ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN FRESNEL
MARIUS VAN DER PUT

Localisation formelle et groupe de Picard

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 4 (1983), p. 19-82
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_19_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 4 (1983), 19-82.

LOCALISATION FORMELLE ET GROUPE DE PICARD

par J. FRESNEL et M. van der PUT

INTRODUCTION

Soit X un espace affinoïde réduit sur un corps K complet pour une valeur absolue non archimédienne, $r : X \to \bar{X}$ sa réduction canonique, p un point de la variété algébrique affine $\bar{X}$. Le but de ce travail est de construire des objets sur K, espaces analytiques, algèbres nœthériennes, qui rendent compte de la singularité du point p. La première idée est la fibre formelle $r^{-1}(p)$ qui est canoniquement un sous-espace analytique de X. Cet aspect est clairement insuffisant, d'une part l'anneau $\mathcal{O}(r^{-1}(p))$ n'est pas nœthérien, il est donc difficilement utilisable avec l'algèbre commutative traditionnelle, d'autre part la réduction de $\mathcal{O}(r^{-1}(p))$ sera $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ qui ne décrit que l'aspect analytique de la singularité de p.

L'outil principal que nous construisons est la localisation formelle notée $\mathcal{O}_{X,(p)}$ qui est en quelque sorte l'algèbre des germes de fonctions holomorphes sur $r^{-1}(p)$, cette algèbre est de Banach nœthérienne, son spectre maximal est $r^{-1}(p)$ et sa réduction est $\mathcal{O}_{\bar{X},p}$. Pour l'étude des anneaux locaux il est parfois pratique de passer au complété, de même ici nous définissons pour $\mathcal{O}_{X,(p)}$ un complété formel $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ qui est une algèbre de Banach nœthérienne dont la réduction est $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$. Cet anneau est beaucoup plus petit que $\mathcal{O}(r^{-1}(p))$, par conséquent plus maniable et se révèlera être très utile.

Nous traitons ici deux applications :

D'abord le cas où $p \in \bar{X}$ est un point régulier. On montre alors que $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)})$, le groupe des classes d'isomorphie de modules projectifs de rang 1 sur $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est trivial et que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est factoriel si X est de plus régulier.

Le second exemple concerne la dimension 1 et plus précisément le cas où X est régulier et où p est un point multiple ordinaire. L'aspect analytique de la singularité de p est décrit par les équivalences suivantes :

1) le point p est multiple ordinaire
2) $r^{-1}(p) \simeq \mathbf{P}^1 - (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ où les B_i sont des disques fermés
3) $\mathrm{Pic}\,(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}) = (1)$
4) $r^{-1}(p)$ est localement isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

Signalons que la partie 4) de l'équivalence nous a été suggérée par W. Lütkebohmert.

D'autre part l'aspect algébrique de la singularité du point p est décrite par l'isomorphisme $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)}) \simeq \dfrac{|K^\times|^{n-s}}{Z}$ où n est la multiplicité de p, s le nombre de composantes irréductibles de X passant par p et Z un sous-groupe de $|K^\times|^{n-s}$ engendré par au plus $n-1$ éléments. Comme corollaire on retrouve un résultat de [8] : $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)}) = (R^1 r_* \mathcal{O}_X^\times)_p = (1)$ si et seulement si p est une intersection multiple ordinaire.

C'est ce résultat et plus généralement l'article « Stable reductions of algebraic curves » ([8]), qui fut à l'origine de notre travail. Il paraît certain d'autre part que l'article « Über die Picardgruppen affinoïder Algebren » ([4]) permettrait de calculer $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)})$ pour des singularités plus compliquées.

Conventions.

Si K est un corps valué pour une valeur absolue $|.|$ non archimédienne, $K^\circ = \{x \in K \mid |x| \leqslant 1\}$ désigne son anneau de valuation, $K^{\circ\circ} = \{x \in K \mid |x| < 1\}$ désigne son idéal de valuation et $\bar{K} = K^\circ/K^{\circ\circ}$ son corps résiduel.

Si $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée, on note

$$A^\circ = \{a \in A \mid \|a\| \leqslant 1\},$$
$$A^{\circ\circ} = \{a \in A \mid \|a\| < 1\}, \quad \bar{A} = A^\circ/A^{\circ\circ},$$

$\bar{A}$ s'appelle la réduction de l'algèbre A.

Si $(K, |.|)$ est un corps valué, on dit que la valeur absolue $|.|$ est *discrète* si $|K^\times|$ le groupe des valeurs de K est isomorphe à $\mathbf{Z}$, ce qui veut dire que la valuation associée est discrète.

1. UNE LOCALISATION FORMELLE

1.1. Définition.

Soient X un espace affinoïde réduit, $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ sa réduction canonique, $p \in \bar{\mathrm{X}}$. Soit $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}},p}$ la fibre du faisceau structural $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}$ en p, c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}},p} = \varinjlim \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{U})$ où U décrit les ouverts de $\bar{\mathrm{X}}$ contenant p. Comme les ouverts principaux contenant p forment une partie cofinale on peut se restreindre à ces derniers.

Soient $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) \mid \|f\| \leqslant 1\}$,

$$\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ\circ} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) \mid \|f\| < 1\},$$

$\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ}/\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ\circ}$ où $\|.\|$ désigne la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$. Par définition on a $\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})} = \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\bar{\mathrm{X}})$. Si $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ}$ on note $\bar{f}$ son image résiduelle dans $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\bar{\mathrm{X}})$.

Soient $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ}$ tel que $\bar{f}(p) \neq 0$ alors

$$r^{-1}(\mathrm{D}(\bar{f})) = \{x \in \mathrm{X} \mid |f(x)| \geqslant 1\},$$

c'est donc un ouvert rationnel de X. On a

$$(1) \quad \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{D}(\bar{f}))) = \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})\langle \mathrm{T}\rangle}{(1-f\mathrm{T})}, \; (\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{D}(\bar{f}))))^{\circ} = \frac{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})^{\circ}\langle \mathrm{T}\rangle}{(1-f\mathrm{T})}$$

et

$$\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{D}(\bar{f})))} = \frac{\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})}[\mathrm{T}]}{(1-\bar{f}\mathrm{T})} = \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{D}(\bar{f})).$$

On sait qu'il existe un ouvert principal $\mathrm{U}_0 \ni p$ tel que $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{U}_0) \to \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}},p}$ soit injectif. Il suit alors que pour tout ouvert principal U avec $p \in \mathrm{U} \subset \mathrm{U}_0$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{U}_0) \to \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{U})$ est injectif. Il résulte de (1) que $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U}_0)) \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U}))$ est isométrique. Ainsi chaque norme spectrale sur $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U}))$ induit une norme sur $\varinjlim \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U})) = (r_*\mathcal{O}_{\mathrm{X}})_p$. On appelle *localisation formelle de* X *en* p le complété de l'algèbre $\varinjlim \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U}))$ pour cette norme et *on le note* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$

(noter que l'on écrit (p) pour éviter la confusion avec la fibre en p, qui n'a pas de sens ici puisque $p \notin X$).

Si $\|.\|$ désigne la norme de $\mathcal{O}_{X,(p)}$, soient

$$\mathcal{O}^{\circ}_{X,(p)} = \{f \in \mathcal{O}_{X,(p)} \mid \|f\| \leqslant 1\} \qquad \mathcal{O}^{\circ\circ}_{X,(p)} = \{f \in \mathcal{O}_{X,(p)} \mid \|f\| < 1\}$$

et

$$\bar{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \mathcal{O}^{\circ}_{X,(p)}/\mathcal{O}^{\circ\circ}_{X,(p)}.$$

Il suit immédiatement de (1) que $\bar{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \mathcal{O}_{\bar{X},p}$.

Un exemple. — Soient K un corps valué complet algébriquement clos, $X = \operatorname{Spm}(K\langle Z_1,Z_2,\dots,Z_n\rangle) \simeq (K^{\circ})^n$, alors $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X}) = \bar{K}[Z_1,\dots,Z_n]$ et $\bar{X} = \operatorname{Spm}(\bar{K}[Z_1,\dots,Z_n]) \simeq \bar{K}^n$. Soit $p = (Z_1,\dots,Z_n)$ l'idéal maximal engendré par les Z_i. On a $\mathcal{O}_{\bar{X},p} = \bar{K}[Z]_{(Z)}$ et $r^{-1}(p) \simeq (K^{\circ\circ})^n$ et $\mathcal{O}_{X,(p)}$ s'identifie aux limites uniformes de fractions rationnelles $P(Z)/Q(Z) \in K(Z)$ telles que $Q(z_1,\dots,z_n) \neq 0$ pour tout $(z_1,z_2,\dots,z_n) \in (K^{\circ\circ})^n$. En effet, si $\|Q(Z)\| = 1$, alors $\bar{Q}(0,0,\dots,0) \neq 0$ est équivalent à $Q(z_1,z_2,\dots,z_n) \neq 0$ pour tout $(z_1,z_2,\dots,z_n) \in (K^{\circ\circ})^n$. Ainsi $\mathcal{O}_{X,(p)}$ s'identifie à l'algèbre des éléments analytiques au sens de Krasner sur $(K^{\circ\circ})^n$ [5], [9].

1.2. L'algèbre $k^{\circ}\langle Z_1,Z_2,\dots,Z_n\rangle_{(0)}$.

Soient k un corps complet pour une valuation discrète, $X = \operatorname{Spm}(k\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle)$, p l'idéal $(Z_1,Z_2,\dots,Z_n)$ de $\bar{k}[Z_1,\dots,Z_n]$. Notons $k^{\circ}\langle Z_1,Z_2,\dots,Z_n\rangle_{(0)}$ l'algèbre $\mathcal{O}^{\circ}_{X,(p)}$. Alors (1) montre que

$$k^{\circ}\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle_{(0)} = \widehat{\varinjlim} \frac{k^{\circ}\langle Z_1,\dots,Z_n,T\rangle}{(1-fT)},$$

où f parcourt les éléments $k^{\circ}\langle Z_1,\dots,Z_n\rangle$ tels que $\bar{f}(0,0,\dots,0) \neq 0$, ordonnés par la relation de divisibilité. De plus la norme de $\dfrac{k^{\circ}\langle Z,T\rangle}{(1-fT)}$ est la norme induite par la norme spectrale de $k^{\circ}\langle Z,T\rangle$ et $\widehat{\varinjlim}$ signifie complété pour cette norme.

PROPOSITION 1. — *Soit k un corps complet pour une valuation discrète. Alors l'algèbre $k^{\circ}\langle Z_1,Z_2,\dots,Z_n\rangle_{(0)}$ est nœthérienne et locale.*

Démonstration. — Soient π une uniformisante de k° et $\mathfrak{M} = \pi k^{\circ} + \sum_{i=1}^{n} Z_i k^{\circ}\langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle_{(0)}$. Alors $\mathfrak{M}$ est l'unique idéal maximal de $k^{\circ}\langle Z_1, \ldots, Z_n\rangle_{(0)}$. En effet si $f \notin \mathfrak{M}$ alors $\bar{f}(0, \ldots, 0) \neq 0$ ainsi $\bar{f} \in \bar{k}[Z]_{(Z)}$ est inversible, il s'ensuit que f est inversible.

Soient $\mathfrak{A}$ un idéal de $k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}$ et $\mathfrak{A}' = \{f \in k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)} |$ il existe $n \geqslant 0$ avec $\pi^n f \in \mathfrak{A}\}$. Alors $\bar{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}'/\pi\mathfrak{A}'$ est un idéal de l'anneau nœthérien $\bar{k}[Z]_{(Z)}$, donc $\bar{\mathfrak{A}}'$ est de type fini. Soient $u_1, \ldots, u_s = \mathfrak{A}'$ dont les images résiduelles $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_s$ engendrent $\bar{\mathfrak{A}}'$. Soient $f \in \mathfrak{A}'$ et $\|f\| = 1$, alors il existe $v_1^{\circ}, \ldots, v_s^{\circ} \in k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}$ tels que $\bar{f} = \Sigma \bar{v}_i^{\circ} \bar{u}_i$. Ainsi $f = v_1^{\circ} u_1 + \cdots + u_s v_s^{\circ} + \pi f_1$ où $f_1 \in \mathfrak{A}'$. De même il existe $v_1^1, \ldots, v_s^1 \in k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}$ tels que $f_1 = \Sigma v_i^1 u_i + \pi f_2$. On pose alors $v_i = v_i^{\circ} + \pi v_i^1 + \cdots$ et on a $f = \Sigma v_i u_i$. Ce qui prouve que $\mathfrak{A}' = \Sigma k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)} u_i$.

Montrons maintenant que $\mathfrak{A}$ est de type fini. Il existe n tel que $\pi^n u_i \in \mathfrak{A}$, ce qui montre que $\pi^n \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. Ainsi $\mathfrak{A}'/\pi^n\mathfrak{A}'$ est un $\dfrac{k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}}{\pi^n k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}}$-module de type fini. Or $\dfrac{k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}}{\pi^n k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}} = \dfrac{k^{\circ}[Z]_{(Z)}}{\pi^n k^{\circ}[Z]_{(Z)}}$ est nœthérien. Il s'ensuit que $\mathfrak{A}'/\pi^n\mathfrak{A}'$ est nœthérien et ainsi $\mathfrak{A}/\pi^n\mathfrak{A}'$ est de type fini. Comme $\pi^n\mathfrak{A}'$ est de type fini, on déduit que $\mathfrak{A}$ est un idéal de $k^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}$ de type fini. Ainsi l'algèbre $k^{\circ}\langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle_{(0)}$ est nœthérienne.

1.3. Bases normales dans les algèbres de Banach.

DÉFINITION 1. — Soient K un corps valué complet, un sous-anneau R de K° est dit *discret* s'il possède les propriétés suivantes :

1) Il existe un sous-corps $k \subset K$ dont la valuation induite est discrète et tel que $k^{\circ} \subset R \subset K^{\circ}$.

2) $\bar{R} = R/R^{\circ\circ}$ (où $R^{\circ\circ} = R \cap K^{\circ\circ}$) est un corps et $\bar{K}$ est une extension algébrique purement inséparable de $\bar{R}$.

3) Il existe $\pi_1 \in K^{\circ\circ}$ tel que $R^{\circ\circ} \subset \pi_1 K^{\circ}$.

DÉFINITION 2. — Soient K un corps valué complet, $(A, \|.\|)$ une K-algèbre de Banach. Une famille $[e_i\}_i$ est appelée *base normale de l'algèbre* A s'il existe un sous-anneau discret $R \subset K^{\circ}$ tel que $\bigoplus_i Re_i$ soit un sous-anneau de A et que $\{e_i\}_i$ soit une base normale du K-espace de Banach A.

THÉORÈME 1 ([1]). — *Soient* K *un corps valué complet,* $(\mathrm{A},\|.\|)$ *une* K-*algèbre de Banach,* $\{e_i\}$ *une base normale de l'algèbre* A, $\mathrm{A}^\circ = \{f \in \mathrm{A} \mid \|f\| \leqslant 1\}$, $\mathrm{A}^{\circ\circ} = \{f \in \mathrm{A} \mid \|f\| < 1\}$, $\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^\circ/\mathrm{A}^{\circ\circ}$ *et* $f \mapsto \bar{f}$ *la surjection canonique de* A° *sur* $\bar{\mathrm{A}}$. *Soient* $\mathfrak{A}$ *un idéal de* A *tel que* $\bar{\mathfrak{A}}$ *soit de type fini engendré par* $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_s$. *Alors* $\mathfrak{A}^\circ = \mathfrak{A} \cap \mathrm{A}^\circ = \sum_{i=1}^{s} f_i \mathrm{A}^\circ$. *De plus* $\mathfrak{A}$ *est facteur direct topologique. Si l'on munit* $\mathrm{A}/\mathfrak{A}$ *de la norme quotient on a* $\overline{(\mathrm{A}/\mathfrak{A})} = \bar{\mathrm{A}}/\bar{\mathfrak{A}}$ *et* $\mathrm{A}/\mathfrak{A}$ *admet une base normale d'algèbre. En particulier* $\bar{\mathrm{A}}$ *nœthérien implique* A *nœthérien.*

LEMME 1. — *Soit* K *un corps valué complet. Alors il existe un sous-corps fermé* $k \subset \mathrm{K}$ *dont la valuation induite est discrète et tel que* $\bar{\mathrm{K}}$ *soit une extension algébrique purement inséparable de* $\bar{k}$. *Si* K *est algébriquement clos on peut choisir* k *tel que* $\bar{k} = \bar{\mathrm{K}}$.

Démonstration. — Ce résultat doit être bien connu, esquissons une preuve rapide. Soit $k_0 \subset \mathrm{K}$ un sous-corps fermé dont la valuation induite est discrète. Alors $\bar{\mathrm{K}}$ contient une extension transcendante pure $\bar{k}_0(\bar{x}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ telle que $\bar{\mathrm{K}}$ soit algébrique sur $\bar{k}_0(\bar{x}_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Il est alors facile de vérifier que le groupe des valeurs de $k_0(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est celui de k_0. Soit k_1 le complété de $k_0(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Soit ℓ l'extension séparable maximale de $\bar{k}_1$ contenue dans $\bar{\mathrm{K}}$. Alors le lemme de Hensel permet de relever ℓ en L qui a même groupe de valeurs que k_1. Ce qui démontre le lemme. Si de plus K est algébriquement clos, l'extension purement inséparable $\bar{\mathrm{K}}$ de ℓ se relève en k qui a même groupe de valeurs que L.

1.4. L'algèbre $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle_{(0)}$.

THÉORÈME 2. — *Soient* K *un corps valué complet,* $\mathrm{X} = \mathrm{Spm}\,(\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle)$ *l'espace analytique affinoïde défini par le spectre maximal de* $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle$

$$p = (\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n) \in \bar{\mathrm{X}} = \mathrm{Spm}\,(\bar{\mathrm{K}}[\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n])$$

et $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle_{(0)} = \mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$. *Soit* $k \subset \mathrm{K}$ *un sous-corps fermé dont la valuation induite est discrète et tel que* $\bar{\mathrm{K}}$ *soit algébrique purement inséparable sur* $\bar{k}$. *Alors*

$$\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle_{(0)} \simeq \mathrm{K} \mathop{\hat{\otimes}}_{k^\circ} k^\circ \langle \mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle_{(0)},$$

l'isomorphisme est isométrique, la K-*algèbre* $K\langle Z_1,Z_2,\ldots,Z_n\rangle_{(0)}$ *admet une base normale d'algèbre et est nœthérienne.*

Démonstration. — Soit $D(\bar f)$ un ouvert principal de $\bar X$ contenant p. Soient ℓ la caractéristique résiduelle, et $\ell_1 = \max(1,\ell)$, alors il existe n tel $\bar f^{\ell_1^n} \in \bar k[Z]$. Comme $D(\bar f) = D(\bar f^{\ell_1^n})$ on a

$$K\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle_{(0)} = \widehat{\varinjlim} \frac{K\langle Z_1,\ldots,Z_n,T\rangle}{(1-fT)}$$

où f parcourt les éléments de $k^\circ\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle$ tels que $\bar f(0,0,\ldots,0) \neq 0$.

