ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT

Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible et sur les congruences de droites

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 2 (1894), p. E1-E46
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_2_E1_0>

SUR LA

DÉFORMATION INFINITÉSIMALE

D'UNE SURFACE FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE

ET SUR

LES CONGRUENCES DE DROITES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Le présent Mémoire est relatif, en grande partie, à des problèmes qui se ramènent aisément à celui, posé par M. Moutard, de la transformation par orthogonalité des éléments et qui, depuis quelques années, ont été étudiés surtout par MM. Bianchi, Darboux, Ribaucour et Weingarten. Les indications auxquelles s'est borné jusqu'à ce jour M. Darboux, soit dans son Mémoire sur la représentation sphérique des surfaces, soit dans la partie publiée de ses Leçons, font prévoir l'importance du sujet dans la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée. Je me bornerai ici à l'exposition de résultats qui se rattachent surtout aux travaux de Ribaucour et de M. Bianchi; je développerai, en particulier, les propositions que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* du 26 décembre 1892.

La première Partie est consacrée, à peu près entièrement, au développement de certains points du Chapitre XII du *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* de Ribaucour. La seconde traite du problème de la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible; la solution est basée sur l'emploi des formules (A) et (B) du Livre V des *Leçons* de M. Darboux; on remarquera que l'inconnue auxiliaire z_1 à la recherche de laquelle on peut ramener la question n'est pas autre chose que la *Verchiebungsfunction* φ de M. Weingarten; d'autre part, si l'on suppose que les courbes (u), (v) tracées sur la surface sont orthogonales, z_1 devient l'inconnue Z de Ribaucour; il nous a semblé qu'il y avait intérêt à effectuer ce rapprochement et à montrer, en somme, l'identité des solutions données par Ribaucour et par M. Weingarten.

Je dois ajouter que j'emploierai constamment les notations et les résultats que l'on trouve dans les *Leçons* de M. Darboux; en particulier, *les formules* (A) *et* (B) *du Livre V serviront de base à tout ce qui va suivre.*

I. — Formules relatives au passage d'une surface a une surface infiniment voisine. Résultats divers.

1. *Variations premières des courbures* $\frac{1}{RR'}$ *et* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ *quand on passe d'une surface à une surface infiniment voisine.* — (A) étant une surface quelconque, déterminons une surface (A′), infiniment voisine de (A), de la façon suivante : faisons correspondre à chaque système de valeurs u, v des paramètres qui fixent la position du point A sur (A) le trièdre trirectangle habituel (T) dont l'axe des z est normal en A à (A) et construisons le point A′ dont les coordonnées par rapport au trièdre (T) sont εx, εy, εz (x, y, z étant des fonctions de u et de v et ε désignant une quantité infiniment petite indépendante de u et v). Le point A′, qui se déduit ainsi du point A correspondant en imprimant à ce dernier un déplacement infiniment petit dont les projections sur les axes de (T) sont εx, εy, εz, décrit, lorsque u et v varient, la surface (A′).

Proposons-nous de trouver les variations premières des courbures $\frac{1}{RR'}$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ lorsqu'on passe du point A de (A) au point A′ de (A′).

Les coefficients directeurs U, V, W, par rapport au trièdre (T), de la normale en A′ à (A′) sont, en vertu des formules (B) des *Leçons* de M. Darboux, définis par les équations

$$\left[\xi+\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial u}+qz-ry\right)\right]U+\left[\eta+\varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial u}+rx-pz\right)\right]V+\varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial u}+py-qx\right)W=0,$$
$$\left[\xi_1+\varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial v}+q_1z-r_1y\right)\right]U+\left[\eta_1+\varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x-p_1z\right)\right]V+\varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial v}+p_1y-q_1x\right)W=0.$$

Si l'on néglige les puissances de ε supérieures à la première, on peut adopter pour U, V, W les valeurs suivantes :

$$U = -\varepsilon y_1,$$
$$V = \varepsilon x_1,$$
$$W = 1 + \varepsilon K,$$

en posant

$$x_1 = \frac{\xi_1\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) - \xi\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

$$y_1 = \frac{\eta_1\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) - \eta\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

$$K = \frac{\xi\left(\frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) - \xi_1\left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right) + \eta_1\left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right) - \eta\left(\frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = \xi y_1 - \eta x_1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = \xi_1 y_1 - \eta_1 x_1,$$

$$(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)K = \frac{\partial(\xi y - \eta x)}{\partial v} - \frac{\partial(\xi_1 y - \eta_1 x)}{\partial u} + (p\xi_1 - p_1\xi + q\eta_1 - q_1\eta)z.$$

Les coordonnées d'un point P de la normale à (A′) en A′ sont alors données par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} X = \varepsilon(x - l y_1), \\ Y = \varepsilon(y + l x_1), \\ Z = \varepsilon z \;\; + l, \end{cases}$$

en désignant par l^2 le carré de la distance du point P au point A′ et en négligeant toujours les puissances de ε supérieures à la première.

Posons

$$\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = \lambda, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = \lambda_1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = \mu, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = \mu_1.$$

Si nous considérons, d'une façon générale, la droite qui, rapportée au trièdre (T), est définie par les équations (1), où l est un paramètre variable et ε une constante, cette droite engendre quand (T) varie une congruence; les valeurs de l correspondant aux points focaux sont déterminées par une équation qui peut, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&(\xi\eta_1-\eta\xi_1)\frac{1}{l^2}\\
&+\left\{q\eta_1-p_1\xi+p\xi_1-q_1\eta-\varepsilon\frac{(q\eta_1-p_1\xi+p\xi_1-q_1\eta)(\xi\mu_1-\xi_1\mu+\eta_1\lambda-\eta\lambda_1)}{\xi\eta_1-\eta\xi_1}\right.\\
&\qquad+\varepsilon\left[q\mu_1-q_1\mu-p_1\lambda+p\lambda_1+\xi\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}-r_1y_1\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\eta_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}+rx_1\right)-\xi_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}-ry_1\right)+\eta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}+r_1x_1\right)\right]\right\}\frac{1}{l}\\
&+pq_1-qp_1+\varepsilon\left[-\frac{(pq_1-qp_1)(\xi\mu_1-\xi_1\mu+\eta_1\lambda-\eta\lambda_1)}{\xi\eta_1-\eta\xi_1}+q\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}-r_1y_1\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+p_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}+rx_1\right)-p\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}+r_1x_1\right)-q_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}-ry_1\right)\right]=0.
\end{aligned}$$

Si l'on examine la suite des calculs que nous venons d'effectuer, on reconnaît immédiatement que la somme et le produit des racines de cette dernière équation en $\frac{1}{l}$ diffèrent respectivement de $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ et de $\frac{1}{RR'}$ des variations premières

$$\delta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),\qquad \delta\left(\frac{1}{RR'}\right).$$

Si donc nous remarquons que l'on a

$$K=\frac{\xi\mu_1-\xi_1\mu+\eta_1\lambda-\eta\lambda_1}{\xi\eta_1-\eta\xi_1},$$

il vient les formules cherchées

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1-\eta\xi_1)\,\delta\frac{1}{RR'}=-\frac{K}{RR'}+\frac{\partial(p_1y_1-q_1x_1)}{\partial u}-\frac{\partial(py_1-qx_1)}{\partial v},\\
&\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1-\eta\xi_1)\,\delta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=-K\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\\
&\qquad+q_1\mu-q\mu_1+p_1\lambda-p\lambda_1-\frac{\partial(\xi x_1+\eta y_1)}{\partial v}+\frac{\partial(\xi_1x_1+\eta_1y_1)}{\partial u}.
\end{aligned}$$

2. *Déformation infinitésimale de* (A). *Conséquence analytique du théorème de Gauss.* — Considérons le cas particulier où, en négligeant les puissances de ε supérieures à la première, (A′) est applicable sur (A). Les

projections, sur les axes de (T), de l'arc élémentaire de (A′), étant

$$(\xi+\varepsilon\lambda)\,du+(\xi_1+\varepsilon\lambda_1)\,dv,$$
$$(\eta+\varepsilon\mu)\,du+(\eta_1+\varepsilon\mu_1)\,dv,$$
$$\varepsilon(\xi y_1-\eta x_1)\,du+\varepsilon(\xi_1 y_1-\eta_1 x_1)\,dv,$$

la variation première du ds^2 de (A) sera

$$2\varepsilon[(\xi\lambda+\eta\mu)\,du^2+(\xi_1\lambda_1+\eta_1\mu_1)\,dv^2+(\xi\lambda_1+\xi_1\lambda+\eta\mu_1+\eta_1\mu)\,du\,dv].$$

Écrivons qu'elle est nulle quels que soient du, dv et il vient le système

$$\xi\lambda+\eta\mu=0,$$
$$\xi_1\lambda_1+\eta_1\mu_1=0,$$
$$\xi\lambda_1+\xi_1\lambda+\eta\mu_1+\eta_1\mu=0,$$

qu'on peut remplacer par le suivant

$$\frac{\lambda}{\eta}=-\frac{\mu}{\xi}=\frac{\lambda_1}{\eta_1}=-\frac{\mu_1}{\xi_1}.$$

Nous avons donc, dans le cas actuel, $K=0$, et il vient

$$\frac{1}{\varepsilon}(\xi\eta_1-\eta\xi_1)\,\delta\frac{1}{RR'}=\frac{\partial(p_1 y_1-q_1 x_1)}{\partial u}-\frac{\partial(p y_1-q x_1)}{\partial v}.$$

D'après le théorème de Gauss, la variation première de $\frac{1}{RR'}$ doit être identiquement nulle. Cette remarque a été faite par Ribaucour [1] qui ajoute que la vérification de ce fait permet de réduire à une forme canonique le problème de la déformation infinitésimale. Nous avons cherché à effectuer cette vérification; exposons synthétiquement le résultat de cette recherche.

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 définie en posant

$$z_1=\frac{\lambda}{\eta}=-\frac{\mu}{\xi}=\frac{\lambda_1}{\eta_1}=-\frac{\mu_1}{\xi_1}.$$

Le système qui détermine x, y, z se met sous la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u}+qz-ry-\eta z_1=0,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}+q_1 z-r_1 y-\eta_1 z_1=0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}+rx-pz+\xi z_1=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}+r_1 x-p_1 z+\xi_1 z_1=0.$$

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 114, p. 243.

En vertu d'un calcul bien connu, qui consiste à écrire que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ déduites du système précédent sont égales, ainsi que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$, les inconnues x, y, z sont déterminées par les équations

$$\xi' + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, \qquad \xi'_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0,$$
$$\eta' + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, \qquad \eta'_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,$$
$$\zeta' + \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, \qquad \zeta'_1 + \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre les relations

$$\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,$$
$$\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,$$
$$\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \frac{\partial \xi'_1}{\partial u} = q\zeta'_1 - q_1\zeta' - r\eta'_1 + r_1\eta',$$
$$\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial \eta'_1}{\partial u} = r\xi'_1 - r_1\xi' - p\zeta'_1 + p_1\zeta',$$
$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi',$$

qui déterminent ξ', η', ζ', ξ'_1, η'_1, ζ'_1 et l'inconnue auxiliaire z_1.

