeta|} \right) d\nu \right. \\ & \left. - (1 - a^2) \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\xi^2} d\mu + \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d|\zeta| d\xi} d\nu \right]. \end{aligned}$$

Mais à cause des identités

$$\begin{aligned} a \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d|\zeta|} &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\nu}, \\ \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\nu=0} &= \frac{1}{\tau}, \quad \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\nu=\infty} = 0, \end{aligned}$$

l'intégrale double se réduit à

$$- \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\eta^2} d\mu,$$

dont la somme avec  $-(1 - a^2) \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\xi^2} d\mu$  peut être remplacée (à cause de  $\square \frac{1}{\tau} = 0$ ) par

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|^2} d\mu.$$

Le premier membre de (8a) n'est donc autre chose que

$$-m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d}{d|\zeta|} \left( \frac{ak}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} + \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d|\zeta|} \right) d\mu.$$

Comme on a

$$\begin{aligned} \frac{ak}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} + \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d|\zeta|} &= \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\mu}, \\ \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=0} &= \frac{1}{\nabla}, \quad \left(\frac{1}{\tau}\right)_{\mu=\infty} = 0, \end{aligned}$$

il reste bien

$$m \frac{ak}{2\pi} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d|\zeta|}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

*Remarque.* — Les quadratures indiquées dans les formules qui donnent  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  peuvent toutes être effectuées à l'aide des transcendants élémentaires.

Ainsi, par exemple, en posant

$$\zeta_1 = \frac{\frac{ak}{2\pi} \xi + (1 - a^2)(|\zeta| + d)}{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}},$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} d\mu = \frac{\xi - \frac{ak}{2\pi} \zeta_1}{\sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}}} \frac{1}{\nabla \left( \nabla + \sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}} \zeta_1 \right)},$$

d'où

$$(12 \text{ bis}) \quad F_1 + \frac{m}{\nabla} = -m \frac{ak}{2\pi} \frac{\xi - \frac{ak}{2\pi} \zeta_1}{\sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}}} \frac{1}{\nabla \left( \nabla + \sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{2\pi^2}} \zeta_1 \right)}.$$

C'est une expression assez peu instructive, dont, d'ailleurs, on n'aura pas besoin dans la suite.

Les expressions de  $U_1$  et de  $V_1$  sont encore plus compliquées. Je ne les transcris pas, parce que je n'aurai pas non plus occasion de m'en servir.

**17. Étude des fonctions  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  pour les petites valeurs du paramètre  $a$ .** — L'expression (12) de  $F_1$  est valable pour toutes les valeurs (réelles) de  $a$  et de  $k$ , l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} d\mu$$

étant une fonction régulière de  $\xi$ ,  $\tau$ ,  $|\zeta|$ , même pour  $a = k = 0$ . Montrons que, comme fonction de ces paramètres aussi, elle est holomorphe dans le domaine de  $a = k = 0$ .

On pourrait le déduire de (12 bis). Ce serait une vérification *a posteriori* exigeant le calcul préalable de l'intégrale; il vaut peut-être mieux s'en rendre compte directement comme il suit.

Partons de l'identité

$$\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu = \int_0^1 \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu + \int_1^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu,$$

changeons, dans la seconde intégrale,  $\mu$  en  $\frac{1}{\mu}$ , et posons

$$\tau_1^2 = \left( \mu \xi + \frac{ak}{2\pi} \right)^2 + (1 - a^2) [\mu^2 \eta^2 + (1 + \mu |\zeta| + \mu d)^2].$$

Il vient

$$\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu = - \int_0^1 \left( \frac{\xi + \frac{ak}{2\pi} \mu}{\tau^3} + \frac{\mu \xi + \frac{ak}{2\pi}}{\tau_1^3} \right) d\mu.$$

Dans le second membre, la fonction sous le signe est bien une fonction holomorphe de  $a$  et de  $k$ , au voisinage de  $a = k = 0$ , pour toutes les valeurs de  $\mu$  comprises dans l'intervalle d'intégration. (En effet, ni  $\tau$ , ni  $\tau_1$  ne s'annulent dans cet intervalle, lorsqu'on y fait  $a = k = 0$ .)