Comme $\left(\dfrac{K\langle Z_1,\ldots,Z_n,T\rangle}{1-fT}\right)^\circ = \dfrac{K^\circ\langle Z_1,\ldots,Z_n,T\rangle}{(1-fT)}$, il suit que $\dfrac{K\langle Z_1,\ldots,Z_n,T\rangle}{(1-fT)} \simeq K \mathbin{\hat\otimes}_{k^\circ} \dfrac{k^\circ\langle Z_1,\ldots,Z_n,T\rangle}{(1-fT)}$ et cet isomorphisme est isométrique. Ainsi on a isométriquement

$$K\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle_{(0)} \simeq K \mathbin{\hat\otimes}_{k^\circ} k^\circ\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle_{(0)} .$$

On a vu que $k^\circ\langle Z\rangle_{(0)}$ admet une base normale $\{e_i\}_i$, il suit alors que $\{1 \otimes e_i\}_i$ est une base normale d'algèbre de $K\langle Z\rangle_{(0)}$. D'autre part $\overline{K\langle Z\rangle_{(0)}} = \bar K[Z]_{(Z)}$, c'est un anneau nœthérien, ainsi le théorème 1 montre que $K\langle Z\rangle_{(0)}$ est un anneau nœthérien.

1.5. La localisation formelle $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

THÉORÈME 3. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur* K *valué complet,* $r : X \to \bar X$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar X$ *défini sur* $\bar K$. *Alors il existe un entier* $n \geqslant 1$ *et un homomorphisme surjectif* $\varphi : K\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$ *tel que* $\bar\varphi : \bar K[Z_1,\ldots,Z_n] \to \mathcal{O}_{\bar X}(\bar X)$ *soit surjectif et que* p *soit l'image de* $(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$ *par* $\bar\varphi$. *De plus* φ *induit un homomorphisme surjectif* $\varphi_p : K\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle_{(0)} \to \mathcal{O}_{X,(p)}$ *et on a* $\ker\varphi_p = \mathfrak{A}.K\langle Z\rangle_{(0)}$ *où* $\mathfrak{A} = \ker\varphi$ *et* $(\ker\varphi_p)^\circ = \mathfrak{A}^\circ.K\langle Z\rangle^\circ_{(0)}$. *Il suit que* $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *est une* K-*algèbre nœthérienne.*

Démonstration. — 1) *Existence de* $\varphi : K\langle Z\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$. Il existe un homomorphisme surjectif $\psi : K\langle U_1,\ldots,U_s\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$. Alors l'homomorphisme $\bar{\psi} : \bar{K}[U_1,\dots,U_s] \to \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X})$ est fini. Soient $f_1,\dots,f_r \in \mathcal{O}_X(X)^\circ$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{f}_i\bar{\psi}(\bar{K}[U_1,\dots,U_s]) = \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X}).$$

Soit $\varphi : K\langle U_1,\dots,U_s,T_1,\dots,T_r\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$ défini par

$$\varphi(\Sigma a_\nu T^\nu) = \Sigma\varphi(a_\nu)f_1^{\nu_1}\dots f_r^{\nu_r}$$

où $a_\nu \in K\langle U_1,\dots,U_s\rangle$. On a donc $\bar{\varphi}(\bar{K}[U_1,\dots,U_s,T_1,\dots,T_r]) = \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X})$. Soit donc $n = s + r$ et notons $\{Z_1,Z_2,\dots,Z_n\}$ l'ensemble $\{U_1,\dots,U_s,T_1,\dots,T_r\}$. Soit $\alpha_i \in \bar{K}$ l'image de $\bar{\varphi}(Z_i)$ dans $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X})/\mathfrak{M}_p = \bar{K}$ (où $\mathfrak{M}_p$ est le maximal associé à $p \in \bar{X}$). Soit $a_i \in K^\circ$ tels que $\bar{a}_i = \alpha_i$, alors $Z_i \mapsto Z_i - a_i$ définit un automorphisme de $K\langle Z_1,Z_2,\dots,Z_n\rangle$. Ainsi on peut supposer que p est l'image du maximal $(Z_1,Z_2,\dots,Z_n)$.

2) *L'homomorphisme* φ_p *est surjectif.* Soit

$$\mathscr{A} = \{g \in K^\circ\langle Z\rangle | \bar{g}(0,\dots,0) \neq 0\}.$$

Puisque $\bar{\varphi}$ est surjectif on a $\mathcal{O}_{X,(p)} = \widehat{\varinjlim_{g\in\mathscr{A}}} \dfrac{\mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle}{(1-\varphi(g)T)}\cdot$ D'autre part on a par définition $K\langle Z\rangle_{(0)} = \widehat{\varinjlim_{g\in\mathscr{A}}} \dfrac{K\langle Z,T\rangle}{(1-gT)}\cdot$ Il est d'abord clair que φ induit un homomorphisme

$$\varphi_p' : \widehat{\varinjlim} \frac{K\langle Z,T\rangle}{(1-gT)} \to \widehat{\varinjlim} \frac{\mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle}{(1-\varphi(g)T)}.$$

Comme X est réduit φ induit sur $\mathcal{O}_X(X)$ une norme équivalente à la norme spectrale, ainsi il existe $0 < c \leqslant 1$ qui possède les propriétés suivantes : pour tout $f \in \mathcal{O}_X(X)$, il existe $g \in K\langle Z\rangle$ tel que

(1) $$c\|g\| \leqslant \|f\| \leqslant \|g\| \quad \text{et} \quad \varphi(g) = f.$$

Comme $\left(\dfrac{\mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle}{1-\varphi(g)T}\right)^\circ = \dfrac{\mathcal{O}_X(X)^\circ\langle T\rangle}{(1-\varphi(g)T)}$, il suit de (1) que pour tout $f_1 \in \varinjlim \dfrac{\mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle}{(1-\varphi(g)T)}$, il existe $g_1 \in \varinjlim \dfrac{K\langle Z,T\rangle}{(1-gT)}$ avec

(2) $$c\|g_1\| \leqslant \|f_1\| \leqslant \|g_1\| \quad \text{et} \quad \varphi_p'(g_1) = f_1.$$

Il suit donc de (2) que φ'_p se prolonge par continuité en un homomorphisme surjectif $\varphi_p : K\langle Z\rangle_{(0)} \to \mathcal{O}_{X,(p)}$.

On en conclut donc que $\mathcal{O}_{X,(p)} = \varphi_p(K\langle Z\rangle_{(0)})$ est une algèbre nœthérienne et que φ_p induit sur $\mathcal{O}_{X,(p)}^{\cdot}$ une norme équivalente à celle de $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

3) *Le noyau de* φ_p. Soit $\mathfrak{A} = \ker \varphi$, montrons d'abord que le noyau de $K^\circ\langle Z,T\rangle \to \dfrac{\mathcal{O}_X(X)^\circ\langle T\rangle}{(1-\varphi(g)T)}$ est

$$\mathfrak{A}^\circ K^\circ\langle Z,T\rangle + (1-gT)K^\circ\langle Z,T\rangle .$$

Soit $\Sigma a_n T^n \in K^\circ\langle Z,T\rangle$ tel que $\Sigma\varphi(a_n)T^n = (1-\varphi(g)T)(\Sigma u_n T^n)$ où $\Sigma u_n T^n \in \mathcal{O}_X(X)^\circ\langle T\rangle$. Montrons qu'il existe $v_n \in K^\circ\langle Z\rangle$ tel que $\varphi(v_n) = u_n$. Comme $u_n \to 0$ il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ d'après (1), on puisse trouver $v_n \in K^\circ\langle Z\rangle$ avec $\varphi(v_n) = u_n$.

Autrement on a

$$u_0 = \varphi(a_0),\, u_1 = \varphi(ga_0+a_1),\, \ldots,\, u_n = \varphi(g^n a_0 + g^{n-1}a_1 + \cdots + a_n)$$

pour $n \leqslant n_0$. Ce qui détermine bien le noyau cherché.

Soit $f \in (\ker \varphi_p)^\circ$, alors $f = \lim f_n$, où $f_n \in \varinjlim \dfrac{K^\circ\langle Z,T\rangle}{(1-gT)}$. On a $\varphi'_p(f_n) \to 0$, d'après (2) il existe $h_n \in \varinjlim \dfrac{K^\circ\langle Z,T\rangle}{(1-gT)}$ tel que

$$c\|h_n\| \leqslant \|\varphi'_p(f_n)\| \leqslant \|h_n\| \qquad \text{et} \qquad \varphi'_p(f_n) = \varphi'_p(h_n).$$

On peut supposer que $h_n, f_n \in \dfrac{K^\circ\langle Z,T\rangle}{(1-gT)}$ pour un certain g. Ainsi l'étude qui précède montre que $h_n - f_n \in \mathfrak{A}^\circ . K^\circ\langle Z\rangle_{(0)}$. Ce qui montre que $(\ker \varphi_p)^\circ$ est l'adhérence de $\mathfrak{A}^\circ . K^\circ\langle Z\rangle_{(0)}$. Or $\mathfrak{A}^\circ$ est de type fini sur $K^\circ\langle Z\rangle_{(0)}$ puisque $\bar{K}[Z]_{(Z)}$ est nœthérien (théorème 1). D'autre part $K\langle Z\rangle_{(0)}$ est une algèbre de Banach nœthérienne, il suit donc que $\mathfrak{A}^\circ . K^\circ\langle Z\rangle_{(0)}$ est fermé (lemme II.3.8 [3] ou prop. 3.1 [10]). Il est alors clair que $\ker \varphi_p = \mathfrak{A} . K\langle Z\rangle_{(0)}$.

COROLLAIRE. — *Les hypothèses sont celles du théorème. Alors l'algèbre* $\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1, T_2, \ldots, T_s\rangle$ *est nœthérienne.*

Démonstration. – L'homomorphisme φ_p induit un homomorphisme surjectif de $K\langle Z\rangle_{(0)}\langle T_1,\ldots,T_s\rangle$ sur $\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1,\ldots,T_s\rangle$. Il suffit donc de montrer que $K\langle Z\rangle_{(0)}\langle T_1,\ldots,T_s\rangle$ est nœthérien. Si $\Sigma a_\nu T^\nu \in K\langle Z\rangle_{(0)}\langle T\rangle$ par définition on a $\|\Sigma a_\nu T^\nu\| = \max_i \|a_\nu\|$. Si $\{e_i\}_i$ est une base normale d'algèbre de $K\langle Z\rangle_{(0)}$ il suit que $\{T^\nu e_i\}_{\nu,i}$ est une base normale d'algèbre de $K\langle Z\rangle_{(0)}\langle T\rangle$. Son algèbre résiduelle est $\bar{K}[Z]_{(Z)}[T]$ qui est un anneau nœthérien, ainsi le théorème 1 montre que $K\langle Z\rangle_{(0)}\langle T\rangle$ est nœthérien.

Remarque. – La condition, p défini sur $\bar{K}$, n'est pas indispensable, néanmoins elle simplifie les démonstrations. Indiquons comment on peut procéder pour généraliser le théorème 3.

Soient X un espace affinoïde réduit, $\bar{X}$ sa réduction canonique, $A \subset \bar{X}$ un sous-ensemble non vide possédant les propriétés suivantes :

i) $A = \cap U$ où U parcourt les ouverts de $\bar{X}$ contenant A.

ii) Si $U \supset A$ est un ouvert, il existe un ouvert affine V avec $U \supset V \supset A$. Dans le cas où les points de A sont définis sur $\bar{K}$ on montre par la méthode du théorème que $\mathcal{O}_{X,(A)} \overset{\text{déf}}{=} \widehat{\varinjlim_{U\supset A}}\, \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ est une algèbre nœthérienne.

Soit $p \in \bar{X}$ un point (quelconque), alors il existe une extension finie L de K telle que $[L:K] = [\bar{L}:\bar{K}]$ et que p soit défini sur $\bar{L}$. Soient $X' = X \times_K L$ et $\bar{X}' = \bar{X} \times_{\bar{K}} \bar{L}$ sa réduction canonique. Soit A l'ensemble (fini) des points de $\bar{X}'$ au-dessus de p, cet ensemble satisfait i) et ii). Ainsi $\mathcal{O}_{X',(A)}$ est nœthérien et comme $\mathcal{O}_{X',(A)} \simeq \mathcal{O}_{X,(p)} \otimes_K L$ il suit que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est nœthérien.

2. COMPLÉTÉ FORMEL ET FIBRE FORMELLE

La localisation formelle $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est un anneau nœthérien. Néanmoins les techniques du § 1 ne permettent pas de montrer que tout idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ soit de codimension finie et qu'ainsi $\mathrm{Spm}(\mathcal{O}_{X,(p)})$ s'identifie à $r^{-1}(p)$. Pour ce faire nous avons besoin d'une algèbre auxiliaire nœthérienne factorielle dont la réduction correspond essentiellement à $\bar{K}[[Z_1,Z_2,\ldots,Z_n]]$ (§ 2.1, 2.2). Elle permettra de définir un complété formel de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ dont la réduction sera essentiellement $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ (§ 2.3.2).

2.1. Une algèbre de sérielles formelles.

2.1.1. *Définition de l'algèbre* $C_n^{\cdot}$.

Soient $k \subset K$ deux corps valués complets. Posons

$$C_n = K \underset{k^{\circ}}{\hat{\otimes}} k^{\circ}[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!] \subset K \otimes K^{\circ}[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!]$$
$$\subset K[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!].$$

Ainsi $f \in C_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $f = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^n} a_\nu X^\nu$. On définit sur C_n une norme de K-algèbre par

$$\|f\| = \sup_\nu |a_\nu|.$$

Cette norme est multiplicative, c'est-à-dire $\|fg\| = \|f\|.\|g\|$ et on peut montrer que cette norme n'est autre que la norme tensorielle sur $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!]$. On a

$$\|C_n\| = |K|, \quad C_n^{\circ} = \{f \mid \|f\| \leqslant 1\} = K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!],$$
$$\bar{C}_n = C_n^{\circ}/C_n^{\circ\circ} = \bar{K} \otimes \bar{k}[\![X]\!].$$

2.1.2. *Automorphismes de l'algèbre* C_n.

Désormais on suppose que k est un sous-corps fermé de K, que la valeur absolue induite sur k est discrète (c.à.d. $|k^\times| \simeq \mathbf{Z}$) et que $\bar{K}$ est une extension algébrique de $\bar{k}$. Il nous faut d'abord caractériser les éléments de $C_n = K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ parmi ceux de $K[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$.

Définition 3 (ou notation). — *Soit* S *une partie de* K; *on note* $\mathrm{Conv}_{k^{\circ}}(S)$ *l'adhérence du sous-*k°*-module de* K *engendré par* S. *C'est donc le plus petit « convexe » fermé du k-espace de Banach contenant* S.

Lemme 2. — *Soit* $f = \Sigma a_\nu X^\nu \in K^{\circ}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *La série* f *est un élément de* $C_n^{\circ} = K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!]$.

2) *Il existe une suite* $\{e_n\}$ *d'éléments de* K° *avec* $0 = \lim_{n\to\infty} e_n$ *et* $\{a_\nu\}_\nu \subset \mathrm{Conv}_{k^{\circ}}(\{e_n\})$.

Démonstration. — 1) $\Rightarrow$ 2) On a $f = \Sigma e_n \otimes g_n$ où $g_n \in k^\circ[\![X]\!]$, $e_n \in K^\circ$ et $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$. Il est alors clair que $a_\nu \in \mathrm{Conv}_{k^\circ}(\{e_n\})$.

2) $\Rightarrow$ 1) Soient $f = \Sigma a_\nu X^\nu$ et $a_\nu \in \mathrm{Conv}_{k^\circ}(\{e_n\})$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N = N(\varepsilon)$ tel que $|e_n| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Alors $a_\nu = \lambda_{\nu,1}e_1 + \cdots + \lambda_{\nu,N}e_N + a'_\nu$, avec $|a'_\nu| < \varepsilon$, $\lambda_{\nu,i} \in k^\circ$. On a donc

$$(1) \qquad f = \sum_{i=1}^{n} e_i\left(\sum_\nu \lambda_{\nu,i}X^\nu\right) + \sum_\nu a''_\nu X^\nu .$$

Puisque $\sum_\nu \lambda_{\nu,i}X^\nu \in k^\circ[\![X]\!]$ et que $\left\|\sum_\nu a'_\nu X^\nu\right\| < \varepsilon$, l'égalité (1) montre que $f \in K^\circ \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$.

LEMME 3. — *Soient $\{e_n\}$ une suite de K° telle que $0 = \lim_{n\to\infty} e_n$, $R = k^\circ[e_n]_n$, la sous-k°-algèbre engendrée par $\{e_n\}$ sur k°. Alors il existe une suite $\{v_n\}$ de K° telle que $0 = \lim_{n\to\infty} v_n$ et $R \subset \mathrm{Conv}_{k^\circ}(\{v_n\})$.*

Démonstration. — Clairement on a

$$R \subset \mathrm{Conv}_{k^\circ}(\{e_1^{\alpha_1} \cdots e_n^{\alpha_n} | n \geqslant 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0\}).$$

On peut supposer (quitte à changer les indices) que

$$|e_1| = |e_2| \cdots = |e_N| = 1 > |e_{N+1}| \geqslant |e_{N+2}| \geqslant \cdots .$$

Il existe un polynôme unitaire $P_i(T) \in k^\circ[T]$ tel que $\bar{P}_i(T)$ soit le polynôme minimal de $\bar{e}_i$ sur $\bar{k}$ de degré d_i. Tout polynôme $P(T) \in k^\circ[T]$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$(2) \quad P(T) = A_0(T) + A_1(T)P_i(T) + \cdots + A_s(T)P_i(T)^s,$$

avec $d^\circ A_i(T) < d_i$.
Il suit alors de (2) que $e_1^{\alpha_1} \cdots e_n^{\alpha_n} \in \mathrm{Conv}_{k^\circ}(S)$ où

$$S = \left\{ e_1^{\beta_1}e_2^{\beta_2} \cdots e_N^{\beta_N}P_1(e_1)^{\gamma_1} \cdots P_N(e_N)^{\gamma_N}e_{N+1}^{\alpha_{N+1}} \cdots e_{N+k}^{\alpha_{N+k}} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \leqslant \beta_i < d_i, \gamma_i \geqslant 0 \\ \alpha_{N+j} \geqslant 0, k \geqslant 0 \end{matrix} \right\}.$$

Puisque $|P_i(e_i)| < 1$, $|e_{N+j}| < 1$, la suite S a pour limite zéro. Ainsi le lemme est montré.

LEMME 4. — *Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![Y_1, \ldots, Y_m]\!]$, $\|s_i\| \leqslant 1$ et $|s_i(0,\ldots,0)| < 1$. Alors il existe un unique* K*-homomorphisme* φ, *de*

$K \hat{\otimes} k^{o}[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!]$ *dans* $K \hat{\otimes} k^{o}[\![Y_1,\ldots,Y_m]\!]$ *tel que* $\varphi(X_i) = s_i$. *Il est défini par* $\varphi(f(X_1,X_2,\ldots,X_n)) = f(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.