Celles des équations précédentes qui renferment les dérivées de z peuvent s'écrire, en remplaçant ζ' et ζ'_1 par leurs valeurs en fonction de z_1,

$$(pq_1 - qp_1)\left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) = p\left(\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \eta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right) - q\left(\xi_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \xi\frac{\partial z_1}{\partial v}\right),$$
$$(pq_1 - qp_1)\left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right) = p_1\left(\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \eta\frac{\partial z_1}{\partial v}\right) - q_1\left(\xi_1\frac{\partial z_1}{\partial u} - \xi\frac{\partial z_1}{\partial v}\right),$$

d'où, en résolvant par rapport à $\frac{\partial z_1}{\partial u}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial v}$,

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + py_1 - qx_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

Si l'on égale les deux valeurs de $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v}$ déduites de ces deux équations, on a bien la vérification demandée.

Nous reviendrons au n° 7 sur l'emploi de l'inconnue auxiliaire z_1 dans le problème de la déformation infinitésimale.

3. *Le problème de M. Christoffel et les surfaces isothermiques.* — Le problème de M. Christoffel est, comme on sait ([1]), relatif à la recherche des cas dans lesquels la correspondance par plans tangents parallèles entre deux surfaces (A), (A_1) peut donner une représentation conforme ou un tracé géographique de l'une des surfaces sur l'autre.

Le Tome II des *Leçons* de M. Darboux renferme une solution très élégante de la question; elle est basée sur l'introduction, comme variables indépendantes, des paramètres des deux familles conjuguées qui se correspondent sur les deux surfaces. On peut, en partant de la même idée première, parvenir à un assez grand nombre de résultats en raisonnant de la façon que je vais indiquer.

Considérons les développables de la congruence engendrée par AA_1 et écartons les solutions correspondant aux hypothèses particulières suivantes: 1° les droites AA_1 sont parallèles à une même direction; 2° elles passent par un même point; 3° les développables de la congruence engendrée par AA_1 se confondent; 4° ces développables découpent (A) et (A_1) suivant des lignes de longueur nulle. Ces solutions particulières, bien connues, étant écartées, remarquons que les développables envisagées découpent (A) et (A_1) suivant les deux familles conjuguées qui se correspondent sur ces surfaces. D'autre part, donnons à AA_1 un déplacement infiniment petit, de façon à lui faire décrire un élément de développable; le quotient des déplacements respectifs du point A et du point A_1 sera égal à

$$\frac{FA}{FA_1},$$

en désignant par F le point focal qui correspond à la développable considérée; le quotient considéré devant être le même, lorsqu'on considère successivement les deux développables qui passent par AA_1, il en résulte que les points focaux F et F' de la droite AA_1 doivent être conjugués harmoniques par rapport à A et A_1 (le cas où F et F' sont confondus est, en effet, écarté). D'ailleurs, les déplacements infiniment petits de AA_1 qui lui font décrire un élément de développable doivent être tels que l'angle des

([1]) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 239.

déplacements de A soit égal à l'angle des déplacements de A_1; comme ces angles sont manifestement supplémentaires l'un de l'autre, ils sont droits. Nous trouvons donc les conditions suivantes :

Les points focaux de AA_1 *doivent être conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1; *les développables de la congruence engendrée par* AA_1 *doivent découper* (A) *et* (A_1) *suivant leurs lignes de courbure.*

Les conditions que nous venons de trouver sont, on le voit immédiatement, nécessaires et suffisantes. D'ailleurs, en vertu d'un théorème de M. Kœnigs, la première condition, en vertu de la seconde, peut être remplacée par la suivante :

Les lignes de courbure de (A) *et de* (A_1) *doivent être isothermes.*

Nous allons maintenant rappeler et compléter la solution donnée par Ribaucour de la même question.

Écartons le cas dans lequel les surfaces seraient des développables circonscrites au cercle de l'infini et rapportons (A) à ses lignes de courbure en lui adjoignant le trièdre (T) ou $Axyz$ habituel; x, y, z désignant les coordonnées de A_1 par rapport à ce trièdre, nous avons d'abord les relations

$$x = \frac{1}{q}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad y = -\frac{1}{p_1}\frac{\partial z}{\partial v},$$

qui expriment que la correspondance entre les points A, A_1 de (A) et (A_1) est établie par plans tangents parallèles.

Posons

$$\lambda = 1 + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right),$$

$$\mu = 1 + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial x}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right),$$

$$\theta = q\left(\frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y\right) = -p_1\left(\frac{\partial y}{\partial u} + rx\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Le carré de l'élément linéaire de (A_1) a pour expression

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right)du^2 + 2\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta\,du\,dv + \left(\frac{\theta^2}{q^2} + C^2\mu^2\right)dv^2,$$

et il faudra que l'on ait, en désignant par k une fonction de u et de v,

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right) du^2 + 2\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta\, du\, dv + \left(\frac{\theta^2}{q^2} + C^2\mu^2\right) dv^2 = k^2(A^2\, du^2 + C^2\, dv^2).$$

Nous obtenons donc les trois relations suivantes

$$\left(A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2}\right) - k^2 A^2 = 0,$$

$$\left(\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1}\right)\theta = 0,$$

$$\left(C^2\mu^2 + \frac{\theta^2}{q^2}\right) - k^2 C^2 = 0,$$

qui devront être vérifiées toutes les trois.

Les différentes solutions de ce système de trois équations simultanées appartiennent à l'un des types suivants :

1° $\frac{A\lambda}{q} - \frac{C\mu}{p_1} = 0,\qquad A^2\lambda^2 + \frac{\theta^2}{p_1^2} - k^2A^2 = 0,\qquad C^2\mu^2 + \frac{\theta^2}{q^2} - k^2C^2 = 0;$

2° $\theta = 0,\qquad \lambda = \mu = \pm k;$

3° $\theta = 0,\qquad \lambda = -\mu = \pm k.$

Dans la première solution, (A) est une sphère ou une surface minima et (A_1) est une surface minima.

Dans la seconde solution, (A) et (A_1) sont homothétiques.

Il nous reste donc à examiner la dernière solution qui est caractérisée par les conditions

$$\theta = 0,\qquad \lambda + \mu = 0.$$

La première $\theta = 0$ exprime que les *lignes de courbure de* (A) *et de* (A_1) *se correspondent.*

On peut donner de la seconde différentes interprétations géométriques.

Les lignes de courbure se correspondant, $A\lambda\, du$ et $-C\lambda\, dv$ sont les éléments de ces lignes tracées sur (A_1) qui correspondent respectivement aux éléments $A\, du$, $C\, dv$ de (A); par conséquent, si R, R′ sont les rayons de courbure principaux de (A), R_1 et R'_1 ceux de (A_1) au point correspondant, la condition peut s'écrire

$$\frac{R_1}{R'_1} + \frac{R}{R'} = 0.$$

On peut encore considérer la congruence engendrée par la droite AA_1; si F, F′ sont les points focaux situés sur AA_1, on a

$$\frac{AA_1}{AF} = 1 - \lambda, \qquad \frac{AA_1}{AF'} = 1 - \mu,$$

et la condition s'écrit

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AF'} = \frac{2}{AA_1}.$$

L'interprétation précédente peut se transformer, en vertu du théorème de M. Kœnigs; c'est à quoi l'on arrive également par le calcul suivant qui ne constitue d'ailleurs, en somme, qu'une démonstration de ce théorème.

Les inconnues x, y, z, qui déterminent la surface (A_1) dès que (A) est connue, sont définies par le système

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)A + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, & &\frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y = 0,\\
&\frac{\partial y}{\partial u} + rx = 0, & &(1+\lambda)C + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,\\
&\frac{\partial z}{\partial u} - qx = 0, & &\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y = 0.
\end{aligned}$$

On sait que, si ce système admet une solution, il en admet une triple infinité qu'on obtient en prenant les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport à un trièdre mobile dont les axes sont constamment parallèles à ceux de (T); pour qu'il en soit ainsi, on a les conditions nécessaires et suffisantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[(1+\lambda)C]}{\partial u} &= (1-\lambda)A r_1,\\
\frac{\partial[(1-\lambda)A]}{\partial v} &= -(1+\lambda)C r,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log\lambda}{\partial u} &= -\frac{\partial \log C^2}{\partial u},\\
\frac{\partial \log\lambda}{\partial v} &= -\frac{\partial \log A^2}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Ces deux équations de condition déterminent λ et, pour qu'elles soient compatibles, il est clair qu'il faut et qu'il suffit que la surface (A) soit isothermique.

On peut déduire de ce qui précède une proposition relative à un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Introduisons z comme inconnue auxiliaire; nous aurons pour la déterminer deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre dont la considération nous donne la proposition suivante :

A, C, p_1, q *étant des fonctions qui satisfont aux équations de Codazzi relatives à une surface* (A) *rapportée à ses lignes de courbure, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{q}\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C}{p_1}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + AC\left[2 + z\left(\frac{q}{A} - \frac{p_1}{C}\right)\right] = 0$$

aient une solution commune est que la surface (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Remarquons que les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T) satisfont aux équations qui définissent les inconnues x, y, z; le z d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T), c'est-à-dire la distance d'un point fixe au plan tangent de (A), satisfait donc aux équations précédentes en z; introduisons comme nouvelle inconnue auxiliaire la distance ζ d'un point fixe de l'espace au plan tangent de (A_1) et l'on a la proposition suivante :

A, C, p_1, q *étant des fonctions qui satisfont aux équations de Codazzi relatives à une surface* (A) *rapportée à ses lignes de courbure, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A}{q}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C}{p_1}\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right) + AC\left(\frac{q}{A} - \frac{p_1}{C}\right)\zeta = 0$$

aient une solution commune est que la surface (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Remarquons que la seconde des équations en ζ, que nous venons de former, n'est pas autre chose que l'équation à laquelle satisfait l'inconnue auxiliaire z_1 du n° 2, lorsque la surface (A) est rapportée à ses lignes de courbure. Nous donnerons au n° 5 une interprétation géométrique de cette remarque à propos de la question des surfaces limites de Ribaucour.

4. *Le problème de Ribaucour.* — Les considérations développées au commencement du numéro précédent n'auraient évidemment qu'un intérêt très secondaire si elles ne s'appliquaient qu'au problème de M. Christoffel; mais il suffit de leur apporter quelques modifications dans la forme pour parvenir à des résultats assez importants et relatifs à différents problèmes, parmi lesquels je me contenterai, pour le moment, de signaler le suivant, envisagé par Ribaucour :

Considérons une correspondance établie entre deux surfaces (A), (A_1) *et telle qu'il existe une sphère tangente à ces surfaces respectivement aux deux points* A *et* A_1 *qui se correspondent; quels sont les cas dans lesquels cette correspondance peut donner une représentation conforme ou un tracé géographique de l'une des surfaces sur l'autre?*

Pour énoncer ce problème sous la forme même donnée par Ribaucour, on peut dire :

Quelles sont les enveloppes de sphères telles qu'on puisse faire un tracé géographique, avec conservation des angles, de l'une des nappes de l'enveloppe sur l'autre (*la correspondance étant établie entre les deux points de contact d'une même sphère*)?

