ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. KOENIGS

Étude bibliographique. La géométrie réglée et ses applications

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 3 (1889), p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3__1_0>

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale et à la Sorbonne.

INTRODUCTION.

Dans une branche de la Géométrie qui touche aux points les plus essentiels de toutes les autres, et dont le développement a été un des termes de l'évolution de la Science pendant toute la première partie de ce siècle, il semble bien difficile de donner avec certitude le nom de l'inventeur. C'est à Plücker que l'on attribue généralement la gloire de cette invention, et cependant ni l'idée des congruences de droites, ni même celle des complexes n'ont reçu de lui leur première consécration. Tout le monde reconnaît que les propriétés des congruences remontent aux premières recherches d'optique géométrique; mais, pour ce qui est des complexes, on paraît trop disposé à oublier que Malus les a conçus le premier dans son *Traité d'Optique,* et qu'il est parvenu dans ce sujet à une proposition capitale, mentionnée ultérieurement par Chasles dans son Rapport sur un intéressant Mémoire de Transon sur le groupement des droites d'un complexe en congruences de normales à une surface. Il est très remarquable que la proposition de Malus touche de fort près à un autre ordre d'idées, dont nous aurons occasion de parler, et qui a été développé d'une façon magistrale par M. Sophus Lie.

On trouvera plus loin, dans la partie historique, les citations exactes qui corroborent les affirmations actuelles. Il n'en reste pas moins à Plücker l'immortel mérite d'avoir entrevu le rôle de la droite dans la Géométrie et d'avoir, sinon pratiqué, au moins indiqué une méthode pour grouper sous des lois plus élevées les grands principes de la géométrie projective appelés par Chasles *homographie* et *dualité*.

Mais il n'a pas été donné à Plücker de cueillir les fruits de sa découverte. Pour les faire prospérer et mûrir, il ne fallait rien moins que le grand talent d'un géomètre universellement estimé et qui s'est également illustré dans l'Analyse. M. Klein a repris les idées de Plücker en les appuyant sur les méthodes de l'Algèbre moderne. La symétrie et l'élégance de ses résultats, notamment en ce qui concerne les complexes quadratiques, lui ont attiré à juste titre l'admiration des géomètres.

Nous aurons occasion, dans le cours de cette étude, de mentionner d'autres noms très justement dignes d'être cités; mais les travaux de M. Sophus Lie sur cette branche de la Géométrie méritent une mention particulière. Cet illustre géomètre a établi les liens les plus étroits entre la géométrie de Plücker et la théorie des équations différentielles; il a, en quelque sorte, transporté sur le domaine transcendant une doctrine qui peut paraître au premier abord presque exclusivement algébrique.

J'arrêterai ici les noms que je veux citer dans cette Introduction, pour ne pas faire double emploi avec la Notice historique qui accompagne ce Mémoire. Il est certain que la Géométrie réglée doit beaucoup à MM. Cayley, Sylvester, Möbius, Chasles, Battaglini, mais les trois noms de Plücker, Klein, Sophus Lie, caractérisent en quelque sorte trois phases de la doctrine de la ligne droite, et c'est pourquoi je les ai placés en tête de la présente étude (1).

(1) Ce travail est une reproduction partielle d'un Cours que j'ai professé en 1887-1888 au Collège de France.

CHAPITRE I.

LES COORDONNÉES DE LA LIGNE DROITE; GÉNÉRALITÉS.

Caractère dualistique et projectif de la Géométrie réglée. — Double définition des coordonnées plückériennes. — La forme quadratique fondamentale $\omega(z)$. — La forme polaire. — Retour aux notions purement dualistiques. — Transformation linéaire. — Faisceau, gerbe et système plan. — Systèmes réglés; leur classification.

1. Dès le début de ses recherches, Plücker lui-même a insisté sur le double caractère dualistique et projectif de l'espace réglé.

On peut, dans une figure de Géométrie, ne considérer que les points qui la composent. En transformant homographiquement, on obtient une figure analogue définie immédiatement au moyen de ses points. C'est ce que l'on exprime en disant que *la transformée homographique d'une figure ponctuelle est une autre figure ponctuelle*.

Si l'on s'était attaché, au contraire, à la considération des plans qui concourent à engendrer la figure, celle-ci eût été une *figure planaire; sa transformée homographique serait une autre figure planaire*. On résumera ces deux remarques en disant que *l'espace ponctuel et l'espace planaire sont transformés respectivement en espaces* DE MÊME NOM par toute transformation *homographique*.

Effectuons, maintenant, une transformation dualistique : par exemple, une transformation par polaires réciproques; alors toute figure ponctuelle se change en une figure planaire et toute figure planaire est une figure ponctuelle.

On peut résumer cette double remarque en disant que *l'espace ponctuel et l'espace planaire sont transformés respectivement en espaces de* NOM CONTRAIRE *par toute transformation* DUALISTIQUE.

Mais on doit se souvenir que la dualité a été placée par Chasles à côté de l'homographie dès le premier quart de ce siècle, et que les progrès ultérieurs n'ont fait qu'accentuer l'importance et en même temps la similitude de ces deux transformations fondamentales. On comprend donc qu'il y ait quelque intérêt à trouver une conception, un mode de définition des figures qui reste inaltéré par suite de l'une et l'autre de ces transformations.

Si l'on considère dans une figure non plus les points qui la composent, ni même les plans qui l'engendrent, mais bien les droites qui entrent dans sa construction, nous obtenons un nouveau mode de définition que nous caractérisons en disant que la figure est *réglée*. La figure réglée vient donc se placer naturellement à côté des figures ponctuelles et planaires. Mais l'avantage de ce mode de définition apparaît immédiatement si l'on observe qu'une droite a pour transformée une droite *par dualité aussi bien que par homographie;* car il en résulte aussitôt que la transformée d'une figure réglée soit par dualité, soit par homographie, est une autre figure réglée, ce que l'on peut exprimer en disant que l'*espace réglé* se transforme en un espace de même nom et *par homographie* et *par dualité*.

La théorie des figures réglées est donc en quelque sorte la suprême expression de la grande évolution géométrique inaugurée par Poncelet, Gergonne et Chasles, et qui, bien loin de s'arrêter, tend au contraire à pénétrer jusque dans la géométrie transcendante.

Tout théorème concernant une figure ponctuelle, planaire ou réglée, pourra s'appeler *ponctuel, planaire, réglé*. Il est clair que tout théorème non réglé donne lieu à une proposition conjuguée, à savoir celle que l'on en déduit par polaires réciproques. De là le nom de *géométrie en partie double* qui sert à rappeler l'habitude qu'ont quelques géomètres d'opposer à tout théorème non réglé son théorème conjugué. Par l'emploi des droites ce double énoncé disparaît, un seul suffit pour les deux propositions. On en verra bientôt un exemple dans la géométrie de la gerbe et dans celle du système plan.