Cela suffit pour nous assurer qu'il en est de même de l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu$ .

$F_1$  se comporte donc régulièrement pour les petites valeurs des paramètres  $a$  et  $k$ .

Elle est, par conséquent, développable suivant les puissances de  $a$  et de  $k$ .

Occupons-nous particulièrement du développement suivant les puissances de  $a$ .

Les expressions de  $\tau$  et  $\tau_1$  montrent que, en envisageant  $a$  comme une variable complexe de module non supérieur à l'unité (quelles que soient les valeurs réelles de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , réelles et non négatives de  $k$ ,  $\mu$ ), les modules de  $\tau^2$ ,  $\tau_1^2$  ne peuvent pas descendre au-dessous de

$$\begin{aligned} & [\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2] \quad (1 - |a|^2), \\ & [\mu^2 \eta^2 + (1 + \mu |\zeta| + \mu d)^2] (1 - |a|^2), \end{aligned}$$

dès qu'on suppose

$$\frac{k}{2\pi} < 1.$$

Donc ni  $\tau$  ni  $\tau_1$  ne s'annulent tant que

$$|a| < 1,$$

et l'on en conclut :

$F_1$  est une fonction de  $a$ , certainement holomorphe à l'intérieur de la circonférence  $|a| = 1$ . Son développement en série de puissances de  $a$  est donc toujours convergent ( $a$  étant ici  $< 1$ ), pourvu seulement que l'on ait

$$(16) \quad \frac{k}{2\pi} < 1.$$

Les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  ne sont pas holomorphes pour  $a = k = 0$ .

La recherche des singularités dont elles sont affectées pour ce couple de valeurs nous entraînerait trop loin.

Les remarques suivantes suffisent pour notre but.

Tout d'abord, dès qu'on suppose  $k > 0$ ,  $U_1$  et  $V_1$  sont des fonctions holomorphes de  $a$ , au voisinage de  $a = 0$ .

On le démontre sans peine en changeant, dans les intégrales doubles à l'aide desquelles s'expriment  $U_1$  et  $V_1$ ,  $y$  en  $\frac{2\pi y}{k}$  (ce qui implique justement que  $k$  soit différent de zéro), et en vérifiant ensuite que les fonctions sous le signe restent holomorphes au voisinage de  $a = 0$ , dans tout le champ d'intégration. Il va sans dire que, le champ étant infini, la vérification doit être conduite avec les précautions nécessaires, conformément à ce qu'on vient de faire pour l'intégrale simple exprimant  $F_1$ .

Cela nous assure que  $U_1$  et  $V_1$  sont développables suivant les puissances de  $a$ , pour  $a$  assez petit. Mais si l'on cherche, comme ci-dessus, à fixer une limite inférieure pour la validité du développement, on est conduit à la condition restrictive

$$|\alpha| < \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}.$$

Les développements de  $U_1$  et  $V_1$  suivant les puissances de  $a$  ne convergent donc (ou du moins on n'a pas le droit d'affirmer qu'il en est ainsi) que sous la condition

$$(17) \quad \alpha < \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}.$$

Pour les valeurs numériques de  $a$  et de  $k$ , qu'on peut présumer dans les conditions expérimentales ordinaires (voir le numéro suivant), l'inégalité (16) est toujours satisfaite; mais il n'en est pas de même pour la (17), et l'on devrait par suite renoncer à développer  $U_1$  et  $V_1$  suivant les puissances de  $a$ .