Les *Leçons* de M. Darboux nous fournissent une solution particulière du problème; considérons des sphères dont le rayon a est constant et dont les centres décrivent une surface dont la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{a^2}$; les deux nappes de l'enveloppe de ces sphères sont des surfaces dont la courbure moyenne est égale à $\frac{1}{2a}$ et qui (Darboux, *Leçons*, t. II, p. 245) satisfont à la question.

Les raisonnements faits au commencement du numéro précédent s'appliquent ici sans modifications essentielles et fournissent immédiatement des résultats intéressants.

Laissons de côté les solutions qui correspondent aux hypothèses particulières suivantes : 1° les droites AA_1 sont parallèles à une même direction; les sphères ont alors leurs centres dans un même plan; 2° les droites AA_1 passent par un même point; les sphères sont alors orthogonales à une même sphère; 3° les développables de la congruence engendrée par AA_1 sont confondues; 4° ces développables découpent (A) et (A_1) suivant des lignes de longueur nulle.

On arrive alors immédiatement aux conditions suivantes, nécessaires et suffisantes :

Les points focaux de AA_1 *doivent être conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1; *les développables de la congruence engendrée par* AA_1 *doivent découper* (A) *et* (A_1) *suivant des systèmes orthogonaux.*

Ces conditions se transforment en vertu d'un théorème de Ribaucour et l'on peut dire :

Les points A *et* A_1 *sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par un cercle engendrant un système cyclique; les développables de la congruence cyclique engendrée par* AA_1 *doivent découper les surfaces* (A) *et* (A_1) *suivant des systèmes orthogonaux.*

On voit, par ce premier point de vue auquel on peut se placer, l'intérêt du problème posé par Ribaucour; la question mérite, évidemment, d'être traitée à part; nous nous contenterons donc de remarquer que l'existence de la solution particulière que nous avons puisée dans les *Leçons* de M. Darboux entraîne le théorème suivant qui est bien connu :

Les normales d'une surface à courbure totale constante forment une congruence cyclique.

5. *Les surfaces limites de Ribaucour* [1]. — Étant donnée une surface, il est clair qu'on peut la déformer d'une infinité de manières sans altérer la longueur des éléments linéaires; mais, si l'on considère, par exemple, une portion de surface, on conçoit bien une limite à la déformation. Cette conception conduit naturellement à se poser des problèmes dont quelques-uns constitueraient une application intéressante du calcul des variations.

Parmi les différentes formes que peut prendre une surface, lorsqu'on la déforme sans altérer la longueur des éléments linéaires, on en conçoit une

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, note du n° 116 p. 245 et 246.

qui est, si l'on peut s'exprimer ainsi, la plus gonflée; on peut encore la désigner en disant que sa courbure est maximum, le mot *courbure* étant pris dans un sens général; en adoptant pour la courbure les différentes définitions qui ont été proposées, on serait conduit à des propositions correspondantes.

Ribaucour a été ainsi amené à introduire la forme limite pour laquelle la courbure moyenne est maximum. Une condition nécessaire pour qu'une forme (A) soit limite est alors que la variation première

$$\delta\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

que nous avons calculée au n° 1, soit nulle pour toute surface infiniment voisine de (A) et applicable sur elle.

Si donc nous nous reportons au n° 2, les valeurs de x, y, z tirées des équations

$$\begin{aligned}\xi\lambda+\eta\mu&=0,\\ \xi_1\lambda_1+\eta_1\mu_1&=0,\\ \xi\lambda_1+\xi_1\lambda+\eta\mu_1+\eta_1\mu&=0,\end{aligned}$$

doivent vérifier identiquement la relation

$$\frac{\partial(\xi x_1+\eta y_1)}{\partial v}-\frac{\partial(\xi_1 x_1+\eta_1 y_1)}{\partial u}=0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 du n° 2; elle devra satisfaire aux deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

$$\begin{gathered}\frac{\partial\zeta'}{\partial v}-\frac{\partial\zeta'_1}{\partial u}+(-p\xi_1+p_1\xi-q\eta_1+q_1\eta)z_1=0,\\ \frac{\partial(\xi x_1+\eta y_1)}{\partial v}-\frac{\partial(\xi_1 x_1+\eta_1 y_1)}{\partial u}=0,\end{gathered}$$

où ζ', ζ'_1, x_1, y_1 sont déterminés en fonction de z_1 par les relations

$$\begin{gathered}\zeta'=\frac{(q\xi_1-p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u}-(q\xi-p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1-qp_1},\\ \zeta'_1=\frac{(q_1\xi_1-p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u}-(q_1\xi-p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1-qp_1},\\ \frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0,\\ \frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.\end{gathered}$$

Si l'on rapporte (A) à ses lignes de courbure, les deux équations aux dérivées partielles précédentes sont identiques aux deux équations en ζ du n° 3; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Les surfaces limites de Ribaucour sont des surfaces isothermiques.

Nous pouvons également énoncer la proposition suivante qui généralise celle du n° 3 :

ξ, ξ_1, η, η_1, p, q, p_1, q_1 *étant des fonctions qui satisfont aux équations* (A) *de M. Darboux et qui se rapportent à une surface* (A), *la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations linéaires aux dérivées partielles en* z_1 *qui viennent d'être écrites aient une solution commune est que la surface* (A) *soit isothermique. Si cette condition est vérifiée, les deux équations considérées admettront une solution commune dépendant de quatre constantes arbitraires.*

Cette dernière proposition n'est d'ailleurs, ainsi qu'on le voit en se reportant au n° 12, qu'une traduction analytique de la suivante :

Pour qu'une surface (A) *soit isothermique, il faut et il suffit qu'il existe une congruence de Ribaucour admettant* (A) *pour surface moyenne et dont les développables découpent cette surface suivant ses lignes de courbure.*

On peut en donner également une autre interprétation géométrique, au moyen des surfaces associées de M. Bianchi, ainsi que nous le verrons au n° 15.

II. — Déformation infinitésimale. Théorie des couples de surfaces applicables. Transformation par orthogonalité des éléments.

6. *Les trois problèmes se ramènent à l'un d'eux.* — (A) étant une surface quelconque, soit (A′) une surface infiniment voisine dont chaque point A′ se déduit du point A correspondant en imprimant à ce dernier un déplacement infiniment petit dont les projections sur trois axes rectangulaires fixes sont $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$, en désignant par ε une quantité infiniment petite indépendante des paramètres qui fixent la position du point A sur (A) et par X', Y', Z' trois fonctions de ces mêmes paramètres.

La condition pour que la surface (A′) soit applicable sur (A), en négligeant les puissances de ε supérieures à la première, est que l'on ait l'identité

$$dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ' = 0,$$

en désignant par X, Y, Z les coordonnées du point A de (A).

Le problème de la déformation infinitésimale est ainsi ramené à celui de la correspondance par orthogonalité des éléments.

D'autre part, considérons deux surfaces (M_1) et (M_2) applicables l'une sur l'autre; rapportons ces surfaces à trois axes rectangulaires fixes; soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du point M_1 de (M_1) et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnées du point correspondant M_2 de (M_2); désignons également par X, Y, Z les coordonnées du milieu A de M_1M_2. La relation identique

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = dX_2^2 + dY_2^2 + dZ_2^2,$$

qui exprime que (M_1) et (M_2) sont applicables l'une sur l'autre, se transforme immédiatement dans la suivante

$$(dX_1 + dX_2)(dX_1 - dX_2) + (dY_1 + dY_2)(dY_1 - dY_2) + (dZ_1 + dZ_2)(dZ_1 - dZ_2) = 0,$$

c'est-à-dire dans la condition

$$dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ' = 0,$$

en posant

$$X' = \frac{X_1 - X_2}{2}, \qquad Y' = \frac{Y_1 - Y_2}{2}, \qquad Z' = \frac{Z_1 - Z_2}{2}.$$

On peut résumer les considérations précédentes, qui sont connues depuis bien longtemps, sous la forme suivante :

Soit (A) *la surface lieu du milieu* A *du segment* M_1M_2 *qui joint les points correspondants* M_1 *et* M_2 *de deux surfaces applicables l'une sur l'autre;* ε *désignant une quantité infiniment petite indépendante des paramètres qui fixent la position des points* A, M_1, M_2, *la surface* (A') *lieu de l'extrémité du segment* AA', *équipollent à* εAM_1, *est applicable sur* (A); *la surface* (a), *lieu de l'extrémité du segment* Oa, *équipollent à* AM_1, *et dont l'origine est un point fixe* O, *correspond à* (A) *par orthogonalité des éléments; la connaissance de* (A) *détermine, inversement, une déformation infinitésimale de* (a), *définie par le couple de surfaces applicables* (M_1) *et* (M_3), M_3 *étant le symétrique de* M_1 *par rapport à* a *ou de* M_2 *par rapport à* O.

7. *Recherche des couples de surfaces applicables, en supposant connue la surface lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants.* — Rapportons la surface (A), lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants M_1 et M_2, à un système (u, v) auquel nous associons le trièdre ordinaire de référence (T). Soient x, y, z les coordonnées de M_1 par rapport à ce trièdre; celles de M_2 seront $-x$, $-y$, $-z$; les projections de l'arc élémentaire, décrit par le point M_1, sur les axes de (T), sont

$$\begin{aligned}
\delta x &= (\xi + \lambda)\, du + (\xi_1 + \lambda_1)\, dv, \\
\delta y &= (\eta + \mu)\, du + (\eta_1 + \mu_1)\, dv, \\
\delta z &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + py - qx\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x\right) dv,
\end{aligned}$$

en posant

$$\lambda = \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry, \qquad \lambda_1 = \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y,$$

$$\mu = \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz, \qquad \mu_1 = \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z.$$

On a pour le point M_2 des formules qui se déduisent des précédentes en remplaçant x, y, z par $-x$, $-y$, $-z$.

Pour que les surfaces (M_1) et (M_2) soient applicables l'une sur l'autre, il faut que leurs ds^2 soient identiques, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned}
\xi\lambda + \eta\mu &= 0, \\
\xi_1\lambda_1 + \eta_1\mu_1 &= 0, \\
\xi\lambda_1 + \xi_1\lambda + \eta\mu_1 + \eta_1\mu &= 0.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons, ainsi qu'il fallait s'y attendre, d'après ce qui a été dit au numéro précédent, les équations déjà rencontrées au n° 2, dans le problème de la déformation infinitésimale.