Pour rendre plus claire l'idée dominante de ce paragraphe, considérons une courbe dans l'espace. On peut y voir d'abord un ensemble de points dépendant d'un paramètre, savoir les points de la courbe; on peut y voir aussi un ensemble de plans dépendant du même paramètre, à savoir les plans osculateurs; enfin on peut y voir un ensemble de droites dépendant toujours du même paramètre, à savoir les tangentes de la courbe. La connaissance de l'un quelconque de ces trois ensembles suffit pour définir tous les autres au moyen d'opérations différentielles faciles à exécuter. Néanmoins, une étude approfondie des transformations géométriques a montré qu'il y avait lieu de les distinguer les uns des autres et de porter son attention, suivant les cas, tantôt sur l'un, tantôt sur l'autre, bien qu'ils soient, en fait, inséparables. Représentons donc provisoirement par E_P, E_π, E_d l'ensemble des points d'une courbe, l'ensemble de ses plans osculateurs et l'ensemble de ses tangentes. Si l'on effectue une transformation homographique, chacun de ces ensembles se transformera dans un ensemble identique E'_P, E'_π, E'_d. Effectuons, au contraire, une transformation dualistique; E_P se changera en un système E'_π et E_π se changera dans le système E'_P attaché à E'_π; mais, en revanche, le système E_d se changera dans le système E'_d. Ainsi, il y aura cet avantage à définir les ensembles attachés à une courbe au moyen de l'ensemble E_d des tangentes, que cette définition conservera son caractère par dualité aussi bien que par homographie. Tout théorème concernant un système E_p, par exemple, aura son correspondant dans un système E_π; mais, si l'on traduit le théorème de telle sorte que le système E_d (attaché à E_p) figure seul dans son énoncé, la proposition se trouvera coïncider avec la proposition conjuguée.

On pourrait pareillement définir une surface, non plus par ses points ou ses plans tangents, mais par ses tangentes; on a été ainsi conduit à des propriétés nouvelles, qui montrent bien l'avantage de la méthode.

2. Une droite possède elle-même deux modes de génération; elle est le lieu d'un point; elle est aussi le lieu d'un plan qui tourne autour d'elle. Plücker appelle *rayon* la droite considérée comme lieu de points, et *axe* la droite considérée comme lieu de plans. Le mot *axe* est employé dans tant d'acceptions, et, d'autre part, la distinction est si peu essentielle que nous ne trouvons pas d'avantage à recueillir ces locutions. A vrai dire, il importe peu qu'une droite soit considérée comme lieu de points ou de plans; elle est naturellement l'un et l'autre, et ce n'est pas, dans tous les cas, à la géométrie réglée à établir une telle distinction; bien mieux elle doit y être impuissante, puisqu'elle reste indifférente à toute transformation dualistique. La distinction établie par Plücker tient donc plutôt à l'imperfection de sa méthode, qui ne sut jamais se libérer de la considération encombrante de l'espace ponctuel et de l'espace planaire. Dans les travaux de M. Klein on ne trouve rien de pareil. Tous les éléments que l'on y rencontre sont *dualistiques en eux-mêmes,* c'est-à-dire se transforment par dualité en éléments identiques; et telle doit être notre préoccupation dès le début, en définissant les coordonnées. Il pourra sembler au premier abord que nous nous écartons de cette règle; mais nous ne tarderons pas à y rentrer.

3. Considérons un espace ponctuel rapporté à des coordonnées homogènes ponctuelles; soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point x, et

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un plan, les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 seront les coordonnées homogènes de ce plan, et l'équation (1) exprime que le point x et le plan ξ sont *unis,* c'est-à-dire que le point est dans le plan.

Prenons deux plans ξ, η; ces plans se coupent suivant une droite D, et l'on pose

$$\rho p_{ik} = \xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k, \tag{2}$$

où ρ est un coefficient de proportionnalité, les plans menés par la droite D et par les sommets du tétraèdre de référence auront pour équations, en coordonnées courantes X_i,

$$(3)\quad \begin{cases} \star \quad + p_{12}X_2 + p_{13}X_3 + p_{14}X_4 = 0, \\ p_{21}X_1 + \quad \star \quad + p_{23}X_3 + p_{24}X_4 = 0, \\ p_{31}X_1 + p_{32}X_2 + \quad \star \quad + p_{34}X_4 = 0, \\ p_{41}X_1 + p_{42}X_2 + p_{43}X_3 + \quad \star \quad = 0. \end{cases}$$

Si l'on développe le déterminant nul

$$0 = \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

on trouve

$$(4)\qquad \Delta = 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}) = 0.$$

Prenons réciproquement six quantités p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}, liées par l'équation (4), et formons les équations (3) en convenant que $p_{ki} = -p_{ik}$, on vérifie par un calcul facile que les quatre plans (3), *en vertu de* (4), se coupent suivant une même droite D; on vérifie encore fort aisément que si par cette droite on fait passer deux plans ξ, η, le binôme $(\xi_i, \eta_k - \eta_i\xi_k)$ est proportionnel à p_{ik}. Donc, six quantités

$$p_{12},\quad p_{13},\quad p_{14},\quad p_{34},\quad p_{42},\quad p_{23},$$

liées par l'équation

$$(5)\qquad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

définissent complètement une droite par le moyen des équations (3), où il est entendu que $p_{ki} = -p_{ik}$. Mais nous devons hésiter encore à adopter ces six quantités p pour coordonnées de la droite à cause de l'absence de tout caractère dualistique dans la définition de ces quantités. Nous les avons en effet obtenues, par le moyen des équations (2) et (3), en regardant la droite D comme intersection de deux ou de plusieurs plans.

Pour lever la difficulté, il suffira de faire appel à la définition corrélative.

Prenons deux points x, y sur la droite : tout point de cette droite sera représenté par les coordonnées

$$z_i = lx_i + my_i,$$

où l, m sont deux paramètres. Cherchons la trace de cette droite sur le plan $z_\alpha = 0$; en posant

$$(6)\qquad \sigma q_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,$$

où σ est un facteur de proportionnalité, nous trouverons que la droite coupe le plan $z_\alpha = 0$ en un point de coordonnées

$$q_{\alpha 1},\quad q_{\alpha 2},\quad q_{\alpha 3},\quad q_{\alpha 4}\qquad (\text{on voit que } q_{\alpha\alpha} = 0);$$

on a donc ainsi les quatre points

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (0, & q_{12}, & q_{13}, & q_{14}), \\ (q_{21}, & 0, & q_{23}, & q_{24}), \\ (q_{31}, & q_{32}, & 0, & q_{34}), \\ (q_{41}, & q_{42}, & q_{43}, & 0); \end{array}\right.$$

en développant le déterminant nul analogue à Δ

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix},$$

on constatera que l'expression suivante est nulle :

$$(8)\qquad q_{12}q_{34} + q_{13}q_{42} + q_{14}q_{23} = 0.$$

Réciproquement, prenons six quantités q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23} liées par l'équation (8); un calcul facile prouve que, grâce à la seule condition (8), les quatre points (7), où l'on suppose $q_{ki} = -q_{ik}$, sont sur une même droite D.

4. Nous voilà donc en présence d'un nouveau système de coordonnées q de la droite, où cette ligne est maintenant considérée comme lieu de points. D'après ce qui a été dit plus haut sur le caractère de dualité que nous devons conserver à notre exposition, nous n'aurions pas plutôt le droit de choisir le système de coordonnées q que le système de coordonnées p. Mais heureusement nous n'avons pas besoin de choisir, ces *coordonnées se trouvent être identiques*.

