INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Jean-Paul Dufour et Daniel Lehmann

Étude des $(n+1)$-tissus de courbes en dimension n

Volume 361 (2023), p. 1491-1497

https://doi.org/10.5802/crmath.500

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569

Comptes Rendus Mathématique
2023, Vol. 361, p. 1491-1497
https://doi.org/10.5802/crmath.500

Géométrie et Topologie, Systèmes dynamiques / *Geometry and Topology, Dynamical systems*

Étude des $(n+1)$-tissus de courbes en dimension n

Jean-Paul Dufour [a,b] **et Daniel Lehmann** [*,a,c]

[a] ancien professeur à l'Université de Montpellier II

[b] 1 rue du Portalet 34820 Teyran, France

[c] 4 rue Becagrun 30980 Saint Dionisy, France

Courriels : dufourh@netcourrier.com, lehm.dan@gmail.com

Résumé. Pour les $(n+1)$-tissus en courbes dans une variété ambiante de dimension n, nous définissons d'abord une généralisation de la courbure de Blaschke du cas $n = 2$. qui s'annule ssi le tissu est de rang maximum 1. Mais, contrairement au cas $n = 2$ pour lequel tous les 3-tissus de rang 1 sont localement isomorphes, nous démontrons l'existence en dimension trois d'une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de germes de 4-tissus en courbes qui sont de rang un : nous donnons un moyen de les obtenir toutes, et donnons des exemples d'invariants de ces classes d'isomorphisme, permettant en particulier de distinguer parmi elles le cas « quadrilatéral ».

Abstract. For $(n+1)$-webs by curves in an ambiant n-dimensional manifold, we first define a generalization of the well known Blaschke curvature of the dimension two, which vanishes iff the web has the maximum possible rank which is one. But, contrary to the dimension two where all 3-webs of rank one are locally isomorphic, we prove that there are infinitely many classes of isomorphism for germs of 4-webs by curves of rank one in the dimension three: we provide a procedure for building all of them, and give examples of invariants of these classes allowing in particular to distinguish the so-called quadrilateral webs among them.

Mots-clés. tissus en courbes, courbure, rang.

Classification Mathématique (2020). 53A60.

Manuscrit reçu le 15 janvier 2023, révisé le 25 mars 2023, accepté le 28 mars 2023.

Abridged english version

The framework may be holomorphic or real analytic.

Let a $(n+1)$-web by curves in a n-dimensional manifold $\mathscr{U}$ be defined by $(n+1)$ foliations $\mathscr{F}_\lambda$, $(1 \le \lambda \le n+1)$. If (V_λ) denotes a family of non-vanishing local vector fields such that V_λ is a section of the vector bundle $T(\mathscr{F}_\lambda)$ tangent to the foliation $\mathscr{F}_\lambda$, we always assume n of them to be linearly independant at any point of $\mathscr{U}$.

The map $\mathrm{Tr} : (V_1, \ldots, V_{n+1}) \mapsto V_1 + \cdots + V_{n+1}$ from $\bigoplus_{\lambda=1}^{n+1} T(\mathscr{F}_\lambda)$ onto $T\mathscr{U}$ has maximal rank n at any point of $\mathscr{U}$, and its kernel $E := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Tr} : \bigoplus_{\lambda=1}^{n+1} T(\mathscr{F}_\lambda) \to T\mathscr{U}\big)$ is therefore a vector bundle of rank one.

[*] Auteur correspondant.

Recall that a p-form η on $\mathscr{U}$ is said to be $\mathscr{F}_\lambda$-basic, if $\iota_{v_\lambda}\eta = 0$ and $L_{v_\lambda}\eta = 0$ for any section v_λ of $T(\mathscr{F}_\lambda)$, ι_v et $L_v(=\iota_v \circ d + d\circ\iota_v)$ denoting respectively the interior product and the Lie derivative. Recall also that a p-abelian relation (or, shortly, *abelian relation* in case $p = n-1$) is a family $(\eta_\lambda)_{1\le\lambda\le n+1}$ of p-forms, such that $\sum_\lambda \eta_\lambda = 0$, each η_λ being $\mathscr{F}_\lambda$-basic. After [3], the rank (i.e. the maximum dimension of the space of abelian relations) for such a $(n+1)$-web by curves in a n dimensional manifold is 0 or 1.

