THEORIE DES NOMBRES *Année 1991/1992*

BESANCON

LE PRINCIPE DE HASSE POUR LES SIMILITUDES

DE FORMES QUADRATIQUES ET HERMITIENNES

A. CORTELLA

Le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques et hermitiennes

par Anne CORTELLA

Le but de cet article est de donner une démonstration plus conceptuelle du théorème démontré par Ono [O]. J'utiliserai, après les avoir redémontrés de manière plus simple, des résultats de Dieudonné [D] sur les multiplicateurs de similitude.

Le § 1 donnera la structure du groupe des multiplicateurs de similitude pour les formes quadratiques puis pour les formes hermitiennes.

Le § 2 sera consacré à la démonstration du théorème de Ono : le principe de Hasse vaut pour les similitudes de formes quadratiques sur les corps de nombres. Je montrerai aussi le principe de Hasse pour les formes hermitiennes.

Je remercie Eva Bayer pour l'aide qu'elle m'a apportée dans ce travail.

Cadre et notations :

E désignera un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K de caractéristique différente de 2.

$f : E \times E \to K$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur K (ou une forme hermitienne non dégénérée relative à l'involution $^- : K \to K$ de corps fixe K_0).

Un isomorphisme $u : E \to E$ est une similitude s'il existe

$$\lambda \in K^* \text{ tel que : } \forall\, x, y \in E \;\; f(u(x), u(y)) = \lambda f(x, y).$$

λ est alors le multiplicateur, ou facteur, de la similitude u.

On notera :

$O_n(K, f)$ (resp. $U_n(K, f)$) le groupe orthogonal (unitaire),

$GO_n(K, f)$ ($GU_n(K, f)$) le groupe des similitudes,

$MS_n(K, f)$ le groupe des multiplicateurs de similitude

si la forme f de référence, ou le corps K, ne portent pas à confusion on notera simplement $O_n(K), O_n(f)$ ou O_n, etc ...

On a alors la suite exacte :

$$1 \to O_n(K,f) \to GO_n(K,f) \to MS_n(K,f) \to 1.$$

Ou si f est hermitienne :

$$1 \to U_n(K,f) \to GU_n(K,f) \to MS_n(K,f) \to 1.$$

Dans le § 1, K est un corps générique de $car \neq 2$, le cas des corps de nombres sera étudié en particulier. Dans le § 2, K est exclusivement un corps de nombres. Ses complétés sont notés $K_v, v \in \Sigma$ l'ensemble des places de K. S est l'ensemble des places réelles de K.

Si $x \in K$, en considérant $K \subset K_v$, on notera x_v l'élément de K_v correspondant (pour bien distinguer le travail dans K ou dans K_v).

I - Structure du groupe des multiplicateurs de similitude

Lemme 1.1 : Si $n = \dim \mathrm{E}$ est impair alors $MS_n(K,f) = K^{*2}$.

Preuve : Soit $u \in GO_n(K,f)$ de facteur λ, alors $\forall\, x,y \in E \quad f(u(x),u(y)) = \lambda f(x,y)$ soit sur les matrices F et U correspondantes : ${}^tUFU = \lambda F$ et $\det U^2 \det F = \lambda^n \det F$

$$\lambda^n = \det \mathrm{U}^2$$

si n est impair cela implique $\lambda \in K^{*2}$.

Réciproquement si $\lambda = \mu^2$, $u(x) = \mu x$ définit $u \in GO_n$ de facteur λ.

On supposera dans la suite dim $E = n = 2m$ paire.

Notations 1.2 : $f : E \times E \to K$ de dim n. On note

$\Delta = \det \mathrm{f} \in \mathrm{K}^*/\mathrm{K}^{*2}$

$d = d(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta \in K^*/K^{*2}$ le discriminant de f

si f se met sous la forme diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}$$ dans une base de V, on notera

$f = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

On définit alors l'invariant de Hasse de f :

$$s = s(f) = \prod_{i<j}(a_i, a_j) \in Br_2K$$

où (a,b) est l'algèbre des quaternions associée à $a,b \in K^*$; rappelons que $d(f)$ et $s(f)$ sont des invariants de la classe d'isomorphisme de f, indépendants de la diagonalisation choisie pour les définir.