Introduisons l'inconnue auxiliaire z_1 qui, ainsi que nous l'avons vu, est définie par l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}\right] \\
&- \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}\right] + (-p\xi_1 + p_1\xi - q\eta_1 + q_1\eta) z_1 = 0.
\end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,$$
$$\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,$$
$$\zeta' = \frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}, \qquad \zeta'_1 = \frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\dfrac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1},$$

les inconnues x, y, z seront définies par le système

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi' + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, &\quad &\xi'_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0,\\ &\eta' + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, &\quad &\eta'_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,\\ &\zeta' + \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, &\quad &\zeta'_1 + \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qu'on peut énoncer de la façon suivante, en remarquant que ξ', η', ζ', ξ'_1, η'_1, ζ'_1 sont les translations d'un trièdre (T′) dont les axes sont, à chaque instant, parallèles à ceux de (T) :

Les inconnues x, y, z sont les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T′).

A l'égard de l'inconnue auxiliaire z_1, il est bon de présenter quelques remarques.

Si l'on suppose que le système (u, v) tracé sur (A) est orthogonal, cette inconnue devient celle que Ribaucour désigne par la lettre Z (1). D'autre part, z_1 est identique à la fonction φ, introduite par M. Weingarten (2) dans la solution qu'il a donnée de la question que nous venons de traiter. C'est un point que l'on vérifie immédiatement en remarquant que l'on a

$$z_1 = \frac{\xi\left(\dfrac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \eta\left(\dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right)}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}.$$

---

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, p. 245.

(2) J. Weingarten, *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche* (*Journal de Crelle*, t. 100).

Il en résulte, en effet, pour z_1 la valeur suivante :

$$z_1 = \frac{\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X'}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y'}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z'}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1},$$

X, Y, Z et X′, Y′, Z′ ayant la même signification qu'au numéro précédent. A chaque solution z_1 de l'équation (2) ne correspond en réalité qu'un seul couple de surfaces applicables; car les inconnues x, y, z étant les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T′), il en résulte que les différents couples qui correspondent à une même fonction z_1 se déduisent de l'un d'eux en imprimant aux éléments de ce dernier des translations parallèles, égales et de sens contraires.

On peut dire encore, pour s'exprimer autrement, qu'à chaque solution z_1 de l'équation (2) correspond une seule déformation infinitésimale de (A); nous dirons, d'après M. Bianchi, que z_1 est la *fonction caractéristique* de cette déformation.

Ribaucour a énoncé [1] un certain nombre de propositions qui résultent bien aisément de ce qui précède. Nous allons les développer et les compléter.

On vérifie immédiatement tout d'abord que :

Les caractéristiques de l'équation en z_1 sont les asymptotiques de (A).

Les équations (3) sont linéaires par rapport à x, y, z; si l'on en connaît une solution (x, y, z), on en déduira une nouvelle solution (mx, my, mz), en désignant par m une constante; si l'on en connaît deux solutions (x, y, z) et (x', y', z'), on en déduira une nouvelle solution

$$(mx + m'x',\ my + m'y',\ mz + m'z'),$$

en désignant par m et m' deux constantes; nous pouvons, en conséquence, énoncer les propositions suivantes :

Soient deux surfaces (M_1) *et* (M_2) *applicables l'une sur l'autre; si* A *est le milieu de la droite* M_1M_2 *et si l'on porte de part et d'autre de* A *sur la droite* AM_1 *une longueur* $AM'_1 = AM'_2$ *proportionnelle à* $AM_1 = AM_2$,

(1) A. Ribaucour, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 21.

les surfaces (M'_1) *et* (M'_2) *lieux des points* M'_1 *et* M'_2 *sont aussi applicables l'une sur l'autre.*

Soient deux couples (M_1), (M_2) *et* (M'_1), (M'_2) *de surfaces applicables l'une sur l'autre et symétriques par rapport à une même surface* (A); *les surfaces* (M''_1) *et* (M''_2) *lieux des points* M''_1 *et* M''_2 *qui divisent dans le même rapport constant les segments* $M_1 M'_1$ *et* $M_2 M'_2$ *sont aussi applicables l'une sur l'autre.*

Les projections de l'arc élémentaire décrit par le point M_1, sur les axes de (T), s'écrivent

$$\begin{aligned}\delta x &= (\xi - \xi')\,du + (\xi_1 - \xi'_1)\,dv,\\ \delta y &= (\eta - \eta')\,du + (\eta_1 - \eta'_1)\,dv,\\ \delta z &= -\zeta'\,du - \zeta'_1\,dv,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\delta x^2 + \delta y^2 = (1 + z_1^2)(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2).$$

On a donc cette proposition :

Quelle que soit la direction suivie sur (A), *chacune des projections (égales) des éléments linéaires de* (M_1) *et* (M_2) *sur le plan tangent en* A *à* (A) *est proportionnelle à l'élément correspondant de* (A).

Le rapport du carré d'une de ces projections au carré de l'élément linéaire de (A) est égal à $1 + z_1^2$, la fonction z_1 étant l'inconnue auxiliaire introduite qui définit à elle seule le couple de surfaces applicables.

8. *Congruences formées par les parallèles* $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ *menées par* M_1 *et* M_2 *à la normale en* A *à* (A). — Considérons la congruence formée par la parallèle $M_1 m_1$ menée par M_1 à l'axe des z du trièdre (T); définissons le plan tangent à une surface élémentaire de cette congruence en un point de $M_1 m_1$ de cote $z + z'$ par le coefficient angulaire $\operatorname{tang}\theta$ de la trace de ce plan sur le plan des xy de (T); on a alors, en vertu des formules (B) des *Leçons* de M. Darboux,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(\eta - \eta' - p z')\,du + (\eta_1 - \eta'_1 - p_1 z')\,dv}{(\xi - \xi' + q z')\,du + (\xi_1 - \xi'_1 + q_1 z')\,dv}.$$

Les points focaux et plans focaux sont définis par le système

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta - \eta' - p z'}{\xi - \xi' + q z'} = \frac{\eta_1 - \eta'_1 - p_1 z'}{\xi_1 - \xi'_1 + q_1 z'}.$$

Considérons d'abord les points focaux F et F'; les valeurs de z' qui leur correspondent sont les racines de l'équation du second degré

$$\begin{aligned}(pq_1 - qp_1)z'^2 + [q(\eta_1 - \eta'_1) - p_1(\xi - \xi') - q_1(\eta - \eta') + p(\xi_1 - \xi'_1)]z' \\ + (\xi - \xi')(\eta_1 - \eta'_1) - (\xi_1 - \xi'_1)(\eta - \eta') = 0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire de l'équation

$$(pq_1 - qp_1)z'^2 + (q\eta_1 - p_1\xi - q_1\eta + p\xi_1)z' + (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)(1 + z_1^2) = 0.$$

On a donc, en désignant par R, R' les rayons de courbure principaux de (A) en A,

$$\begin{aligned}M_1F + M_1F' &= R + R',\\ M_1F.M_1F' &= RR'(1 + z_1^2).\end{aligned}$$

La première de ces relations fournit le théorème suivant de Ribaucour :

Si l'on considère, pour chacune des parallèles M_1m_1, M_2m_2 *à la normale de* (A) *en* A, *le milieu des points focaux, les deux points obtenus et le milieu des centres de courbure principaux de* (A) *relatifs au point* A *sont sur une même parallèle à* M_1M_2.

Considérons maintenant les plans focaux; ils sont définis par l'équation

$$\frac{\eta - \eta' - (\xi - \xi')\operatorname{tang}\theta}{p + q\operatorname{tang}\theta} = \frac{\eta_1 - \eta'_1 - (\xi_1 - \xi'_1)\operatorname{tang}\theta}{p_1 + q_1\operatorname{tang}\theta},$$

c'est-à-dire par l'équation

$$\begin{aligned}&[q\xi_1 - q_1\xi + (q\eta_1 - q_1\eta)z_1]\operatorname{tang}^2\theta\\ &\quad + [q_1\eta - p_1\xi - q\eta_1 + p\xi_1 + (-q_1\xi - p_1\eta + q\xi_1 + p\eta_1)z_1]\operatorname{tang}\theta\\ &\qquad + p_1\eta - p\eta_1 - (p_1\xi - p\xi_1)z_1 = 0.\end{aligned}$$

La condition pour que les plans focaux soient rectangulaires est

$$(q\eta_1 - q_1\eta - p_1\xi + p\xi_1)z_1 = 0.$$

Si z_1 est nul, le segment M_1M_2 a une grandeur constante et une direction fixe. Si z_1 n'est pas nul, la condition s'écrit

$$R + R' = 0.$$

On a donc la proposition suivante :

Si l'une des congruences engendrées par M_1m_1, M_2m_2 *est formée de* *normales à une surface, il en est de même pour l'autre congruence; ou bien les deux surfaces* (M_1) *et* (M_2) *sont identiques et se déduisent l'une de l'autre par une translation, ou bien la surface* (A) *est minima.*

Inversement :

Si la surface (A) *est minima, les congruences engendrées par* $M_1 m_1$ *et* $M_2 m_2$ *sont formées de normales à des surfaces et leurs surfaces moyennes sont respectivement* (M_1) *et* (M_2).

L'équation en $\operatorname{tang}\theta$ permet également d'établir le théorème suivant :

Si la surface (A) *est une sphère, les congruences engendrées par* $M_1 m_1$ *et* $M_2 m_2$ *sont isotropes.*

Appliquons la formule donnant $\operatorname{tang}\theta$ au point M_1; il suffit de faire $z' = 0$ et il vient

$$\operatorname{tang}\theta_{M_1} = \frac{\eta\, du + \eta_1\, dv - (\xi\, du + \xi_1\, dv) z_1}{\xi\, du + \xi_1\, dv + (\eta\, du + \eta_1\, dv) z_1}.$$

Introduisons l'angle ω que fait avec l'axe Ax du trièdre (T) la tangente à l'arc élémentaire décrit par A et correspondant aux accroissements du, dv; la formule précédente se transforme dans la suivante

$$z_1 = \operatorname{tang}(\omega - \theta_{M_1}),$$

d'où résultent une nouvelle interprétation de z_1 et la proposition suivante de Ribaucour :

Si l'on suit sur (A) *deux directions rectangulaires, les plans menés parallèlement à la normale de* (A) *en* A *et par les directions correspondantes sur les surfaces* (M_1) *et* (M_2) *sont, pour chacune de ces surfaces, toujours rectangulaires.*

9. *Cas où la surface* (A) *est rapportée à ses asymptotiques.* — Supposons que les lignes (u) et (v) soient les asymptotiques de (A) et soit

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$

la formule définissant son élément linéaire. On sait que, si l'on pose

$$k = \sqrt{-\frac{1}{RR'}},$$

on a (DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 283, 284)

$$p = k\xi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r\eta_1,$$

$$q = k\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - \xi r_1,$$

$$p_1 = -k\xi_1,$$

$$q_1 = -k\eta_1,$$

et les équations de condition

$$\frac{\partial \log k}{\partial u}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) = \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log k}{\partial v}(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) = \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}.$$

Les équations du problème sont encore les équations (3) où ξ', η', ζ', ξ'_1, η'_1, ζ'_1 ont les valeurs suivantes :

$$\xi' = -\eta z_1, \qquad \xi'_1 = -\eta_1 z_1,$$

$$\eta' = \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \xi_1 z_1,$$

$$\zeta' = \frac{1}{k}\frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad \zeta'_1 = -\frac{1}{k}\frac{\partial z_1}{\partial v}.$$

L'inconnue auxiliaire z_1 est définie par l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - k^2 \mathrm{F} z_1 = 0,$$

qui a ses invariants égaux entre eux et à

$$\sqrt{k}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\dfrac{1}{k}}}{\partial u\,\partial v} + k^2 \mathrm{F}.$$

Introduisons les éléments de la représentation sphérique ; l'équation en z_1 s'écrit

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial z_1}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} + f z_1 = 0.$$

Elle admet comme solutions particulières les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) *avec trois axes fixes rectangulaires.*

10. *Cas où la surface* (A) *est à courbure totale constante.* — On remarquera que la condition nécessaire et suffisante pour que les dérivées premières n'apparaissent pas dans l'équation en z_1 écrite au numéro précédent est que k soit une constante. Plaçons-nous dans ce cas particulier; on sait que le carré de l'élément linéaire d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses asymptotiques peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos\alpha\, du\, dv,$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} = -\frac{1}{RR'}\sin\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} = k^2 \sin\alpha.$$

L'équation en z_1 est ici

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u\, \partial v} - k^2 \cos\alpha . z_1 = 0.$$

11. *Cas où la surface* (A) *est minima.* — Supposons la surface minima (A) rapportée à ses asymptotiques et prenons pour axe des x du trièdre (T) la tangente à la courbe (v).