Writing $\lambda,\mu,\nu,\ldots$ (resp. $i,j,k,,\ldots$) integral indices between 1 and $n+1$ (resp. 1 and n), let $\sigma = (V_\lambda)_\lambda$ be a local non-vanishing section of E. Then, $V_{n+1} = -\sum_i V_i$.

Denote by :

- $(\alpha_i)_i$ the basis for the module of local 1-forms, dual to the basis $(V_i)_i$:
$$\text{if } [V_i,V_j] = \sum_k C^k_{ij} V_k, \text{ then } \mathrm{d}\alpha_k = -\sum_{i<j} C^k_{ij}\,\alpha_i\wedge\alpha_j.$$
- A_i the $(n-1)$-form[1] $A_i := (-1)^{i+1}.\bigwedge_{j,j\neq i}\alpha_j$
- φ_i the function $\varphi_i := \sum_{j,j<i} C^j_{ji} - \sum_{j,i<j} C^j_{ij}$ such that $\mathrm{d}A_i = \varphi_i.\bigwedge_j \alpha_j$,
- ω the 1-form $\omega := \sum_i \varphi_i\,\alpha_i$, such that $\mathrm{d}A_i = A_i\wedge\omega$, and $\Omega := \mathrm{d}\omega$.

Theorem 1.

(i) *The non-vanishing local abelian relations of the web may be naturally identified with the functions f such that*
$$\mathrm{d}(\log f) = -\omega. \qquad (*)$$
The rank of the web is therefore 1 or 0 according to the vanishing or non-vanishing of the 2-form Ω.

(ii) *Denoting by σ^{1-n} the $(n-1)$-th power of the section of E^* dual to σ, the connection ∇ locally defined on $\bigotimes^{n-1}E^*$ by setting $\nabla\sigma^{1-n} = \omega.\sigma^{1-n}$ doesn't depend neither on the order of the vector fields V_λ, nor on the section $\sigma = \{V_\lambda\}_\lambda$ of E: the connections locally defined by this way glue together and define globally a connection on $\bigotimes^{n-1}E^*$. Hence, the abelian relations may still be identified with the sections of $\bigotimes^{n-1}E^*$ with vanishing covariant derivative, and the rank of the web is 1 or 0 according to the vanishing or non-vanishing of the curvature of this connection.*

(iii) *For $n = 2$, the above curvature Ω is the Blaschke curvature.*

From now on assume $n = 3$, and denote by (x,y,z) local coordinates near a point of $\mathscr{U}$, vanishing at this point. Let (Q,u,v) be three functions of (x,y,z) locally defined near this point. Setting : $f = Q'_x - u.v'_x$, $g = Q'_y - u.v'_y$ and $h = Q'_z - u.v'_z$, and assuming that three of the four 2-forms $\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}z$ and $\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$ are always linearly independant. Let W be the 4-web defined by the foliations having respectively (f,x), (g,y), (h,z) and (u,v) as basic functions

Theorem 2.

(i) *The 4-web W has rank one.*

(ii) *Conversely, any germ of 4-web by curves in a 3-dimensional manifold $\mathscr{U}$ which has rank one, is isomorphic to a web made from three functions Q,u,v by this way.*

Lemma. *Without loss of generality up to isomorphism, we may assume.*[2]
$$Q = \frac{x^2}{2} + yz + \ldots, \qquad u = y - x + \ldots, \qquad v = z - x + \ldots,$$
where the points "…" mean : terms of higher order.

---

[1] It is understood that the indices j in the exterior products $\bigwedge_j$ or $\bigwedge_{j,j\neq i}$ are taken in the increasing order.

[2] Notice however that two distinct such (Q,u,v)'s may still define isomorphic germs of webs.

The case $Q = \frac{x^2}{2} + yz$, $u = y - x$, $v = z - x$ *is locally isomorphic (non-projectively) to the so-called* quadrilateral *web, where each of the four foliations is the bunch of the lines through a point in the 3-dimensional projective space.*

A first (rough) invariant of the class of isomorphism is the number d of pairs $1 \leq \lambda < \mu \leq 4$ such that $V_\lambda \wedge V_\mu \wedge [V_\lambda, V_\mu] \equiv 0$, (i.e. such that there exists a foliation $\mathscr{F}_{\lambda\mu}$ by surfaces containing $\mathscr{F}_\lambda$ and $\mathscr{F}_\mu$). All integral values of d from $d = 0$ (the generic case) to $d = 6$ (the quadrilateral case) may be gotten by webs of rank one, as it can be checked easily on examples.