Démonstration. –

Existence de φ. – Soit $f \in k^{o}[\![X]\!]$, par la formule de Taylor on a

$$f(X+T) = \sum_{\nu} f_\nu(X)T^\nu \quad \text{où} \quad f_\nu(X) \in k^{o}[\![X]\!].$$

Soit donc $s'_i = s_i - s_i(0,\ldots,0)$. On a donc

$$f(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)} f_\nu(s_1(0),\ldots,s_n(0))\, s_1'^{\nu_1} s_2'^{\nu_2} \ldots s_n'^{\nu_n}.$$

Or $f_\nu(s_1(0),\ldots,s_n(0))$ est bien défini puisque $|s_i(0)| < 1$ et comme $s'_i(0) = 0$, on a $f(s_1,\ldots,s_n) \in K[\![Y_1,\ldots,Y_m]\!]$. Il s'agit de montrer que $f(s_1,\ldots,s_n) \in K \hat{\otimes} k^{o}[\![Y]\!]$. Puisque $s_1, \ldots, s_n \in K \hat{\otimes} k^{o}[\![Y]\!]$ le lemme 2 montre qu'il existe une suite $\{e_m\}_m$ de K telle que

$$s_{i,\nu} \in \operatorname{Conv}_{k^o}(\{e_m\}) \qquad \text{où} \qquad \lim_{m\to\infty} e_m = 0, \quad s_i(Y) = \sum_{\nu} s_{i,\nu}Y^\nu.$$

On a $s_i(0) \in \operatorname{Conv}_{k^o}(\{e_m\})$ et les coefficients $f_\nu(s_1(0),\ldots,s_n(0))$ de $s_1'^{\nu_1}, s_2'^{\nu_2}, \ldots, s_n'^{\nu_n}$ sont dans l'adhérence de l'anneau $R = k^{o}[e_n]_n$. Or le lemme 3 montre qu'il existe une suite $\{u_n\}$ de K^o telle que $R \subset \operatorname{Conv}_{k^o}(\{u_n\})$. Ainsi

$$f(s_1,s_2,\ldots,s_n) \in K \hat{\otimes} k^{o}[\![Y]\!] \qquad \text{et} \qquad \|f(s_1,s_2,\ldots,s_n)\| \leqslant \|f\|.$$

On pose donc $\varphi(f) = f(s_1,\ldots,s_n)$. Alors φ se prolonge à $f \in K \hat{\otimes} k^{o}[\![X]\!]$.

Unicité de φ. – Soit φ un K-homomorphisme de $K \hat{\otimes} k^{o}[\![X]\!]$ dans $K \hat{\otimes} k^{o}[\![Y]\!]$ tel que $\varphi(X_i) = s_i$. D'après la partie existence on a un K-homomorphisme τ de $K \hat{\otimes} k^{o}[\![X]\!]$ dans lui-même tel que $\tau(X_i) = X_i - s_i(0,\ldots,0)$. Soit $\varphi' = \varphi \circ \tau$ on a $\varphi'(X_i) = s'_i = s_i(0)$. Montrons que $\varphi'(f) = f(s'_1,\ldots,s'_n)$. Soit $f = \Sigma a_\nu X^\nu \in K \otimes k^{o}[\![X]\!]$, posons $f_N = \sum_{|\nu|\geqslant N} a_\nu X^\nu$. On a

$$(3) \quad \varphi'(f) - f(s'_1,\ldots,s'_n) = \varphi'(f_N) - f_N(s'_1,\ldots,s'_n) \in (Y_1,\ldots,Y_m)^N.$$

Comme (3) est vrai pour tout N, il en résulte que

$$\varphi'(f) = f(s'_1,\ldots,s'_n).$$

Et ainsi $\varphi(f) = f(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.

COROLLAIRE. — *Soient* $s_1,\ldots,s_n \in C_n = K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$ *avec* $\|s_i\| \leqslant 1$ $|s_i(0)| < 1$. *Alors le* K-*endomorphisme* φ *défini par* $\varphi(X_i) = s_i$ *induit un* K-*endomorphisme* $\bar{\varphi}$ *de* $\bar{K} \otimes \bar{k}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$. *De plus si* $\bar{\varphi}$ *est un automorphisme alors* φ *est un automorphisme.*

Démonstration. — Exercice.

2.2. Un théorème de division et de préparation de Weierstrass.

DÉFINITION. — *Soient* $f \in C_n^{\circ} = K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$, $\bar{f}$ *son image dans* $\bar{C}_n = \bar{K} \otimes \bar{k}[\![X_1,\ldots,X_n]\!]$. *On dit que* f *est régulier en* X_n *et d'ordre* d *si* $\bar{f}(0,0,\ldots,0,X_n) \neq 0$ *et si* $d = \mathrm{ord}_{X_n}\bar{f}(0,0,\ldots,0,X_n)$.

2.2.1. — *Le théorème de Weierstrass.*

THÉORÈME 4 (de division et de préparation de Weierstrass).

1) (Division). — *Soient* $f \in C_n$ *régulier en* X_n, *d'ordre* d, $h \in C_n$. *Alors il existe des éléments uniques* $q \in C_n$ *et* $r \in C_{n-1}[X_n]$ *tels que*

$$h = fq + r, \quad d^{\circ}_{X_n} r < d, \qquad \|h\| = \max(\|q\|, \|r\|).$$

2) (Préparation). — *Soit* $f \in C_n$ *de norme* 1. *Alors il existe un* K-*automorphisme* σ *de* C_n *tel que* $\sigma(f)$ *soit régulier en* X_n.

Démonstration. — 1) Puisque $\bar{K}$ est algébrique sur $\bar{k}$, il existe un corps ℓ extension finie de $\bar{k}$, avec $\ell \subset \bar{K}$, et $\bar{f}(X_1,\ldots,X_n) \in \ell[\![X]\!]$. Soient $\omega_1,\ldots,\omega_s \in K^{\circ}$ dont les images résiduelles $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2,\ldots,\bar{\omega}_s$ constituent une base de ℓ sur $\bar{k}$. Alors il existe $g(X) \in K^{\circ} \otimes k^{\circ}[\![X]\!]$, $\lambda \in K$, $|\lambda| = 1$ satisfaisant

$$(1) \qquad g = \Sigma a_{\nu} X^{\nu}, \quad a_{\nu} \in \bigoplus_{i=1}^{s} k^{\circ}\omega_i,$$
$$g(0,0,\ldots,0,X_n) = X_n^d + u_{d+1}X_n^{d+1} \ldots, \bar{\lambda}\bar{g} = \bar{f}.$$

Soient $h \in K^\circ \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$, R la k°-algèbre engendrée par les coefficients de g et h, alors les lemmes 2 et 3 montrent qu'il existe une suite $\{v_n\}$ de K° avec $0 = \lim v_n$ et $R \subset \mathrm{Conv}_{k^\circ}(\{v_n\})$. Il suit de (1) qu'on peut effectuer la division de Weierstrass de h par g dans l'anneau $R[\![X]\!]$; il existe $q, r \in R[\![X]\!]$ uniques tels que

$$(2) \qquad h = qg + r, \qquad d^\circ_{X_n} r < d.$$

Il suit de (2) que pour $h \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$ il existe $q, r \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$ uniques avec

$$(3) \quad h = qg + r, \quad d^\circ_{X_n} r < d \quad \text{et} \quad \|h\| = \max(\|q\|, \|r\|).$$

Posons maintenant $f_1 = f - \lambda g$, alors (3) s'interprète ainsi; soit $h \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$, il existe $q, r, h_1 \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![X]\!]$ avec

$$(4) \qquad \begin{gathered} h = qf + r + h_1, \quad d^\circ_{X_n} r < d, \\ \|h\| = \max(\|q\|, \|r\|), \quad \|h_1\| \leqslant \|f_1\| . \|h\| . \end{gathered}$$

Ainsi par récurrence en utilisant (4) on construit des suites (h_n), (q_n), (r_n) qui satisfont

$$(5) \qquad \begin{gathered} h_n = q_n f + r_n + h_{n+1}, \quad d^\circ_{X_n} r_n < d, \\ \|h_n\| = \max(\|q_n\|, \|r_n\|), \quad \|h_{n+1}\| \leqslant \|f_1\| \, \|h_n\| . \end{gathered}$$

Il suit que $\|h_n\| \leqslant \|f_1\|^n . \|h\|$, or $\|f_1\| < 1$, ainsi les séries $\Sigma q_n, \Sigma r_n$ sont convergentes. Posons

$$q' = q + \sum_{n=1}^{\infty} q_n, \quad r' = r + \sum_{n=1}^{\infty} r_n .$$

De (5) on déduit

$$(6) \quad h = q'f + r', \ d^\circ_{X_n} r' < d \qquad \text{et} \qquad \|h\| = \max(\|q'\|, \|r'\|).$$

Ainsi l'existence de la division est montrée. Pour l'unicité supposons $h = q'f + r' = q''f + r''$, il suit $(q' - q'')f = r'' - r'$. Quitte à multiplier par une constante on peut supposer $\|q' - q''\| = 1$ et donc $\|r'' - r'\| = 1$. Résiduellement on à $\overline{q' - q''} . \bar{f} = \overline{r'' - r'}$, de

$$\mathrm{ord}_{X_n} \bar{f}(0, \ldots, 0, X_n) = d \qquad \text{et} \qquad d^\circ_{X_n} \overline{r'' - r'} < d$$

on déduit une contradiction.

2) Soit $\bar{f} \in \bar{K} \otimes \bar{k}[\![X]\!]$, il existe un corps ℓ extension finie de $\bar{k}$ avec $\ell \subset \bar{K}$ tel que $\bar{f} \in \ell[\![X]\!]$. On sait qu'il existe des entiers $u(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que l'automorphisme s de $\ell[\![X]\!]$ défini par $s(X_i) = X_i + X_n^{u(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $s(X_n) = X_n$ transforme $\bar{f}$ en un élément φ tel que $\varphi(0,\ldots,0,X_n) \neq 0$ (Bourbaki, alg. com. ch. 7, § 3, n° 7, lemme 3, p. 38, [2]). Alors le corollaire du lemme 4 montre que l'endomorphisme σ de C_n défini par $\sigma(X_i) = X_i + X_n^{u(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\sigma(X_n) = X_n$ est un automorphisme de C_n. On a bien $\sigma(f)$ régulier en X_n.

2.2.2. *Conséquences du théorème de Weierstrass.*

THÉORÈME 5 (conséquences du théorème de Weierstrass). — *Soient toujours $k \subset K$ deux corps valués complets, k de valuation discrète, $\bar{K}$ algébrique sur $\bar{k}$, $C_n = K \hat{\otimes}_{k^o} k^o[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!]$.*

1) *L'anneau C_n est nœthérien et factoriel.*

2) *Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de C_n, alors il existe un entier d et un homomorphisme injectif et fini $C_d \hookrightarrow C_n/\mathfrak{A}$. La dimension de Krull de C_n est n.*

3) *Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de C_n, alors le corps $C_n/\mathfrak{M}$ est une extension finie de K.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle du théorème II.3, p. 56 de [3]. Il suffit de remplacer « degré » par « ordre ».

2.2.3. *La (semi-) norme spectrale.*

Décrivons d'abord le spectre maximal de C_n. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ algébriques sur K et $|a_i| < 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors il existe un K-homomorphisme φ de C_n dans $K[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ tel que $\varphi(X_i) = a_i$ (c'est essentiellement le lemme 4). Alors $\ker \varphi$ est un idéal maximal de C_n. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de C_n, alors $L = C_n/\mathfrak{M}$ est une extension finie de K (théorème 5, partie 3). Soit φ l'homomorphisme canonique de C_n sur L. Posons $\varphi(X_i) = a_i$, alors on a $|a_i| < 1$. En effet, supposons $|a_i| \geqslant 1$, puisque a_i satisfait une équation de la forme

$$u_0 + u_1 a_i + \cdots + u_{m-1} a_i^{m-1} + a_i^m = 0 \quad \text{avec} \quad u_i \in K,$$

$|u_0| \geqslant |u_i|$, il suit que $f = u_0 + u_1 X_i + \cdots + X_i^m$ est un élément inversible de C_n, or $\varphi(f) = 0$. On a donc $|\varphi(X_i)| < 1$. En particulier si K est algébriquement clos, $\operatorname{Spm}(C_n)$ est en bijection avec $(K^{oo})^n$.

Soient $\mathfrak{A}$ un idéal de C_n, $A = C_n/\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de A il suit que $A/\mathfrak{M}$ est une extension finie de K munie d'une unique valeur absolue prolongeant celle de K. Soient $x = \mathfrak{M} \in \mathrm{Spm}(A)$, $f \in A$ et notons $|f(x)|$ la valeur absolue de l'image de f dans $A/\mathfrak{M}$. On définit la semi-norme spectrale sur A par

$$\|f\|_{sp} = \sup_{x \in \mathrm{Spm}(A)} |f(x)|.$$

Il suit que la (semi)-*norme spectrale sur* C_n *est la norme de* C_n définie en 2.1.1.

On pose

$$A^{o} = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} \leqslant 1\}, \quad A^{oo} = \{f \in A \mid \|f\|_{sp} < 1\}, \quad \bar{A} = A^{o}/A^{oo}.$$

PROPOSITION 2. — *Soient* $\mathfrak{A}$ *un idéal de* C_n, *la norme de* C_n *induit sur* $C_n/\mathfrak{A} = A$ *une norme de Banach notée* $\|.\|$.

1) *Le radical de* A *est égal au nilradical de* A. *La semi-norme spectrale est une norme si et seulement si* A *est une algèbre réduite.*

2) *Soit* $\varphi : C_d \hookrightarrow A$ *injectif et fini, alors* $\varphi(C_d^{o}) \subset A^{o}$ *et* A^{o} *est entier sur* $\varphi(C_d^{o})$. *On a* $A^{o} = \{f \in A \mid \sup_n \|f^n\| < \infty\}$ *et* $\|f\|_{sp} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}$.

La démonstration est analogue à celle de II.5.3, II.5.4, II.5.5 et II.5.6 de [3].

2.3. Le spectre maximal de $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

2.3.1. *Fidèle platitude de* $K \hat{\otimes} k^{o}[\![X]\!]$ *sur* $K\langle X\rangle_{(0)}$.

THÉORÈME 6. — *Soient* $k \subset K$ *deux corps valués complets,* k *muni d'une valuation discrète,* $\bar{K}$ *algébrique purement inséparable sur* $\bar{k}$. *Soient* i, j *les homomorphismes canoniques suivants :*

$$K\langle X_1,X_2,\ldots,X_n\rangle \overset{i}{\hookrightarrow} K\langle X_1,X_2,\ldots,X_n\rangle_{(0)} \overset{j}{\hookrightarrow} K \hat{\otimes} k^{o}[\![X_1,X_2,\ldots,X_n]\!].$$

Alors i *est plat,* j *est fidèlement plat,* Spm (j) *est bijectif,* Spm (i) *est injectif et* Spm (i) *a pour image* $r^{-1}(0)$.

Démonstration. — 1) Soient $\mathfrak{M}$ un maximal de $K \hat{\otimes} k^{o}[\![X]\!]$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap K\langle X\rangle_{(0)}$, $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} \cap K\langle X\rangle$. Comme $\mathfrak{M}$ est de codimension finie il suit que $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ sont de codimension finie et donc sont maximaux. Tout d'abord on a

$$(1)\qquad (K\langle X\rangle)\hat{}_{\mathfrak{M}''} = (K\langle X\rangle_{(0)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} = (K\hat{\otimes}k^{\circ}[\![X]\!])\hat{}_{\mathfrak{M}}.$$

Cette égalité est claire si $\mathfrak{M}$ est le point $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in (K^{\circ\circ})^n$; en effet on a

$$(K\langle X\rangle)\hat{}_{\mathfrak{M}''} = (K\langle X\rangle_{(0)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} = (K\hat{\otimes}k^{\circ}[\![X]\!])\hat{}_{\mathfrak{M}} = K[\![Y]\!]$$

où $Y_i = X_i - a_i$, le cas général est seulement techniquement un peu plus compliqué. Il suit alors trivialement de (1) que $\operatorname{Spm}(j)$ et $\operatorname{Spm}(i)$ sont injectifs.

2) Montrons que i et j sont plats. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
(K\langle X\rangle)_{\mathfrak{M}''} & \xrightarrow{i'} & (K\langle X\rangle_{(0)})_{\mathfrak{M}'} & \xrightarrow{j'} & (K\hat{\otimes}k^{\circ}[\![X]\!])_{\mathfrak{M}} \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\
(K\langle X\rangle)\hat{}_{\mathfrak{M}''} & \xrightarrow{\hat{i}'} & (K\langle X\rangle_{(0)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} & \xrightarrow{\hat{j}'} & (K\hat{\otimes}k^{\circ}[\![X]\!])\hat{}_{\mathfrak{M}}.
\end{array}$$

Comme α, β, γ sont fidèlement plats (théorème 56, p. 172, Matsumura, com. alg [6] ou prop. 9, chap. III, § 3, N. Bourbaki, alg. com. [2]) et que $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ sont des isomorphismes d'après (1) il suit que i et j sont plats (31, p. 24 Matsumura, com. alg. [6] ou prop. 15, chap. II, § 3, N. Bourbaki, alg. com. [2]).

3) Pour montrer la fidèle platitude de j, il faut vérifier que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $K\langle X\rangle_{(0)}$ on a

$$\mathfrak{M}K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!] \neq K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!].$$

Supposons le contraire, il existe $m_1, m_2, \ldots, m_s \in \mathfrak{M}$, $f_1, f_2, \ldots, f_s \in K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![X]\!]$, avec

$$(2)\qquad a = \sum_{i=1}^{s} m_i f_i, \quad a \in k^{\circ\circ}, \quad a \neq 0, \quad \|m_i\| \leqslant 1, \quad \|f_i\| \leqslant 1.$$

Soient $m_i' \in K^{\circ} \otimes k^{\circ}\langle X\rangle_{(0)}$, $f_i' \in K^{\circ} \otimes k^{\circ}[\![X]\!]$ tels que

$$\|m_i - m_i'\| \leqslant |a^2|, \quad \|f_i - f_i'\| \leqslant |a^2|.$$

Alors on a

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{s} m'_i f'_i = a(1 + ag) \quad \text{où} \quad g \in \mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ[\![\mathrm{X}]\!].$$

Puisque $k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$ est nœthérien local, d'idéal maximal $\mathfrak{N} = k^{\circ\circ} + \sum_{i=1}^{s} \mathrm{X}_i k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$ il suit que $k^\circ[\![\mathrm{X}]\!]$ est le complété de $k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$ pour la topologie $\mathfrak{N}$-adique, ainsi $k^\circ[\![\mathrm{X}]\!]$ est fidèlement plat sur $k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$ (theorem 56, p. 172 [6], prop. 9 chap. III, § 3 [2]). Il suit que par changement d'anneau que $\mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ[\![\mathrm{X}]\!]$ est fidèlement plat sur $\mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$. Soit $\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{s} m'_i \mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$, alors $\mathrm{I}(\mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ[\![\mathrm{X}]\!]) \cap \mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)} = \mathrm{I}$ ((4.c), p. 27, Matsumura [6]). Or de (3) il suit que $a \in \mathrm{I}.(\mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ[\![\mathrm{X}]\!])$, ainsi $a \in \mathrm{I}$. Il existe donc $g_1, \ldots, g_s \in \mathrm{K}^\circ \otimes k^\circ\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$ tels que

$$a = \sum_{i=1}^{s} m'_i g_i.$$

Il suit alors de (3) et (2) que

$$a(1+ah) = \sum_{i=1}^{s} m_i g_i \qquad \text{où} \qquad h \in \mathrm{K}\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}.$$

Ce qui prouve que $\mathfrak{M} = \mathrm{K}\langle \mathrm{X}\rangle_{(0)}$, d'où la contradiction.