Lemme 1.3 : $\mu \in K^*, s(\mu f) = s(f)(\mu, (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta^{n-1})$.

Preuve : Si $f \simeq \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \qquad \mu f \simeq \langle \mu a_1, \ldots, \mu a_n\rangle$ et

$$\begin{aligned} s(\mu f) &= \prod_{i<j}(\mu a_i, \mu a_j) = \prod_{i<j}(\mu,\mu)(\mu,a_j)(\mu,a_i)(a_i,a_j) \\ &= \prod_{i<j}(a_i,a_j)(\mu,-a_ia_j) \\ &= s(f)(\mu, \prod_{i<j}(-a_ia_j)) = s(f)(\mu,(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta^{n-1}) \end{aligned} \qquad \diamondsuit$$

Corollaire : Si $n = 2m$ alors $s(\mu f) = s(f)(\mu, d)$.

Théorème 1.4 : Posons $K_1 = K(\sqrt{d})$ et soit $N = N_{K_1/K} : K_1 \to K$ la norme. Alors $MS_n(K,f) \subset N(K_1^*)$.

Preuve : On a $(a,b) = 1 \iff a \in N(K(\sqrt{b})^*)$ pour $a,b \in K^*$
or $\mu \in MS_n(K) \iff f \simeq \mu f \implies s(f) = s(\mu f)$. Ce qui implique par 1.3 que $(\mu, d) = 1$ donc $\mu \in N(K_1^*)$.

Cas des corps de nombres :

Supposons que K est un corps de nombres. $v \in \Sigma$ une de ses places. Si $f : E \times E \to K$ est isomorphe à $\langle a_1 \ldots a_n\rangle, a_i \in K^*$ on note f_v la forme quadratique de même dimension sur K_v donnée par $f_v = \langle a_1 \ldots a_n\rangle$.

En particulier, pour $v \in S$ l'ensemble des places finies de K, d'après le théorème de Sylvester, on peut mettre f_v sous la forme $f_v \simeq \langle 1, 1, \ldots 1, -1, \ldots -1\rangle$. On définit la signature $\sigma_v(f) =$ (nombre de 1) $-$ (nombre de -1).

Rappelons le théorème :

Théorème 1.5 : (Hasse-Minkovski) [Sch, p. 224] : deux formes quadratiques f et f' sont isomorphes si et seulement si $\dim \mathrm{f} = \dim \mathrm{f}', \mathrm{d(f)} = \mathrm{d(f')}, \mathrm{s(f)} = \mathrm{s(f')}$ et
$\forall\, v \in S,\ \sigma_v(f) = \sigma_v(f')$

on en déduit

Théorème 1.6 : (Dieudonné) Si f est de dimension $n = 2m, m \geq 1$, $MS_n(K, f)$ est le sous-groupe de $N(K(\sqrt{d})^*)$ formé des éléments μ tels que $\mu_v > 0 \ \forall \ v \in S$ où $\sigma_v(f) \neq 0$.

Preuve : Notons $S_f = \{v \in S, \sigma_v(f) \neq 0\}$. On veut donc montrer :
$MS_n(f) = \{\mu \in K^*, (\mu, d) = 1$ et $\mu_v > 0 \ \forall \ v \in S_f\}$.
Appliquons 1.5 avec $f' = \mu f$.
Alors

$$\dim f' = \dim f, d(f') = d(f) \in K^*/K^{*2} \text{ car } \dim f \text{ paire}$$
$$s(f') = s(f) \Longleftrightarrow (\mu, d) = 1$$
$$\text{et } (\forall \ v \in S \ \sigma_v(f') = \sigma_v(f)) \Longleftrightarrow (\forall \ v \in S_f \ \mu_v > 0).$$

ce qui démontre le théorème 1.6. ◊

Cas particulier 1.7 : Si $K = \mathbb{Q}$ et $n = 2m$

$$MS_n(f) = \{\mu \in N(K(\sqrt{d})^*), \mu > 0\}.$$

Si m est impair tous les éléments de $N(K(\sqrt{d})^*)$ sont positifs

$$MS_n(f) = N(K(\sqrt{d})^*).$$

Cela ne donne rien de plus si m est pair.