On peut tourner la difficulté en modifiant un peu la forme du développement.  
Posons

$$(18) \quad h = \frac{2\pi a}{k},$$

$$(19) \quad \tilde{\epsilon}^{1/2} = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + h\nu \right)^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu + \nu)^2].$$

Les expressions (14) et (15) de  $V_1$  et de  $U_1 - aF_1$ , après le changement de  $\nu$  en  $\frac{2\pi}{k}\nu$ , peuvent être écrites

$$(14') \quad V_1 = ma \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tilde{\epsilon}'}}{d\xi d\eta} d\nu,$$

$$(15') \quad U_1 - aF_1 = -ma \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tilde{\epsilon}'}}{d\eta^2} d\nu.$$

Pour toutes les valeurs réelles de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , réelles et non négatives des paramètres  $h$  et  $k$ , la fonction  $\tilde{\epsilon}'^{1/2}$  (de la variable complexe  $a$ ) ne s'annule pour aucune valeur de  $a$ , à l'intérieur de la circonference  $|a|=1$ ; en supposant, bien entendu, que l'inégalité (16) soit satisfaite. On le vérifie aisément d'après l'expression (19) de  $\tilde{\epsilon}'^{1/2}$ .

Il en résulte cette circonstance importante :

*Les développements des intégrales doubles*

$$\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tilde{\epsilon}'}}{d\eta d\xi} d\nu, \quad \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tilde{\epsilon}'}}{d\eta^2} d\nu,$$

*suivant les puissances de  $a$ , lorsqu'on y traite  $h$  comme un paramètre (pouvant prendre, d'ailleurs, une valeur quelconque) sont convergents, pour  $|a|<1$ , sous la seule condition (16), qui garantit également la validité du développement de  $F_1$ .*

**18. Expressions approchées lorsqu'on néglige les termes en  $a^2$ . — Caractères généraux du champ.** — Au point de vue des applications physiques, on peut traiter  $a$  et  $k$  comme des quantités très petites.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur, supposons, par exemple, que la vitesse de la charge mobile soit de  $300^m$  par seconde (ce qui est déjà assez exagéré); il vient alors

$$a = \frac{300 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-6}.$$

Supposons que le plan conducteur  $\sigma$  soit une plaque de cuivre de l'épaisseur d'un millimètre.

Si  $g$  est l'épaisseur de la plaque,  $r$  sa résistance spécifique (exprimée en ohms), on aura, d'après le n° 15,

$$k = \frac{I}{30} R_0 = \frac{I}{30} \frac{r}{g}.$$

A présent

$$r = 16 \cdot 10^{-7},$$

à peu près, et

$$g = 10^{-1};$$

il en résulte donc que l'on a à peu près

$$k = \frac{1}{2} 10^{-6},$$

$$h = \frac{2\pi a}{k} = 4\pi.$$

La condition

$$(16) \quad \frac{k}{2\pi} < 1$$

est bien vérifiée (et le sera toujours, de quelque façon que l'on modifie les conditions expérimentales). L'inégalité (17) ne l'est pas (mais on pourrait y satisfaire, soit en remplaçant le cuivre par un métal plus résistant, soit en supposant la plaque plus mince).

Pour avoir des expressions approchées, valables en tout cas (et plus que suffisantes dans la pratique non seulement pour l'analyse qualitative, mais aussi pour la discussion numérique du champ), il convient de développer suivant les puissances de  $a$ , en ayant soin, bien entendu, de traiter les intégrales doubles (14') et (15') comme il a été indiqué au numéro précédent.

*On pourra bien se contenter des termes du premier ordre en  $a$ , car les termes d'ordre supérieur sont absolument négligeables.*

En effet, dès que le rayon de convergence des développements dont il s'agit est l'unité, on est assuré que la somme des termes d'ordre supérieur au premier ne dépasse pas, pour  $|a| < \frac{1}{n}$ ,

$$\frac{\Re n^2 |a|^2}{1 - n |a|},$$

où  $n > 1$  et où  $\Re$  est le module maximum des valeurs que la fonction correspondant à la série prend sur la circonférence  $|a| = \frac{1}{n}$ .