Une première solution du problème se déduit du n° 9 en y faisant

$$\xi_1 = 0, \qquad \eta = 0, \qquad p_1 = 0, \qquad q = 0.$$

Mais on peut, dans le cas actuel, résoudre la question autrement.

Nous avons vu au n° 8 que, la surface (A) étant minima, les congruences engendrées par les droites $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ sont formées de normales à des surfaces; cette proposition résulte aussi de ce que, si (A) est minima, l'équation qui détermine z_1 est

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = 0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire z' définie en posant

$$\zeta' = \frac{\partial z'}{\partial u}, \qquad \zeta'_1 = \frac{\partial z'}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = k\frac{\partial z'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = -k\frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Cette inconnue sera définie par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(k\frac{\partial z'}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(k\frac{\partial z'}{\partial v}\right)=0.$$

On pourrait aussi remarquer que, dans le cas actuel, on peut déterminer séparément x, y par le système

$$\frac{\partial x}{\partial u}-ry=0, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}+rx=0.$$

On peut, par exemple, effectuer cette détermination de la manière suivante; on a

$$\frac{\partial}{\partial u}(\eta_1 x)+\frac{\partial}{\partial v}(\xi y)=0.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire θ par les formules

$$x=\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad y=-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

θ sera définie par l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0.$$

12. *Nouvelle interprétation de z_1. Congruences de Ribaucour.* — Introduisons, comme nous l'avons fait aux nos 1 et 5, les auxiliaires x_1 et y_1 définies en posant

$$x_1=\frac{\xi\zeta'_1-\xi_1\zeta'}{\xi\eta_1-\eta\xi_1}, \qquad y_1=\frac{\eta\zeta'_1-\eta_1\zeta'}{\xi\eta_1-\eta\xi_1},$$

c'est-à-dire par les relations

$$\frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.$$

Construisons, pour chaque position du trièdre (T), le point A_2 dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1; la surface (A_2) lieu de A_2 et la surface (A) se correspondent avec parallélisme des plans tangents.

Menons par un point fixe O de l'espace un segment Oa équipollent à AM_1

et rapportons le point a à trois axes menés par O parallèlement à ceux de (T); les coordonnées de a par rapport à ces axes seront x, y, z et les projections de l'arc élémentaire décrit par ce point sur les axes considérés ou sur les axes de (T) seront

$$-(\xi' du + \xi'_1 dv),$$
$$-(\eta' du + \eta'_1 dv),$$
$$-(\zeta' du + \zeta'_1 dv).$$

La normale à la surface (a), en a, a donc pour coefficients directeurs

$$\eta'\zeta'_1 - \eta'_1\zeta', \qquad \zeta'\xi'_1 - \xi'\zeta'_1, \qquad \xi'\eta'_1 - \eta'\xi'_1$$

ou

$$z_1(\xi\zeta'_1 - \xi_1\zeta'), \qquad z_1(\eta\zeta'_1 - \eta_1\zeta'), \qquad (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)z_1^2,$$

ou encore

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1.$$

M. Bianchi a donné le nom de *congruence de Ribaucour* à toute congruence qui s'obtient de la façon suivante : étant données deux surfaces (A) et (a) qui se correspondent point par point et avec orthogonalité des éléments, on mène par chaque point de l'une d'elles, (A) par exemple, la parallèle à la normale au point correspondant de l'autre; (a) est dite la *surface génératrice* de la congruence; nous verrons que (A) en est la surface moyenne.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer de la façon suivante :

Considérons le plan parallèle au plan tangent de (A) *en* A *et situé à une distance* z_1 *du point* A, z_1 *désignant une solution quelconque de l'équation aux dérivées partielles* (2); *soit* A_2 *le point de contact de ce plan avec son enveloppe; la congruence des droites* AA_2 *est une congruence de Ribaucour dont* (A) *est la surface moyenne et dont la surface génératrice est une surface* (a), *correspondant à* (A) *par orthogonalité des éléments, et déterminée par la déformation infinitésimale dont* z_1 *est la fonction caractéristique.*

Il nous est bien facile également d'établir les propriétés connues [1] des congruences de Ribaucour.

Considérons, en effet, le trièdre dont le sommet est a et dont les axes

[1] A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, p. 230.

sont parallèles à ceux de (T); étudions la congruence formée par l'axe des z de ce trièdre; le plan tangent en un point de cote z à une surface élémentaire de la congruence sera défini par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{(-\eta' - pz)\,du + (-\eta'_1 - p_1 z)\,dv}{(-\xi' + qz)\,du + (-\xi'_1 + q_1 z)\,dv},$$

qui donne le coefficient angulaire $\operatorname{tang}\theta$ de la trace de ce plan sur le plan des xy.

Écrivons que $\operatorname{tang}\theta$ est indépendant du rapport $\frac{du}{dv}$; il nous vient les équations suivantes, qui déterminent les points focaux et les plans focaux,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{-\eta' - pz}{-\xi' + qz} = \frac{-\eta'_1 - p_1 z}{-\xi'_1 + q_1 z}.$$

Les cotes des points focaux sont donc les racines de l'équation

$$(pq_1 - qp_1)z^2 + (p_1\xi' - q\eta'_1 - p\xi'_1 + q_1\eta')z + \xi'\eta'_1 - \eta'\xi'_1 = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$z^2 = \frac{z_1^2}{k^2},$$

en posant

$$k = \sqrt{-\frac{pq_1 - qp_1}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}} = \sqrt{-\frac{1}{RR'}}.$$

Donc

La congruence de Ribaucour déterminée par la parallèle menée par a à la normale de (A) *en* A *admet la surface* (a) *pour surface moyenne; les points focaux sont à des distances de a qui sont*

$$\frac{z_1}{k} \quad \text{et} \quad -\frac{z_1}{k}.$$

Si nous nous reportons à la congruence de Ribaucour engendrée par la droite AA_2 et si nous remarquons que les plans tangents en A et A_2 aux surfaces (A) et (A_2) sont parallèles, nous pouvons énoncer la proposition suivante, due à M. Guichard :

Toute congruence de Ribaucour découpe, par ses développables, sa surface moyenne suivant un réseau conjugué.

Considérons maintenant les plans focaux; ils sont définis par l'équation

$$(q_1\eta - q\eta_1)\operatorname{tang}^2\theta + (p_1\eta + q_1\xi - p\eta_1 - q\xi_1)\operatorname{tang}\theta + p_1\xi - p\xi_1 = 0.$$

Donc :

Les plans focaux de la congruence de Ribaucour dont (*a*) *est la surface moyenne et dont* (A) *est la surface génératrice sont perpendiculaires aux asymptotes de l'indicatrice de* (A) *en* A.

Il en résulte que :

Les développables de la congruence de Ribaucour dont (*a*) *est la surface moyenne et dont* (A) *est la surface génératrice correspondent aux asymptotiques de* (A).

C'est ce que l'on peut, d'ailleurs, vérifier directement; si l'on écrit, en effet, que $\operatorname{tang}\theta$ est indépendant de z, il vient l'équation

$$\frac{\xi'\,du + \xi'_1\,dv}{\eta'\,du + \eta'_1\,dv} = -\frac{q\,du + q_1\,dv}{p\,du + p_1\,dv},$$

qui définit l'image des développables de la congruence et qui n'est autre que l'équation

$$\frac{\eta\,du + \eta_1\,dv}{\xi\,du + \xi_1\,dv} = \frac{q\,du + q_1\,dv}{p\,du + p_1\,dv}$$

des asymptotiques de (A).

On voit que :

Toute congruence de Ribaucour admet pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques d'une surface.

Cette propriété est caractéristique des congruences de Ribaucour et peut leur servir de définition.

On remarquera que, si l'on effectue sur l'équation en z_1 la transformation

$$z_1 = k\rho$$

l'équation qui définit ρ est, d'après le résultat obtenu dans le numéro actuel, celle à laquelle satisfait la demi-distance focale d'une congruence de Ribaucour admettant pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques de (A).

Donc :

Le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) *se ramène à la détermination des congruences de Ribaucour qui admettent pour représentation sphérique de leurs développables celle des asymptotiques de* (A).

13. *Transformation par orthogonalité des éléments.* — La proposition que nous venons d'énoncer pourrait s'obtenir bien aisément par l'application des formules de M. Weingarten. On peut aussi, ainsi que je l'ai déjà indiqué dans un Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales,* leur substituer les résultats que je vais rappeler.

Oa désignant toujours le segment qui a pour origine un point fixe O et qui est équipollent au segment AM_1, cherchons à déterminer directement les coordonnées α, β, γ du point a par rapport au trièdre (T) adjoint à (A); nous écrirons à cet effet que deux éléments linéaires correspondants de (A) et (a) sont toujours rectangulaires, c'est-à-dire que l'on a, quels que soient du, dv,

$$\begin{aligned}(\xi\,du + \xi_1\,dv)&\left[\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right)du + \left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r\beta\right)dv\right]\\ +(\eta\,du + \eta_1\,dv)&\left[\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right)du + \left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right)dv\right] = 0.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les équations du problème

$$\begin{gathered}\xi\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right) + \eta\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right) = 0,\\ \xi_1\left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta\right) + \eta_1\left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right) = 0,\\ \xi\left(\xi_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta\right) + \xi_1\left(\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta\right)\\ + \eta\left(\eta_1 + \frac{\partial\beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma\right) + \eta_1\left(\eta + \frac{\partial\beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma\right) = 0.\end{gathered}$$

Ces équations sont satisfaites par les coordonnées, par rapport à (T), d'un point fixe de l'espace; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de O par rapport à (T), et si nous prenons comme inconnues auxiliaires

$$x = \alpha - x_0, \qquad y = \beta - y_0, \qquad z = \gamma - z_0,$$

nous retombons, conformément aux considérations du n° 6, sur les équations du problème de la déformation infinitésimale.