Theorem 3. *There are infinitely many classes of isomorphism of germs of 4-webs by curves, with rank one, in a three dimensional manifold.*

In fact, denoting by ϕ_{ijk} the coefficient of $x^i y^j z^k$ in the Taylor expansion of a function ϕ near the origin, the expression $\frac{2Q_{120} - v_{110} + 2v_{020}}{2Q_{201} + u_{101} + v_{101}}$ is an invariant of the class of isomorphism of the web (as far as its denominator doesn't vanish), which can take any scalar value.

A third kind of invariant is the abelian cohomology $H^2_{Ab}(W)$ of the germ of web W, of dimension 0 or 1 according to the fact that the 2-abelian relations are or not the differential of a 1-abelian relation: both cases may happen.

1. Introduction

Le contexte est holomorphe ou analytique réel.

Dans une variété $\mathscr{U}$ de dimension n, on va s'intéresser aux $(n+1)$-tissus de courbes localement définis par $(n+1)$ feuilletages $\mathscr{F}_\lambda$, $(1 \leq \lambda \leq n+1)$, dont on note $T(\mathscr{F}_\lambda)$ le fibré tangent. On supposera toujours les feuilletages du tissu en *position générale* : notant V_λ un champ de vecteurs engendrant $T(\mathscr{F}_\lambda)$, n quelconques parmi les $n+1$ champs de vecteurs V_λ seront toujours supposés linéairement indépendants. Rappelons

- qu'une p-forme $\mathscr{F}$-basique pour un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension $\geq p$ est une p-forme η sur la variété ambiante telle que $\iota_v\eta = 0$ et $L_v\eta = 0$ quel que soit le champ de vecteurs v tangent au feuilletage, ι_v et $L_v (= \iota_v \circ d + d \circ \iota_v)$ désignant respectivement le produit intérieur et la dérivée de Lie,
- et qu'une p-relation abélienne au voisinage d'un point de V est la donnée d'une famille $(\eta_\lambda)_{1\leq\lambda\leq n+1}$ de p-formes, telle que $\sum_\lambda \eta_\lambda = 0$, chaque η_λ étant $\mathscr{F}_\lambda$-basique (si $p = n-1$, on dira *relation abélienne* tout court en abrégé). Dans le cas présent, le rang du tissu (c'est-à-dire la dimension maximum de l'espace des germes de relations abéliennes en un point) est 0 ou 1, d'après Damiano ([3]).

Ces tissus jouent un rôle important dans l'étude des $(n+3)$-tissus en courbes $W_{0,n+3}$ dits *exceptionnels*, qui généralisent le 5-tissu de Bol ([2]) de la dimension 2 : les $(n+1)$-sous-tissus de $W_{0,n+3}$ sont en effet tous de rang un. Damiano, qui appelle *combinatoires* les relations abéliennes de $W_{0,n+3}$ que ces sous-tissus engendrent, a démontré, du moins si n était pair, que l'espace des relations abéliennes de $W_{0,n+3}$ était somme directe de l'espace des relations abéliennes combinatoires et de l'espace engendré par la relation abélienne dite *d'Euler* définie par Gelfand et MacPherson ([6]) dans le contexte analytique réel ([3, 4]). Si n est impair, Pirio ([8]) a démontré entre autres choses qu'il n'en était plus de même, et que l'espace des relations abéliennes combinatoires, qui incluait alors la relation d'Euler, était égal à *tout* l'espace des relations abéliennes de $W_{0,n+3}$. C'est à cette occasion qu'il a posé quelques questions, auxquelles nous répondons partiellement dans cet article.[3]

[3] Nos résultats ont été annoncés dans [5].

2. Courbure des $(n+1)$-tissus de courbes en dimension n

L'application $\mathrm{Tr}:(V_1,\dots,V_{n+1})\mapsto V_1+\cdots+V_{n+1}$, de $\bigoplus_{\lambda=1}^{n+1} T(\mathscr{F}_\lambda)$ dans $T\mathscr{U}$, est de rang maximum n en chaque point de $\mathscr{U}$, et son noyau $E:=\mathrm{Ker}\big(\mathrm{Tr}:\bigoplus_{\lambda=1}^{n+1} T(\mathscr{F}_\lambda)\to T\mathscr{U}\big)$ est donc un fibré vectoriel de rang 1.