Par cette voie il serait aisé de vérifier en toute rigueur que, pour les trois fonctions

$$a \int_0^\infty \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} d\mu, \quad a \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{2}}{d\xi d\eta} dy, \quad a \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{2}}{d\eta^2} dy,$$

les restes (après les termes en  $a$ ) ont des valeurs numériques tout à fait négligeables, même si la vitesse de convection atteignait quelques kilomètres par seconde.

Cela posé, arrivons à l'évaluation effective des expressions approchées.

On a, tout d'abord, en négligeant  $a^2$ ,

$$(7') \quad \nabla^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2.$$

Comme, d'autre part, les seconds membres des formules (12), (14') et (15') contiennent  $a$  en facteur, on peut poser  $a=0$  dans les fonctions  $\tau$  et  $\tilde{\epsilon}'$ . Les expressions de ces fonctions se réduisent alors à

$$(11') \quad \tau^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2,$$

$$(19') \quad \tilde{\epsilon}'^2 = (\xi + h\nu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu + \nu)^2.$$

Il en résulte

$$\int_0^\infty \frac{d^{\frac{1}{2}}}{d\xi} d\mu = - \frac{\xi}{\nabla(\nabla + |\zeta| + d)},$$

d'où, en posant pour abréger,

$$(20) \quad f = \frac{1}{\nabla(\nabla + |\zeta| + d)},$$

$$(12') \quad F_1 = - \frac{m}{\nabla} + m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

D'après (V), pour former les composantes de la force magnétique, on a besoin de  $\frac{dV_1}{d\xi}$ ,  $\frac{dU_1}{d\xi}$ ,  $\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}$ , pendant que, d'après (VI), les termes en  $U_1$  et  $V_1$ , dans les composantes de la force électrique, résultent du second ordre et doivent par conséquent être négligés. Il convient ainsi d'évaluer directement

$$\frac{dV_1}{d|\zeta|}, \quad \frac{dU_1}{d|\zeta|}, \quad \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi},$$

au lieu de  $U_1$  et  $V_1$ .

On peut écrire, d'après (14'),

$$\frac{dV_1}{d|\xi|} = ma \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty d\eta \frac{d}{d\eta} \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)}{d|\xi|} d\mu;$$

mais, en tenant compte de ce que

$$\frac{d\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)}{d\mu} = \frac{d\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)}{d|\xi|}, \quad \left(\frac{1}{\epsilon'}\right)_{\mu=0} = 0,$$

l'intégrale intérieure se réduit à

$$-\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)_{\mu=0},$$

et, par suite,  $\frac{dV_1}{d|\xi|}$  à

$$-ma \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)_{\mu=0}}{d\eta} d\eta.$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{1}{\epsilon'}\right)_{\mu=0}}{d\eta} d\eta = -\eta\varphi,$$

en ayant posé

$$(21) \quad \varphi = \frac{1}{\nabla (\sqrt{1+h^2}\nabla + h\xi + |\xi| + d)}.$$

Il vient donc

$$(14'') \quad \frac{dV_1}{d|\xi|} = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}.$$

On trouve de même

$$\frac{d}{d|\xi|} (U_1 - aF_1) = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta},$$

d'où, en négligeant dans  $aF_1$  les termes du second ordre,

$$(15'') \quad \frac{dU_1}{d|\xi|} = -ma \left[ \frac{d\bar{\nabla}}{d|\xi|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right].$$

Quant à  $\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}$ , les formules (14') et (15'), en remarquant que

$$\frac{d^2 \frac{I}{\bar{\epsilon}'}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \frac{I}{\bar{\epsilon}'}}{d\eta^2} = - \frac{d^2 \frac{I}{\bar{\epsilon}'}}{d|\zeta|^2},$$

donnent

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \frac{d}{d|\zeta|} \int_0^\infty d\nu \frac{d}{d\eta} \int_0^\infty \frac{d \frac{I}{\bar{\epsilon}'}}{d|\zeta|} d\mu + a \frac{dF_1}{d\eta},$$

et il reste, comme ci-dessus,

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \left[ - \frac{d \frac{I}{\bar{\nabla}}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right].$$

On a évidemment

$$\frac{dU_1}{d\xi} = \pm \frac{dU_1}{d|\zeta|}, \quad \frac{dV_1}{d\xi} = \pm \frac{dV_1}{d|\zeta|},$$

selon que  $\zeta > 0$ .