Cas des corps $\mathfrak{p}$-adiques 1.8 :
Il y a alors équivalence entre f et f' si et seulement si $\dim f = \dim f'$, $d(f) = d(f')$ et $s(f) = s(f')$. Donc $MS_n(f) = N(K(\sqrt{d})^*)$. On se reportera à [D] pour un contre exemple pour les corps valués non archimédiens.

Résultats pour les formes hermitiennes :

K est un corps quelconque de car $\neq 2$ muni d'une involution non triviale $^- : K \to K$ de corps fixe K_0, $[K : K_0] = 2$, et $f : E \times E \to K$ une forme hermitienne de dim n. $MS_n(K, f)$ est alors un sous-groupe de K_0^*.
On note $N = N_{K/K_0}$ la norme.

Lemme 1.1' : Si n est impair $MS_n(K, f) = N(K^*)$. La preuve est analogue à celle du lemme 1.1.

Notation 1.2' : On note $\det f \in K_0^*/N(K^*)$ le déterminant de f.

pour K corps de nombres

Soit S_0 l'ensemble des places réelles v de K_0 telles que $K_v = (K_0)_v \otimes K$ soit totalement imaginaire. $v \in S_0$ donne lieu à une signature : si $f \simeq \langle a, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in K_0^*$, sur $K, \sigma_v(f)$ est la signature de la forme quadratique $\langle a_1 \ldots a_n \rangle$ sur $K_{0,v}$.

Théorème 1.5' (Landherr [Sch, p. 348]) : Deux formes hermitiennes non dégénérées f et f' sur un corps de nombre K sont isomorphes si et seulement si :
$\dim f = \dim f'$, $\det f = \det f'$ et $\forall \ v \in S_0 \ \sigma_v(f) = \sigma_v(f')$.

On en déduit le théorème :

Théorème 1.6' (Dieudonné) : Si n est pair et $K = K_0(\sqrt{\delta})$ est un corps de nombres, alors $MS_n(K, f)$ est le sous-groupe de K_0^* des μ tels que $\mu_v > 0 \ \forall\, v \in S_0$.

Preuve : Les conditions sur la dimension et le déterminant sont toujours réalisées. Celles sur les σ_v le sont si et seulement si $\mu_v > 0 \ \forall\, v \in S_0$. $\diamondsuit$

pour K corps $\mathfrak{p}$−adique (1.8')

Deux formes hermitiennes sont équivalentes si elles ont même dimension et même déterminant. Donc $MS_{2m}(f) = K_0^*$.

II - Principe de Hasse pour les similitudes

K est dorénavant un corps de nombres. K^s une clôture séparable, alors $MS_n(K^s, f) = K^{s*}$ pour toute forme quadratique f (tous les éléments de K^{s*} étant des carrés).

On a les suites exactes :

(2.1) $$1 \to O_n(K,f) \to GO_n(K,f) \to MS_n(K,f) \to 1$$

(2.2) $$1 \to O_n(K^s,f) \to GO_n(K^s,f) \to K^{s*} \to 1$$

De (2.2) on déduit la suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned}1 \to O_n(K,f) \to GO_n(K,f) \to K^* \to H^1(K, O_n(K^s,f))\\ \to H'(K, GO_n(K^s,f)) \to H^1(K, K^{s*})\end{aligned}$$

or, d'après Hilbert 90, on a $H^1(K, K^{s*}) = 1$. (cf [S, X]). Donc en combinant avec (2.1), on obtient :

(2.3) $$1 \to K^*/MS_n(K,f) \to H^1(K, O_n(K^s,f)) \to H^1(K, GO_n(K^s,f)) \to 1$$

La même chose est vraie en remplaçant K par chacun de ses complétés K_v pour les valuations v de K :

$$1 \to \prod_v K_v^*/MS_n(K_v,f) \to \prod_v H^1(K_v, O_n(K_v^s,f)) \to \prod_v H^1(K_v, GO_n(K_v^s,f)) \to 1.$$