Partons, en effet, de la droite D représentée par les équations (3) et exprimons que la droite contient les points x et y; nous aurons

$$p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + p_{14}x_4 = 0,$$
$$p_{12}y_2 + p_{13}y_3 + p_{14}y_4 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{p_{12}}{x_3y_4 - x_4y_3} = \frac{p_{13}}{x_4y_2 - x_2y_4} = \frac{p_{14}}{x_2y_3 - x_3y_2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}};$$

on aurait, de même,

$$p_{21}x_1 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4 = 0,$$
$$p_{21}y_1 + p_{23}y_3 + p_{24}y_4 = 0,$$

d'où

$$\frac{p_{21}}{x_3y_4 - y_3x_4} = \frac{p_{23}}{x_4y_1 - y_4x_1} = \frac{p_{24}}{x_1y_3 - y_1x_3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{23}}{q_{14}} = \frac{p_{42}}{q_{13}};$$

de la troisième des équations (3) on tirerait de même que ces rapports égaux sont encore égaux à $\frac{p_{34}}{q_{12}}$, ensuite qu'on a définitivement

$$(9) \qquad \frac{p_{12}}{q_{34}} = \frac{p_{13}}{q_{42}} = \frac{p_{14}}{q_{23}} = \frac{p_{34}}{q_{12}} = \frac{p_{42}}{q_{13}} = \frac{p_{23}}{q_{14}},$$

et en rapprochant alors les formules (2) et (6), et en changeant un peu les coefficients de proportionnalité, nous écrirons

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_{12} &= \rho(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = \sigma(x_3y_4 - y_3x_4), \\ r_{13} &= \rho(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3) = \sigma(x_4y_2 - y_4x_2), \\ r_{14} &= \rho(\xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4) = \sigma(x_2y_3 - y_2x_3), \\ r_{34} &= \rho(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) = \sigma(x_1y_2 - y_1x_2), \\ r_{42} &= \rho(\xi_4\eta_2 - \eta_4\xi_2) = \sigma(x_1y_2 - y_1x_3), \\ r_{23} &= \rho(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3) = \sigma(x_1y_4 - y_1x_4), \end{aligned} \right.$$

et ce sont ces quantités r_{ik}, susceptibles d'une double signification, que nous adopterons pour coordonnées de la ligne droite; ces coordonnées vérifiant la relation quadratique

$$(11) \qquad \omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0.$$

Cette forme quadratique $\omega(r)$ joue un rôle essentiel. Nous allons établir à son égard une proposition de la plus haute importance.

5. Cherchons la condition de rencontre des deux droites r, r'; pour cela partons des équations (3), la droite r sera l'intersection des deux plans

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_{12}X_2 + r_{13}X_3 + r_{14}X_4 &= 0, \\ -r_{12}X_1 + r_{23}X_3 + r_{24}X_4 &= 0, \end{aligned} \right.$$

et la droite r' sera l'intersection des deux plans

$$(12') \qquad \left\{ \begin{aligned} r'_{12}X_2 + r'_{13}X_3 + r'_{14}X_4 &= 0, \\ -r'_{12}X_1 + r'_{23}X_3 + r'_{24}X_4 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Éliminons X_1 et X_2 entre (12) et (12'): nous trouverons

$$(r_{13}r'_{12} - r'_{13}r_{12})X_3 + (r_{14}r'_{12} - r'_{14}r_{12})X_4 = 0,$$
$$(r_{23}r'_{12} - r'_{23}r_{12})X_3 + (r_{24}r'_{12} - r'_{24}r_{12})X_4 = 0;$$

la condition de rencontre, nécessaire et suffisante, est donc

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(r_{13}r'_{12} - r'_{13}r_{12})(r_{24}r'_{12} - r'_{24}r_{12}) \\ &- (r_{14}r'_{12} - r'_{14}r_{12})(r_{23}r'_{12} - r'_{23}r_{12}) = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} &r'^2_{12}(r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23}) + r^2_{12}(r'_{13}r'_{24} - r'_{14}r'_{23}) \\ &\quad + r'_{12}r_{12}(-r_{13}r'_{24} - r'_{13}r_{24} + r_{14}r'_{23} + r'_{14}r_{23}) = 0; \end{aligned}$$

mais on a

$$r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23} = 0,$$

de plus $r_{24} = - r_{42}$; on a ainsi

$$\begin{aligned} r_{13}r_{24} - r_{14}r_{23} &= r_{12}r_{34}, \\ r'_{13}r'_{24} - r'_{14}r'_{23} &= r'_{12}r'_{34}, \end{aligned}$$

et l'équation (13) devient

$$r_{12}r'_{12}(r_{12}r'_{34} + r'_{12}r_{34} + r_{13}r'_{42} + r'_{13}r_{42} + r_{14}r'_{23} + r'_{14}r_{23}) = 0.$$

Nos calculs supposent que r_{12} et r'_{12} ne sont pas nuls, hypothèse sans importance. La condition cherchée s'écrira donc

$$(14)\qquad r_{12}r'_{34} + r_{13}r'_{42} + r_{14}r'_{23} + r_{34}r'_{12} + r_{42}r'_{13} + r_{23}r'_{14} = 0.$$

Mais, si l'on se reporte à l'expression de $\omega(r)$,

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}),$$

le premier membre de l'équation (14) peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{12}}r'_{12} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{13}}r'_{13} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{14}}r'_{14} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{23}}r'_{23} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{34}}r'_{34} + \frac{\partial\omega(r)}{\partial r_{42}}r'_{42}\right];$$

on représente généralement cette expression par le symbole

$$\omega(r, r') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r_{12}}r'_{12} + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial r_{23}}r'_{23}\right),$$

la condition de rencontre s'exprimera donc par l'équation

$$(15)\qquad \omega(r, r') = 0.$$

Ainsi, *si l'on construit la* FORME POLAIRE $\omega(r, r')$ *relative à deux droites r, r', l'évanouissement de cette forme exprime la rencontre des droites r et r'.*

Ce fait présente la plus haute importance : grâce à lui nous pourrons désormais nous affranchir de toutes considérations d'espace ponctuel ou planaire qui ne nous ont servi jusqu'ici que comme intermédiaires pour parvenir à cette forme quadratique ω et à la propriété si remarquable de sa forme polaire. *Tout ce qu'il nous suffit de retenir ici, c'est que si l'on choisit six quantités quelconques r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{34}, r_{42}, r_{23}, liées par l'équation*

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0,$$

une droite se trouve définie (peu importe pour le moment comment la construction de la droite peut résulter de cette définition) *et que, de plus, la rencontre de deux droites r, r' s'exprime par l'équation $\omega(r, r') = 0$.*

Il est assurément fort digne d'intérêt que cette simple notion de la forme $\omega(r)$ suffise, *sans davantage préciser,* pour édifier toute la géométrie réglée.