On conviendra que les indices notés $\lambda,\mu,\nu\dots$ (resp. $i,j,k,\dots$) varient entre 1 et $n+1$ (resp. entre 1 et n). Soit $\sigma=(V_\lambda)_\lambda$ une section locale de E, et σ^{1-n} la section de $\bigotimes^{n-1}E^*$ qui lui correspond.

On notera :

- $(\alpha_i)_{1\le i\le n}$ la base locale du module des 1-formes, duale de la base locale $(V_i)_{1\le i\le n}$ du module des champs de vecteurs, avec $V_{n+1}=-\sum_i V_i$, et $\mathrm{d}\alpha_k=-\sum_{i<j} C^k_{ij}\ \alpha_i\wedge\alpha_j$ si $[V_i,V_j]=\sum_k C^k_{ij}V_k$,
- A_i la $(n-1)$-forme[4] $A_i:=(-1)^{i+1}.\bigwedge_{j,j\neq i}\alpha_j$
- φ_i la fonction $\varphi_i:=\sum_{j,j<i}C^j_{ji}-\sum_{j,i<j}C^j_{ij}$ telle que $\mathrm{d}A_i=\varphi_i.\bigwedge_j\alpha_j$,
- ω la 1-forme $\omega:=\sum_i\varphi_i\ \alpha_i$, de sorte que $\mathrm{d}A_i=A_i\wedge\omega$, et
- $\Omega:=\mathrm{d}\omega$.

Théorème 1.

(i) *Les relations abéliennes locales non nulles du tissu s'identifient naturellement aux fonctions f telles que*

$$\mathrm{d}(\log f)=-\omega. \qquad (*)$$

Le tissu est donc de rang 1 ou 0 selon que la 2-forme Ω est nulle ou non.

(ii) *La connexion ∇ définie localement sur $\bigotimes^{n-1}E^*$ en posant $\nabla\sigma^{1-n}=\omega.\sigma^{1-n}$ ne dépend ni de l'ordre[5] des champs de vecteurs V_λ, ni de la section locale $\sigma=\{V_\lambda\}_\lambda$ de E : les connexions ainsi définies localement se recollent et permettent de définir globalement une connexion sur $\bigotimes^{n-1}E^*$. Les relations abéliennes du tissu s'identifient donc encore naturellement aux sections de $\bigotimes^{n-1}E^*$ à dérivée covariante nulle et le tissu est de rang 1 ou 0 selon que la courbure Ω de cette connexion est nulle ou non.*

(iii) *Pour $n=2$, la courbure Ω est la courbure de Blaschke.*[6]

Démonstration. Pour qu'une $(n-1)$-forme $\sum_j f_j.A_j$ soit $\mathscr{F}_i$-basique, il faut et il suffit que soient réalisées les deux conditions suivantes :

- les fonctions f_j sont identiquement nulles si $j\neq i$,
- la fonction f_i est telle que $L_{V_i}(f_i.A_i)=0$, ce qui s'écrit encore :

$$(V_i.f_i)+f_i\ \varphi_i=0. \qquad (*_i)$$

Pour que $\big((f_1.A_1),(f_2.A_2),\dots,(f_n.A_n),-\sum_i(f_i.A_i)\big)$ soit une relation abélienne, il faut et il suffit que soient réalisées les conditions suivantes :

- toutes les fonctions f_i sont égales à une même fonction f, qui doit donc vérifier chacune des équations $(*_i)$, ce qui s'écrit, si f n'est pas nulle :

$$\mathrm{d}(\log f)=-\omega. \qquad (*)$$

- la condition $L_{V_{n+1}}\eta_{n+1}=0$ doit être réalisée, où l'on a posé : $\eta_{n+1}=\sum_i(f_i.A_i)$.

[4] Il est sous-entendu que les indices j dans les produits extérieurs $\bigwedge_j$ ou $\bigwedge_{j,j\neq i}$ sont pris dans l'ordre croissant.

[5] Ceci prouve aussi que cette construction s'étend au cas où le tissu n'est pas globalement décomposable en $(n+1)$ feuilletages (monodromie).

[6] Voir l'interprétation de la courbure de Blaschke en termes de courbure d'une certaine connexion sur un certain fibré dans A. Hénaut ([7]).