De plus, on dispose d'applications naturelles d'ensembles pointés :

$\Psi : K^*/MS_n(K) \to \prod_v K_v^*/MS_n(K_v)$ issue des $K^* \hookrightarrow K_v^*$ étant donné que
$MS(K) \hookrightarrow MS(K_v)$,

$\Phi : H^1(K, O_n(K^s)) \to \prod_v H^1(K_v, O_n(K_v^s))$,

et $\varphi : H^1(K, GO_n(K^s)) \to \prod_v H^1(K_v, GO_n(K_v^s))$,

issues des morphismes compatibles ([S, X]) :

Gal $(K_v^s/K_v) \overset{\text{Res}}{\to}$ Gal (K^s/K) et $O_n(K^s,f) \hookrightarrow O_n(K_v^s,f)$
(resp. $GO_n(K^s,f) \hookrightarrow GO_n(K_v^s,f)$).

Ces applications forment un diagramme commutatif :

(2.D) $$\begin{array}{ccccccc} 1 \to & K^*/MS_n(K) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(K, O_n(K^s)) & \xrightarrow{\beta} & H^1(K, GO_n(K^s)) & \to 1 \\ & \downarrow \psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi & \\ 1 \to & \prod_v K_v^*/MS_n(K_v) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_v H^1(K_v, O_n(K_v^s)) & \xrightarrow{\beta'} & \prod_v H^1(K_v, GO_n(K_v^s)) & \to 1 \end{array}$$

Ceci s'interprète de façon plus concrète si l'on considère la signification de ces ensembles H^1 en termes de classes d'équivalence ou de similitude de formes quadratiques : d'après [S, p. 161], $H^1(K, O_n(K^s))$ est l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de formes quadratiques de rang $n = \text{rang } f$ sur K. De même $H^1(K, GO_n(K^s))$ est l'ensemble des classes de similitude de ces mêmes formes quadratiques, le point base étant la classe de f.

β associe à la classe d'isomorphisme de q' sur K sa classe de similitude.

α associe à $\lambda \in K^*$ la classe de λf.

$q' \in \ker \beta$ si et seulement si $q' \simeq \lambda f$ c'est-à-dire si et seulement si $q' = \alpha(\lambda)$, où λ est défini modulo $MS_n(K)$.

La deuxième ligne du diagramme a exactement les mêmes interprétations.

ψ est alors l'application naturelle $\lambda \mapsto (\lambda_v)_{v\in\Sigma}$ et Φ et φ sont celles : $[q'] \mapsto ([q'_v])_{v\in\Sigma}$, où $[\cdot]$ est alternativement la classe d'équivalence et celle de similitude et où q'_v est la forme quadratique sur K_v de même matrice que q' sur K.

Le théorème de Hasse-Minkovski s'écrit alors :

Théorème 2.4 : Φ est injective.

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème :

théorème 2.5 (Ono) : φ est injective.

Preuve : Soit $x \in H^1(K, GO_n(K^s))$ tel que $\varphi(x) = 1$. On a $x = \beta(y), y \in H^1(K, O_n(K^s))$. Alors $\Phi(y) = (y_v)_{v\in\Sigma}$ est dans le noyau de β' donc $(y_v)_{v\in\Sigma} = \alpha'((z_v)_{v\in\Sigma})$ où $z_v \in K_v^*/MS_n(K_v)$. On veut montrer que $(z_v)_{v\in\Sigma}$ est dans l'image de ψ : $(z_v)_v = \psi(z')$ on aura alors $\beta \circ \alpha(z') = x = 1$.

En termes de formes quadratiques, y est la classe d'équivalence d'une forme q' et $q'_v \simeq z_v f_v$ pour toutes les places v de K.