6. Notre premier soin sera de donner une vue plus large sur cette forme ω. Si nous exprimons les paramètres r_{ik} en fonction linéaire de six nouveaux paramètres x_i

$$r_{ik} = A_{ik,1}x_1 + \ldots + A_{ik,6}x_6, \tag{16}$$

rien ne nous empêche de prendre $x_1, x_2, \ldots, x_6$ pour nouvelles variables, le déterminant de la substitution linéaire (16) n'étant pas nul. Ces nouvelles variables seront liées par une relation quadratique homogène $\xi(x) = 0$, où la forme $\xi(x)$ *est la transformée de la forme* $\omega(r)$.

Quant à $\omega(r, r')$ sa transformée sera, d'après une propriété bien connue des formes quadratiques, la forme polaire $\xi(x, x')$. Voici, au surplus, la démonstration de ce fait. Soient $(r_{12}, r_{13}, \ldots, r_{23})$, $(r'_{12}, r'_{13}, \ldots, r'_{23})$ deux systèmes de valeurs des r, et $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$, $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ les systèmes de valeurs correspondantes des x. Le système $(x_1 + \lambda x'_1)$, $(x_2 + \lambda x'_2)$, $\ldots$, $(x_6 + \lambda x'_6)$ où λ est une arbitraire, correspondra au système $(r_{12} + \lambda r'_{12})$, $(r_{13} + \lambda r'_{13})$, $\ldots$, $(r_{23} + \lambda r'_{23})$, et l'on aura, par suite,

$$\omega(r + \lambda r') = \xi(x + \lambda x'),$$

d'où

$$\omega(r) + 2\omega(r, r')\lambda + \omega(r')\lambda^2 = \xi(x) + 2\xi(x, x')\lambda + \xi(x')\lambda^2, \tag{17}$$

et, identifiant les coefficients de λ^2, λ, 1, on trouve, outre deux relations évidentes, la relation qu'il fallait trouver, à savoir

$$\omega(r, r') = \xi(x, x'),$$

où, d'après la formule (17) même, on a

$$2\xi(x, x') = \frac{\partial\xi}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial\xi}{\partial x_2} x'_2 + \ldots + \frac{\partial\xi}{\partial x_6} x'_6.$$

La forme particulière que nous avions trouvée pour la forme quadratique $\omega(r)$ n'a donc rien d'essentiel : une transformation linéaire des paramètres permet de ramener cette forme à une forme quadratique quelconque à six variables (quelconque si l'on ne recule pas devant une transformation linéaire à coefficients imaginaires), et dont le discriminant n'est pas nul. On peut donc énoncer le théorème suivant :

A tout système de six variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, liées par une relation quadratique $\xi(x) = 0$, de discriminant non nul, on peut faire correspondre une droite déterminée de l'espace, la correspondance ayant ce caractère que l'équation $\xi(x, x') = 0$ exprime la rencontre de deux droites x, x'.

Maintenant que nous avons donné toute son ampleur à la notion de cette forme quadratique fondamentale $\xi(x)$, nous pouvons pénétrer plus avant dans la théorie en n'y employant plus désormais que des éléments dualistiques et projectifs.

7. Le premier des éléments dont nous aurons à nous servir, c'est le faisceau plan des droites, c'est-à-dire l'ensemble des droites qui sont issues d'un point dans un plan; nous appellerons ce point et ce plan les *supports* du faisceau de droites.

Un faisceau est défini complètement par deux de ses droites a et b; *toutes les autres ont des coordonnées de la forme*

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i, \tag{18}$$

où λ, μ sont des paramètres. En effet, on a d'abord

$$\xi(x) = \xi(\lambda a + \mu b) = \xi(a)\lambda^2 + 2\xi(a, b)\lambda\mu + \xi(b)\mu^2,$$

et comme $\xi(a) = 0$, $\xi(b) = 0$ et $\xi(a, b) = 0$, à cause de la rencontre des droites a et b, il en résulte

$$\xi(\lambda a + \mu b) = 0;$$

donc $(\lambda a_i + \mu b_i)$ sont les coordonnées d'une droite x; cette droite fait partie du faisceau (a, b); en effet, soit d une droite qui coupe a et b, on aura

$$\xi(a, d) = 0, \qquad \xi(b, d) = 0,$$

et, par suite,

$$\xi(\lambda a + \mu b, d) = \xi(a, d)\lambda + \xi(b, d)\mu = 0.$$

Les droites représentées par la formule (18) coupent donc toute droite d qui coupe a et b; cela ne se peut que si ces droites x sont dans le plan (a, b), comme on le voit en prenant pour d une droite quelconque de ce plan; de même, en prenant pour d une droite quelconque issue du point (a, b), on voit que toutes les droites (18) doivent passer par le point (a, b). Toutes les droites (18) font donc partie du faisceau (a, b). J'ajoute que, réciproquement, toute droite du faisceau (a, b) est représentable par les formules (18). En effet, prenons une droite d *quelconque* coupant une droite arbitraire z du faisceau (a, b); il n'y a qu'une seule droite de ce faisceau qui coupe d (on ne suppose pas que d soit coupée par toutes les droites du faisceau), et cette droite unique c'est la droite z. Or, on peut déterminer λ, μ, de sorte que x coupe d; il suffit de vérifier l'équation

$$\xi(x, d) = \xi(a, d)\lambda + \xi(b, d)\mu = 0;$$

il y a donc une droite (18) qui coupe d, et, comme toutes les droites (18) font partie du faisceau, cette droite (18), qui coupe d et fait partie du faisceau, ne peut être que la droite z qu'on a prise arbitrairement dans le faisceau (a, b); donc toute droite du faisceau (a, b) est identique à une droite et à une droite unique du système (18).

En résumé, si l'on se reporte aux formules (18), à toute valeur de $\lambda : \mu$ répond une droite du faisceau (a, b), et réciproquement. Les formules (18) réalisent donc la représentation du faisceau plan (a, b).

Mais il y a plus, puisque $\lambda : \mu$ et les droites du faisceau se correspondent univoquement, c'est-à-dire puisque à une valeur de $\lambda : \mu$ répond une droite unique, et, inversement, puisqu'à une droite du faisceau ne répond qu'une valeur de $\lambda : \mu$, il en résulte, conformément au principe de correspondance sous sa forme la plus simple, que, si l'on prend quatre droites α, β, γ, δ du faisceau et que l'on désigne par ρ, σ, τ, υ les valeurs correspondantes de $\lambda : \mu$, le rapport anharmonique $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ des quatre droites sera égal au rapport anharmonique $(\rho, \sigma, \tau, \upsilon)$ des rapports correspondants

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\rho, \sigma, \tau, \upsilon). \tag{19}$$

Par exemple, les droites $(\lambda a_i + \mu b_i)$ et $(\lambda a_i - \mu b_i)$ forment avec les droites a et b un faisceau harmonique.

8. Deux droites qui se coupent définissent un faisceau plan; trois droites qui se coupent forment un triangle ou un trièdre. Si elles forment un triangle, toute droite qui les coupe engendre le système des droites d'un plan (système plan). Si elles forment un trièdre, toute droite qui les coupe passe par leur point commun et l'ensemble de ces droites engendre ce que l'on appelle une *gerbe de droites*, c'est-à-dire l'ensemble des droites issues d'un point fixe. La géométrie de

la gerbe et la géométrie du système plan sont réciproques; il ne faut donc pas s'étonner que la géométrie réglée ait pour toutes deux le même langage et soit incapable d'établir entre elles une distinction; il faut, au contraire, y voir un signe de cette perfection de la géométrie réglée à laquelle j'ai déjà fait allusion.