Nous sommes ainsi conduit à introduire l'inconnue auxiliaire z_1 du n° 7; posant

$$\begin{aligned} \xi'' &= \xi + \xi', & \xi''_1 &= \xi_1 + \xi'_1, \\ \eta'' &= \eta + \eta', & \eta''_1 &= \eta_1 + \eta'_1, \\ \zeta'' &= \zeta', & \zeta''_1 &= \zeta'_1, \end{aligned}$$

α, β, γ seront déterminés par le système

$$\begin{aligned} \xi'' + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + q\gamma - r\beta &= 0, & \xi''_1 + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + q_1\gamma - r_1\beta &= 0, \\ \eta'' + \frac{\partial \beta}{\partial u} + r\alpha - p\gamma &= 0, & \eta''_1 + \frac{\partial \beta}{\partial v} + r_1\alpha - p_1\gamma &= 0, \\ \zeta'' + \frac{\partial \gamma}{\partial u} + p\beta - q\alpha &= 0, & \zeta''_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial v} + p_1\beta - q_1\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Quant à l'inconnue auxiliaire z_1, elle sera définie par l'équation (2).

Ceci posé, si l'on suppose que le réseau (u, v) soit celui des asymptotiques de (A), les équations du problème ne diffèrent pas de celles qui déterminent une congruence admettant pour représentation sphérique de ses développables celle des asymptotiques de (A); l'équation qui définit la demi-distance focale ρ se déduit de l'équation en z_1 par la transformation

$$z_1 = k\rho.$$

14. *Quelques cas particuliers. Cas où* (A) *est une quadrique, une sphère, une surface minima.* — Les résultats des deux numéros précédents permettent, dans des cas particuliers, d'énoncer des propositions intéressantes relatives au problème de la déformation infinitésimale.

Dans le cas où (A) est une quadrique, on retrouve immédiatement la solution donnée par M. Moutard; une surface (a), correspondant à (A) par orthogonalité des éléments, est, en effet, la surface moyenne d'une congruence de Ribaucour dont (A) est la surface génératrice et dont les plans focaux sont, par conséquent, perpendiculaires aux génératrices rectilignes de (A). Les deux nappes de la surface focale de cette congruence de Ribaucour sont donc des développables dont les cônes directeurs sont identiques au cône supplémentaire du cône asymptote de la quadrique (A).

Si la quadrique (A) se réduit à une sphère, on a la proposition suivante ([1]) :

Toute surface correspondant par orthogonalité des éléments à la sphère est la surface moyenne d'une congruence isotrope, et réciproquement.

On peut encore dire ([2]) :

Si les extrémités d'un segment de droite de longueur constante décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la droite engendre une congruence isotrope, et réciproquement.

Dans ce cas où (A) est une sphère, prenons comme plan des yz du trièdre (T) le plan qui passe par les points M_1 et M_2 ; les coordonnées du point M_1 sont O, y, z ; on trouve immédiatement, en rapportant la sphère à un réseau orthogonal (u, v) tel que la courbe (v) soit tangente à l'axe des x du trièdre (T),

$$\frac{\partial \log y}{\partial u} = \frac{\partial \log C}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log y}{\partial v} = \frac{\partial \log A}{\partial v}.$$

Les fonctions A et C sont, suivant les notations de M. Darboux, celles qui interviennent dans le ds^2 de la sphère ; le réseau coordonné est donc isométrique et il est clair que l'on peut toujours, en choisissant u et v, mettre le ds^2 de la sphère sous une forme

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

telle que l'on ait

$$y = \lambda.$$

A chaque réseau isométrique tracé sur la sphère, nous faisons ainsi correspondre un couple de surfaces applicables ; d'ailleurs, si l'on se reporte au n° 8, le théorème qui y est énoncé prend alors la forme suivante donnée par Ribaucour ([3]) :

Soit tracé, sur une sphère, un réseau isométrique arbitraire pour

---

([1]) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, p. 63.
([2]) *Ibid.*, p. 60.
([3]) *Ibid.*, p. 33.

lequel le ds^2 de la sphère ait pour expression

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2),$$

portons sur les tangentes aux courbes de l'une des familles, à partir des points de contact, des segments égaux aux valeurs de λ en ces points; par les extrémités des segments, menons des droites parallèles aux normales de la sphère; ces droites engendrent une congruence isotrope.

Nous venons, en supposant que (A) est une sphère, d'examiner le seul cas où une congruence de Ribaucour est isotrope.

Considérons maintenant le cas où une congruence de Ribaucour est formée de normales à une surface; il résulte immédiatement des propositions des deux numéros précédents les suivantes [1] :

Si une congruence de Ribaucour est formée de normales à une surface, elle admet pour surface génératrice une surface minima, et réciproquement.

Les surfaces dont les normales appartiennent à la congruence admettent, pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure, un système isotherme, et réciproquement.

15. *Surfaces associées de M. Bianchi.* — M. Bianchi dit que deux surfaces (A) et (A_1) sont *associées* [2] lorsqu'elles se correspondent point par point, avec parallélisme des plans tangents, de façon qu'aux asymptotiques de la première correspondent sur la seconde des courbes formant un système conjugué (et alors, inversement, aux asymptotiques de la seconde correspondent sur la première des courbes formant un système conjugué).

Remarquons tout d'abord que, si l'on considère une congruence de Ribaucour admettant A pour surface génératrice, ses développables correspondent aux asymptotiques de (A) et aux courbes formant un système conjugué sur (A_1); donc :

Les asymptotiques de (A) et les courbes qui leur correspondent sur la surface associée (A_1) ont, aux points correspondants des tangentes

---

(1) A. RIBAUCOUR, *Étude des élassoïdes*, p. 231.

(2) L. BIANCHI, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibile ed inestendibile* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 17 juillet 1892).

parallèles, en comparant naturellement les courbes qui ne se correspondent pas.

On a vu au nº 9 que l'équation en z_1 admet comme solutions particulières les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) avec trois axes fixes rectangulaires; il résulte d'un théorème général de M. Darboux sur les systèmes conjugués (Darboux, *Leçons*, t. I, p. 122) que la solution la plus générale de l'équation en z_1 sera donnée par la distance d'un point fixe de l'espace au plan tangent d'une surface quelconque (A_1) associée à (A); nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant de M. Bianchi :

Dans un couple de surfaces associées (A) *et* (A_1), *la distance d'un point fixe au plan tangent de l'une des surfaces est fonction caractéristique d'une déformation infinitésimale de l'autre.*

Considérons en même temps que la surface (A_1), associée à (A), et dont le plan tangent est mené, parallèlement à celui de (A), à une distance d'un point fixe O égale à z_1, la surface (A_2) du nº 12; les plans tangents aux surfaces (A) et (A_2) en A et en A_2 sont parallèles et leur distance est égale à z_1; les segments OA_1 et AA_2 sont équipollents; la droite AA_2 engendre une congruence de Ribaucour dont les développables découpent la surface moyenne (A) suivant un réseau conjugué à invariants égaux, conformément à un théorème général de M. Kœnigs. Les plans tangents aux surfaces (A), (A_1), (A_2), aux points correspondants, étant parallèles, il en résulte, d'après un théorème bien connu (Darboux, *Leçons*, t. II, p. 235, 236), que les développables des congruences engendrées par AA_1 et par AA_2 découpent (A) suivant le même réseau conjugué à invariants égaux.

Nous pouvons ainsi compléter les résultats que j'ai établis à la page 61 du Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales*, et énoncer, en particulier, le théorème suivant [1] :

Pour que deux surfaces (A) *et* (A_1), *se correspondant point par point, avec parallélisme des plans tangents, soient associées, il faut et il suffit que, si l'on considère la congruence des droites* AA_1, *ses développables découpent* (A) *et* (A_1) *suivant des réseaux conjugués à invariants égaux*

---

[1] J'ai énoncé, pour la première fois, cette proposition dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 26 décembre 1892.

ou encore que les points focaux de AA_1 *soient conjugués harmoniques par rapport à* A *et* A_1.

Si l'on se reporte au n° 3, on voit que l'on a, en particulier, la proposition suivante :

Les surfaces isothermiques, qui se correspondent dans le problème de M. Christoffel, sont associées, en sorte qu'aux asymptotiques de l'une correspondent sur l'autre des courbes formant un système conjugué.

16. *Recherche des couples de surfaces applicables, en supposant connue la surface enveloppe des plans menés perpendiculairement et en leurs milieux aux cordes qui joignent les points correspondants.* — Nous nous proposons la recherche d'un couple de surfaces applicables (N_1), (N_2) dont les points correspondants N_1, N_2 sont, à chaque instant, symétriques par rapport aux plans tangents d'une surface donnée (A).

x', y', z' désignant les coordonnées du point N_1 par rapport au trièdre (T) que nous adjoignons à chaque point A de (A), les projections, sur les axes de (T), de l'arc élémentaire décrit par le point N_1 sont

$$\begin{aligned}
\delta x' &= \left[\left(\xi + \frac{\partial x'}{\partial u} - r y'\right) du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x'}{\partial v} - r_1 y'\right) dv\right] + (q\,du + q_1\,dv)\,z',\\
\delta y' &= \left[\left(\eta + \frac{\partial y'}{\partial u} + r x'\right) du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y'}{\partial v} + r_1 x'\right) dv\right] - (p\,du + p_1\,dv)\,z',\\
\delta z' &= [(p y' - q x')\,du + (p_1 y' - q_1 x')\,dv] + \frac{\partial z'}{\partial u}\,du + \frac{\partial z'}{\partial v}\,dv.
\end{aligned}$$

Les projections de l'arc élémentaire décrit par le point N_2 se déduisent des précédentes en remplaçant z' par $-z'$. Les surfaces (N_1) et (N_2) seront applicables l'une sur l'autre, si l'on a, quels que soient du et dv,

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\xi + \frac{\partial x'}{\partial u} - r y'\right) du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x'}{\partial v} - r_1 y'\right) dv\right](q\,du + q_1\,dv)\\
&-\left[\left(\eta + \frac{\partial y'}{\partial u} + r x'\right) du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y'}{\partial v} + r_1 x'\right) dv\right](p\,du + p_1\,dv)\\
&+[(p y' - q x')\,du + (p_1 y' - q_1 x')\,dv]\left(\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u}\,du + \frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v}\,dv\right) = 0.
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations suivantes qui définissent les inconnues x', y', z',

$$q\left(\xi+\frac{\partial x'}{\partial u}-ry'\right)-p\left(\eta+\frac{\partial y'}{\partial u}+rx'\right)+(py'-qx')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u}=0,$$

$$q_1\left(\xi_1+\frac{\partial x'}{\partial v}-r_1y'\right)-p_1\left(\eta_1+\frac{\partial y'}{\partial v}+r_1x'\right)+(p_1y'-q_1x')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v}=0,$$

$$q_1\left(\xi+\frac{\partial x'}{\partial u}-ry'\right)+q\left(\xi_1+\frac{\partial x'}{\partial v}-r_1y'\right)-p_1\left(\eta+\frac{\partial y'}{\partial u}+rx'\right)$$
$$-p\left(\eta_1+\frac{\partial y'}{\partial v}+r_1x'\right)+(py'-qx')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial v}+(p_1y'-q_1x')\frac{1}{z'}\frac{\partial z'}{\partial u}=0.$$

Ces équations restent vérifiées si l'on remplace z' par az', a étant une constante quelconque; il en résulte le théorème déjà énoncé au n° 7.