Deux cas se présentent alors :

(2.5.1) Cas dim $f = n = 2m + 1$ *impaire (cas facile)*
D'après le lemme 1.1 $\forall\, v \in \Sigma\ MS_n(K_v) = K_v^{*2}$ et $MS_n(K) = K^{*2}$
$q'_v \underset{K_v}{\simeq} z_v f_v$ donc le discriminant de q'_v est :

$$d_v(q'_v) = z_v^n\ d_v(f_v) = z_v d_v(f_v) \text{ dans } K_v^*/K_v^{*2}.$$

d'où $z_v = d_v(q'_v)d_v(f_v)^{-1} = z'_v$ où $z' = d(q')d(f)^{-1} \in K^*/K^{*2}$. Ceci signifie que $\psi(z') = z_v$.
(2.D) étant commutatif $\alpha' \circ \psi(z') = y_v = \Phi \circ \alpha(z') = \Phi(y)$.
Or Φ est injectif donc $y = \alpha(z')$ et $\beta \circ \alpha(z') = x = 1$. On a fini $\Diamond$

(2.5.2) Cas dim $f = n = 2m$ *paire (cas difficile)*
D'après le § 1 :

$$MS_n(K) = \{x \in N(K(\sqrt{d})^*), x_v > 0 \text{ si } v \text{ réelle et } \sigma_v \neq 0\}$$

$$MS_n(K_v) = N(K_v(\sqrt{d})^*) \quad \text{si } v \text{ finie}$$

$$MS_n(K_v) = K_v^{*+} = \mathbf{R}^{*+} \quad \text{si } v \text{ réelle et } \sigma_v \neq 0,$$

$$MS_n(K_v) = K_v^* \text{ si } v \text{ réelle et } \sigma_v = 0, \text{ ou } v \text{ complexe.}$$

Remarquons que $z_v f_v$ et q'_v sont isomorphes sur K_v. Donc elles ont mêmes invariants : dimension, discriminant d_v et invariant de Hasse s_v.

Plus précisément : $d_v(q'_v) = d_v(z_v f_v) = z_v^{2m} d_v(f) = d_v(f)$ dans $K^*_{v/K_v^{*2}}$ est automatique, tout comme dim $q'_v =$ dim $f_v =$ dim $z_v f_v$.
Mais on a aussi $s_v(q'_v) = s_v(z_v f_v) = (z_v, d_v)_v s_v(f_v)$ avec $d_v = d_v(f_v) = (d(f))_v$ (d'après le lemme 1.5). Or $s_v(q'_v) = (s(q'))_v = 1$ presque partout, ainsi que $s_v(f_v) = (s(f))_v$. On obtient donc $(z_v, d_v)_v = 1$ presque partout. De plus $\prod_v s_v(q'_v) = \prod_v (s(q'))_v = 1 = \prod_v s_v(f_v)$ donc $\prod_v (z_v, d_v)_v = 1$.
Or on dispose du théorème :

Théorème 2.6 [OM th. 71 : 19] : K un corps de nombres. $d \in K^*$ si $(z_v)_{v\in\Sigma}$ est une famille d'éléments de $(K_v^*)_{v\in\Sigma}$ vérifiant :

(i) $(d_v, z_v)_v = 1$ presque partout.

(ii) $\prod_v (d_v, z_v)_v = 1$.

Alors $\exists\ z' \in K^*, \forall\ v \in \Sigma\ (z_v, d_v)_v = (z'_v, d_v)_v$.

Ce théorème s'applique ici, ainsi que le lemme :

Lemme 2.7 : Soit $L = K(\sqrt{d})$, $\mathcal{M} = \{v \text{ places réelles}, d_v > 0\}$. Alors il existe $c \in L$ tel que $N_{L/K}(c)$ ait un signe donné pour chaque place $v \in \mathcal{M}$.

Terminons la démonstration 2.5.2 en supposant le lemme.
Posons

$$\mathcal{M} = \{v \text{ réelles telles que } d_v = d(f)_v > 0\}.$$
$$\mathcal{M}' = \{v \text{ réelles telles que } d_v > 0 \text{ et } z' z_v^{-1} < 0\}.$$

Le lemme montre qu'il existe $c \in N(K(\sqrt{d}))$ avec $c_v < 0$ si $v \in \mathcal{M}'$ et $c_v > 0$ si $v \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}'$.

alors

(i) Pour v finie
$(z'_v, d_v)_v = (z_v, d_v)_v$ donc $(z'_v z_v^{-1}, d_v)_v = 1$ et $z'_v z_v^{-1} \in MS_n(K_v)$.
Dans $K_v^*/MS_n(K_v)(cz')_v = z'_v = z_v$ (car $c \in N(K(\sqrt{d})$ donc $c_v \in N(K_v(\sqrt{d}))$.