Proposition 3. — *Soient* K *un corps valué complet,* k *un sous-corps fermé dont la valeur absolue induite est discrète et tel que* $\bar{\mathrm{K}}$ *soit algébrique, purement inséparable sur* $\bar{k}$, $\mathfrak{A}$ *un idéal de* $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}\rangle_{(0)}$. *Alors*

$$(\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^\circ[\![\mathrm{Z}]\!])^\circ = \mathfrak{A}^\circ.\mathrm{K}^\circ \hat{\otimes} k^\circ[\![\mathrm{Z}]\!].$$

Démonstration. — Puisque $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z}\rangle_{(0)} = \mathrm{K} \hat{\otimes} k^\circ\langle \mathrm{Z}\rangle_{(0)}$ admet une base normale d'algèbre il existe $f_1, \ldots, f_s \in \mathfrak{A}^\circ$ tel que

$$\mathfrak{A}^\circ = \Sigma f_i(\mathrm{K}^\circ \hat{\otimes} k^\circ\langle \mathrm{Z}\rangle_{(0)}).$$

Soit $g \in (\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^\circ[\![\mathrm{Z}]\!])^\circ$, alors il existe $a \in \mathrm{K}^{\circ\circ}$, $a \neq 0$, $u_i \in \mathrm{K}^\circ \hat{\otimes} k^\circ[\![\mathrm{Z}]\!]$ tels que

$$(1) \qquad ag = \sum_{i=1}^{s} f_i u_i.$$

Soient

$$A = \frac{K^o \hat{\otimes} k^o\langle Z\rangle_{(0)}}{a(K^o\hat{\otimes} k^o\langle Z\rangle_{(0)})} \simeq \frac{K^o \otimes k^o\langle Z\rangle_{(0)}}{a(K^o\otimes k^o\langle Z\rangle_{(0)})},$$
$$B = \frac{K^o \hat{\otimes} k^o[\![Z]\!]}{a(K^o\hat{\otimes} k^o[\![Z]\!])} \simeq \frac{K^o \otimes k^o[\![Z]\!]}{a(K^o\otimes k^o[\![Z]\!])}.$$

Puisque $K^o \otimes k^o[\![Z]\!]$ est fidèlement plat sur $K^o \otimes k^o\langle Z\rangle_{(0)}$ il suit que B est fidèlement plat sur A. Notons $u \mapsto \bar{u}$ les surjections qui définissent A et B. Par platitude on a $\left(\sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i A\right) \otimes B \cong \sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i B$, or $0 = \sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i \bar{u}_i$ d'après (1), donc $0 = \sum_{i=1}^{s} \bar{f}_i \otimes \bar{u}_i$. Ainsi il existe $\bar{a}_{ij} \in A$, $\bar{x}_j \in B$ avec $0 = \sum_i \bar{f}_i \bar{a}_{ij}$, $\bar{u}_i = \sum_j \bar{a}_{ij}\bar{x}_j$, soit donc

$$\sum_i f_i a_{ij} \in \mathfrak{A}^o \cap a(K^o\hat{\otimes} k^o\langle Z\rangle_{(0)}) = a\mathfrak{A}^o$$

et $u_i - \sum_j a_{ij}x_j = ab_i$ où $b_i \in K^o \hat{\otimes} k^o[\![Z]\!]$. La relation (1) s'écrit

$$ag = \sum_{i=1}^{s} f_i u_i = \sum_{i=1}^{s} f_i\left(\sum_j a_{ij}x_j\right) + a\sum_{i=1}^{s} f_i b_i .$$

Il est alors clair que $g \in \mathfrak{A}^o . K^o \hat{\otimes} k^o[\![Z]\!]$.

2.3.2. *Un complété formel pour* $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

Soient k un corps valué, complet pour une valeur absolue discrète, X un espace affinoïde réduit, $r\colon X \to \bar{X}$ la réduction canonique, $p \in \bar{X}$. L'algèbre $\mathcal{O}_X(X)^o$ est un anneau nœthérien, ainsi que l'algèbre $\mathcal{O}^o_{X,(p)}$. De plus $\mathcal{O}^o_{X,(p)}$ est un anneau local, soit $\hat{\mathcal{O}}^o_{X,(p)}$ son complété pour la topologie de l'idéal maximal. Cette dernière algèbre peut être normée en posant $\|\lim f_n\| = \lim \|f_n\|$ puisque $\|f_n\|$ est stationnaire à partir d'un certain rang. On appelle complété formel de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ et on le note $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ l'algèbre $k \otimes \hat{\mathcal{O}}^o_{X,(p)}$. C'est une algèbre de Banach, nœthérienne dont la réduction est $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$.

Lorsque le corps de base K n'est plus discret, l'algèbre $\mathcal{O}^o_{X,(p)}$ n'est plus nœthérienne, ainsi la construction précédente n'est plus possible.

Néanmoins en choisissant un sous-corps fermé k pour lequel la valeur absolue induite est discrète on peut construire un complété formel de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ qui a des propriétés analogues. En revanche cette algèbre dépend du corps k.

Soient X un espace affinoïde sur K, $r: X \to \bar{X}$ sa réduction canonique $p \in \bar{X}$ défini sur $\bar{K}$. Soient $n \geqslant 1$ et φ un homomorphisme surjectif de $K\langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle$ sur $\mathcal{O}_X(X)$ tel que $\bar{\varphi}$ soit un homomorphisme surjectif de $\bar{K}[Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]$ sur $\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X})$ et que p soit l'image de l'idéal maximal $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Soient $\mathfrak{A} = \ker \varphi$ et $k \subset K$ un corps fermé dont la valeur absolue induite est discrète tel que $\bar{K}$ soit algébrique, purement inséparable sur $\bar{k}$. Alors on sait (théorème 3) que
$$\mathcal{O}_{X,(p)} \simeq \frac{K \hat{\otimes} k\langle Z\rangle_{(0)}}{\mathfrak{A}\, K \hat{\otimes} k\langle Z\rangle_{(0)})}.$$

On appelle *un complété formel* de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ l'algèbre $\dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}$ et *on le note* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Cette algèbre dépend du choix de k et a priori de la représentation $\mathcal{O}_X(X) = K\langle Z\rangle/\mathfrak{A}$. Si K est algébriquement clos on verra que $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est indépendant de la représentation (proposition 7, § 2.5). Puisque $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ est nœthérien il suit que $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est nœthérien.

2.3.3. *Le spectre maximal de* $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

THÉORÈME 7. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur* K, $r: X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{X}$ *défini sur* $\bar{K}$. *Soient les morphismes canoniques* $\mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{X,(p)} \xrightarrow{j} \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. *Alors* i *est plat,* j *fidèlement plat,* $\operatorname{Spm}(j)$ *est bijectif,* $\operatorname{Spm}(i)$ *est injectif et a pour image* $r^{-1}(p)$. *Il suit que la norme de* $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *est la norme spectrale. Soient* $\mathfrak{M} \in \operatorname{Spm}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_{X,(p)}$, $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_X(X)$. Alors on a
$$(\mathcal{O}_X(X))\hat{}_{\mathfrak{M}''} = (\mathcal{O}_{X,(p)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} = (\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})\hat{}_{\mathfrak{M}}$$
et les algèbres $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *et* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ *sont réduites. Enfin on a*
$$\dim \mathcal{O}_{X,(p)} = \dim \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \dim \mathcal{O}_{\bar{X},p} = \sup_{\mathfrak{M} \in r^{-1}(p)} h^t(\mathfrak{M}),$$
où $h^t(\mathfrak{M})$ *désigne la hauteur de* $\mathfrak{M}$.

Démonstration. — Soient $n \geqslant 1$, $\varphi: K\langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$ tel que $\bar{\varphi}$ soit surjectif et que p soit l'image de l'idéal maximal

$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Soit $\mathfrak{A} = \ker \varphi$, alors on a $K\langle X\rangle_{(0)}/\mathfrak{A}K\langle X\rangle_{(0)} = \mathcal{O}_{X,(p)}$ (théorème 3) et

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \overset{\text{déf}}{=} K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]/\mathfrak{A}(K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]).$$

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} K\langle Z\rangle \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\alpha"'] & K\langle Z\rangle_{(0)} \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\beta"'] & K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!] \arrow[d, "\gamma"'] \\ \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "i"] & \mathcal{O}_{X,(p)} \arrow[r, "j"] & \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \end{tikzcd}$$

où i', j' sont les morphismes injections canoniques, α, β, γ les surjections canoniques, i, j les morphismes induits.

Il s'ensuit d'abord que i' plat implique i plat, j' fidèlement plat implique j fidèlement plat. D'autre part (1) donne le diagramme commutatif suivant pour les spectres maximaux

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spm}(K\langle Z\rangle) & \operatorname{Spm}(K\langle Z\rangle_{(0)}) \arrow[l, hook', "\operatorname{Smp}(i')"'] & \operatorname{Spm}(K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]) \arrow[l, hook', "\operatorname{Spm}(j')"'] \\ X \arrow[u, hook, "\operatorname{Spm}\alpha"] & \operatorname{Spm}(\mathcal{O}_{X,(p)}) \arrow[l, "\operatorname{Spm}(i)"'] \arrow[u, hook, "\operatorname{Spm}\beta"] & \operatorname{Spm}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}) \arrow[l, "\operatorname{Spm}(j)"'] \arrow[u, hook, "\operatorname{Spm}\gamma"] \end{tikzcd}$$

D'abord les maximaux de $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ sont de codimension finie (théorème 5) il suit que leurs images réciproques par j' et $i' \circ j'$ sont des maximaux (de codimension finie) et que les maximaux de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ sont de codimension finie, donc aussi leurs images réciproques par i et $i \circ j$ (la même remarque est valable pour $K\langle Z\rangle_{(0)}$ et $\mathcal{O}_{X,(p)}$). Sachant que $\operatorname{Spm} i'$ et $\operatorname{Spm} j'$ sont injectifs (théorème 6) il suit que $\operatorname{Spm} i$ et $\operatorname{Spm} j$ le sont aussi. De plus on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(\operatorname{Spm}\beta) &= \operatorname{im}(\operatorname{Spm}\gamma) \\ &= \{\mathfrak{M} \in \operatorname{Spm}(K\langle Z\rangle_{(0)}) \simeq \operatorname{Spm}(K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]) \mid \mathfrak{M} \supset \mathfrak{A}\}, \end{aligned}$$

ainsi $\operatorname{Spm} j$ est bijectif. Soit U un ouvert principal contenant p, les morphismes $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(r^{-1}(U)) \to \mathcal{O}_{X,(p)}$ impliquent

$$\operatorname{Spm}(i)\ (\operatorname{Spm}(\mathcal{O}_{X,(p)})) \subset r^{-1}(U).$$

Il suit alors que $\operatorname{im}(\operatorname{Spm} i) = r^{-1}(p)$.

Soient $\mathfrak{M}$ un maximal de $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap K\langle Z\rangle_{(0)}$, $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} \cap K\langle Z\rangle$, alors on a

$$(K(Z))\hat{}_{\mathfrak{M}''} = (K\langle Z\rangle_{(0)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} = (K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!])\hat{}_{\mathfrak{M}}$$

(première partie de la démonstration du théorème 6). De plus, soient A un anneau nœthérien, $\mathfrak{N}$ un maximal de A, $I \subset \mathfrak{N}$ un idéal de A, enfin $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}/I$. Alors on a $(A/I)\hat{}_{\mathfrak{N}'} = \dfrac{\hat{A}_{\mathfrak{N}}}{I\hat{A}_{\mathfrak{N}}}\cdot$ Il suit donc que

(3) $(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})\hat{}_{\mathfrak{M}} = (\mathcal{O}_{X,(p)})\hat{}_{\mathfrak{M}'} = (\mathcal{O}_X(X))\hat{}_{\mathfrak{M}''}$ pour $\mathfrak{M}$ maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ et

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_{X,(p)}, \ \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} \cap \mathcal{O}_X(X).$$

Puisque $\mathcal{O}_X(X)$ est une algèbre affinoïde réduite il suit que $(\mathcal{O}_X(X))_{\mathfrak{M}''}$ est réduit, ainsi que $(\mathcal{O}_X(X))\hat{}_{\mathfrak{M}''}$ (lemme 5′ ci-après). Alors $(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})_{\mathfrak{M}}$ et $(\mathcal{O}_{X,(p)})_{\mathfrak{M}'}$ sont réduits, ce qui prouve que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ sont des algèbres réduites.

Notons $h^t(\mathfrak{M})$ la hauteur d'un idéal maximal $\mathfrak{M}$. Le lemme 5 qui suit dit que $h^t(p) = \sup\limits_{\mathfrak{M} \in r^{-1}(p)} h^t(\mathfrak{M})$. Or $h^t(\mathfrak{M}) = \dim (\mathcal{O}_X(X))_{\mathfrak{M}} = \dim (\mathcal{O}_X(X))\hat{}_{\mathfrak{M}}$. Ainsi l'égalité (3) montre que pour tout $\mathfrak{N}$ maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{X,p)}$ on a

$$h^t(\mathfrak{N}) = h^t(j^{-1}(\mathfrak{N})) = h^t((j \circ i)^{-1}(\mathfrak{N})).$$

On a donc

$$\dim \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \dim \mathcal{O}_{X,(p)} = \sup_{\mathfrak{M} \in r^{-1}(p)} h^t(\mathfrak{M}) = h^t(p) = \dim \mathcal{O}_{\bar{X},p}.$$

Lemme 5. — *Soient* A *une algèbre affinoïde réduite,* $\bar{A}$ *sa réduction,* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(\bar{A})$. *Alors* $h^t(\mathfrak{m}) = \max\limits_{\mathfrak{M} \in r^{-1}(\mathfrak{m})} h^t(\mathfrak{M})$.

Démonstration. — Il existe $d \geqslant 0$ et une injection finie $T_d \hookrightarrow A$, ainsi $\bar{T}_d \hookrightarrow \bar{A}$, est fini (II.6.7, p. 77, [3]) ce qui prouve que $\dim A = \dim \bar{A}$.

Soient $X = \operatorname{Spm}(A)$, U un rationnel de X, $\varphi : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$. Si $\mathfrak{M}$ est un maximal de $\mathcal{O}_X(U)$ on a $h^t(\mathfrak{M}) = h^t(\varphi^{-1}(\mathfrak{M}))$; en effet $\mathcal{O}_X(X)\hat{}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{M})} = \mathcal{O}_X(U)\hat{}_{\mathfrak{M}}$ (III.7.2, p. 116, [3]).

Soit $\bar{X}$ la réduction de X, il existe un ouvert principal $V \ni p$ tel que $\dim V = h^t(\mathfrak{m})$. Comme

$$\dim V = \dim \mathcal{O}_{\bar{X}}(V) = \dim \overline{\mathcal{O}_X(r^{-1}V)} = \dim \mathcal{O}_X(r^{-1}(V)) \geqslant h^t\mathfrak{M}$$

pour $$\mathfrak{M} \in r^{-1}(V),$$

on a donc pour $\mathfrak{M} \in r^{-1}(\mathfrak{m})$, $h^t(\mathfrak{M}) \leqslant h^t(\mathfrak{m})$.

Supposons maintenant A intègre, c'est-à-dire X Zariski irréductible. Montrons qu'alors $h^t(\mathfrak{M}) = \dim A$ pour tout $\mathfrak{M} \in X$. Ceci est vrai pour $A = T_d$, comme A est intègre et T_d intégralement clos, le « going up » « going down » est vrai pour $T_d \overset{\text{fini}}{\hookrightarrow} A$ (theorem 5, p. 33, [6]). Ainsi tout idéal maximal de A est de hauteur d.

Enfin, soient $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ les idéaux premiers minimaux de A, le morphisme canonique $\varphi : A \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} A/\mathfrak{P}_i$ est isométrique. Soit $\varphi_i : A \to A/\mathfrak{P}_i$. En réduction on a

$$\bar{\varphi} : \bar{A} \hookrightarrow \oplus \overline{A/\mathfrak{P}_i} \quad \text{et} \quad \ker \bar{\varphi}_i = \sqrt{\bar{\mathfrak{P}}_i}\,.$$

Donc $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{s} V(\bar{\mathfrak{P}}_i)$. On peut supposer (par exemple) que $\mathfrak{m} \in V(\bar{\mathfrak{P}}_1)$ et que $h^t(\mathfrak{m}) = \dim V(\bar{\mathfrak{P}}_1)$. Il existe donc $\mathfrak{m}_1$ maximal de $\overline{(A/\mathfrak{P}_1)}$ avec $\mathfrak{m} = \bar{\varphi}_1^{-1}(\mathfrak{m}_1)$ et ainsi $h^t(\mathfrak{m}) = h^t(\mathfrak{m}_1)$. Soit $\mathfrak{M}_1$ maximal de $A/\mathfrak{P}_1$ tel que $r(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{m}_1$. Comme $A/\mathfrak{P}_1$ est irréductible on a

$$h^t(\mathfrak{M}_1) = \dim (A/\mathfrak{P}_1) = \dim \overline{(A/\mathfrak{P}_1)} \geqslant h^t(\mathfrak{m}_1)\,.$$

Comme on a toujours $h^t(\mathfrak{M}_1) \leqslant h^t(r(\mathfrak{M}_1))$, il suit que $h^t(\mathfrak{M}_1) = h^t(\mathfrak{m}_1)$. Soit alors $\mathfrak{M} = \varphi^{-1}(\mathfrak{M}_1 \oplus A/\mathfrak{P}_2 \oplus \ldots \oplus A/\mathfrak{P}_s)$, il est immédiat que $r(\mathfrak{M}) = \mathfrak{m}$ et $h^t(\mathfrak{M}) = h^t(\mathfrak{M}_1) = h^t(\mathfrak{m}_1) = h^t(\mathfrak{m})$.

Ce qui prouve le lemme.

LEMME 5'. — *Soient* A *une algèbre affinoïde réduite,* $\mathfrak{M}$ *un idéal maximal de* A. *Alors* $\hat{A}_{\mathfrak{M}}$ *est réduit.*

Démonstration (certainement connue). — On se ramène au cas intègre. Soient $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_s$ les premiers minimaux de A. Alors $\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{P}_i = (0)$, de plus la platitude de $A_{\mathfrak{M}} \to \hat{A}_{\mathfrak{M}}$ montre que $\cap \mathfrak{P}_i \hat{A}_{\mathfrak{M}} = (\cap \mathfrak{P}_i)\hat{A}_{\mathfrak{M}}$.

Alors l'application canonique $\hat{A}_{\mathfrak{M}} \to \oplus \hat{A}_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{P}_i\hat{A}_{\mathfrak{M}}$ est injective. Il suffit donc de montrer que $\hat{A}_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{P}_i\hat{A}_{\mathfrak{M}} \simeq (A/\mathfrak{P}_i)\hat{}_{\mathfrak{M}'}$ est réduit, où $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}/\mathfrak{P}_i$.

