A. LEGOUX

Sur un système de courbes orthogonales et homofocales

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 4, nº 1 (1890), p. D1-D7
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_1_D1_0>

SUR UN SYSTÈME

DE

COURBES ORTHOGONALES ET HOMOFOCALES,

PAR M. A. LEGOUX,

Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Considérons un système de courbes représentées par une équation telle que

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0, \tag{1}$$

dans laquelle λ représente un paramètre variable, A, B, C des fonctions quelconques des coordonnées x, y, ou bien encore un système défini par une équation différentielle de la forme

$$A\frac{dy^2}{dx^2} + 2B\frac{dy}{dx} + C = 0; \tag{2}$$

le discriminant de ces équations est $B^2 - AC = 0$ ou $R = 0$ en posant $R = B^2 - AC$.

On sait depuis longtemps que la courbe R représente ou l'enveloppe ou le lieu des points singuliers des courbes du système.

Dans le cas particulier où les courbes forment un système orthogonal, l'enveloppe, lorsqu'elle existe, se compose d'un certain nombre de droites conjuguées deux à deux et passant par les points circulaires de l'infini. En effet, en chacun des points de la courbe R les deux tangentes sont à la fois rectangulaires et coïncidentes; donc elles passent par les points circulaires, et la courbe R est telle que ses tangentes passent toutes par les mêmes points. Elle se réduit donc à un système de droites. Il résulte de là que, si les courbes orthogonales ont une enveloppe, elles sont nécessairement homofocales.

La réciproque n'est pas exacte. Nous l'avons déjà montré dans une courte Note publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1881, et nous nous proposons de développer cette démonstration dans le cours de cet article.

Nous prendrons comme exemple les courbes représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda f - a} + \frac{y^2}{\lambda f - b} = 1, \tag{1}$$

où λ est un paramètre variable, f une fonction de x et de y, a et b des constantes.

On reconnaît immédiatement que ces courbes jouissent des propriétés suivantes :

1° Il en passe deux par un point quelconque du plan;

2° Elles ont une enveloppe qui est identique à celle des coniques représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda - a} + \frac{y^2}{\lambda - b} = 1.$$

Cette enveloppe se compose de quatre droites imaginaires passant par les points circulaires de l'infini.

En effet, on peut écrire l'équation (1) de la manière suivante

$$\lambda^2 f^2 - (x^2 + y^2 + a + b)\lambda f + bx^2 + ay^2 + ab = 0. \tag{2}$$

Le discriminant de l'équation en λ égalé à o donne

$$f^2[(x^2 + y^2 + a + b)^2 - 4(bx^2 + ay^2 + ab)] = 0$$

ou

$$f^2(x^2 - y^2 + 2ixy + a - b)(x^2 - y^2 - 2ixy + a - b) = 0$$

ou

$$f^2 R = 0.$$

$R = 0$ donne les quatre droites imaginaires.

$f^2 = 0$ représente une courbe double qui est d'ailleurs quelconque, puisque f est une fonction quelconque de x et de y.

Désignons par la lettre S les courbes représentées par l'équation (1) et remarquons qu'on peut mettre l'équation (1) sous la forme suivante :

$$\left(\lambda f - \frac{x^2 + y^2 + a + b}{2}\right)^2 + \frac{R}{4} = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente aux courbes S en un point xy est donné par l'équation

$$2\left(\lambda f - \frac{x^2+y^2+a+b}{2}\right)\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x} - x\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial R}{\partial x} + \left[2\left(\lambda f - \frac{x^2+y^2+a+b}{2}\right)\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial y} - y\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial R}{\partial y}\right]\frac{dy}{dx} = 0.$$

Si l'on prend le point xy sur la courbe R, on a $\lambda f = \frac{x^2+y^2+a+b}{2}$, et l'équation précédente devient

$$\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

ce qui montre que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est la même pour la courbe R et pour la courbe S; donc R représente bien la courbe enveloppe des courbes S, et cela quelle que soit la fonction f qui entre dans l'équation (1).

Mais, en égalant à 0 le discriminant, on a trouvé, en outre, $f^2 = 0$. En prenant l'équation des courbes S sous la forme (2), on voit qu'elle est satisfaite, quel que soit λ, si l'on pose

$$f = 0,$$
$$(3) \qquad bx^2 + ay^2 + ab = 0,$$

ce qui montre que toutes les courbes S passent par un certain nombre de points fixes situés à l'intersection des deux courbes précédentes. Si, par exemple, f est un polynôme de degré m, toutes les courbes S passeront par $2m$ points situés à l'intersection de la conique (3) et de la courbe f, et elles seront, en outre, inscrites dans le quadrilatère imaginaire, enveloppe des coniques obtenues en faisant $f = 1$ dans l'équation (1). Toutes ces courbes seront donc homofocales. Seront-elles orthogonales? Non, si f est une fonction quelconque. Il faut, pour cela, que f soit une intégrale d'une équation aux dérivées partielles que nous allons trouver.