(ii) Pour v réelle et $\sigma_v(f) = 0$ ou v complexe
$MS_n(K_v) = K_v^*$ donc $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.

(iii) Pour v réelle et $\sigma_v(f) \neq 0$
$(a, b)_v = -1$ si et seulement si a et $b < 0$ (pour $a, b \in K_v^*$), ici $(z' \circ z_v^{-1}, d_v)_v = 1$ donc :

- ou bien $d_v < 0 (v \notin \mathcal{M})$ alors $z'_v z_v^{-1} > 0$; de plus $c_v > 0$ car c est une norme d'où $(cz')_v z_v^{-1} > 0$ et $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.
- ou bien $d_v > 0 (v \in \mathcal{M})$ alors $(cz')_v z_v^{-1} > 0$; on a encore $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$.

On vient donc de montrer que $(cz')_v = z_v$ dans $K_v^*/MS_n(K_v)$ pour toutes les places v de K, ce qui s'écrit encore :

$$\alpha' \circ \psi(cz') = (y_v)_v \in \Sigma.$$

On conclut comme dans 2.5.1. $\diamond$

Preuve du lemme 2.7 : Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des places de $\mathcal{M}$ où on veut le signe $-$, $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} \backslash \mathcal{M}'$.

Les valuations réelles étant indépendantes :

$$\exists\ x \in K,\ |x_v| > \sqrt{|d_v|} \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

$$|x_v| < \sqrt{|d_v|} \text{ pour } v \in \mathcal{M}'' \qquad (\text{Les } \sqrt{|d_v|} \text{ sont des nombres fixés}).$$

alors $d_v > 0$ pour $v \in \mathcal{M}$ donc :

$$x_v^2 > d_v \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

$$x_v^2 < d_v \text{ pour } v \in \mathcal{M}''$$

et $x^2 - d = N_{L/K}(x + \sqrt{d}) = N_{L/K}(x)$ ont les signes voulus. $\diamond$

Cas des similitudes de formes hermitiennes :

$h : E \times E \to K$ est maintenant une forme hermitienne. Les groupes unitaires, de similitudes, de multiplicateurs de similitude, donnent des suites exactes :

$$(2.1') \qquad 1 \to U_n(K,h) \to GU_n(K,h) \to MS_n(K,h) \to 1$$

$$(2.2') \qquad 1 \to U_n(K^s,h) \to GU_n(K^s,h) \to (K_0^s)^* \to 1$$

d'où, en faisant agir Gal (K_0^s/K_0) sur (2.2'), la suite de cohomologie :

$$\begin{aligned} 1 \to U_n(K,h) \to GU_n(K,h) \to K_0^* \to H^1(K_0, U_n(K^s,h)) \\ \to H^1(K_0, GU_n(K^s,h) \to H^1(K_0, K_0^{s*}) \end{aligned}$$

et en combinant avec (2.1') et Hilbert 90 (ie $H^1(K_0, K_0^{s*}) = 1$) :

$$(2.3') \qquad 1 \to K_0^*/MS_n(K,h) \to H^1(K_0, U_n(K^s,h)) \to H^1(K_0, GU_n(K^s,h)) \to 1.$$

De même sur les complétés $K_{0,v}$ de $K_0, v \in \Sigma_0$ ensemble des places de K_0 :

$$1 \to \prod_v K_{0,v}^*/MS_n(K_v) \to \prod_v H^1(K_0, U_n(K_v^s)) \to \prod_v H^1(K_0, GU_n(K_v^s)) \to 1$$

Comme pour les formes quadratiques, on a des morphismes "verticaux" naturels d'ensembles pointés, qui forment avec (2.3') et (2.3' bis) un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_0^*/MS_n(K) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\Psi"] & H^1(K_0, U_n(K^s)) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Phi"] & H^1(K_0, GU_n(K^s)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \prod_{v\in\Sigma_0} K_{0,v}^*/MS_n(K_v) \arrow[r, "\alpha'"] & \prod_{v\in\Sigma_0} H^1(K_{0,v}, U_n(K_v^s)) \arrow[r, "\beta'"] & \prod_{v\in\Sigma_0} H^1(K_{0,v}, GU_n(K_v^s)) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
\tag{2.D'}
$$