Il nous est bien aisé de transformer le système précédent, en nous aidant des indications données par Ribaucour [1]. Substituons, en effet, aux inconnues x', y' les inconnues auxiliaires

$$y=\frac{x'}{z'},\qquad x=-\frac{y'}{z'}.$$

Le système définissant x, y, z' est le suivant

$$q\left(\frac{\xi}{z'}+\frac{\partial y}{\partial u}+rx\right)+p\left(-\frac{\eta}{z'}+\frac{\partial x}{\partial u}-ry\right)=0,$$

$$q_1\left(\frac{\xi_1}{z'}+\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x\right)+p_1\left(-\frac{\eta_1}{z'}+\frac{\partial x}{\partial v}-r_1y\right)=0,$$

$$q_1\left(\frac{\xi}{z'}+\frac{\partial y}{\partial u}+rx\right)+q\left(\frac{\xi_1}{z'}+\frac{\partial y}{\partial v}+r_1x\right)$$
$$+p_1\left(-\frac{\eta}{z'}+\frac{\partial x}{\partial u}-ry\right)+p\left(-\frac{\eta_1}{z'}+\frac{\partial x}{\partial v}-r_1y\right)=0.$$

Il est linéaire par rapport à x, y et $\frac{1}{z'}$; il en résulte la proposition suivante :

Soient deux couples (N_1), (N_2) *et* (N'_1), (N'_2) *répondant à la question; désignons par* B, B' *les points où le plan tangent à* (A) *est rencontré par* N_1N_2 *et par* $N'_1N'_2$; *joignons* N_1B' *et* N'_1B *qui se coupent en* N''_1 *et* N_2B', N'_2B *qui se coupent en* N''_2; *les surfaces* (N''_1), (N''_2) *lieux de* N''_1 *et*

(1) A. Ribaucour, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 21; *Étude des élassoïdes*, p. 229.

de N''_2 *sont applicables l'une sur l'autre et, d'ailleurs, à chaque instant, les points* N''_1 *et* N''_2 *sont symétriques par rapport au plan tangent de* (A).

Le système auquel nous venons de parvenir se met sous une forme bien simple; il suffit, en effet, de le comparer à celui que nous avons rencontré aux nos 2 et 7 pour être amené immédiatement à lui donner la forme suivante

$$z = \frac{\frac{\xi}{z'} + \frac{\partial y}{\partial u} + rx}{p} = \frac{-\frac{\eta}{z'} + \frac{\partial x}{\partial u} - ry}{-q} = \frac{\frac{\xi_1}{z'} + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x}{p_1} = \frac{-\frac{\eta_1}{z'} + \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y}{-q_1},$$

où j'introduis l'inconnue auxiliaire z égale à la valeur commune des rapports.

x, y, z, z' sont alors déterminées par le système suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{z'} + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry &= 0, & \frac{\xi}{z'} + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz &= 0, \\ -\frac{\eta_1}{z'} + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y &= 0, & \frac{\xi_1}{z'} + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons là, aux notations près, les équations rencontrées aux nos 2 et 7 dans le problème de la déformation infinitésimale de (A) et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Désignons par x, y, z, z_1 *un système de valeurs des inconnues introduites aux nos 2 et 7 et constituant une solution du problème de la déformation infinitésimale de* (A); *construisons, par rapport au trièdre* (T) *le point* N_1 *dont les coordonnées sont* $\frac{y}{z_1}, -\frac{x}{z_1}, \frac{1}{z_1}$; *ce point et son symétrique* N_2, *par rapport au plan des xy du trièdre* (T), *décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre.*

17. *Propriétés relatives aux doubles couples de surfaces applicables l'une sur l'autre.* — Nous avons, au numéro précédent, établi le théorème de Ribaucour qui permet de déduire d'un couple de surfaces applicables un autre couple intimement lié au premier. Ces deux couples jouissent de nombreuses propriétés dont quelques-unes ont été mises en évidence par Ribaucour [1]. Nous allons développer un certain nombre d'entre elles.

---

[1] *Étude des élassoïdes*, p. 229, § 187.

Les deux couples (M_1), (M_2) et (N_1), (N_2) sont réciproques, conformément au théorème suivant :

Les surfaces (A) *et* (B), *lieux des milieux* A *et* B *des cordes* M_1M_2 *et* N_1N_2 *sont les deux nappes de la surface focale de la congruence des droites* AB; *les cordes* M_1M_2 *et* N_1N_2 *sont parallèles respectivement aux normales de* (B) *et de* (A) *en* B *et* A; *on a, de plus, la relation*

$$4\,AB = M_1M_2 \times N_1N_2 \times \sin V, \tag{4}$$

V désignant l'angle des cordes M_1M_2, N_1N_2, c'est-à-dire l'angle des normales à (A) et (B) en A et B, ou encore l'angle des plans focaux relatifs à AB.

Cette proposition est une conséquence immédiate des équations vérifiées par x, y, z, z_1, ainsi que des formules

$$x' = \frac{y}{z_1}, \qquad y' = -\frac{x}{z_1}, \qquad z' = \frac{1}{z_1},$$

qui déterminent les coordonnées x', y', z' du point N_1.

Si l'on égard à ce fait que, pour chacune des surfaces (A) et (B), les asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles de laquelle nous avons fait dépendre le problème de la déformation infinitésimale, la réciprocité que nous venons d'indiquer rend très vraisemblable le théorème suivant de Ribaucour :

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (A) *et* (B) *de la surface focale de la congruence des droites* AB.

On peut, avec M. Bianchi, énoncer cette proposition de la façon suivante :

Considérons une déformation infinitésimale quelconque d'une surface (A) *et par chaque point* A *de* (A) *menons, dans le plan tangent en ce point à cette surface, la droite perpendiculaire au déplacement que subit le point* A *dans la déformation; les droites ainsi construites forment une congruence telle que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.*

On peut établir de bien des manières le théorème de Ribaucour; un premier procédé consisterait à s'appuyer sur la proposition suivante énoncée, en partie, par M. Bianchi [1] :

Pour que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes (A) *et* (B) *de la surface focale de la congruence des droites* AB, *les points correspondants étant* A *et* B, *il faut et il suffit que le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes* (A) *et* (B) *aux points* A *et* B *soit égal à la quatrième puissance du quotient de la distance de ces deux points par le sinus de l'angle des plans focaux relatifs à* AB.

Cette proposition résulte immédiatement des formules que j'ai données aux pages 20 et 21 du Mémoire inséré au Tome VII de ces *Annales;* si l'on désigne par R_1, R'_1 les rayons de courbure principaux de (A) en A, par R_2, R'_2 les rayons de courbure principaux de (B) en B, et par V l'angle des plans focaux relatifs à AB, il suffira donc de vérifier la relation

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 = \left(\frac{AB}{\sin V}\right)^4, \tag{5}$$

pour avoir établi le théorème de Ribaucour.

Je n'effectuerai pas cette vérification qui est facile et je m'attacherai simplement à la conséquence suivante : comparant les relations (4) et (5), on en déduit

$$R_1 R'_1 R_2 R'_2 = \left(\frac{M_1 M_2}{2} \frac{N_1 N_2}{2}\right)^4.$$

Supposons que les paramètres u, v soient ceux des asymptotiques de (A) et de (B) et ramenons chacune des équations en z_1, relatives à (A) et à (B), à la forme canonique

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} = H\lambda,$$

par la transformation

$$z_1 = \lambda\sqrt{k}.$$

On peut alors énoncer la proposition suivante :

L'équation en λ *dont dépend le problème de la déformation infinitésimale de* (B) *se déduit de celle relative à* (A) *par la transformation de M. Moutard.*

---

[1] *Annali di Matematica*, 2^e série, t. XVIII, p. 328.

Cette proposition ne diffère pas de celle que M. Guichard [1] a rencontrée dans ses recherches sur les congruences de droites pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

Le théorème de Ribaucour peut être rattaché à un certain nombre de propositions relatives à la déformation infinitésimale et que nous allons maintenant développer.

Conservant les notations déjà employées, nous désignerons par a l'extrémité du segment Oa ayant pour origine le point O et équipollent au segment AM_1 et par M_3 le symétrique de M_1 par rapport au point a, ou encore le symétrique de M_2 par rapport au point O. Soit également b l'extrémité du segment Ob ayant pour origine le point O et équipollent au segment BN_1.

Considérons la surface (b) lieu de b; les projections sur les axes de (T), de l'arc élémentaire décrit par le point b, sont

$$\begin{gathered} q z' \, du + q_1 z' \, dv, \\ -p z' \, du - p_1 z' \, dv, \\ \frac{\partial z'}{\partial u} du + \frac{\partial z'}{\partial v} dv. \end{gathered}$$

La normale en b à (b) a donc comme coefficients directeurs

$$+p_1 \frac{\partial z'}{\partial u} - p \frac{\partial z'}{\partial v}, \qquad q_1 \frac{\partial z'}{\partial u} - q \frac{\partial z'}{\partial v}, \qquad (pq_1 - qp_1) z',$$

ou encore

$$p \frac{\partial z_1}{\partial v} - p_1 \frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad q \frac{\partial z_1}{\partial v} - q_1 \frac{\partial z_1}{\partial u}, \qquad (pq_1 - qp_1) z_1,$$

ou enfin

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1.$$

Si l'on se reporte aux nos 12 et 15, on peut alors énoncer la proposition suivante :

Les plans tangents aux surfaces (a) *et* (b), *aux points correspondants* a *et* b, *sont parallèles; la surface* (b), *qui est polaire réciproque de* (A_1), *par rapport à une sphère de centre* O, *est associée à* (a) *dans la déformation infinitésimale de* (a), *définie par le couple de surfaces applicables* (M_1) *et* (M_3).

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CX, p. 126.

Tirons d'abord quelques conséquences de cette proposition, que les plans tangents aux surfaces (a) et (b), en a et b, sont parallèles.

Si par le point a on mène la parallèle à Ob, en vertu d'un théorème connu que nous avons déjà appliqué au n° 15, cette parallèle détermine une congruence dont les développables découpent sur (a) un réseau conjugué et ce réseau correspondant à un réseau conjugué de (b) n'est autre que le réseau conjugué découpé par les développables de ab. Nous retrouvons donc le théorème de M. Guichard et nous pouvons énoncer le suivant :

Les développables de la congruence engendrée par ab correspondent aux asymptotiques de la surface (A).