Désignons par λ et μ les deux racines de l'équation (2), on aura

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda+\mu)f &= x^2+y^2+a+b, \\ \lambda\mu f^2 &= bx^2+ay^2+ab; \end{aligned}\right.$$

pour que les deux courbes qui correspondent aux valeurs λ et μ du paramètre se coupent à angle droit, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y}=0. \tag{5}$$

En différentiant les équations (4), on trouve successivement

$$(\mu-\lambda)f\frac{\partial\lambda}{\partial x}=2x\left(\frac{b}{f}-\lambda\right)-\lambda(\mu-\lambda)\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$(\mu-\lambda)f\frac{\partial\mu}{\partial x}=2x\left(\mu-\frac{b}{f}\right)-\mu(\mu-\lambda)\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$(\mu-\lambda)f\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2y\left(\frac{a}{f}-\lambda\right)-\lambda(\mu-\lambda)\frac{\partial f}{\partial y},$$
$$(\mu-\lambda)f\frac{\partial\mu}{\partial y}=2y\left(\mu-\frac{a}{f}\right)-\mu(\quad-\lambda)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Substituant dans l'équation (5), il vient, toutes réductions faites,

$$(bx^2+ay^2+ab)\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}+\frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right)-2bxf\frac{\partial f}{\partial x}-2ayf\frac{\partial f}{\partial y}=0. \tag{6}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction f pour que les courbes S forment un système orthogonal.

On sait que, pour obtenir l'intégrale générale de cette équation aux dérivées partielles, il suffit d'en connaître une intégrale complète. Traitons d'abord le cas où $a=0$.

L'équation devient, en posant

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=q,$$
$$x(p^2+q^2)-2pf=0. \tag{7}$$

En appliquant les méthodes connues pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, on trouve

$$p=\alpha x,\qquad q=\sqrt{2\alpha f-\alpha^2x^2},$$

α représentant une constante arbitraire.

Substituant ces valeurs dans le second membre de df

$$df=p\,dx+q\,dy,$$

on a

$$df=\alpha x\,dx+\sqrt{2\alpha f-\alpha^2x^2}\,dy;$$

d'où

$$dy = \frac{df - \alpha x\, dx}{\sqrt{\alpha}\sqrt{2f - \alpha x^2}};$$

d'où enfin

$$(8) \qquad 2f = \alpha[x^2 + (y+\beta)^2],$$

β étant une autre constante. C'est une intégrale complète de l'équation (7). Si donc on remplace f par cette valeur dans l'équation (1), on obtient des quartiques bicirculaires qui sont à la fois homofocales et orthogonales. Mais, si l'on remplace f par l'intégrale générale de l'équation (7), à cause de la fonction arbitraire qui entre dans cette intégrale, on aura une infinité de systèmes orthogonaux et homofocaux.

On sait que l'on obtient l'intégrale générale en éliminant α et β entre l'équation (8) et les deux suivantes

$$\beta = \varpi(\alpha),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

où ϖ est une fonction arbitraire.

Si l'on pose, par exemple, $\beta = \alpha$, on trouve

$$27f = -y(y^2 + 9x^2) \pm (y^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En mettant à la place de f dans l'équation (1) cette dernière valeur, on trouve un système de courbes orthogonales et homofocales du douzième ordre, qui ont pour points quadruples les points circulaires.

Cherchons maintenant à intégrer l'équation (6). Nous avons d'abord une solution particulière en posant

$$f = C(ay^2 + bx^2 + ab),$$

ce qui donne des quartiques.

Posons $f = e^z$ et substituons dans (6), il viendra, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial x}$ par p et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par q,

$$(6\ bis) \qquad (bx^2 + ay^2 + ab)(p^2 + q^2) - 2(bxp + ayq) = 0,$$

équation aux dérivées partielles qui ne contient plus la fonction explicitement.