Soient donc a, b, c trois droites qui se coupent: nous dirons de toutes les droites qui coupent a, b, c qu'elles forment un *hyperfaisceau*, car il répugne d'opter pour l'une ou l'autre des expressions de gerbe ou système plan qui se présentent avec des titres égaux; le nom d'*hyperfaisceau* n'a rien de choquant et convient bien à ces systèmes qui jouissent, comme on va le voir, d'une représentation analogue à celle des faisceaux. Soient a, b, c trois droites d'un *hyperfaisceau:* je dis que l'ensemble des droites du système est représenté par les formules

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i, \tag{20}$$

où λ, μ, ν sont des paramètres arbitraires. La démonstration est analogue à celle dont on a fait usage pour le cas du faisceau; je ne la reprendrai donc pas ici avec détail. On constate d'abord que

$$\xi(\lambda a + \mu b + \nu c) = \xi(a)\lambda^2 + \xi(b)\mu^2 + \xi(c)\nu^2 + 2\xi(a, b)\lambda\mu + 2\xi(b, c)\mu\nu + 2\xi(a, c)\lambda\nu$$

est identiquement nul, ce qui prouve que les quantités x_i sont les coordonnées d'une droite. Ensuite on constate que cette droite x coupe a, b, c et, par suite, fait partie du système; enfin on prouvera que toute droite z du système est une droite (20), en montrant que deux droites d, e quelconques qui coupent z sont toujours coupées par une droite (20) unique en général.

9. Nous ferons de ces notions des applications incessantes, après avoir toutefois fait connaître quelques notions générales sur les systèmes réglés.

La droite dépend de quatre paramètres absolus; les droites de l'espace assujetties à *une* condition conservent *trois* paramètres, leur ensemble constitue un COMPLEXE. *Deux* conditions ne laissent plus que *deux* paramètres, la droite engendre alors une CONGRUENCE. *Trois* conditions réduisent à *un* les paramètres, la droite engendre alors une SÉRIE RÉGLÉE; cette série réglée ne forme pas toujours une surface, car les tangentes d'une courbe plane, par exemple, ne peuvent pas être à proprement parler regardées comme formant une surface réglée. Il y a, d'ailleurs, un autre inconvénient à parler de *surfaces* réglées : l'hyperboloïde en tant que surface sert, en effet, de support à *deux séries réglées,* et il y aurait pour nous un inconvénient réel à ne pas séparer ces deux séries, en les confondant dans le même nom de *surface* ou d'*hyperboloïde*. Enfin, quatre conditions déterminent une droite ou, pour mieux dire, un ENSEMBLE DE DROITES. Il y a un grand inconvénient à dire, comme on le fait souvent lorsqu'on parle d'un élément géométrique quelconque dépendant de n paramètres, que n conditions définissent *un* élément. Cette locution est vicieuse et revient à nier la théorie des formes binaires. En réalité les n conditions, ici quatre, définissent *un ensemble* de droites généralement fini, et ces ensembles jouissent de propriétés intéressantes dont on perdrait la notion si l'on se contentait de dire que quatre conditions définissent *une* droite. Pour donner un exemple des plus simples, tiré d'un autre ordre d'idées, on sait que deux cubiques planes définissent un *ensemble* de 9 points qui jouit de propriétés spéciales, et que deux courbes d'ordres m et n se coupent en mn points dont l'ensemble présente des propriétés générales aussi éloignées des propriétés d'un point unique que les propriétés d'une courbe d'ordre mn le seraient d'une simple ligne droite.

Pour ces motifs nous considérerons donc cinq sortes de systèmes réglés. D'abord l'*espace réglé,* ou l'ensemble de toutes les droites de l'espace, ensuite les *complexes,* ou systèmes à *triple* indétermination ; les *congruences,* ou systèmes *doublement* indéterminés ; les *séries réglées* d'indétermination *simple,* et enfin les *ensembles* de droites d'indétermination *nulle.*

10. La condition pour une droite de faire partie d'un faisceau plan équivaut à trois conditions, puisque les droites d'un tel faisceau constituent une série réglée ; de même, la condition de faire partie d'un hyperfaisceau équivaut à deux conditions.

Considérons, dès lors, un complexe de droites ; celles de ces droites qui font partie d'un faisceau plan constituent un ensemble d'indétermination nulle ; le nombre des droites de cet ensemble est ce que l'on appelle le *degré* du complexe.

Au contraire, les droites d'un complexe qui font partie d'un hyperfaisceau forment une série réglée ; si l'hyperfaisceau est une gerbe, on aura toutes les droites du complexe issues d'un point ; leur ensemble forme évidemment un cône, nous appellerons ce cône le *cône du complexe ;* tout point de l'espace est ainsi le sommet d'un cône du complexe. Si, au contraire, l'hyperfaisceau est un système plan, on aura toutes les droites du complexe situées dans un plan et elles y envelopperont une courbe, la courbe du complexe ; tout plan contient donc sa courbe enveloppe du complexe ; mais notons que cette courbe est définie par ses tangentes et pourra quelquefois dégénérer en un ou plusieurs points ; nous en aurons bientôt des exemples.

Théorème. — *Le degré de tout cône du complexe et la classe de toute courbe plane enveloppe du complexe sont égaux et égaux au degré du complexe.*

Prenons un point O ; pour avoir le degré du cône du complexe de sommet O, il faut couper ce cône par un plan Π mené par O et compter le nombre de droites d'intersection; l'ensemble des génératrices ainsi obtenues n'est autre que l'ensemble des droites du complexe contenues dans le faisceau (O, Π); le nombre de ces droites est donc bien égal au degré du complexe.

Même raisonnement pour la courbe enveloppe relative à un plan Π. Pour avoir la classe de cette courbe, on comptera les tangentes qu'on peut lui mener d'un point O de Π; mais l'ensemble de ces tangentes n'est autre que l'ensemble des droites du complexe contenues dans le faisceau (O, Π); donc la classe de la courbe est bien égale au degré du complexe.

Je reviendrai plus tard sur ces questions générales; pour le moment, le théorème ci-dessus me suffit.

11. Prenons maintenant une congruence. Passer par un point équivaut à deux conditions pour une droite; de même être dans un plan équivaut à deux conditions. Donc les droites d'une congruence qui sont issues d'un point forment un ensemble d'indétermination nulle. Le nombre des droites de cet ensemble est le *degré* de la congruence. De même, les droites d'une congruence qui sont dans un plan forment un ensemble dont le nombre est appelé la *classe* de la congruence.

12. Une série réglée étant donnée, on appelle *degré* de la série le nombre des droites de la série qui coupent une droite arbitraire. Si les droites forment une surface réglée, ce degré est justement celui de la surface; si elles enveloppent une courbe plane, ce degré est justement la classe de cette courbe.

Enfin, on peut appeler *degré* d'un ensemble fini de droites le nombre des droites qui le composent.

Je vais débuter en étudiant les complexes du premier degré, ainsi que leurs systèmes communs.