La première condition est la transcription de la condition $\iota_{V_{n+1}}(\eta_{n+1}) = 0$. Quant à la seconde, qui s'écrit encore $\sum_{i,j} L_{V_i}(f.A_j) = 0$, elle est automatiquement vérifiée dès lors que f vérifie $(*)$: en effet, $L_{V_i}(f\ A_j) = (V_i.f)\ A_j + f\big(\mathrm{d}(\iota_{V_i}A_j) + \varphi_j\ A_j\big)$ et $\iota_{V_i}(A_j) = -\iota_{V_j}(A_i)$ pour $i \neq j$, tandis que $\iota_{V_i}(A_i) = 0$, d'où la partie (i) du théorème.

Calculons la forme $\omega' := \sum_j \psi_j\ \beta_j$ que l'on aurait obtenue à la place de $\omega = \sum_i \varphi_i\ \alpha_i$ si l'on avait modifié l'ordre des indices λ en permutant λ_o et $n+1$. On obtiendrait :

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i - \alpha_{\lambda_o} & \text{si } i < \lambda_o, \text{ et } \beta_{\lambda_o} = -\alpha_{\lambda_o}, \\ \alpha_{i+1} - \alpha_{\lambda_o} & \text{si } \lambda_o < i \leq n, \text{ et } \bigwedge_i \beta_i = -\bigwedge_i \alpha_i. \end{cases}$$

A_i devient $-A_i$, d'où $\psi_i = -\varphi_i$ si $i \neq \lambda_o$, tandis que A_{λ_o} devient $-\sum_{i\neq\lambda_o} A_i$, d'où $\psi_{\lambda_o} = \sum_i \varphi_i$, et $\omega' = \omega$. Ceci prouve que la connexion définie localement sur $\bigotimes^{n-1} E^*$ ne dépend pas de l'ordre des champs de vecteurs définissant σ.

Elle ne dépend pas non plus de la section σ de E. En effet, si u désigne une fonction arbitraire partout non nulle et si l'on remplace $\sigma = \{V_\lambda\}_\lambda$ par $\sigma' = \{uV_\lambda\}_\lambda$, la base duale $(\alpha'_i)_i$ vérifie : $\alpha'_i = \frac{1}{u}\alpha_i$ et $A'_i\big(= \bigwedge_{j,j\neq i}\alpha'_j\big) = \frac{1}{u^{n-1}}A_i$. On en déduit : $\mathrm{d}A'_i = \omega' \wedge \big(\bigwedge_{j\neq i}\alpha'_j\big)$ avec

$$\omega' = \omega + \mathrm{d}\log\Big(\frac{1}{u^{n-1}}\Big).$$

Puisque u est une fonction de transition du fibré E, $\frac{1}{u^{n-1}}$ est la fonction de transition du fibré $\bigotimes^{n-1} E^*$ qui lui correspond, d'où la partie (ii) du théorème.

Le procédé décrit ci-dessus pour définir la courbure généralise un procédé classique de construction de la courbure de Blaschke ([1]) lorsque $n = 2$, d'où la partie (iii). □

On appellera *courbure du tissu*[7] la courbure $\Omega = \mathrm{d}\omega$ de la connexion ∇.

3. Description des germes de 4-tissus en courbes, de rang un, en dimension trois

Notons (x, y, z) des coordonnées locales et donnons nous trois fonctions Q, u, v de (x, y, z). Posons :

$$f = Q'_x - u.v'_x, \quad g = Q'_y - u.v'_y \quad \text{et} \quad h = Q'_z - u.v'_z,$$

et supposons que trois des quatre 2-formes $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ sont toujours linéairement indépendantes. Notons W le 4-tissu en courbes formé par les quatre feuilletages admettant respectivement comme système de fonctions basiques (f, x), (g, y), (h, z) et (u, v).

Théorème 2.

(i) *Le 4-tissu W est de rang un*
(ii) *Réciproquement, tout germe de 4-tissu en courbes, de rang un, dans une variété de dimension trois, est nécessairement isomorphe à un tissu fabriqué de cette façon à partir de trois fonctions Q, u, v.*

Démonstration. De la définition des fonctions f, g, h, on déduit les égalités

$$\mathrm{d}Q = f.\mathrm{d}x + g.\mathrm{d}y + h.\mathrm{d}z + u.\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0.$$

Comme les 2-formes $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ sont respectivement basiques relativement à chacun des feuilletages constituant le tissu W, la deuxième de ces égalités définit une 2-relation abélienne non nulle sur le tissu, qui est donc de rang un.