Si A est une algèbre affinoïde intègre, la clôture intégrale de A dans un corps extension fini de Fr(A) est fini sur A (théorème II.6.1, p. 73, [3]), il suit que cette propriété sera vraie pour les localisés, ce qui montre que $A_{\mathfrak{M}}$ est pseudo-géométrique. Un théorème de Nagata montre alors que $\hat{A}_{\mathfrak{M}}$ est réduit (theorem 36.4, p. 132, [12]).

2.4. La fibre formelle en p.

Soient X un espace affinoïde réduit, $r : X \to \bar{X}$ sa réduction canonique, $p \in \bar{X}$ défini sur $\bar{K}$. Alors X induit sur $r^{-1}(p)$ une structure d'espace analytique (réduit) sur le sous-ensemble $r^{-1}(p) \subset X$. Plus précisément les ouverts admissibles de $r^{-1}(p)$ sont $r^{-1}(p)$ et les ensembles rationnels V de X qui sont contenus dans $r^{-1}(p)$; d'autre part un recouvrement $\{V_i\}_i$ de $r^{-1}(p)$ est admissible si tout admissible $V \neq r^{-1}(p)$ est contenu dans une réunion finie de V_i; enfin le faisceau $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{r^{-1}(p)}$ est défini par $\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}_X(V)$ si $V \neq r^{-1}(p)$ et $\mathcal{O}(r^{-1}(p)) = \varprojlim \mathcal{O}_X(V_i)$ si $\{V_i\}$ est un recouvrement admissible de $r^{-1}(p)$ par des V_i rationnels dans X.

PROPOSITION 4. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in X$ *défini sur* $\bar{K}$, $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{O}^{\circ}_{X,(p)}$ *tels que* $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_s$ *engendrent l'idéal maximal* $p\mathcal{O}_{\bar{X},p}$. *Soit* $a \in K^{\circ\circ}$, $n \geqslant 1$, *alors* $V_{a,n} = \{x \in X \mid |f_i^n(x)| \leqslant |a|, 1 \leqslant i \leqslant s\}$ *est un sous-ensemble de* $r^{-1}(p)$ *rationnel dans* X *et on a*

$$\mathcal{O}_X(V_{a,n}) \simeq \frac{\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1, T_2, \ldots, T_s\rangle}{(aT_1 - f_1^n, \ldots, aT_s - f_s^n)} = B.$$

De plus $\{V_{a,n}\}_{a \in K^{\circ\circ}, n \geqslant 1}$ *est un recouvrement admissible de* $r^{-1}(p)$.

Démonstration. — Soit $x \in V_{a,n}$, alors on a $\bar{f}_i(r(x)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, ce qui prouve que $r(x) = p$. Ainsi $V_{a,n} \subset r^{-1}(p)$. Soient U un ouvert principal de $\bar{X}$ contenant p, on a un morphisme canonique $\varphi(U) : \mathcal{O}_X(r^{-1}U) \to \mathcal{O}_X(V_{a,n})$ et $\|\varphi(U)\| \leqslant 1$, ainsi les $\varphi(U)$ passent à la limite inductive complétée et ils induisent un morphisme

$\varphi : \mathcal{O}_{X,(p)} \to \mathcal{O}_X(V_{a,n})$. De plus pour $f_i' \in \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ et $\|f_i'^n - f_i^n\| \leqslant |a|^3$ on a $V_{a,n} = \{x \in X \mid |f_i'^n(x)| \leqslant |a|\}$.

Donc il existe $U_0 \ni p$, ouvert principal de $\bar{X}$ tel que $f_i' \in \mathcal{O}_X(r^{-1}(U_0))$, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Soit $p \in U \subset U_0$ un ouvert principal de X, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(r^{-1}(U_0))\langle T_1,\dots,T_s\rangle \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dd, "\sigma'_0"] \arrow[ddr, "\alpha'_0"] & \mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1,\dots,T_s\rangle \arrow[dd, "\sigma"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
\mathcal{O}_X(r^{-1}(U))\langle T_1,\dots,T_s\rangle \arrow[d, "\sigma'"] \arrow[drr, "\alpha'"] & & & \\
\dfrac{\mathcal{O}_X(r^{-1}(U))\langle T_1,\dots,T_s\rangle}{(aT_1-f_1'^n,\dots,aT_s-f_s'^n)} \simeq A = \mathcal{O}_X(V_{a,n}) \simeq & \dfrac{\mathcal{O}_X(r^{-1}(U_0))\langle T_1,\dots,T_s\rangle}{(aT_1-f_1'^n,\dots,aT_s-f_s'^n)} \arrow[r, "\alpha"] & B = \dfrac{\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1,\dots,T_s\rangle}{(aT_1-f_1^n,\dots,aT_s-f_s^n)} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{O}_X(V_{a,n}).
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1,\dots,T_s\rangle$ est nœthérien (corollaire du théorème 3), l'idéal $(aT_1-f_1^n,\dots,aT_s-f_s^n)$ est fermé pour la norme canonique de $\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1,\dots,T_s\rangle$ induite par celle de $\mathcal{O}_{X,(p)}$; cette dernière induit sur B une norme notée $\|.\|_B$ et B est une algèbre de Banach. L'application α'_0 (resp. α') est définie par $\alpha'_0(T_i) = \sigma\left(\frac{f_i'^n}{a}\right)$ $\left(\text{resp. } \alpha'(T_i) = \sigma\left(\frac{f_i'^n}{a}\right)\right)$, ce qui est possible puisque $\left\|\frac{f_i^n}{a}\right\|_B \leqslant 1$ et $\left\|\frac{f_i^n}{a} - \frac{f_i'^n}{a}\right\|_B < 1$ impliquent $\left\|\frac{f_i'^n}{a}\right\|_B \leqslant 1$. L'application ρ est induite par la restriction $\mathcal{O}_X(r^{-1}(U_0)) \to \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$, σ', σ'_0, σ sont les surjections canoniques. L'application β' est définie par $\beta'(T_i) = \varphi\left(\frac{f_i^n}{a}\right)$ et $\beta'(g) = \varphi(g)$ pour $g \in \mathcal{O}_{X,(p)}$; ce qui est possible puisque $\left\|\frac{\varphi(f_i^n)}{a}\right\|_{V_{a,n}} \leqslant 1$, $\|\varphi(g)\|_{V_{a,n}} \leqslant \|g\|$, ici $\|.\|_{V_{a,n}}$ est la norme de $\mathcal{O}_X(V_{a,n})$. Les applications α et β sont celles induites par α'_0 (et aussi α') et β'.

Il est immédiat de vérifier que $\beta \circ \alpha = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X(V_{a,n})}$. Montrons que α est surjectif; pour cela il suffit de prouver que $aB^\circ \subset \alpha(A^\circ) + a^2B^\circ$. Soit $b \in aB^\circ$, alors il existe $c \in \mathcal{O}^\circ_{X,(p)}\langle T_1,\dots,T_s\rangle$ tel que $\sigma(c) = b$. On a $c = \Sigma c_\nu T^\nu$, il existe N tel que $|\nu| > N$ implique $\|c_\nu\| \leqslant |a|^2$. De plus il existe $c'_\nu \in \varinjlim \mathcal{O}^\circ_X(r^{-1}(U))$ avec $\|c_\nu - c'_\nu\| \leqslant |a|^2$. Soit donc U un ouvert principal de X tel que $p \in \mathrm{U} \subset \mathrm{U}_0$ et $c'_\nu \in \mathcal{O}^\circ_\mathrm{X}(r^{-1}(\mathrm{U}))$ pour $|\nu| \leqslant \mathrm{N}$. Soit $d = \sum_{|\nu| \leqslant \mathrm{N}} c'_\nu \sigma'(\mathrm{T}^\nu) \in \mathrm{A}^\circ$. Alors on a $\|b - \alpha(d)\| \leqslant |a^2|$ puisque $\|f_i^n/a - f_i'^n/a\|_\mathrm{B} \leqslant |a|^2$. Il suit que $a\mathrm{B}^\circ \subset \alpha(\mathrm{A}^\circ) + a^2\mathrm{B}^\circ$, donc que α est surjectif et que α est un isomorphisme.

Montrons que $\{\mathrm{V}_{a,n}\}_{a \in \mathrm{K}^{\circ\circ}, n \geqslant 1}$ est un recouvrement admissible. Soit W un rationnel de X contenu dans $r^{-1}(p)$, alors $\sup_{x \in \mathrm{W}} |f_i(x)| < 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. En effet, il existe un ouvert principal $\mathrm{U} \ni p$ tel que $\bar{f}_i \in \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\mathrm{U})$, soient $f'_i \in \mathcal{O}_\mathrm{X}(r^{-1}(\mathrm{U}))^\circ$ tels que $\bar{f}_i = \bar{f}'_i$. Puisque W est rationnel (dans $r^{-1}(\mathrm{U})$) on a $\sup_{x \in \mathrm{W}} |f'_i(x)| < 1$, ce qui implique $\sup_{x \in \mathrm{W}} |f'_i(x)| = \sup_{x \in \mathrm{W}} |f_i(x)| < 1$. De plus il existe $x_0 \in \mathrm{W}$ tel que $\sup_{1 \leqslant i \leqslant s} |f'_i(x_0)| = \sup_{x \in \mathrm{W}} |f'_i(x)|$, ainsi il existe $n \geqslant 1$ et $a \in \mathrm{K}^{\circ\circ}$ tel que $|a|^{1/n} = \sup_{1 \leqslant i \leqslant s} |f'_i(x_0)|$ (II.5.3 de [3]).

Il est alors clair que $\mathrm{W} \subset \mathrm{W}_{a,n}$. Comme $r^{-1}(p) = \cup \mathrm{V}_{a,n}$, il est clair que $\{\mathrm{V}_{a,n}\}_{\substack{a \in \mathrm{K}^{\circ\circ} \\ n \geqslant 1}}$ est un recouvrement admissible de $r^{-1}(p)$.

Corollaire. — *Soient* X, Y *deux espaces analytiques affinoïdes réduits,* $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$, $r' : \mathrm{Y} \to \bar{\mathrm{Y}}$ *leurs réductions* $p \in \bar{\mathrm{X}}$, $q \in \bar{\mathrm{Y}}$ *définis sur* $\bar{\mathrm{K}}$. *Si les algèbres* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$ *et* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},(q)}$ *sont isomorphes, alors les espaces analytiques* $r^{-1}(p)$ *et* $r^{-1}(q)$ *sont isomorphes.*

2.5. Le cas où K est algébriquement clos.

Soient toujours X un espace affinoïde réduit sur K, $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ sa réduction canonique, $p \in \bar{\mathrm{X}}$. Soient $k \subset \mathrm{K}$ un sous-corps complet de K dont la valeur absolue induite est discrète et tel que $\bar{\mathrm{K}} = \bar{k}$. Il existe un entier $n \geqslant 1$ et un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathrm{K}\langle \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n \rangle$ sur $\mathcal{O}_\mathrm{X}(\mathrm{X})$ tel que p soit l'image par φ de l'idéal maximal $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n)$ de $\bar{\mathrm{K}}[\mathrm{Z}]$ et que φ induise sur $\mathcal{O}_\mathrm{X}(\mathrm{X})$ la norme spectrale, c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathcal{O}_\mathrm{X}(\mathrm{X})$ il existe $g \in \mathrm{K}\langle \mathrm{Z} \rangle$ tel que $\varphi(g) = f$ et $\|g\| = \|f\|_{sp}$ [1]. Dans cette situation on a une description plus précise des algèbres $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X},(p)}$ et de leurs réductions.

Proposition 5. — *Sous les hypothèses qui précèdent, soient* $\mathfrak{A} = \ker \varphi$, $\mathfrak{A}^\circ = \mathfrak{A} \cap \mathrm{K}^\circ\langle \mathrm{Z} \rangle$, $\mathfrak{A}^{\circ\circ} = \mathfrak{A} \cap \mathrm{K}^{\circ\circ}\langle \mathrm{Z} \rangle$, $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}^\circ/\mathfrak{A}^{\circ\circ}$ *et*

$\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}$. *Alors on a :*

$$(1)\ \mathcal{O}_X(X) = \frac{K\langle Z\rangle}{\mathfrak{A}},\quad \mathcal{O}_X(X)^{\circ} = \frac{K^{\circ}\langle Z\rangle}{\mathfrak{A}^{\circ}},\quad \overline{\mathcal{O}_X(X)} = \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X}) = \frac{\bar{K}[Z]}{\bar{\mathfrak{A}}}$$

$$(2)\ \mathcal{O}_{X,(p)} = \frac{K\langle Z\rangle_{(0)}}{\mathfrak{A}.K\langle Z\rangle_{(0)}},\quad (\mathcal{O}_{X,(p)})^{\circ} = \frac{K^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}}{\mathfrak{A}^{\circ}K^{\circ}\langle Z\rangle_{(0)}},$$

$$\bar{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \mathcal{O}_{\bar{X},p} = \frac{\bar{K}[Z]_{(Z)}}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[Z]_{(Z)}}$$

$$(3)\ \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \frac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]},\quad (\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^{\circ} = \frac{K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}^{\circ}.K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]},$$

$$\bar{\hat{\mathcal{O}}}_{X,(p)} = \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} = \frac{\bar{K}[\![Z]\!]}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[\![Z]\!]}$$

où $\bar{K}[Z]_{(Z)}$ *est la localisation de* $\bar{K}[Z]$ *à l'idéal* $(Z_1, \ldots, Z_n)$.

Les algèbres $\mathcal{O}_X(X)$, $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *et* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ *admettent des bases normales d'algèbre.*

Démonstration. — Comme φ induit la norme spectrale de $\mathcal{O}_X(X)$, on a $\varphi(K^{\circ}\langle Z\rangle) = \mathcal{O}_X(X)^{\circ}$ ainsi (1) suit. Comme $\bar{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \mathcal{O}_{\bar{X},p}$ (§ 1.1), il suit de (1) que $\mathcal{O}_{\bar{X},p} \simeq \dfrac{\bar{K}[Z]_{(Z)}}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[Z]_{(Z)}}$.

Montrons (3). On a $(\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!])^{\circ} = \mathfrak{A}^{\circ}.K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ (proposition 3). Soient $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{A}^{\circ}$ dont les images résiduelles $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r \in \bar{\mathfrak{A}}$ engendrent $\bar{\mathfrak{A}}$, alors on a $\mathfrak{A}^{\circ}.K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!] = \sum_{i=1}^{r} g_i K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$. D'autre part $\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ est facteur direct topologique (théorème 1), plus précisément, il existe un sous-K-espace de Banach F de $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ tel que $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!] = \mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}Z]\!] \oplus F$ et $\|u+v\| = \max(\|u\|, \|v\|)$ pour tout $u \in \mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ et $v \in F$. Soient $\|.\|$ la norme induite sur $B = \dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}$ par celle de $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$,

$$B^{\circ} = \{f \in B \mid \|f\| \leqslant 1\},\quad B^{\circ\circ} = \{f \in B \mid \|f\| < 1\}\quad \text{et}\quad \bar{B} = B^{\circ}/B^{\circ\circ}.$$

Alors $B^{\circ} = \dfrac{K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}^{\circ}.K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]}$, $\bar{B} = \dfrac{\bar{K}[\![Z]\!]}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[\![Z]\!]}$ (parce que $\bar{k} = \bar{K}$). Or $\dfrac{\bar{K}[Z]}{\bar{\mathfrak{A}}} = \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X})$ est une algèbre réduite puisque la norme spectrale est potentiellement multiplicative. Il suit que $\mathcal{O}_{\bar{X},p} = \dfrac{\bar{K}[Z]_{(Z)}}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[Z]_{(Z)}}$ est réduit et aussi $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} \simeq \dfrac{\bar{K}[\![Z]\!]}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[\![Z]\!]}$ (c'est la démonstration du lemme 5). Ainsi la norme $\|.\|$ de B est potentiellement multiplicative, ce qui prouve que $\|.\|$ est la norme spectrale de $B = \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Ainsi (3) est vérifié. Enfin les relations (1), (2), (3) et le théorème 1 montrent l'existence de bases normales d'algèbre.

Désormais lorsque K *sera algébriquement clos, un complété formel* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ *de* $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *sera toujours défini par un quotient* $\dfrac{K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]}$ *où* $k \subset K$ *est un sous-corps fermé dont la valeur absolue induite est discrète et* $\bar{k} = \bar{K}$, *où le morphisme* $\varphi : K\langle Z_1, \ldots, Z_n\rangle$ *sur* $\mathcal{O}_X(X)$ *définit la norme spectrale de* $\mathcal{O}_X(X)$ *avec* $\mathfrak{A} = \ker \varphi$ *et où* p *est l'image par* $\bar{\varphi}$ *de l'idéal* $(Z_1, \ldots, Z_n)$.

LEMME 6. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit, sur* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction,* $p \in \bar{X}$. *Alors* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ *est une algèbre nœthérienne.*

Démonstration. — Comme $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \dfrac{K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]}{\mathfrak{A}.K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]}$, et que la norme spectrale sur $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est la norme induite il suffit de démontrer que $K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ est une algèbre nœthérienne. Puisque k est de valuation discrète, $k^{o}[\![Z]\!]$ admet une base normale $\{e_i\}_i$, ainsi $\{1 \otimes e_i\}_i$ est une base normale d'algèbre de $K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]$ et $\{(1 \otimes e_i)T^{\nu}\}_{i,\nu}$ est une base normale d'algèbre de $K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]\langle T\rangle$. Or son algèbre résiduelle $\bar{K} \otimes \bar{k}[\![Z]\!][T]$ est nœthérienne, ainsi le théorème 1 montre que $K \mathbin{\hat{\otimes}} k^{o}[\![Z]\!]\langle T_1, T_2, \ldots, T_s\rangle$ est nœthérienne.

PROPOSITION 6. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit, sur un corps algébriquement clos* K, $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{X}$, $f_1, \ldots, f_s \in (\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^{o}$ *tels que* $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_s$ *engendrent l'idéal maximal de* $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$. *Soit* $a \in K^{oo}$, *alors* $V_a = \{x \in r^{-1}(p) \mid |f_i(x)| \leqslant |a|\}$ *est un sous-ensemble rationnel de* X *et on a*

$$\mathcal{O}_X(V_a) \simeq \frac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1, T_2, \ldots, T_s\rangle}{(aT_1 - f_1, \ldots, aT_s - f_s)} = B.$$

De plus $\{V_a\}_{a \in K^{oo}}$ *est un recouvrement admissible de* $r^{-1}(p)$.

Démonstration :

1) Soient $U \subset r^{-1}(p)$ un rationnel dans X, ψ l'application de restriction de $\mathcal{O}_X(X)$ dans $\mathcal{O}_X(U)$. Soit φ la surjection canonique de $K\langle Z\rangle$ sur $\mathcal{O}_X(X)$, comme $\varphi(Z_i) \in p$, on a $|\varphi(Z_i)(x)| < 1$ pour tout $x \in r^{-1}(p)$. Ainsi $\|\psi(\varphi(Z_i))\| < 1$, il suit que $\psi \circ \varphi$ induit un homomorphisme θ de $K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z]\!]$ dans $\mathcal{O}_X(U)$. Notons aussi φ l'homomorphisme surjectif de $K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z]\!]$ sur $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$, comme $\varphi(\mathfrak{A}) = 0$, il suit que θ induit un homomorphisme noté ψ (aussi) de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ dans $\mathcal{O}_X(U)$ tel que $\theta = \psi \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z]\!] \arrow[r, "\varphi"] & \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \arrow[dr, "\psi"] & \\
K\langle Z\rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[u] \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{O}_X(U).
\end{tikzcd}$$

Ainsi la restriction $\psi : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U)$ se prolonge en un homomorphisme noté aussi ψ de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ dans $\mathcal{O}_X(U)$.