CHAPITRE II.

LES COMPLEXES LINÉAIRES DE DROITES.

Pôle et plan polaire. — Faisceaux du complexe. — Droites conjuguées. — Distribution des pôles et des plans polaires sur une droite du complexe. — Corrélation normale d'un complexe. — Propriétés des droites conjuguées. — Polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — Représentation analytique. — Complexes spéciaux. — Invariant de M. Klein. — Droites conjuguées.

13. Un complexe est dit *linéaire* lorsqu'il est du premier degré, c'est-à-dire lorsque, parmi les droites d'un faisceau arbitraire, il n'y en a qu'une qui fasse partie du complexe. Le cône du complexe se réduit à un plan, et la courbe enveloppe dans un plan se réduit à un point (lieu de classe 1). De là ce double théorème :

Les droites d'un complexe linéaires issues d'un point P *engendrent un plan,* qu'on appellera le PLAN POLAIRE du point.

Les droites d'un complexe linéaire tracées dans un plan passent par un point fixe de ce plan, le *foyer* ou PÔLE de ce plan.

Il existe donc dans l'espace une infinité de faisceaux dont toutes les droites font partie du complexe; ce sont les faisceaux définis par un point et son plan polaire, ou, ce qui revient au même, par un plan et son pôle. Nous appellerons ces faisceaux les *faisceaux du complexe linéaire* (¹).

14. On peut faire découler les propriétés du complexe linéaire d'une proposition unique, dont la démonstration est des plus aisées.

Considérons l'ensemble d'un plan Π *et d'un point* O *situé dans ce plan, le pôle* O′ *du plan* Π *est dans le plan polaire* Π′ *du point* O.

Autrement dit, si un point O et un plan Π sont UNIS (*voir* n° 3), leurs correspondants polaires dans le complexe sont un plan Π′ et un point O′ UNIS. En effet, la droite OO′ fait partie du complexe, puisqu'elle passe au point O′ et qu'elle est dans le plan polaire Π de ce point; mais alors elle doit être contenue dans le

(¹) On peut comparer avec ce que nous appelons plus loin, dans le cas général d'un complexe quelconque, *les faisceaux du complexe*.

plan Π', qui est le polaire du point O de cette droite. Le plan Π' contient donc le point O'. C. Q. F. D.

Soient une droite d ne faisant pas partie du complexe; O un point de cette droite; Π un plan mené par cette droite. D'après le théorème précédent, le pôle de Π est dans la polaire de O; mais, comme O est un point quelconque de la droite d, Π un plan quelconque mené par cette droite, on peut conclure que *les pôles de tous les plans menés par une droite sont situés dans les plans polaires de tous les points de cette droite.*

Il en résulte immédiatement :

1° Que *les polaires de tous les points d'une droite d sont des plans qui se coupent suivant une même droite d'*;

2° Que *cette droite d' est le lieu des pôles des plans menés par la droite d.*

Le pôle d'un plan mené par d est donc le point où il perce d', et le pôle d'un plan mené par d' est le point où il perce d. Les droites d et d' sont ainsi dans une situation réciproque l'une vis-à-vis de l'autre; on les appelle *droites conjuguées.*

Les remarques suivantes sont d'un usage fréquent :

Toute droite x, qui coupe deux droites conjuguées d, d', fait partie du complexe.

Considérons le plan $\Pi(d, x)$ mené par d et par x, le pôle de ce point est à sa rencontre avec d', c'est-à-dire précisément au point $P(d', x)$ de rencontre de x et de d'. La droite x du plan $\Pi(d, x)$ se trouve donc passer au pôle $P(d', x)$ de ce plan; il est ainsi acquis qu'elle fait partie du complexe.

Toute droite du complexe, qui coupe une droite d, coupe aussi sa conjuguée d'.

Considérons, en effet, le plan $\Pi(d, x)$, que l'on peut mener, par hypothèse, par d et par x; la droite x de ce plan, faisant partie du complexe, doit passer au pôle de ce plan. Or ce pôle est la trace du plan sur la droite d'; la droite x coupera donc d' en ce point.

Deux couples de droites conjuguées forment quatre droites portées par une même quadrique.

Soient, en effet, a, a' et b, b' les deux couples de droites conjuguées, et considérons la quadrique engendrée par une droite x s'appuyant sur a, a', b. Les génératrices x de cette quadrique font partie du complexe, puisqu'elles coupent a et a', et, comme elles coupent b, il faut alors qu'elles coupent aussi b'. Donc a, a', b, b' sont quatre génératrices du second système.

Généralement, supposons que les génératrices x d'un système d'une quadrique fassent partie d'un complexe linéaire; considérons une génératrice y du second système, et soit y' sa conjuguée; cette conjuguée est nécessairement une autre génératrice du même système que y. En effet, toutes les génératrices x coupent y, et, comme elles font partie du complexe, il faut qu'elles coupent y'. Nous parvenons ainsi à ce résultat que, si une quadrique est engendrée par des droites x faisant partie d'un complexe linéaire, les génératrices du second système se trouvent associées deux à deux en couples de droites conjuguées. Nous donnerons à ces quadriques le nom de *quadriques du complexe*.

Faisons, en terminant ce numéro, les remarques suivantes :

Nous avons supposé, au début, que la droite d ne faisait pas partie du complexe. Si elle appartient au complexe, elle est à elle-même sa propre conjuguée, car elle est le lieu des pôles de ses plans et l'enveloppe des plans polaires de ses points.

Si une droite d ne fait pas partie du complexe, il est impossible qu'elle coupe sa conjuguée d'; car, si P était le point de rencontre, tout plan mené par d aurait son pôle au point P, et la droite d, passant par P et tracée dans ce plan, ferait partie du complexe.

15. Considérons quatre plans Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 menés par une droite ne faisant pas partie du complexe, et soient P_1, P_2, P_3, P_4 les pôles de ces plans. On obtient ces pôles en coupant le faisceau des quatre plans par la droite d', conjuguée de d. Le *rapport anharmonique des quatre pôles est* donc *égal à celui des quatre plans*.

Il est intéressant de démontrer que cette proposition s'étend encore au cas de plans passant par une droite appartenant au complexe.

Soient, en effet, d une droite du complexe et a, a' deux droites conjuguées ne coupant pas d. Considérons la quadrique engendrée par une droite x s'appuyant sur a, a' et d. Cette quadrique sera une quadrique du complexe, puisque x coupe les droites conjuguées a et a'. Menons un plan Π par la droite d; ce plan coupe la quadrique, outre d, suivant une génératrice x qui vient couper d au point de contact P du plan Π avec la quadrique. Mais il passe en P deux droites du complexe contenues dans le plan Π, savoir d et x. Donc P est le pôle du point Π. De là cette conséquence : le pôle d'un plan mené par d est justement le point de d où ce plan est tangent à la quadrique.

Mais on connaît le beau théorème de Chasles sur la distribution du plan tangent le long d'une génératrice rectiligne d'une quadrique. Le rapport anharmonique de quatre plans menés par cette génératrice est égal à celui des quatre points de contact de ces plans avec la surface.