On trouve une intégrale complète de cette équation en effectuant un changement de variables, en introduisant les coordonnées elliptiques λ et μ définies par les formules

$$\lambda+\mu=x^2+y^2+a+b,$$
$$\lambda\mu=bx^2+ay^2+ab;$$

d'où

$$x^2=\frac{(a-\lambda)(a-\mu)}{b-a},\qquad y^2=\frac{(b-\lambda)(b-\mu)}{a-b}.$$

On tire de là

$$(\mu-\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial x}=2x(b-\lambda),\qquad (\mu-\lambda)\frac{\partial\mu}{\partial x}=2x(\mu-b),$$
$$(\mu-\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial y}=2y(a-\lambda),\qquad (\mu-\lambda)\frac{\partial\mu}{\partial y}=2y(\mu-a).$$

On aura

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\lambda}\frac{2x(b-\lambda)}{\mu-\lambda}+\frac{\partial f}{\partial\mu}\frac{2x(\mu-b)}{\mu-\lambda}$$

ou

$$(\mu-\lambda)p=2x\left[(b-\lambda)\frac{\partial f}{\partial\lambda}+(\mu-b)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right];$$

de même

$$(\mu-\lambda)q=2y\left[(a-\lambda)\frac{\partial f}{\partial\lambda}+(\mu-a)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right];$$

un calcul facile donne

$$\frac{\lambda-\mu}{4}(p^2+q^2)=(a-\lambda)(b-\lambda)\frac{\partial f^2}{\partial\lambda^2}+(\mu-b)(a-\mu)\frac{\partial f^2}{\partial\mu^2}$$

et

$$\frac{1}{2}(\mu-\lambda)(bxp+ayq)=-(a-\lambda)(b-\lambda)\mu\frac{\partial f}{\partial\lambda}+(a-\mu)(b-\mu)\lambda\frac{\partial f}{\partial\mu}.$$

En substituant dans (6 *bis*), on trouve

$$(9)\qquad (a-\lambda)(b-\lambda)\frac{\partial f^2}{\partial\lambda^2}+\frac{(\lambda-a)(b-\lambda)}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial\lambda}$$
$$+(a-\mu)(\mu-b)\frac{\partial f^2}{\partial\mu^2}+\frac{(a-\mu)(b-\mu)}{\mu}\frac{\partial f}{\partial\mu}=0.$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que l'on aura une solution de l'équation en posant

$$f=f_\lambda+f_\mu,$$

f_λ et f_μ étant définies par les deux équations différentielles suivantes, la première ne dépendant que de λ et la seconde de μ,

$$(a-\lambda)(b-\lambda)\frac{\partial f_\lambda^2}{\partial\lambda^2}+\frac{(\lambda-a)(b-\lambda)}{\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial\lambda}=\alpha,$$

$$(\mu-b)(a-\mu)\frac{\partial f_\mu^2}{\partial\mu^2}+\frac{(a-\mu)(b-\mu)}{\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial\mu}=-\alpha,$$

α représentant une constante arbitraire.

On tire de ces deux équations les valeurs de f_λ et f_μ, et l'on a, en faisant leur somme,

$$(10)\qquad 2f=\log\beta\lambda\mu+\int\frac{d\lambda}{\lambda}\sqrt{\frac{(a-\lambda)(b-\lambda)+4\alpha\lambda^2}{(a-\lambda)(b-\lambda)}}$$
$$+\int\frac{d\mu}{\mu}\sqrt{\frac{(a-\mu)(b-\mu)+4\alpha\mu^2}{(a-\mu)(b-\mu)}},$$

β représentant une nouvelle constante arbitraire.

On a ainsi une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (9).

On voit que la fonction f s'exprime, en général, par des intégrales elliptiques. Dans le cas particulier où $a=0$, on peut effectuer les quadratures au moyen des fonctions élémentaires.

En posant d'abord

$$1+\frac{4\alpha\lambda}{\lambda-b}=t^2\qquad\text{et}\qquad 1+4\alpha=m^2,$$

t étant une nouvelle variable, et m une constante, on trouve, après des calculs et des substitutions qui ne présentent aucune difficulté,

$$f=\frac{C}{(4\alpha)^{m+1}b^m}\left[\left(\sqrt{\lambda m^2-b}+m\sqrt{\lambda-b}\right)\left(\sqrt{\mu m^2-b}+m\sqrt{\mu-b}\right)\right]^m$$
$$\times\left[\left(\sqrt{\lambda m^2-b}-\sqrt{\lambda-b}\right)\left(\sqrt{\mu m^2-b}-\sqrt{\mu-b}\right)\right].$$

Nous reviendrons sur ce sujet et nous étudierons les propriétés des courbes qui jouissent de la propriété d'être à la fois homofocales et orthogonales. Le système de coordonnées tout indiqué pour cette étude est le système de coordonnées elliptiques dans le plan.