Les interprétations de ces ensembles H^1 comme ensembles de classes d'isomorphisme ou de similitude de formes hermitiennes de dimension $n = \dim h$, munis du point base h, conduisent à la nouvelle écriture du théorème de Landherr :

Théorème (2.4') (Landherr) : Φ est injective.

et nous allons montrer le principe de Hasse :

Théorème (2.5') : φ est injective.

Preuve : Soit $x \in H^1(K_0, GU_n(K^s, h))$ tel que $\varphi(x) = 1$. On a alors $x = \beta(y)$ où $y \in H^1(K_0, U_n(K^s, h))$. $\Phi(y) = (y_v)_{v\in\Sigma_0}$ est alors dans le noyau de β' donc $(y_v)_{v\in\Sigma_0} = \alpha'\Big((z_v)_{v\in\Sigma_0}\Big), z_0 \in K_{0,v}^*/MS_n(K_v)$. Si on considère y comme étant la classe d'équivalence de la forme h', alors $h'_v \simeq z_v h_v$ pour toutes les places v de K_0 (isomorphisme sur $K_v = K_{0,v} \otimes K$).

Distinguons les deux cas :

(2.5.1') Cas $\dim h = n = 2m+1$ *impaire*

D'après (1.1') pour toute place $v \in \Sigma_0$ $MS_n(K_{0,v}) = N_{K_v/K_{0,v}}(K_0^*)$ et $MS_n(K) = N_{K/K_0}(K^*)$.

$h'_v \simeq z_v h_v$ donc ces deux formes ont même discriminant :

$d_v(h'_v) = z_v^n d_v(h_v) = z_v d_v(h_v)$ dans $K_{0,v}^*/N_{K_v/K_{0,v}}(K_v^*)$.

D'où $z_v = z'_v$ avec $z' = d(h')d(h)^{-1} \in K_0^*/N_{K/K_0}(K^*)$. Ce qui signifie que $\psi(z') = z_v$. On termine comme en 2.5.1. ◊

(2.5.2') Cas $\dim h = n = 2m$ *paire*

Alors $MS_n(K) = \{\mu \in K_0^*, \mu_v > 0, v \in S_0\}$ (avec les notations du § 1)

et si v finie $MS_n(K_v) = K_{0,v}^*$,

si v réelle et K_v complexe $MS_n(K_v) = K_{0,v}^{*+} = \mathbf{R}^{*+}$,

si v réelle et K_v réel, ou si v complexe $MS_n(K_v) = K_{0,v}^*$

or $z_v \in K_{0,v}^*/MS_n(K_v)$.

Soit donc $z' \in K_0^*$ tel que $z'_v = z_v$ pour les places $v \in S_0$ (z' existe par indépendance linéaire des places réelles) alors la classe de z' dans $K_0^*/MS_n(K)$ est telle que :

$$\psi(z') = (z_v)_{v\in\Sigma_0} \in \prod_{v\in\Sigma_0} K_{0,v}^*/MS_n(K_v).$$

On termine la démonstration comme en (2.5.2). ◊

Bibliographie

[D] : Jean Dieudonné
"Sur les multiplicateurs de similitude". Oeuvres, p. 408 à 418.

[OM] : O.T. O'MEARA
"Introduction to quadratic forms". Grundlehren der Math. Wissenschaften, n° 117 (1963).

[O] : Takashi Ono
"Arithmetic of orthogonal groups". Journal of the Math. Society of Japan, vol. 7 (1955), p. 79 à 91.

[Sch] : Winfried Scharlau
"Quadratic and hermitian forms". Grundlehren der Math. Wissenschaften, n° 270 (1985).

[S] : Jean-Pierre Serre
"Corps locaux". Hermann.

URA 741 CNRS
Laboratoire de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques
16, Route de Gray
25030 Besançon Cedex