2) Soient $h_i \in K^\circ \hat{\otimes} k^\circ[\![Z]\!]$ tels que $\varphi(h_i) = f_i$, $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{A}^\circ$ dont les images $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r$ engendrent $\bar{\mathfrak{A}}$. Alors l'isomorphisme $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} \simeq \dfrac{\bar{K}[\![Z]\!]}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[\![Z]\!]}$ montre que $(\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_s, \ldots, \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r)$ engendrent l'idéal maximal $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de $\bar{K}[\![Z]\!]$. Il existe $a_{ij} \in (\mathcal{O}_{X,(p)})^\circ$ tels que $\overline{\varphi(Z_i)} = \sum_j \bar{a}_{ij}\bar{f}_j$, ainsi on a $\varphi(Z_i) = \sum_j a_{ij} f_j + f_i'$ avec $f_i' \in (\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^{\circ\circ}$. Soit $b \in K^{\circ\circ}$ tel que $|b| \geqslant |h_i(0,0,..,0)|$ et $|b| \geqslant |f_i'|$, alors on a

$$V_b = \{x \in r^{-1}(p) \mid |f_i(x)| \leqslant |b|\} = \{x \in r^{-1}(p) \mid |\varphi(Z_i)(x)| \leqslant |b|\}.$$

Comme $\varphi(Z_i) \in \mathcal{O}_X(X)$ il est clair que V_b est rationnel dans X. Soit ψ l'homomorphisme canonique défini en 1) de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ dans $\mathcal{O}_X(V_b)$, alors on a $V_a = \{x \in V_b \mid |\psi(f_i)| \leqslant |a|\}$. Comme $\psi(f_i) \in \mathcal{O}_X(V_b)$ il suit que V_a est rationnel dans V_b, donc dans X.

3) Soit $b \in K^{\circ\circ}$ défini comme en 2), $N \geqslant 1$ tel que $|b|^N \leqslant |a|^3$. Posons $h_i = h_{i,N} + r_{i,N}$ où $r_{i,N}$ est la somme de monômes de h_i de degré plus grand que N. On a donc

$$\|\varphi(h_i/a) - \varphi(h_{i,N}/a)\| \leqslant |a|^2.$$

Soit $f'_i = \varphi(h_{i,N}) \in \mathcal{O}_X(X)$. On a

$$V_a = \{x \in X \mid |f'_i(x)| \leqslant |a|\}$$

et donc

$$\mathcal{O}_X(V_a) = \frac{\mathcal{O}_X(X)\langle T_1, \ldots, T_s\rangle}{(aT_1 - f'_1, \ldots, aT_s - f'_s)}.$$

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X(X)\langle T_1,\ldots,T_s\rangle \arrow[d, "\sigma'"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1,\ldots,T_s\rangle \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "\beta'"] & \\
\mathcal{O}_X(V_a) = A = \dfrac{\mathcal{O}_X(X)\langle T_1,\ldots,T_s\rangle}{(aT_1 - f'_1,\ldots,aT_s - f'_s)} & & \dfrac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1,\ldots,T_s\rangle}{(aT_1 - f_1,\ldots,aT_s - f_s)} \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{O}_X(V_a).
\end{tikzcd}$$

Comme $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ est nœthérien (lemme 6), l'idéal $(aT_1 - f_1, \ldots, aT_s - f_s)$ est fermé pour la norme canonique de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$; cette dernière induit sur B une norme notée $\|.\|_B$ et B est une algèbre de Banach. L'application α' est définie par $\alpha'(T_i) = \sigma\left(\frac{f'_i}{a}\right)$, ce qui est possible parce que $\left\|\frac{f_i}{a}\right\|_B \leqslant 1$ et $\left\|\frac{f_i}{a} - \frac{f'_i}{a}\right\|_B < 1$ impliquent $\left\|\frac{f'_i}{a}\right\|_B \leqslant 1$. L'application β' est définie par $\beta'(T_i) = \frac{\psi(f_i)}{a}$ et $\beta'(g) = \psi(g)$ pour $g \in \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$, ce qui est possible puisque $\left\|\frac{\psi(f_i)}{a}\right\|_{V_a} \leqslant 1$ et $\|\psi(g)\|_{V_a} \leqslant \|g\|$, ici $\|.\|_{V_a}$ est la norme de $\mathcal{O}_X(V_a)$. Les applications α et β sont celles induites par α' et β'.

Il est immédiat de vérifier que $\beta \circ \alpha = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X(V_a)}$. Pour montrer que α est surjectif il suffit de prouver que $aB^\circ \subset \alpha(A^\circ) + a^2B^\circ$. Soit $b \in aB^\circ$, alors il existe $c \in \mathcal{O}^\circ_{X,(p)}\langle T_1, \ldots, T_s\rangle$ tel que $\sigma(c) = b$. On a $c = \sum_\nu c_\nu T^\nu$ et il existe

$$d_\nu \in K^\circ \otimes k^\circ[\![Z]\!] \text{ tel que } \varphi(d_\nu) = c_\nu, d_\nu = \Sigma\, d_{\nu,\mu} Z^\mu.$$

Ainsi $b = \sum_\nu \sum_\mu d_{\nu\mu} \sigma \circ \varphi(Z)^\mu \sigma(T)^\nu$ où $d_{\nu\mu} \in K^\circ$. Il suit de la relation

$$\sigma \circ \varphi(Z_i) = \Sigma\sigma(a_{ij})\sigma(f_j) + \sigma(f'_i)$$

que $\|\sigma \circ \varphi(Z_i)\|_B < 1$ puisque $\|\sigma(f_i)\|_B \leqslant |a|$. Ainsi il existe N_1 tel que

$$\|b - \sum_{|\nu|\leqslant N_1} \sum_{|\mu|\leqslant N_1} d_{\nu\mu}\sigma \circ \varphi(Z)^{\mu}\sigma(T)^{\nu}\|_B \leqslant |a|^2 .$$

Soit $e = \sum_{|\nu|\leqslant N_1} \sum_{|\mu|\leqslant N_1} d_{\nu\mu}\sigma'\varphi(Z)^{\mu}\sigma'(T)^{\nu} \in A^{\circ}$.

Comme $\alpha(\sigma'(T)) = \sigma(f'_i/a)$, $\sigma(T_i) = \sigma(f_i/a)$, $\alpha(\sigma'(\varphi(Z_i))) = \sigma(\varphi(Z_i))$, on a $\|b-\alpha(e)\| \leqslant |a|^2$ puisque $\left\|\frac{f_i}{a} - \frac{f'_i}{a}\right\| \leqslant |a|^2$. Ainsi l'inclusion $aB^{\circ} \subset \alpha(A^{\circ}) + a^2B^{\circ}$ montre que α est surjectif et donc que α est un isomorphisme.

Enfin montrons que $\{V_a\}_{a\in K^{\circ\circ}}$ est un recouvrement admissible de $r^{-1}(p)$. Soit W un rationnel de X, $W \subset r^{-1}(p)$, comme $|f_i(x)| < 1$ pour tout $x \in r^{-1}(p)$ on a $\|\psi(f_i)\| < 1$, où ψ est l'homomorphisme canonique de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ dans $\mathcal{O}_X(W)$. Soit $a \in K^{\circ\circ}$ tel que $|a| = \max_{1\leqslant i\leqslant s} \|\psi(f_i)\|$. Ainsi on a $W \subset V_a$. Comme $\bigcup_{a\in K^{\circ\circ}} V_a = r^{-1}(p)$ il est clair que $\{V_a\}_{a\in K^{\circ\circ}}$ est un recouvrement admissible.

COROLLAIRE. — *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques affinoïdes réduits sur* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$, $r' : Y \to \bar{Y}$ *leurs réductions,* $p \in X$, $q \in Y$. *Si les algèbres* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ *et* $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$ *sont isomorphes, alors les espaces analytiques* $r^{-1}(p)$ *et* $r^{-1}(q)$ *sont isomorphes.*

PROPOSITION 7. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction,* $p \in \bar{X}$, $k \subset K$ *un sous-corps complet pour la valeur absolue induite qui est discrète et* $\bar{k} = \bar{K}$. Soient $s : K\langle Z_1,\ldots,Z_n\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$ (*resp.* $s' : K\langle T_1,\ldots,T_m\rangle \to \mathcal{O}_X(X)$) *un homomorphisme surjectif qui induit la norme spectrale de* $\mathcal{O}_X(X)$ *et tel que* p *soit l'image par* $\bar{s}$ (resp. $\bar{s}'$) *de l'idéal* $(Z_1,\ldots,Z_n)$ (*resp.* $(T_1,\ldots,T_m)$). *Soient* $\mathfrak{A} = \ker s$ (*resp.* $\mathfrak{B} = \ker s'$). *Alors* s *et* s' *induisent un isomorphisme* φ *de* $K\langle Z\rangle/\mathfrak{A}$ *sur* $K\langle T\rangle/\mathfrak{B}$; *cet isomorphisme se prolonge de façon unique en un isomorphisme* φ' *de* $\dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[[Z]]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[[Z]]}$ *sur* $\dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[[T]]}{\mathfrak{B}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[[T]]}$.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket \arrow[rr, "\varphi_2"] \arrow[dd, "\sigma"] & & \mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket \arrow[dd, "\sigma'"] \\
\mathrm{K}\langle \mathrm{Z} \rangle \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\varphi_1"] \arrow[dd, "s"] & & \mathrm{K}\langle \mathrm{T} \rangle \arrow[ur, hook] \arrow[dd, "s'"] & \\
 & \dfrac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}{\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket} \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] & & \dfrac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}{\mathfrak{B}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket} \\
\dfrac{\mathrm{K}\langle \mathrm{Z} \rangle}{\mathfrak{A}} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\varphi"] & & \dfrac{\mathrm{K}\langle \mathrm{T} \rangle}{\mathfrak{B}} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}
$$

Soient $f_i \in \mathrm{K}\langle \mathrm{T} \rangle$ tels que $s'(f_i) = \varphi \circ s(\mathrm{Z}_i)$ et $\|f_i\| \leqslant 1$. Donc il existe un homomorphisme unique $\varphi_1 : \mathrm{K}\langle \mathrm{Z} \rangle \to \mathrm{K}\langle \mathrm{T} \rangle$ tel que $\varphi_1(\mathrm{Z}_i) = f_i$ puisque $\|f_i\| \leqslant 1$ et on a $\ker s' \circ \varphi_1 \supset \mathfrak{A}$. Comme $|\mathrm{Z}_i(x)| < 1$ pour tout $x \in r^{-1}(p)$, on a $|f_i(0,\ldots,0)| < 1$. Ainsi il existe un homomorphisme unique $\varphi_2 : \mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket \to \mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket$ tel que $\varphi_2(\mathrm{Z}_i) = f_i$ (lemme 4). On a alors $\ker \sigma' \circ \varphi_2 \supset \mathfrak{A}$, ce qui montre que φ_2 induit un homomorphisme

$$\tilde{\varphi} : \frac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}{\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket} \to \frac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}{\mathfrak{B}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}$$

qui prolonge φ. Soit maintenant $\psi : \dfrac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}{\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket} \to \dfrac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}{\mathfrak{B}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}$ qui prolonge φ, alors ψ peut se relever en l'homomorphisme φ_2, ce qui prouve l'unicité.

De même φ^{-1} admet un relèvement (unique)

$$\tilde{\varphi}^{-1} : \frac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k\llbracket \mathrm{T} \rrbracket}{\mathfrak{B}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{T} \rrbracket} \to \frac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}{\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}.$$

Ainsi $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ sera un relèvement de l'identité sur $\mathrm{K}\langle \mathrm{Z} \rangle/\mathfrak{A}$, et l'unicité montre que $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ est l'identité sur $\dfrac{\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}{\mathfrak{A}.\mathrm{K} \hat{\otimes} k^{\circ}\llbracket \mathrm{Z} \rrbracket}$. On a la même chose pour $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, ce qui prouve que $\tilde{\varphi}$ est un isomorphisme.

LEMME 7. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur* K *algébriquement clos,* $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ *sa réduction,* $p \in \bar{\mathrm{X}}$, φ *un homomorphisme de*

$K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z_1,\ldots,Z_n]\!]$ *dans* $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ *tel que* $\bar{\varphi}$ *soit un homomorphisme surjectif de* $\bar{K}[\![Z]\!]$ *sur* $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$. *Alors* φ *est surjectif.*

Démonstration. — On a $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \dfrac{K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1,\ldots,T_m]\!]}{\mathfrak{A}.K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1,\ldots,T_m]\!]}$, $\bar{\hat{\mathcal{O}}}_{X,(p)} = \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} = \dfrac{\bar{K}[\![T]\!]}{\bar{\mathfrak{A}}.\bar{K}[\![T]\!]}$. Soient $t_1, \ldots, t_m$ les images de $T_1, \ldots, T_m$.

1) On peut supposer que $t_i \in \operatorname{im} \varphi$. En effet, il existe $t_i' \in \operatorname{im} \varphi$ tels que $\|t_i' - t_i\| < 1$. Donc il existe $T_i' \in K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1,\ldots,T_m]\!]$ tels que $\|T_i' - T_i\| < 1$ et que t_i' soit l'image de T_i'. On sait alors que

$$K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1',\ldots,T_m']\!] = K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1,\ldots,T_m]\!].$$

2) Soient $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ tels que $\bar{K}[\![\xi_1,\ldots,\xi_d]\!] \hookrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ soit fini et que $\bar{K}[\![\xi_1,\ldots,\xi_d]\!]$ soit une algèbre de séries formelles à d variables. On a $\xi_i = \bar{\varphi}(\bar{u}_i)$ où $u_i \in K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![Z]\!]$ et soit $V_i = \varphi(u_i)$. Alors $k^{\circ}[\![V_1,\ldots,V_d]\!]$ est bien une algèbre de séries formelles à d variables, de plus si $f = \Sigma a_{\nu} V^{\nu}$ on a $\|f\| = \sup |a_{\nu}|$.

3) Soit $p_i(S)$ le polynôme minimal de $\bar{t}_i$ sur $\bar{K}[\![\xi_1,\ldots,\xi_d]\!]$, $p_i(S) = \alpha_0^i + \alpha_1^i S + \cdots + S^{r_i}$. On a $\alpha_j^i \in \sum_{i=1}^{d} \xi_i \bar{K}[\![\xi_1,\ldots,\xi_d]\!]$. Soient $a_j^i \in \sum_{i=1}^{d} V_i K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V_1,\ldots,V_d]\!]$ tels que $\overline{a_j^i} = \alpha_j^i$ et $P_i(S) = a_0^i + a_1^i S + \cdots + S^{r_i}$. Il existe donc $a \in K^{\circ\circ}$ tel que $\|P_i(t_i)\| < |a|$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Les polynômes $P_i(T_i)$ sont réguliers en T_i d'ordre r_i dans l'anneau $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V_1,\ldots,V_d,T_1,\ldots,T_m]\!]$. Soit $f \in K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![T_1,\ldots,T_m]\!]$, on peut effectuer la division de Weierstrass de f par $P_1(T_1), P_2(T_2), \ldots, P_m(T_m)$, on a donc

$$(1)\quad f = \sum_{i=1}^{m} P_i(T_i) Q_i(V,T) + \sum_{\nu_1=0}^{r_1-1} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{r_m-1} a_{\nu_1\nu_2,\ldots,\nu_m} T_1^{\nu_1} . T_2^{\nu_2} \ldots T_m^{\nu_m}$$

où $Q_i(V,T) \in K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V,T]\!]$, $a_{\nu} \in K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V]\!]$. Soit ψ l'homomorphisme de $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V,T]\!]$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ défini par $\psi(V_i) = V_i$ et $\psi(T_i) = t_i$. Alors (1) montre que

$$(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^{\circ} = \sum_{\nu_1=0}^{r_1-1} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{r_m-1} K^{\circ} \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V]\!] t_1^{\nu_1} \cdots t_m^{\nu_m} + a(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^{\circ}.$$

Il s'ensuit que $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = \sum_{\nu_1=0}^{r_1-1} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{r_m-1} K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V]\!] t_1^{\nu_1} \cdots t_m^{\nu_m}$ (proposition 3.1 de [10]). Il s'ensuit que φ est surjectif puisque $K \hat{\otimes} k^{\circ}[\![V]\!] \subset \operatorname{im} \varphi$ et $t_i \in \operatorname{im} \varphi$.

3. LE GROUPE DES CLASSES DE MODULES PROJECTIFS SUR $\mathcal{O}_{X,(p)}$

Si A est un anneau nœthérien, on note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de A-modules projectifs de rang n. Si $n = 1$, cet ensemble a une structure de groupe, il est appelé le groupe de Picard de A et est noté Pic (A). Au § 3.1 nous montrons que $\mathcal{P}_n(\mathcal{O}_{X,(p)}) = \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{P}_n(\mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$.
Au § 3.2, nous montrons que p régulier implique que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ sont réguliers et factoriels. Enfin le § 3.3 est consacré à la dimension 1 lorsque X est régulier et p point multiple ordinaire.

3.1. Classes de modules projectifs sur $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

3.1.1. *Le faisceau* $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X$.

Nous souhaitons montrer que le (pré)-faisceau sur X défini par $U \mapsto \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U)$ est acyclique pour tout recouvrement admissible de X. Un recouvrement standard $\mathfrak{X}(f_1, \ldots, f_s)$ est défini par $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_X(X)$, $\sum_{i=1}^{s} f_i \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$ et

$$U_i = \{x \in X \mid |f_j(x)| \leqslant |f_j(x)|,\ 1 \leqslant j \leqslant s\}.$$

Il suffit donc de démontrer que le (pré)-faisceau $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X$ est acyclique pour tout recouvrement standard. Il faut donc montrer une version adaptée du théorème de Tate. Pour cela on peut suivre la démonstration de [3] qui montre que l'on se ramène au cas d'un recouvrement standard $\mathfrak{X}(1,f)$ pour lequel nous donnons une démonstration.