Réciproquement, on se donne un germe de 4-tissu de codimension deux au voisinage d'un point en dimension trois. On peut toujours choisir les coordonnées locales (x, y, z) de façon que x (resp. y, resp. z) soit fonction basique du premier (resp. du second, resp. du troisième)

[7] On peut aussi définir la connexion sur $\bigotimes^{n-1} E$ par dualité, la courbure restant la même au signe près.

feuilletage : il existe donc cinq fonctions f, g, h, u, v de (x, y, z), telles que les quatre feuilletages soient respectivement définis localement par les couples de fonctions basiques (f, x), (g, y), (h, z) et (u, v). Supposons qu'il existe une relation abélienne non triviale

$$A(f, x)\,\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + B(g, y)\,\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + C(h, z)\,\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z + D(u, v)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0.$$

Notons respectivement $F(r, x)$, $G(r, y)$, $H(r, z)$ et $U(r, v)$ une primitive de $A(r, x)$ (resp. de $B(r, y)$, de $C(r, z)$, de $D(r, v)$) relativement à la variable r : on peut alors remplacer $f(x, y, z)$ par $F\big(f(x, y, z), x\big)$ dans la définition du premier feuilletage, et de même prendre $G\big(g, y\big)$ au lieu de g, $H\big(h, z\big)$ au lieu de h, et $U(u, v)$ au lieu de u. Autrement dit, on peut toujours choisir les fonctions f, g, h et u de façon que la relation abélienne s'écrive :

$$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0,$$

ce qui implique :

$$\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z + u\,\mathrm{d}v\big) = 0.$$

Au niveau des germes au voisinage d'un point, on peut appliquer le lemme de Poincaré : il existe une fonction Q telle que $\mathrm{d}Q = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z + u\,\mathrm{d}v$, d'où

$$f = Q'_x - u.v'_x, \quad g = Q'_y - u.v'_y, \quad h = Q'_z - u.v'_z.$$

Notons que des triplets (Q_1, u_1, v_1) et (Q_2, u_2, v_2) distincts peuvent définir des tissus isomorphes. Nous ne savons pas trouver une forme normale pour (Q, u, v) caractérisant entièrement la classe d'isomorphisme du tissu associé.

Cependant, au voisinage de l'origine, on peut faire un changement de coordonnées de façon que des champs de vecteurs (V_λ), $(1 \le \lambda \le 4)$ définissant les feuilletages soient respectivement égaux à l'origine aux vecteurs $V_1^o = (0, 0, 1)$, $V_2^o = (1, 0, 0)$, $V_3^o = (0, 1, 0)$, $V_4^o = (1, 1, 1)$. On peut aussi imposer aux fonctions f, g, h, u, v, toutes basiques pour l'un des feuilletages du tissu, d'être nulles à l'origine. Ces conditions impliquent :

Lemme. *On peut supposer, sans perte de généralité à isomorphisme près :*

$$Q = \frac{x^2}{2} + yz + \dots, \qquad u = y - x + \dots, \qquad v = z - x + \dots$$

les points de suspension indiquant des termes d'ordre supérieur.

Le cas $\big(Q = yz + \frac{x^2}{2},\ u = y - x,\ v = z - x\big)$ correspond au tissu dit *quadrilatéral*, consistant en quatre pinceaux de droites parallèles[8] dans un espace projectif de dimension 3.

Soit d le nombre de couples $1 \le \lambda < \mu \le 4$ tels que $V_\lambda \wedge V_\mu \wedge [V_\lambda, V_\mu] \equiv 0$, c'est-à-dire tels qu'il existe un feuilletage $\mathscr{F}_{\lambda\mu}$ en surfaces contenant $\mathscr{F}_\lambda$ et $\mathscr{F}_\mu$. Cet entier est un invariant (relativement grossier) de la classe d'isomorphisme du germe de tissu[9]. Cependant, il peut prendre toutes les valeurs entières de 0 (cas générique) à 6 (cas quadrilatéral[10]) avec des exemples tous de rang 1 : par exemple, si W_P désigne le tissu défini à partir de $P = (a, b, c, a_1, b_1, c_1, e)$ par

$$Q = yz + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\big(xy(ax + a_1 y) + yz(by + b_1 z) + xz(cz + c_1 x)\big) + e\,xyz, \quad u = y - x, \quad v = z - x,$$

on obtient alors :

- $d = 1$ pour $P = (0, 0, -2, -1, 0, 1, 1)$, $d = 2$ pour $(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$, $d = 3$ pour $(-2, -2, -2, 1, 1, 1, 1)$,
- $d = 4$ pour $(-1, -1, 0, 1, 1, 0, 0)$, et $d = 5$ pour $(-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

Ceci prouve déjà

[8]Ce tissu est aussi localement isomorphe (non projectivement) au tissu défini par les quatre pinceaux de droites de sommets respectifs $[1:0:0:0]$, $[0:1:0:0]$, $[0:0:1:0]$, et $[0:0:0:1]$.