Les composantes de la force magnétique provenant du plan conducteur  $\sigma$  sont donc, d'après (V),

$$(V) \quad \begin{cases} L_1 = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M_1 = ma \left[ \frac{d \frac{I}{\bar{\nabla}}}{d|\zeta|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\ N_1 = ma \left[ - \frac{d \frac{I}{\bar{\nabla}}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour  $\zeta > 0$ , et

$$(V'') \quad \begin{cases} L_1 = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M_1 = -ma \left[ \frac{d \frac{I}{\bar{\nabla}}}{d|\zeta|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\ N_1 = -ma \left[ - \frac{d \frac{I}{\bar{\nabla}}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour  $\zeta < 0$ .

La force électrique dérive du potentiel

$$(VI') \quad \mathbf{F}_1 = -\frac{m}{\nabla} + m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

*Voilà les modifications du champ dues à l'influence du plan conducteur  $\sigma$ .*

Considérons d'un peu plus près ce qui se passe pour  $\zeta < 0$ , c'est-à-dire au delà de l'écran conducteur  $\sigma$ , par rapport à la charge mobile.

On a alors

$$\nabla = \Delta = \overline{Pm},$$

et, comme on doit négliger  $a^2$ , les formules (III) deviennent

$$(III') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ \mathbf{M} = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta}, \\ \mathbf{N} = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d|\xi|} = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}. \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que (aux termes en  $a^2$  près) *la force magnétique totale au delà de l'écran conducteur dérive du potentiel*

$$ma\eta\varphi.$$

*La force électrique totale dérive également d'un potentiel; ce potentiel est*

$$m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

C'est une expression à peu près du second ordre, par rapport à  $a$ , vu que  $k$  a même ordre de grandeur que  $a$ . *La force électrique est par suite négligeable.* Le plan conducteur, qui est un diaphragme parfait pour les actions électrostatiques, l'est ici encore, aux termes du second ordre près.

La force magnétique est modifiée par l'interposition du conducteur; l'ordre reste toutefois le même.

Détaillons ce qui se passe aux points immédiatement au-dessous de la charge mobile, c'est-à-dire aux points  $M(0, 0, \zeta < 0)$ , situés sur le prolongement de la perpendiculaire  $m\Omega$ , abaissée de  $m$  au plan conducteur  $\sigma$ .

On a pour ces points  $M$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2(|\xi| + d)^2} = \frac{1}{2(\zeta - d)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{Mm^2}, \\ \varphi &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \frac{1}{Mm^2}, \end{aligned}$$

et les composantes des forces électrique et magnétique sont, par suite,

$$-m \frac{ak}{4\pi} \frac{1}{\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{m}}^2}, \quad 0, \quad 0,$$

$$0, \quad -\frac{ma}{1+\sqrt{1+h^2}} \frac{1}{\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{m}}^2}, \quad 0.$$

Remarquons que, lorsque le plan conducteur n'existe pas, les composantes de la force magnétique sont 0,  $-ma \frac{d\frac{1}{\Delta}}{ds}$ ,  $ma \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$ , et elles se réduisent, pour les points  $\mathbf{M}$ , à

$$0, \quad -ma \frac{1}{\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{m}}^2}, \quad 0.$$

On en conclut :

*La force électrique (négligeable, d'ailleurs, comme il a été observé), aux points  $\mathbf{M}$ , est inversement proportionnelle au carré de la distance  $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{m}}$  et directement opposée à la convection.*

*La force magnétique est aussi inversement proportionnelle au carré de la distance  $\overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{m}}$ , et est dirigée selon la règle d'Ampère par rapport à la trajectoire de la charge mobile. Elle est à celle qui agirait au même point  $\mathbf{M}$ , s'il n'y avait pas de plan conducteur, dans le rapport de  $\frac{1}{1+\sqrt{1+h^2}}$  à 1 (  $h = \frac{2\pi\alpha}{k}$  étant ordinairement un nombre fini).*

L'interposition du conducteur réduit donc la force magnétique de la moitié au moins, mais la réduction est d'autant plus grande que la résistance  $k$  de la plaque conductrice s'affaiblit.