Soient $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{O}_X(X)$ avec $\sum_{i=1}^{s} f_i \mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X)$,

$$U_i = \{x \in X \mid |f_j(x)| \leqslant |f_i(x)|,\ 1 \leqslant j \leqslant s\}.$$

Alors on a

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T_1, T_2, \ldots, T_s \rangle}{(f_i T_1 - f_1, \ldots, f_i T_s - f_s)}.$$

En effet, $\mathcal{O}_X(U_i) = \dfrac{\mathcal{O}_X(X)\langle T_1,T_2,\ldots,T_s\rangle}{(f_iT_1-f_1,\ldots,f_iT_s-f_s)}$, on a la suite exacte

$$0 \to \sum_j \mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle(f_iT_j-f_j) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X(U_i) \to 0,$$

en tensorisant par $\mathcal{O}_{X,(p)}$ on obtient la suite

$$(2)\quad \mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X(X)} \Big(\sum_j \mathcal{O}_X\langle T\rangle(f_iT_j-f_j)\Big) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle$$
$$\xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(U_i) \to 0.$$

On a $\tilde{\beta}$ surjectif et $\operatorname{im}\tilde{\alpha}$ dense dans $\ker\tilde{\beta}$. De plus $\operatorname{im}\tilde{\alpha}$ est un $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}\, \mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle$-module de type fini. Or

$$\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}\, \mathcal{O}_X(X)\langle T\rangle \simeq \mathcal{O}_{X,(p)}\langle T\rangle$$

est une algèbre de Banach nœthérienne (corollaire du théorème 3), il suit que $\operatorname{im}\tilde{\alpha}$ est fermé (theorem 3.3 [10] ou II.3.8 [3]). La suite (2) est donc exacte. On déduit de (2) l'isomorphisme (1), de plus $\mathcal{O}_{X,(p)}\langle T\rangle$ induit sur $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}\, \mathcal{O}_X(U_i)$ une norme de Banach équivalente à la norme tensorielle.

LEMME 8. — *Soit $f \in \mathcal{O}_X(X)$, alors le recouvrement $\mathfrak{X}(1,f)$ est acyclique pour le (pré)-faisceau $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}\, \mathcal{O}_X$.*

Démonstration. — Posons $B = \mathcal{O}_{X,(p)}$. On a donc :

$$\mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U_1) = \frac{B\langle T\rangle}{(T-f)} \quad \text{si} \quad U_1 = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\}$$
$$\mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U_2) = \frac{B\langle S\rangle}{(1-fS)} \quad \text{si} \quad U_2 = \{x \in X \mid 1 \leqslant |f(x)|\}$$
$$\mathcal{O}_{X,(p)} \mathop{\hat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) = \frac{B\langle S,S^{-1}\rangle}{(1-fS)}.$$

Considérons la suite de complexes

$$\begin{array}{ccccl}
\dfrac{B\langle T\rangle}{(T-f)} \oplus \dfrac{B\langle S\rangle}{(1-fS)} & \xrightarrow{\ d''\ } & \dfrac{B\langle S,S^{-1}\rangle}{(1-fS)} & & \text{complexe } \mathcal{C}'' \\
\uparrow v_0 & & \uparrow v_1 & & \\
B\langle T\rangle \oplus B\langle S\rangle & \xrightarrow{\ d'\ } & B\langle S,S^{-1}\rangle & & \text{complexe } \mathcal{C}' \\
\uparrow u_0 & & \uparrow u_1 & & \\
B\langle T\rangle \oplus B\langle S\rangle & \xrightarrow{\ d\ } & B\langle S,S^{-1}\rangle & & \text{complexe } \mathcal{C}
\end{array}$$

où

$$\begin{aligned}
u_0(h_1(T),h_2(S)) &= ((T-f)h_1(T),(1-Sf)h_2(S))\\
u_1(h(S,S^{-1})) &= (1-Sf)h(S,S^{-1})\\
d(h_1(T),h_2(S)) &= S^{-1}h_1(S^{-1})-h_2(S)\\
d'(h_1(T),h_2(S)) &= h_1(S^{-1}) - h_2(S),
\end{aligned}$$

v_0, v_1 sont les surjections canoniques et d'' est l'application induite par d'.

(2) La suite $0 \to \mathscr{C} \to \mathscr{C}' \to \mathscr{C}'' \to 0$ est une suite exacte de complexes de B-modules, l'homomorphisme d est un isomorphisme. D'autre part la suite

$$(3)\quad 0 \to B \xrightarrow{\ v\ } B\langle T\rangle \oplus B\langle S\rangle \xrightarrow{\ d'\ } B\langle S,S^{-1}\rangle \to 0$$

est exacte et scindée (où $v(b)=(b,b)$).

La suite (2) donne la suite exacte de cohomologie

$$\begin{aligned}(4)\quad 0 \to H^0(\mathscr{C}) \to H^0(\mathscr{C}') \to H^0(\mathscr{C}'') \to H^1(\mathscr{C})&\\ \to H^1(\mathscr{C}') \to H^1(\mathscr{C}'') \to 0.&\end{aligned}$$

Puisque d est un isomorphisme on a $H^0(\mathscr{C}) = H^1(\mathscr{C}) = 0$ et de (3) on a $H^0(\mathscr{C}') = B$, $H^1(\mathscr{C}') = 0$. Ainsi (4) donne $H^0(\mathscr{C}'') = B$, $H^1(\mathscr{C}'') = 0$. Ce qui est le lemme.

En suivant la démonstration de III.2.2 de [3], on montre alors le résultat suivant :

PROPOSITION 8. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit,* $r : X \to \bar{X}$ *la réduction canonique,* $p \in \bar{X}$ *défini sur* $\bar{K}$, $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *la localisation formelle en* p. *Alors tout recouvrement admissible de* X *est acyclique pour le (pré)-faisceau* $\mathcal{O}_{X,(p)} \underset{\mathcal{O}_X(X)}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_X$.

3.1.2. *Le faisceau* $\mathrm{Gl}_n(\mathcal{O}_{X,(p)}\hat{\otimes}\mathcal{O}_X)$.

LEMME 9. — *Soient* $\mathrm{Gl}_n(\mathcal{O}_{X,(p)}\hat{\otimes}\mathcal{O}_X)$ *le (pré)-faisceau défini par* $U \mapsto \mathrm{Gl}_n(\mathcal{O}_{X,(p)} \underset{\mathcal{O}_X(X)}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_X(U))$, $\{U_1,U_2,\ldots,U_s\}$ *un recouvrement admissible de* X. *Alors il existe un réel* $0 < c < 1$ *possédant la propriété suivante : si* (a_{ij}) *est un 1-cocycle du complexe de Čech du (pré)-faisceau* $\mathrm{Gl}_n(\mathcal{O}_{X,(p)}\hat{\otimes}\mathcal{O}_X)$ *associé au recouvrement* $\{U_i\}$ *avec* $\|a_{ij}-I_n\| < c$, *alors* (a_{ij}) *est un 1-cobord.*

Démonstration. — La proposition 8 montre que l'on a la suite exacte

$$(1)\ 0 \to \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\varepsilon} \bigoplus_i \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i)$$

$$\xrightarrow{d_0} \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

$$\xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j,k} \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Posons $B = \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(X)$, $B_i = \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i)$,

$$B_{ij} = \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j),\ B_{i,j,k} = \mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

De (1) on déduit la suite exacte

(2)

$$0 \to M_n(B) \xrightarrow{\varepsilon'} \bigoplus_i M_n(B_i) \xrightarrow{d'_0} \bigoplus_{i,j} M_n(B_{ij}) \xrightarrow{d'_1} \bigoplus_{i,j,k} M_n(B_{ijk})$$

où $M_n(C)$ est l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients dans C normé par le suprémum des normes des coefficients.

Alors le théorème de Banach montre qu'il existe un réel $0 < c < 1$ qui possède la propriété suivante : pour tout $f \in \operatorname{im} d'_k$ il existe $g \in \bigoplus M_n(B_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}})$ tel que $d'_k(g) = f$ et $c\|g\| \leqslant \|f\| \leqslant c^{-1}\|g\|$ pour tout $k = 0$ ou 1.

Soient $s \geqslant 2$, $(a^s_{ij})_{i,j} \in \bigoplus_{ij} Gl_n(B_{ij})$ un 1-cocyle tel que $\|a^s_{ij} - I_n\| \leqslant c^s$. On a donc

$$(3) \qquad a^s_{ij} a^s_{jk} = a^s_{ik} \quad \text{dans} \quad Gl_n(B_{ijk}).$$

Posons $b^s_{ij} = a^s_{ij} - I_n$. Il suit de (3) que $\|b^s_{ij} + b^s_{jk} - b^s_{ik}\| \leqslant c^{2s}$. Ainsi il existe $(c^s_{ij})_{ij} \in \bigoplus_{i,j} M_n(B_{ij})$ tel que

$$d'_1((c^s_{ij})_{ij}) = d'_1((b^s_{ij})) \quad \text{et} \quad \|c^s_{ij}\| \leqslant c^{2s-1}.$$

Comme $d'_1((c^s_{ij} - b^s_{ij})_{ij}) = 0$ il suit de (2) qu'il existe

$$(v^s_i)_i \in \bigoplus_i M_n(B_i) \quad \text{avec} \quad d'_0((v^s_i)_i) = ((c^s_{ij} - b^s_{ij})_{ij})$$

et $$\|v^s_i\| \leqslant c^{s-1}.$$

Posons $a_{ij}^{s+1} = (\mathrm{I}_n+v_i^s)a_{ij}^s(\mathrm{I}_n+v_j^s)^{-1}$. Alors (a_{ij}^{s+1}) est un 1-cocycle avec $\|a_{ij}^{s+1}-\mathrm{I}_n\| \leqslant c^{2s-1} \leqslant c^{s+1}$. On peut donc construire par récurrence une suite (v_i^s), avec $\|v_i^s\| \leqslant c^{s-1}$. Posons

$$a_i = (\mathrm{I}_n+v_i^2)^{-1}(\mathrm{I}_n+v_i^3)^{-1}(\mathrm{I}_n+v_i^4)^{-1} \ldots .$$

Alors on a $a_{ij}^2 = a_i a_j^{-1}$, ce qui prouve que a_{ij}^2 est un 1-cobord.

3.1.3. *Modules projectifs sur* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$.

THÉORÈME 8. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur* K, $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{\mathrm{X}}$ *défini sur* $\bar{\mathrm{K}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$ *la localisation de* X *en* p. *Soient* $\mathcal{P}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)})$ *l'ensemble des classes d'isomorphie de modules projectifs de rang* n *sur* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$. *Alors on a les bijections suivantes :*

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}) \rightleftarrows \varinjlim_{\mathrm{U}\ni p} \mathcal{P}_n(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(r^{-1}(\mathrm{U})) \rightleftarrows \varinjlim_{\mathrm{U}\ni p} \mathrm{H}^1(r^{-1}(\mathrm{U}),\ \mathrm{Gl}_n\mathcal{O}_{\mathrm{X}|r^{-1}(\mathrm{U})}).$$

Si $n = 1$ *ces bijections sont des homomorphismes de groupe.*

Démonstration. — 1) Soient $f_1, \ldots, f_s \in \mathrm{B} = \mathcal{O}_{\mathrm{X},(p)}$ avec $\mathrm{B} = \Sigma f_i\mathrm{B}$. Posons

$$\mathrm{B}_i = \frac{\mathrm{B}\langle \mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_s\rangle}{(f_i\mathrm{T}_1-f_1, \ldots, f_i\mathrm{T}_s-f_s)},\ \mathrm{B}_{ij} = \frac{\mathrm{B}\langle \mathrm{S}_{\ell k}\rangle_{\ell k}}{(\ldots, f_if_j\mathrm{S}_{\ell k}-f_\ell f_k, \ldots)_{\ell,k}},$$
$$\mathrm{B}_{ijk} = \frac{\mathrm{B}\langle \ldots \mathrm{Z}_{m,n,p} \ldots\rangle_{m,n,p}}{(\ldots, f_if_jf_k\mathrm{Z}_{m,n,p}-f_mf_nf_p, \ldots)_{m,n,p}}.$$

On a un homomorphisme canonique de B_i dans B_{ij} induit par $\mathrm{T}_k \mapsto \mathrm{S}_{kj}$ et de B_{ij} dans B_{ijk} induit par $\mathrm{S}_{\ell,s} \mapsto \mathrm{Z}_{\ell,s,k}$. Ces algèbres sont nœthériennes (corollaire du théorème 3) donc de Banach pour la norme induite par les quotients, de plus les homomorphismes canoniques sont de norme bornée par 1.

Montrons que f_i est inversible dans B_i. Soit t_ℓ l'image de T_ℓ dans B_i, on a $f_it_\ell = f_\ell \in f_i\mathrm{B}_i$ et il existe $\lambda_\ell \in \mathrm{B}$ avec $1 = \Sigma\lambda_\ell f_\ell$, donc $f_i\mathrm{B}_i = \mathrm{B}_i$. Ce qui prouve que f_i est inversible.

Soit $m = \inf\limits_i \|f_i^{-1}\|_{\mathrm{B}_i}^{-1}$. Soit $f'_i \in \mathrm{B}$ tel que $\|f'_i - f_i\| < m$, alors f'_i devient inversible dans l'algèbre de Banach B_i.

Soient :

$$B'_i = \frac{B\langle T'_1,\ldots,T'_s\rangle}{(f'_iT'_1-f'_1,\ldots,f'_iT'_s-f'_s)},\quad B'_{ij} = \frac{B\langle S'_{\ell k}\rangle_{\ell k}}{(\ldots,f'_if'_jS'_{\ell k}-f'_\ell f'_k,\ldots)},$$

$$B'_{ijk} = \frac{B\langle Z'_{m,n,p}\rangle_{m,n,p}}{(\ldots,f'_if'_jf'_kZ'_{m,n,p}-f'_mf'_nf'_p,\ldots)}.$$

On a un homomorphisme de B'_i dans B_i induit par $T'_j \mapsto f'_j/f'_i$. De même f_i est inversible dans B'_i et $T_j \mapsto f_j/f_i$ induit un homomorphisme réciproque. On a donc $B_i \simeq B'_i$ de même $B_{ij} \simeq B'_{ij}$, $B_{ijk} \simeq B'_{ijk}$.

2) Soit M un B-module projectif de rang n, alors il existe $f_1,\ldots,f_s \in B$ tels que $B = \Sigma f_iB_i$ et que $M \otimes_B B_{f_i}$ soit un B_{f_i}-module libre de rang n. Comme f_i est inversible dans B_i on a un homomorphisme canonique de B_{f_i} dans B_i et $M \otimes_B B_i = (M \otimes_B B_{f_i}) \otimes_{B_{f_i}} B_i$. Donc $M \otimes B_i$ est un B_i-module libre de rang n. D'autre part l'isomorphisme

$$M \otimes_B B_{ij} \simeq (M \otimes_B B_i) \otimes_{B_i} B_{ij} \simeq (M \otimes_B B_j) \otimes_{B_j} B_{ij}$$

définit un élément $a_{ij} \in Gl_n(B_{ij})$ avec $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ dans $Gl_n(B_{ijk})$. Ainsi (a_{ij}) est un 1-cocycle.

Soient $f'_i \in \varinjlim \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ tels que $\|f_i - f'_i\| < m$ (où m est défini dans la première partie). Alors il existe $U_0 \ni p$ tel que $f'_i \in \mathcal{O}_X(r^{-1}(U_0))$. Ainsi les isomorphismes de 1) montrent que $(a_{ij})_{ij}$ est un 1-cocycle de $Gl\,(\mathcal{O}_{X,(p)}\hat{\otimes}\mathcal{O}_{X|r^{-1}(U_0)})$ relativement au recouvrement standard $\mathfrak{X}(f'_1,\ldots,f'_s)$ de $r^{-1}(U_0)$.

Si (b_{ij}) est un 1-cocycle de $Gl_n(\mathcal{O}_{X,(p)}\hat{\otimes}\mathcal{O}_{X|r^{-1}(U_0)})$ relativement au recouvrement $\mathfrak{X}(f'_1,f'_2,\ldots,f'_s)$, soit N le B-module

$$N = \left\{(b_1,b_2,\ldots,b_s) \in B_1^n \oplus B_2^n \oplus \ldots \oplus B_s^n \mid b_i = b_{ij}b_j \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant s \\ 1 \leqslant j \leqslant s \end{matrix}\right\}.$$

Alors $N \otimes_B B_i$ est un B_i-module libre de rang n. Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de B, alors il existe i et un idéal maximal $\mathfrak{M}'$ de B_i tel que $\mathfrak{M}' \cap B = \mathfrak{M}$. Il suit que $(B_{\mathfrak{M}})^\wedge = (B_{i\mathfrak{M}'})^\wedge$. Or $N \otimes B_i$ étant libre de rang n il suit que $N \otimes \hat{B}_{\mathfrak{M}}$ l'est aussi et le lemme de Nakayama montre que $N \otimes B_{\mathfrak{M}}$ est libre sur $B_{\mathfrak{M}}$ de rang n. Ce qui montre que N est projectif de rang n sur B.

De plus il est facile de vérifier que N associé à (b_{ij}) est isomorphe à N' associé à (b'_{ij}) si et seulement si il existe $(c_i)_i \in \oplus\, Gl_n(B_i)$ tel que $b'_{ij} = c_ib_{ij}c_j^{-1}$ dans $Gl_n(B_{ij})$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

3) Comme $\varinjlim_{U \ni p} \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ est dense dans $\mathcal{O}_{X,(p)}$ il suit que $\varinjlim_{U \ni p} \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ est dense dans $\mathcal{O}_{X,(p)} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(r^{-1}(U_i))$ où $U_i = \{x \in r^{-1}(U_0) | \, |f_j(x)| \leqslant |f_i(x)|\}$. Il existe donc $p \in V \subset U_0$ et $(a_{ij}) \in \oplus \, Gl_n(\mathcal{O}_X(r^{-1}(V) \cap U_i \cap U_j)$ assez proche de (b_{ij}), il suit alors de 2) et du lemme 9 que $(a_{ij})_{ij}$ et $(b_{ij})_{ij}$ définissent le même module projectif. Notons $\mathcal{P}_n(f_1, \ldots, f_s)$ les classes d'isomorphie de module projectif M tels que $M \otimes_B B_i$ soit libre de rang n. Alors on vient de définir une bijection de

$$\mathcal{P}_n(f_1, \ldots, f_s) \quad \text{sur} \quad \varinjlim_{U \ni p} H^1(\mathfrak{X}(f'_1, \ldots, f'_s) \cap r^{-1}(U), Gl_n(\mathcal{O}_{X|r^{-1}(U)})).$$

Cette bijection induit clairement une bijection de $\mathcal{P}_n(\mathcal{O}_{X,(p)})$ sur $\varinjlim_{U \ni p} H^1(r^{-1}(U), Gl_n(\mathcal{O}_{X|r^{-1}(U)}))$. Comme on sait que $H^1(r^{-1}(U), Gl_n(\mathcal{O}_{X|r^{-1}(U)}))$ est en bijection avec $\mathcal{P}_n(\mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$, le théorème est montré (théorème III.8.2, [3]).