[9]Il est clair que des invariants analogues peuvent se définir dans des situations beaucoup plus générales.

[10]Réciproquement, si $d = 6$, le tissu est quadrilatéral.

- que la quadrilatéralité est une propriété beaucoup plus forte, pour un tel 4-tissu, que le simple fait d'être de rang un,
- et qu'il existe plusieurs classes d'isomorphisme dans l'ensemble des germes de 4-tissus de courbes qui sont de rang un, en dimension trois (contrairement à ce qui se passe en dimension deux où tous les 3-tissus de rang un sont localement isomophes).

Il en existe en fait une infinité :

Théorème 3. *Il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de germes de 4-tissus en courbes, de rang un, dans une variété de dimension trois.*

Démonstration. Notant ϕ_{ijk} le coefficient de $x^i y^j z^k$ dans la série de Taylor d'une fonction ϕ au voisinage de l'origine, on montre, à l'aide de Maple, que l'expression

$$\frac{2Q_{120} - v_{110} + 2v_{020}}{2Q_{201} + u_{101} + v_{101}}$$

est un invariant de la classe d'isomorphisme du germe de tissu, que l'on peut évidemment faire varier à volonté dès lors que son dénominateur n'est pas nul. Par exemple, W_a et W_b ne sont pas isomorphes si $a \neq b$, W_a désignant pour tout scalaire a le germe de tissu défini par

$$Q = yz + \frac{x^2}{2} + axy^2 + x^2 z, \quad u = y - x, \quad v = z - x.$$

Un troisième genre d'invariant est la cohomologie $H^2_{Ab}(W)$ du tissu, de dimension 0 ou 1, selon que la 2-relation abélienne $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0$ est ou non la différentielle d'une 1-relation abélienne : par exemple, $H^2_{Ab}(W) = 0$ pour le tissu quadrilatéral, car

$$\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h(\mathrm{d}z - \mathrm{d}h) + u\,\mathrm{d}v\big).$$

Mais si $Q = \frac{x^2}{2} + yz + \frac{1}{1-xyz} - 1$, $u = y - x$, et $v = z - x$, avec $|xyz| < 1$, $H^2_{Ab}(W) \neq 0$. En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que $H^2_{Ab}(W)$ s'annule est qu'il existe des fonctions A, B, C, D de deux variables telles que

$$A(f, x) + B(g, y) + C(h, z) + D(u, v) - Q \equiv 0 \tag{E}$$

au voisinage de l'origine (par exemple $Q = yg + \frac{h^2}{2}$ pour le tissu quadrilatéral). Or, selon Maple, dans le cas de l'exemple ci-dessus, l'équation (E_k) obtenue en remplaçant le premier membre de (E) par son développement limité à l'ordre k n'a pas de solution pour $k \geq 8$. □

□

Références

[1] W. Blaschke, « Über Gewebe von Kurven im R_3 », *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.* **9** (1933), p. 291-298.

[2] G. Bol, « Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene », *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.* **11** (1933), p. 387-393.

[3] D. Damiano, « Webs, abelian equations and characteristic classes », Thèse, Brown University, 1980.

[4] ———, « Webs and characteristic forms of Grassmann manifolds », *Am. J. Math.* **105** (1983), p. 1325-1345.

[5] J.-P. Dufour, D. Lehmann, « Etude des $(n+1)$-tissus de courbes en dimension n », 2022, https://arxiv.org/abs/2211.05188v1.

[6] I. M. Gelfand, R. D. MacPherson, « Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm », *Adv. Math.* **44** (1982), p. 279-312.

[7] A. Hénaut, « On planar web geometry through abelian relations and connections », *Ann. Math.* **159** (2004), nº 1, p. 425-445.

[8] L. Pirio, « On the $(n+3)$-webs by rational curves induced by the forgetful maps on the moduli spaces $\mathscr{M}_{0,n+3}$ », 2022, https://arxiv.org/abs/2204.04772v1.