Il résulte donc de ce théorème, joint à la remarque précédente, que *si, par une droite d d'un complexe, on mène quatre plans, le rapport anharmonique* *des pôles de ces plans est égal à celui des plans eux-mêmes.* D'après ce théorème, tout complexe linéaire définit sur chacune de ses droites une correspondance homographique entre les points et les plans de cette droite (¹). Une telle correspondance se retrouve fréquemment dans les figures réglées, et j'ai cru utile de lui attribuer un nom spécial, celui de *corrélation anharmonique* ou simplement de *corrélation.*

Nous pouvons donc dire que tout complexe linéaire définit une corrélation sur chacune de ces droites, à savoir celle qui relie un point de la droite à son plan polaire; et, pour distinguer cette corrélation de toutes les autres que l'on pourrait imaginer sur cette droite, je lui donnerai le nom de *corrélation normale du complexe* (²).

16. Dans les numéros précédents, nous avons vu qu'un complexe linéaire fournit un moyen de transformation dans lequel un point a pour transformé un plan, un plan un point, et une droite une autre droite. Nous allons étendre cette remarque et obtenir ainsi un résultat qui offre de l'importance à plusieurs points de vue.

Rappelons tout d'abord ce théorème, démontré au n° **14** :

I. *Si un point* O *et un plan* Π *sont unis, leurs éléments correspondants sont un plan* Π′ *et un point* O′, *unis eux aussi.*

Voici d'autres théorèmes où figurent les droites :

II. *Si une droite d passe par un point* O, *sa conjuguée d' est tracée dans le plan* Π′ *polaire de* O, *et réciproquement.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition des droites conjuguées.

III. *Si deux droites a et b se coupent, leurs conjuguées a', b' se coupent aussi.*

En effet, puisque a et b passent par un même point O, leurs conjuguées a', b', en vertu du théorème précédent, sont dans un même plan Π, polaire de O.

Il résulte immédiatement de là qu'aux droites d'un faisceau correspondent les droites d'un faisceau; à tous les plans et droites menés par un point O correspondent tous les points et droites tracés dans le plan Π′, polaire de O.

Nous avons déjà dit que l'on donne le nom de *gerbe* à l'ensemble des plans et

(¹) J'appellerai dorénavant *plan d'une droite* tout plan mené par cette droite.
(²) On verra plus loin une extension de cette notion au cas d'un complexe quelconque.

des droites issus d'un point, et de système plan à l'ensemble des points et des droites d'un plan. On peut donc dire qu'une gerbe a pour figure correspondante un système plan, et inversement.

Considérons généralement une figure $\mathfrak{F}$ composée de points, de droites et de plans, en prenant les éléments correspondants de tous ceux de la figure $\mathfrak{F}$, on engendrera une figure $\mathfrak{F}'$, que nous dirons être la réciproque de $\mathfrak{F}$. Aux points en ligne droite de $\mathfrak{F}$ correspondront des plans de $\mathfrak{F}'$ passant par une droite, et inversement; aux droites issues d'un point les droites d'un plan, et inversement; aux plans menés par un point les points d'un plan, et inversement, etc.

A un polyèdre $\mathfrak{P}$ correspondra un polyèdre $\mathfrak{P}'$ dans lequel : 1° les arêtes seront conjuguées des arêtes de $\mathfrak{P}$; 2° les sommets seront les pôles des plans des faces de $\mathfrak{P}$; 3° les plans des faces seront les polaires des sommets de $\mathfrak{P}$.

A une surface S non développable de la figure $\mathfrak{F}$ considérée comme lieu d'un point O répondra dans $\mathfrak{F}'$ une surface S' définie comme enveloppe du plan Π', polaire de O, et le point de contact O' de Π' avec la surface S' sera le pôle du plan Π tangent en O à la surface S, en sorte que la surface S' est aussi le lieu des pôles des plans tangents de S. On pourra encore remarquer que le faisceau des tangentes à la surface S au point O a pour réciproque le faisceau des tangentes en O' à la surface S'. On peut donc définir encore la surface S' comme l'enveloppe des droites conjuguées des tangentes de la surface S.

Soit encore une courbe C, que nous pourrons définir soit comme lieu d'un point O, soit comme enveloppe de la tangente d en ce point, soit comme enveloppe du plan Π osculateur en O. Le lieu du pôle O' du plan Π est une courbe C': considérons trois plans osculateurs à la courbe C, Π, Π_1, Π_2 infiniment voisins, et soient O', O'_1, O'_2 leurs pôles, qui sont trois points de C', le plan de ces trois points est le plan osculateur en O' à la courbe C', et il a pour pôle le point d'intersection des trois plans Π, Π_1, Π_2, c'est-à-dire le point O.

On pourrait donc encore définir la courbe C' comme l'enveloppe des plans polaires des points de la courbe C.

Enfin, prenons deux points voisins O, O_1 sur la courbe C, la droite d, ou OO_1, a pour polaire l'intersection d' des plans Π', Π'_1, polaires des points O et O_1, et qui sont deux plans osculateurs voisins de la courbe C'. La droite d' est donc tangente à la courbe C'. De là ce théorème qui implique une troisième définition de la courbe C' :

Les polaires d' des tangentes d d'une courbe gauche C *enveloppent une courbe gauche* C'.

C'est ici le cas de rappeler les distinctions faites à la fin du n° 1; il est clair que, si l'on considère les systèmes E_P, E_Π, E_d de la courbe, ils se transformeront dans les systèmes E'_{Π}, E'_{P}, E'_{d} de la courbe réciproque. J'appellerai dorénavant *développable* l'ensemble E_d des tangentes d'une courbe qui pourra être gauche ou plane, ou même se réduire à un point, comme dans le cas du cône.

Pour résumer la matière de ce paragraphe, nous dirons qu'un complexe linéaire permet de réaliser *une transformation dualistique de l'espace*.

Ce procédé n'a pas échappé à Chasles dans son beau Mémoire *Sur la dualité et l'homographie,* qui termine son *Aperçu historique*. La forme mécanique sous laquelle l'illustre géomètre présente cette transformation est de la plus haute importance, et, à ce titre, nous aurons à y revenir plus loin avec détail. Nous verrons aussi dans les applications comment cette même transformation a trouvé un emploi très fécond dans la Statique graphique, grâce aux recherches ingénieuses de Maxwell.

17. Avant d'aller plus loin, il convient d'exprimer analytiquement les résultats que nous venons d'obtenir.

Soient $\omega(x)$ la forme quadratique fondamentale et

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = f(x) = 0 \tag{1}$$

l'équation algébrique homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_6$, qui, jointe à

$$\omega(x) = 0, \tag{2}$$

représente le complexe linéaire considéré.

Je vais prouver que $f(x)$ est linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_6$. En effet, soient a, b deux droites qui se coupent. On a vu au n° 7 que les x_i de toute droite du faisceau (a, b) sont de la forme $a_i\lambda + b_i\mu$, où $\lambda : \mu$ est arbitraire. En exprimant que la droite x de ce faisceau fait partie du complexe, on a

$$f(a_1\lambda + b_1\mu, \ldots, a_6\lambda + b_6\mu) = 0.$$

Cette équation doit être du premier degré en $\lambda : \mu$, car une seule droite du complexe fait partie d'un faisceau donné; on doit avoir, par conséquent,

$$f(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_6 x_6.$$

Réciproquement, toute équation linéaire en x représente évidemment un complexe *linéaire*.