Si l'on remarque qu'il y a réciprocité entre (A) et (B), il est clair que les développables de la congruence engendrée par ab correspondent aussi aux asymptotiques de (B); d'où résulte le théorème de Ribaucour :

Les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces (A) *et* (B).

Il résulte du théorème que nous avons énoncé au commencement de ce numéro qu'aux asymptotiques de (b) correspondent sur (a) des courbes formant un système conjugué; c'est un point que nous allons développer et qui est lié aux résultats élégants obtenus par M. Bianchi (1) à l'égard du problème de la déformation infinitésimale. Nous énoncerons, en effet, le théorème suivant :

Considérons le réseau conjugué de (A) *qui reste conjugué dans la déformation infinitésimale qui transforme* (A) *en* (A'); *il lui correspond :* 1° *le réseau conjugué commun à* (M_1), (M_2), (M_3) *et, par conséquent, le réseau conjugué de* (a) *qui reste conjugué dans la déformation infinitésimale correspondante de* (a); 2° *les asymptotiques de* (b) *et de* (A_1), *conformément aux résultats de M. Bianchi;* 3° *un réseau conjugué à invariants égaux sur* (B).

La première partie de la proposition résulte immédiatement de ce que, si l'on rapporte les surfaces (M_1) et (M_2) à trois axes fixes rectangulaires, les coordonnées des points M_1 et M_2 satisfont à une même équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre sans second membre. Il suffit d'éta-

(1) L. Bianchi, *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibile ed inestendibile* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 17 juillet 1892).

blir la seconde partie à l'égard de l'une des surfaces (b) et (A_1) puisque, ces surfaces étant polaires réciproques par rapport à une sphère de centre O, leurs asymptotiques se correspondent. Or, l'équation des asymptotiques de (A_1) est

$$\frac{p\,du+p_1\,dv}{q\,du+q_1\,dv}=\frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}+qz_1-ry_1\right)du+\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}+q_1z_1-r_1y_1\right)dv}{\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}+rx_1-pz_1\right)du+\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}+r_1x_1-p_1z_1\right)dv}.$$

Cela résulte immédiatement de l'application des formules des *Leçons* de M. Darboux à un trièdre dont les axes sont parallèles à ceux de (T) et dont l'origine est en A_1.

On vérifie immédiatement que l'équation précédente est identique à celle qui détermine les courbes se correspondant sur (A) et (a) et formant sur ces surfaces des systèmes conjugués.

Il résulte de ce qui précède que le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (A) revient à la détermination des réseaux conjugués tracés sur cette surface et qui ont, soit leurs invariants égaux, soit une représentation sphérique identique à celle, considérée par M. Dini, des asymptotiques d'une surface; on peut ajouter la remarque suivante, d'une vérification facile :

Dès que l'un de ces réseaux conjugués est donné, la déformation infinitésimale correspondante de (A) *se détermine au moyen de quadratures.*

18. *Cas de deux surfaces applicables égales ou symétriques.* — Nous avons supposé implicitement, dans ce qui précède, que les surfaces (A_1), (A_2) n'étaient ni égales ni symétriques.

Si ces surfaces sont symétriques, la surface (A) est un plan.

Si elles sont égales, la surface (a) est un plan; la fonction caractéristique correspondante est de la forme $lc+mc'+nc''$, en désignant par l, m, n trois constantes et par c, c', c'' les cosinus des angles que fait la normale à la surface (A) avec trois axes fixes rectangulaires. On déduit de là une construction simple des congruences de Ribaucour dont la surface moyenne est un plan.

19. *Cas particulier du problème des couples de surfaces applicables. La surface* (A) *est applicable sur une surface de révolution.* — Ribau-

cour a cherché si la construction du couple (M_1), (M_2), par rapport à la surface (A), peut être indépendante de la forme de cette surface. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait

$$z = 0.$$

On trouve cette même condition en cherchant dans quel cas les droites AB sont normales à une même surface.

Particularisons le trièdre (T) de façon que son axe des x soit dirigé suivant AB et supposons que le réseau (u, v) tracé sur (A) soit orthogonal, la courbe (v) étant tangente à AB. Dans ces conditions, les équations (3), eu égard à l'hypothèse $z = 0$, se réduisent à

$$\begin{aligned} ry &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= 0, \\ -\mathrm{A} r_1 y + \mathrm{C}\frac{\partial y}{\partial u} &= 0, \\ z_1 &= -\frac{r_1}{\mathrm{C}} y, \end{aligned}$$

A, C désignant les fonctions qui entrent dans la formation de l'élément linéaire de (A).

y est une fonction de la seule variable u ainsi que A.

La troisième équation montre que le rapport $\frac{\mathrm{C}}{y}$ est une fonction de la seule variable v. Donc :

La surface (A) *est applicable sur une surface de révolution et les courbes* (v) *sont les transformées des méridiens.*

Inversement, supposons la surface (A) applicable sur une surface de révolution et soit

$$ds^2 = \mathrm{U}^2\, du^2 + u^2\, dv^2$$

la formule qui définit son élément linéaire, en sorte que u a une signification géométrique bien connue.

Les équations précédentes donnent alors

$$y = mu,$$

en désignant par m une constante.

On en déduit

$$z_1 = -\frac{m}{U},$$

puis

$$x' = -Uu, \qquad y' = 0, \qquad z' = -\frac{U}{m}.$$

On remarquera que l'on a

$$x' = -\rho_{gv},$$

en sorte que, si l'on déforme (A) de façon qu'elle devienne la surface de révolution, le point B sera situé sur l'axe de cette dernière; cela résulte, d'ailleurs, également de ce que le point B est un des points focaux de AB. Si l'on remarque que

$$\frac{z'}{x'} = \frac{1}{mu},$$

et si l'on a égard à la signification géométrique de u, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante de Ribaucour [1] :

Soit une courbe plane (A) *et une droite* D *de son plan; menons à* (A) *en un point* A *la tangente* AB *jusqu'à la rencontre de* D *en* B; *élevons en* B *la perpendiculaire à* AB *et portons sur cette perpendiculaire, de part et d'autre de* B, *une longueur* $BN_1 = BN_2$ *telle que sa projection sur* D *soit constante :* 1° *les courbes* (N_1) *et* (N_2) *lieux des extrémités* N_1 *et* N_2 *des segments* BN_1 *et* BN_2 *ont leurs arcs correspondants égaux;* 2° *si l'on fait tourner* (A) *autour de* D *ainsi que les courbes* (N_1) *et* (N_2), *les surfaces de révolution engendrées par ces deux dernières courbes sont applicables l'une sur l'autre;* 3° *si l'on déforme* (A) *d'une manière quelconque, chaque plan tangent entraînant les points* N_1 *et* N_2 *qui lui correspondent, les surfaces* (N_1) *et* (N_2) *transformées des surfaces de révolution sont toujours applicables l'une sur l'autre.*

Dans le cas où la courbe (A) est une parabole admettant D pour axe, les courbes (N_1) et (N_2) sont aussi des paraboles admettant D pour axe.

Remarquons enfin que les différentes positions de la droite AB sont les

---

(1) A. RIBAUCOUR, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 22.

normales d'une surface W; les théorèmes généraux du n° 17 deviennent les suivants qui sont bien connus :

Les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la développée d'une surface W.

En chaque point M *d'une surface* W, *le produit des quatre rayons de courbure principaux des deux nappes de la développée aux centres de courbure principaux correspondants* A *et* B *est égal à la quatrième puissance de la distance de ces deux points.*

20. *Cas particulier du problème de la correspondance par orthogonalité des éléments. La surface* (A) *est applicable sur une surface spirale.* — Ribaucour, en cherchant si la construction de (a), par rapport à (A), peut être indépendante de la forme de cette dernière, a été amené (¹) à considérer le cas particulier où le point a se trouve constamment dans le plan tangent en A à (A).

Rapportons (A) à un réseau orthogonal (u, v) tel que la tangente Ay à (u) passe par le point a; Ay sera l'axe des y du trièdre (T) et, en nous reportant au n° 13, nous aurons

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0.$$

L'inconnue β sera définie par le système

$$\begin{gathered} A - r\beta = 0 \qquad -r_1\beta - Cz_1 = 0, \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} + Az_1 = 0 \qquad C + \frac{\partial\beta}{\partial v} = 0. \end{gathered}$$

Cherchons donc s'il peut exister une fonction β satisfaisant aux équations

$$A - r\beta = 0, \qquad C + \frac{\partial\beta}{\partial v} = 0, \qquad C\frac{\partial\beta}{\partial u} - Ar_1\beta = 0.$$

L'une de ces équations prouve que $\frac{\beta}{C}$ doit être une simple fonction de v; cette fonction n'étant pas nulle, nous pouvons la supposer égale à 1, en particularisant la variable v; nous avons alors

$$\beta = C,$$

(¹) A. Ribaucour, *Notice sur ses travaux mathématiques*, p. 22.

et les relations suivantes nécessaires pour la possibilité du problème :

$$\frac{\partial \log A}{\partial v} + 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \log C}{\partial v} + 1 = 0.$$

Donc, en désignant par U_1 et U_2 deux fonctions de la seule variable u, on doit avoir

$$A = e^{-v} U_1, \qquad C = e^{-v} U_2.$$

En particularisant la variable u, on peut faire en sorte que $U_1 = 1$ et il vient

$$\beta = C,$$
$$A = e^{-v}, \qquad C = e^{-v} U.$$

L'élément linéaire de (A) étant défini par la formule

$$ds^2 = e^{-2v}(du^2 + U^2 dv^2),$$

on en conclut que :

La surface (A) *est applicable sur une surface spirale.*

Si l'on effectue le changement de variable défini par

$$\frac{du}{U} = du_1,$$

on a la proposition suivante :

Pour que le point a soit constamment dans le plan tangent à (A) *au point correspondant* A, *il faut que la surface* (A) *soit applicable sur une surface spirale;* (A) *étant rapportée à un réseau* (u, v) *pour lequel son* ds^2 *est de la forme*

$$ds^2 = e^{-2v} U^2 (du^2 + dv^2),$$

les coordonnées du point a par rapport au trièdre (T) *adjoint à* (A) *seront*

$$\alpha = 0, \qquad \beta = e^{-v} U, \qquad \gamma = 0.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où le ds^2 de (A) peut être mis sous la forme

$$ds^2 = e^{-2(u+v)}(du^2 + dv^2).$$

Il est clair que, dans ce cas, on a en évidence deux solutions du problème, les positions du point a étant situées respectivement sur les axes Ax, Ay de (T); par suite de la forme linéaire des équations qui déterminent α, β, il y aura une infinité de solutions, les positions du point a, correspondant à des valeurs particulières de u et v, étant toutes en ligne droite.

Toulouse, 15 janvier 1894.