Au cas limite d'une conductivité infinie ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ), la force magnétique, de même que la force électrique, s'annulerait partout au delà du plan. Celui-ci serait alors un écran parfait pour toute action électromagnétique.

**19. Cas d'une charge se déplaçant avec la vitesse de la lumière.** — Les expressions générales de  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{V}_1$ , assignées au n° 16, sont valables pour toute valeur de  $\alpha < 1$ . Comme elles admettent des limites bien déterminées pour  $\alpha = 1$ , elles restent applicables même dans ce cas.

Les équations (7), (11) et (13) donnent, pour  $\alpha = 1$ ,

$$\nabla = |\xi|, \quad \tau = \left| \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu \right|, \quad \mathfrak{E} = \left| \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + \alpha \nu \right|,$$

de façon que

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d\frac{I}{\tau}}{d\xi} = \frac{d\frac{I}{\tau}}{d\mu}, \quad \frac{d\frac{I}{\tau}}{d\eta} = 0.$$

Il vient alors, d'après (12), (14), (15),

$$F_1 = U_1 = V_1 = 0,$$

c'est-à-dire :

Dans le cas limite où la vitesse de convection serait égale à celle de la lumière, la présence du plan conducteur ne modifie aucunement le champ électromagnétique.

**20. Remarque.** — Le champ électromagnétique, dû à un système quelconque de courants *constants*, n'est pas altéré par la présence d'un plan conducteur (ou plus généralement d'un système quelconque de conducteurs).

C'est un fait d'expérience bien connu, qu'on doit naturellement retrouver par nos formules.

Envisageons le cas du plan indéfini et rapportons-nous cette fois aux axes fixes  $x, y, z$ .

Soient  $F'$ ,  $U'$ ,  $U'_1$ ,  $V'_1$  les potentiels correspondant au système donné de courants. Comme les courants sont constants, ces fonctions ne dépendent pas de  $t$ .

Soient, d'autre part,  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  ( $W_1 = 0$ ), les potentiels inconnus correspondant à la distribution et aux courants induits sur le plan. Évidemment ils ne dépendront pas non plus de  $t$  et seront, par suite, des fonctions harmoniques.

On doit les déterminer d'après les équations [(5) du Chapitre I, (6) de ce Chapitre]

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0, \quad X = Ak u_1, \quad Y = Ak v_1.$$

En tenant compte du fait que  $F = F' + F_1$ ,  $U = U' + U_1$ , ..., que  $u_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|}$ ,  $v_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|}$ , que  $U'$ ,  $V'$ ,  $W'$  satisfont aussi à la première équation, et en remplaçant  $X$ ,  $Y$  par leurs valeurs (II), il vient

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} = 0; \quad \frac{d}{dx}(F' + F_1) = A \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|}, \quad \frac{d}{dy}(F' + F_1) = A \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|},$$

les deux dernières équations devant être vérifiées seulement pour  $z = 0$ .

On satisfait bien, et d'une façon unique, à toutes les conditions imposées à  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , en prenant

$$U_1 = V_1 = 0,$$

et en déterminant la fonction harmonique  $F_1$ , qui prend sur le plan  $z = 0$  la valeur  $-F'$  et se comporte régulièrement dans tous les autres points de l'espace.

Le conducteur n'exerce donc aucune perturbation magnétique sur le champ des courants donnés, puisque son potentiel vecteur s'annule.

L'influence sur la force électrique s'évalue comme en électrostatique. Il devait bien en être ainsi, du moment qu'il s'agit d'un régime permanent.

---