18. La condition pour qu'une droite x coupe une droite z s'exprime par l'équation linéaire

$$0 = 2\omega(z, x) = \frac{\partial\omega}{\partial z_1} x_1 + \frac{\partial\omega}{\partial z_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial z_6} x_6.$$

L'ensemble des droites qui coupent une droite fixe z forme donc un complexe linéaire. Mais on s'aperçoit aisément que ce n'est pas là le complexe linéaire le plus général. Identifions, en effet, une fonction linéaire quelconque des x avec $\omega(z, x)$; nous aurons

$$(3) \qquad \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_1}}{A_1} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_2}}{A_2} = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_3}}{A_3} = \ldots = \frac{\frac{\partial\omega}{\partial z_6}}{A_6}.$$

On tirera de ces équations linéaires en $z_1, z_2, \ldots, z_6$ les valeurs de ces quantités, ou plutôt de leurs rapports, et, en portant ces valeurs dans $\omega(z)$, cette forme deviendra une forme homogène quadratique en $A_1, A_2, \ldots, A_6$,

$$(4) \qquad \omega(z) = \Omega(A);$$

cette forme $\Omega(A)$ est la *forme adjointe* de la forme $\omega(z)$.

Si donc les z_i sont les coordonnées d'une droite z, il faut que $\Omega(A)$ soit nul.

Si $\Omega(A)$ est nul, les valeurs des z_i tirées des équations (3) sont, d'après (4), les coordonnées d'une droite, et cette droite, d'après les équations (3), est coupée par toutes les droites du complexe linéaire

$$\Sigma A_i x_i = 0.$$

On donne le nom de *complexe spécial* à un pareil complexe, et la droite z en est appelée la *directrice* ou encore l'*axe*. Mais, le mot *axe* ayant été employé avec tant d'acceptions dans cette même théorie des droites, le mot *directrice* paraît préférable.

Lorsque l'expression $\Omega(A)$ n'est pas nulle, le complexe linéaire ne possède pas de directrice; mais la considération de la forme $\Omega(A)$ n'en demeure pas moins intéressante. M. Klein l'appelle l'*invariant du complexe*. Ce nom d'invariant se justifie par la remarque suivante :

Si l'on effectue sur les variables x_i une transformation linéaire, les coefficients A_i d'une forme linéaire de x_i se trouvent transformés, comme on sait, par la transformation réciproque, et la forme $\Omega(A)$ est ce que l'on appelle un *contrevariant* de la forme $\omega(z)$; ce qui signifie que $\Omega(A)$ se reproduit, multipliée par une puissance (la seconde) du déterminant de la substitution directe.

Si, par exemple, on a ramené la forme $\omega(x)$ au type de Plücker,

$$\omega(x) = 2(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6),$$

la forme $\Omega(A)$ sera la suivante :

$$\Omega(A) = 2(A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6).$$

Si, au contraire, on a ramené, comme nous verrons que l'a fait M. Klein, la forme $\omega(x)$ à une somme de carrés, savoir

$$\omega(x) = K_1 x_1^2 + K_2 x_2^2 + \ldots + K_6 x_6^2,$$

on aura

$$\Omega(A) = \frac{A_1^2}{K_1} + \frac{A_2^2}{K_2} + \ldots + \frac{A_6^2}{K_6}.$$

On ne s'est pas préoccupé, dans le commencement du Chapitre, du cas du complexe spécial. Il est clair que, dans ce cas, les droites de l'espace ont toutes une même conjuguée, savoir la directrice, et que toutes les propriétés relatives à la transformation par polaires réciproques se trouvent en défaut.

19. Supposons donc qu'il s'agisse d'un complexe non spécial et soit z une droite quelconque; cherchons sa conjuguée u. J'observe, à cet effet, que des trois équations

$$\Sigma A_i x_i = 0,$$
$$\omega(z, x) = 0,$$
$$\omega(u, x) = 0,$$

une doit être la conséquence des deux autres : car toute droite du complexe qui coupe une droite coupe sa conjuguée et toute droite qui coupe deux droites conjuguées fait partie du complexe.

Pour parvenir aisément au résultat, j'observe que l'on a identiquement

$$\sum A_i x_i = \sum \frac{\partial \Omega}{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (^1),$$

et les trois équations que nous avons à considérer peuvent s'écrire

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum z_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0;$$

---

(1) En effet, si l'on pose

$$Z_i = \frac{\partial \omega}{\partial z_i},$$

on trouve, par définition de la forme adjointe,

$$\omega(z) = \Omega(Z);$$

il en résulte

$$d\omega = d\Omega = \sum \frac{d\Omega}{dZ_i} dZ_i.$$

Mais on a aussi

$$d\omega = \sum \frac{\partial \omega}{\partial z_i} dz_i = \sum Z_i\, dz_i,$$

et, comme ω est homogène,

$$2\omega = \sum \frac{\partial \omega}{\partial z_i} z_i = \sum Z_i z_i;$$

d'où

$$2\, d\omega = \Sigma Z_i\, dz_i + \Sigma z_i\, dZ_i,$$

d'après la remarque déjà faite qu'elles doivent se réduire à deux, on doit pouvoir trouver deux quantités λ, μ, telles que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial A_i} = \lambda z_i + \mu u. \tag{5}$$

Exprimons que u_1, u_2, ... sont les coordonnées d'une droite, on trouvera

$$\omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A} - \lambda z\right) = 0$$

ou

$$\omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}\right) - 2\lambda\omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}, z\right) = 0,$$

en se souvenant que $\omega(z) = 0$. On a d'ailleurs

$$\omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}\right) = \Omega(A), \qquad 2\omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}, z\right) = \sum \frac{\partial\, \omega\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A}\right)}{\partial\left(\frac{\partial \Omega}{\partial A_i}\right)} z_i = \sum A_i z_i,$$

il vient donc

$$\Omega(A) - \lambda \Sigma A_i z_i = 0. \tag{6}$$

Cette équation (6) fait connaître λ, et les équations (5) fourniront les coordonnées de la droite u conjuguée de z.

Ce calcul suppose que $\Sigma A_i z_i$ n'est pas nul, c'est-à-dire que z ne fait pas partie du complexe.

La forme symétrique des équations (5) met bien en évidence la réciprocité des droites z et u.

Il serait facile, en partant des formules (5), de trouver une démonstration algébrique des diverses propriétés des droites conjuguées déjà établies géométriquement; nous laissons ce soin au lecteur.

(*A suivre.*)

---

d'où enfin, par soustraction,

$$d\omega = \Sigma z_i dZ_i.$$

En identifiant avec $d\omega = \sum \frac{\partial \Omega}{dZ_i} Zd_i$, on a donc

$$z_i = \frac{\partial \Omega(Z)}{\partial Z_i} = \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial Z_i}},$$

et par suite nous avons bien

$$\sum A x_i = \sum A_i \frac{\partial \Omega\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}} = \sum \frac{\partial \Omega(A)}{\partial A_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}.$$