3.2. Le point p est régulier.

Proposition 9. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur un corps* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{X}$ *un point régulier. Alors* $\mathcal{O}_{X,(p)}$ *est régulier et factoriel.*

Démonstration. — On a donc $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} \simeq \bar{K}[[Z_1, \ldots, Z_d]]$ où d est la hauteur de p. Alors on a $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \simeq K \hat{\otimes} k^\circ[[Z_1, \ldots, Z_d]]$; en effet, l'isomorphisme $\varphi : \bar{K}[[Z_1, \ldots, Z_d]] \to \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ se relève en un homomorphisme $\psi : K \hat{\otimes} k^\circ[[Z_1, \ldots, Z_d]] \to \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ avec $\bar{\psi} = \varphi$, comme $\bar{\psi}$ est injectif, il suit que ψ est isométrique, donc injectif; enfin le lemme 7 montre que ψ est surjectif. Si $\mathfrak{M}$ est un maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ il suit facilement que $(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})_{\mathfrak{M}}$ est régulier, ce qui montre avec le théorème 7 que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est aussi régulier. De plus $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \simeq K \hat{\otimes} k^\circ[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ est factoriel (théorème 5), il suit en particulier que $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est intègre. Il nous reste à montrer que tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de hauteur 1 de $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est principal. Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de $\mathcal{O}_{X,(p)}$, comme $(\mathcal{O}_{X,(p)})_{\mathfrak{M}}$ est régulier, l'idéal premier $\mathfrak{P}(\mathcal{O}_{X,(p)})_{\mathfrak{M}}$ de hauteur 1 est principal, ainsi $\mathfrak{P}$ est projectif de rang 1 et alors $\mathfrak{P}\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est projectif de rang 1 sur $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Or $\mathrm{Pic}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}) = (1)$ (factoriel et régulier) ce qui implique que $\mathfrak{P}\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est principal. On a donc $\mathfrak{P}\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} = f.\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ avec $\|f\| = 1$. La norme multiplicative et la proposition 3 impliquent que

$$\overline{(\mathfrak{P}.\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})} = \mathfrak{P}\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} = \bar{f}.\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}.$$

Ainsi $\mathfrak{P}$ est principal (corollaire 3 de la proposition 9, chap. III, § 3 de [2]). Comme $\mathcal{O}_{X,(p)}$ admet une base normale d'algèbre (proposition 5) il suit du théorème 1 que $\mathfrak{P}$ est principal.

3.3. Point multiple ordinaire, intersection multiple.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la dimension 1 lorsque p est un point multiple ordinaire. Dans cette situation nous donnons par une suite de propriétés équivalentes une description de $r^{-1}(p)$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Si de plus p est une intersection multiple, on montre que cette situation est équivalente à Pic $(\mathcal{O}_{X,(p)}) = (0)$; résultat équivalent à $(R^1 r_* \mathcal{O}_X^{\times})_p = 0$ dans ([8], Stable reduction).

3.3.1. *Le complémentaire dans* $\mathbf{P}^1$ *d'une réunion finie de disques fermés.*

Soient $B(a_i, |\rho_i|^-)$, $1 \leqslant i \leqslant s$ des disques non circonférenciés de $\mathbf{P}^1_K$ de centre $a_i \in K$ et de rayon $|\rho_i| \in |K^\times|$ tels que les disques circonférenciés $B(a_i, |\rho_i|)$ soient disjoints. Soit alors $Y = \mathbf{P}^1_K - \left(\bigcup_{i=1}^{s} B(a_i, |\rho_i|^-)\right)$, on a $Y = \operatorname{Spm} A$ où

$$A = \frac{K\langle Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\rangle}{\left(Z_i Z_j + \dfrac{\rho_i}{a_i - a_j} Z_j + \dfrac{\rho_j}{a_j - a_i} Z_i\right)_{i<j}} \quad ([3], \text{ II.4.12, p. } 65).$$

Si z_i désigne l'image de Z_i dans A, alors $f \in A$ se décompose de façon unique sous la forme

$$f = c_0 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{m>0} c_{i,m} z_i^n \quad \text{avec} \quad c_{i,m} \to 0$$

et en posant $z_i = \dfrac{\rho_i}{z - a_i}$, on a

$$f = c_0 + \sum_{i=1}^{s} \sum_{m>0} c_{i,m} \left(\frac{\rho_i}{z - a_i}\right)^m \quad \text{avec} \quad c_{i,m} \to 0$$

et $Y = \left\{ z \in \mathbf{P}^1 \,\middle|\, \left| \frac{\rho_i}{z-a_i} \right| \leqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant s \right\}$ (II.4.12, 13, pages 65-69 de [3]). De plus la norme induite sur A par $K\langle Z_1, \ldots, Z_n \rangle$ est la norme spectrale et

$$\|f\| = \max_{i,m} (\|c_0\|, \|c_{i,m}\|).$$

Il est alors facile de vérifier que $\bar{A} = \dfrac{\bar{K}[Z_1, \ldots, Z_n]}{(Z_i Z_j)_{i<j}}$. Ainsi $\bar{Y}$ est une réunion de n droites affines qui se coupent en un seul point q correspondant à l'idéal maximal $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ (Fig. 1).

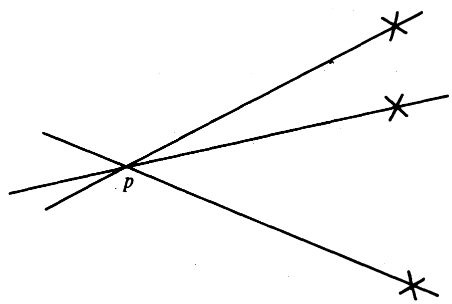

FIG. 1.

Il suit que

$$r^{-1}(q) = \left\{ z \in \mathbf{P}^1_K \,\middle|\, \left| \frac{\rho_i}{z-a_i} \right| < 1,\ 1 \leqslant i \leqslant s \right\} = \mathbf{P}^1_K - \left(\bigcup_{i=1}^{s} B(a_i, |\rho_i|) \right).$$

De plus

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)} = \frac{K \,\hat{\otimes}\, k^\circ [\![Z_1, \ldots, Z_n]\!]}{\left(Z_i Z_j + \dfrac{\rho_i}{a_i - a_j} Z_j + \dfrac{\rho_j}{a_j - a_i} Z_i \right)_{i<j}}$$
$$= K \,\hat{\otimes}\, k^\circ \left[\!\left[\frac{\rho_1}{z-a_1}, \ldots, \frac{\rho_n}{Z-a_n} \right]\!\right].$$

Il est alors facile de vérifier que

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)} = \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m>0} c_{i,m} \left(\frac{\rho_i}{z-a_i} \right)^m \,\middle|\, \begin{array}{l} c_0, c_{i,m} \in K, \text{ il existe une suite} \\ (s_n)_n \text{ (dépendant de } c_{i,m}) \text{ telle} \\ \text{que } 0 = \lim s_n \text{ et que } \operatorname{conv}_{k^\circ} \\ (\{c_{i,m}\}) \subset \operatorname{conv}_{k^\circ} (\{s_n\}) \end{array} \right\}.$$

Les inversibles de $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$. — Montrons que tout $f \in \operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)})^\times$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$(1) \qquad f = \prod_j (z-b_j)^{\beta_j} \prod_{i=1}^{n} (z-a_i)^{\alpha_i} \lambda(1+u),$$

où $\qquad \alpha_i, \beta_j \in \mathbf{Z},\ b_j \in r^{-1}(q),\ \lambda \in K^\times,\ |u(z)|<1,\ u(\infty)=0$

pour tout $z \in r^{-1}(q)$.

Il suffit de considérer le cas où f est un inversible de $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$. Soient $\varepsilon > 0$, $\mathbf{B}_{i,\varepsilon} = \mathbf{B}(a_i, (|\rho_i|+\varepsilon)^-)$, supposons ε assez petit pour que les $\mathbf{B}_{i,\varepsilon}$ soient disjoints. Alors on a :

$$f = (z-a_1)^{\alpha_1} \dots (z-a_n)^{\alpha_n} \lambda(1+h), \quad \text{où} \quad \alpha_i = \operatorname{ord}_{\partial \mathbf{B}_{i+\varepsilon}} f,\ \lambda \in K^\times,$$
$$h \in \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\mathbf{P}^1 - \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{B}_{i,\varepsilon}),\ |h(z)| < 1$$

pour

$$z \in \mathbf{P}^1 - \bigcup_{i=1}^{s} \mathbf{B}_{i,\varepsilon} \quad \text{et} \quad h(\infty) = 0$$

([3], proposition I.8.5, page 42). Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ on a $\operatorname{ord}_{\partial \mathbf{B}_{i+\varepsilon}} f = \operatorname{ord}_{\partial \mathbf{B}_{i+\varepsilon'}} f$ ([3], théorème des résidus I.3.3, page 23). Ainsi α_i est indépendant de ε et λ, aussi la relation (1) suit immédiatement.

Les anneaux $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$ et $\mathcal{O}_{Y,(q)}$ sont *principaux*, les idéaux maximaux sont engendrés par $\left(\dfrac{z-b}{z-a_1}\right)$ où $b \in r^{-1}(q)$, cela résulte de (1).

Le réseau Λ *de* $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$. — Soit $f \in \operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)})^\times$ posons

$$|f|_i = \limsup_{\varepsilon \downarrow |\rho_i|} \{|f(z)| \mid |z-a_i| = \varepsilon\}.$$

De la décomposition de f sous la forme (1), on déduit que

$$\operatorname{div}(f) = \Sigma n_j [b_j] - (\Sigma n_j + \Sigma \alpha_i)[\infty],$$

et

$$|f|_\ell = \prod_j |a_\ell - b_j|^{\beta_j} \prod_{i \neq \ell} |a_\ell - a_i|^{\alpha_i} |\rho_\ell|^{\alpha_\ell} |\lambda| \in |K^\times|.$$

Soit $\alpha' : \operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)})^\times \to |K^\times|^n$ défini par $\alpha'(f) = (|f|_1, \dots, |f|_n)$.

L'homomorphisme α' *est surjectif.* — Soient γ, $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbf{Z}$ avec $0 = \gamma + \Sigma\beta_j$ et

$b_1, b_2, \dots, b_s \in \{\lambda \in K \mid |\rho_1| < |\lambda - a_1| < \text{distance}\,(a_1, \{a_2, \dots, a_n\})$;

alors $f = (z-a_1)^\gamma \prod_{i=1}^{s} (z-b_j)^{\beta_j} \in \mathrm{Fr}\,(\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)})^\times$, $|f|_i = 1$ pour $i = 2, 3, \dots, s$ et

$$|f|_1 = \left|\frac{a_1-b_1}{\rho_1}\right|^{\beta_1} \times \dots \times \left|\frac{a_1-b_s}{\rho_1}\right|^{\beta_s}.$$

D'où il suit que α' est surjectif. Soit la surjection

$$\alpha : \quad \mathrm{Fr}\,(\hat{\mathcal{O}}_{Y.(q)})^\times \xrightarrow{\alpha'} |K^{\times n}| \to |K^{\times n}|/|K^\times|(1,1,\dots,1) \simeq |K^{\times n-1}|;$$

alors $\Lambda = \alpha(\hat{\mathcal{O}}^\times_{Y.(q)})$ *est un réseau multiplicatif* de $|K^\times|^{n-1}$. Ceci veut dire que $\log(\Lambda)$ est un réseau de $\mathbf{R}^{n-1}$ où $\log : |K^\times|^{n-1} \to \mathbf{R}^{n-1}$ est défini par

$$(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \to (\log \lambda_2, \dots, \log \lambda_n).$$

Soient $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $0 = \Sigma\gamma_i$, posons

$$h_\gamma(z) = \frac{(z-a_1)^{\gamma_1}(z-a_2)^{\gamma_2} \dots (z-a_n)^{\gamma_n}}{\rho_1^{\gamma_1}(a_1-a_2)^{\gamma_2} \dots (a_1 - a_n)^{\gamma_n}}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\log \Lambda = \ell(\mathbf{Z}^n) \quad \text{où} \quad \ell(\gamma) = (\log |h_\gamma|_2, \dots, \log |h_\gamma|_n).$$

Il nous reste à montrer que $\log \Lambda$ est un réseau de $\mathbf{R}^{n-1}$. Pour cela on prolonge ℓ en un $\mathbf{R}$-homomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n-1}$ en posant

$$\ell(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\log \| h|_\gamma|_1, \dots, \log \| h|_\gamma|_n)$$

où

$$|h|_\gamma(z) = \frac{|z-a_1|^{\gamma_1} \dots |z-a_n|^{\gamma_n}}{\rho_1^{\gamma_1}|a_1-a_2|^{\gamma_2} \dots |a_1-a_n|^{\gamma_n}}.$$

On a toujours

$$\| h|_\gamma|_1 = 1, \ \max_{z \in Y} |h|_\gamma(z) = \max(\| h|_\gamma|_1, \dots, \| h|_\gamma|_n).$$

Soit $\gamma \in \mathbf{R}^n$ tel que $\Sigma\gamma_i = 0$ et $\ell(\gamma) = 0$, alors il suit de ce qui précède que $|h|_\gamma(z) = 1$ pour tout $z \in \mathrm{Y}$ puisque $|h|_{-\gamma}$ possède la même propriété. Si $|z-a_i| \downarrow \rho_i$ il est facile de vérifier que $\gamma_i = 0$. Ainsi $n - 1 = \dim \ell(\mathbf{R}^n)$ ce qui prouve que $\log \Lambda$ est un réseau de $\mathbf{R}^{n-1}$.

Remarque. — Soit $\Omega = \mathbf{P}^1 - (\mathrm{B}(a_1,|\rho_1|) \cup \ldots \cup \mathrm{B}(a_s,|\rho_s|))$ où les $\mathrm{B}(a_i,|\rho_i|)$ sont des disques fermés disjoints. Le couple (Ω,τ) où τ est un ordre des s disques fermés détermine une matrice de rang $(s-1)$ (et de déterminant non nul) :

$$\Lambda' = \left(\log\left|\frac{z-a_j}{z-a_1}\cdot\frac{\rho_1}{a_1-a_j}\right|_i\right)_{i,j=2,\ldots,s}$$

(avec des modifications évidentes si un des B_i contient ∞).

On dit que (Ω_1,τ_1) et (Ω_2,τ_2) sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces analytiques $\varphi : \Omega_1 \xrightarrow{\sim} \Omega_2$ avec $\varphi(\tau_1) = \tau_2$.

Pour $s = 1$ ou 2 on voit aisément que Λ' détermine (Ω,τ) à isomorphisme près. Pour $s = 3$ c'est encore le cas. En effet, on peut supposer (après un auto-morphisme de $\mathbf{P}^1$) que

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(0,|\rho_1|),\ \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}(1,|\rho_2|),$$
$$\mathrm{B}_3 = \mathrm{B}(\infty,|\rho_3|) = \left\{z \in \mathbf{P}^1 \,|\, |z| \geqslant \frac{1}{|\rho_3|}\right\}$$

et $|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3| < 1$. La matrice Λ' est égale à

$$\begin{pmatrix} \log\left|\frac{z-1}{z}\cdot\rho_1\right|_2 & \log\left|\frac{z-1}{z}\cdot\rho_1\right|_3 \\ \log|z^{-1}\rho_1|_2 & \log|z^{-1}\rho_1|_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log|\rho_1\rho_2| & \log|\rho_1| \\ \log|\rho_1| & \log|\rho_1\rho_3| \end{pmatrix}.$$

Donc Λ' détermine (Ω,τ). Pour $s > 3$ la classe d'isomorphisme de (Ω,τ) n'est plus déterminée par Λ'. En effet, prenons

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(0,|\rho_1|),\quad \mathrm{B}_2 = \mathrm{B}(1,|\rho_2|),$$
$$\mathrm{B}_3 = \mathrm{B}(a,|\rho_3|),\quad \mathrm{B}_4 = \mathrm{B}(\infty,|\rho_4|)$$

où $|a| = 1$, $|a-1| = 1$ et $|\rho_1|, |\rho_2|, |\rho_3|, |\rho_4| < 1$.

Un calcul montre que

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \log|\rho_1\rho_2| & \log|\rho_1| & \log|\rho_1| \\ \log|\rho_1| & \log|\rho_1\rho_3| & \log|\rho_1| \\ \log|\rho_1| & \log|\rho_1| & \log|\rho_1\rho_4| \end{pmatrix}$$

et Λ' ne donne pas d'information sur l'élément a, quoique $\bar{a} \in \bar{\mathrm{K}} - \{0,1\}$ soit un invariant de (Ω,τ).

3.3.2. *Le point multiple ordinaire.*

DEFINITION. — Soit $(\mathrm{Z},\mathcal{O}_{\mathrm{Z}})$ une variété algébrique de dimension 1, affine, réduite sur un corps L algébriquement clos. Un point $p \in \mathrm{Z}$ est dit *multiple ordinaire de multiplicité* n s'il satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1) $\mathcal{O}_{\mathrm{Z},p} = \{f \in \tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p} | f(p_1) = f(p_2) = \ldots = f(p_n)\}$ où $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p}$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathrm{Z},p}$ dans son anneau total de fractions et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p}$ (au-dessus de p).

2) $\dim_{\mathrm{L}} \tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p/\mathcal{O}_{\mathrm{Z},p}} = n - 1$ où n est le nombre d'idéaux maximaux de $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p}$.

3) $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Z},p} \simeq \dfrac{\mathrm{L}[\![\mathrm{Z}_1,\ldots,\mathrm{Z}_n]\!]}{(\mathrm{Z}_i\mathrm{Z}_j)_{i<j}}$.

THÉORÈME 9. — *Soient* X *un espace affinoïde, régulier de dimension* 1 *sur un corps* K *valué complet algébriquement clos,* $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{\mathrm{X}}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *Le point* p *est multiple ordinaire.*

2) $\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X},(p)} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{Y},(q)}$ *où* $\mathrm{Y} = \mathbf{P}^1_{\mathrm{K}} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathrm{B}(a_i,|\rho_i|^-)$, $a_i, \rho \in \mathrm{K}$ *et les disques* $\mathrm{B}(a_i,|\rho_i|)$ *sont disjoints* (voir 3.3.1).

3) $\mathrm{Pic}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X},(p)}) = (0)$.

4) *L'espace analytique* $r^{-1}(p)$ *est localement isomorphe à* $\mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Montrons 1) implique 2). Puisque p est un point multiple ordinaire on a

$$\hat{\mathcal{O}}_{\bar{\mathrm{X}},p} \simeq \frac{\bar{\mathrm{K}}[\![\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_2,\ldots,\mathrm{Z}_n]\!]}{(\mathrm{Z}_i\mathrm{Z}_j)_{i<j}} = \bar{\mathrm{K}}[\![z'_1,z'_2,\ldots,z'_n]\!].$$

Soient $z_1,\ldots,z_n \in (\hat{\mathcal{O}}_{\mathrm{X},(p)})^{\circ}$ des relèvements de $z'_1,\ldots,z'_n$ (on a

$\bar{\hat{\mathcal{O}}}_{X,(p)} = \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p})$, φ le morphisme de $K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z_1,\ldots,Z_n]\!]$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ défini par $\varphi(Z_i) = z_i$. Comme $\bar{\varphi}$ est surjectif il suit que φ est surjectif (lemme 7). Comme $Z_iZ_j \in \ker \bar{\varphi}$, il existe $r_{ij} \in K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z]\!]$ tel que $(Z_iZ_j + r_{ij}) \in \ker \varphi$ et $\|r_{ij}\| < 1$. Il suit que $\overline{\ker \varphi} = \ker \bar{\varphi}$ et ainsi $\ker \varphi = (Z_iZ_j + r_{ij})_{i<j}$ (théorème 1). Ainsi :

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \simeq \frac{K \hat{\otimes} k^\circ[\![Z_1,Z_2,\ldots,Z_n]\!]}{(Z_iZ_j + r_{ij})_{i<j}}.$$

Soit $\alpha : K \hat{\otimes} k^\circ[\![T]\!] \to \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ définie par $\alpha(T) = z_1 + \cdots + z_n = t$, elle est finie et libre de degré n parce qu'il en est ainsi de $\bar{\alpha}$.

Soient $\rho \in K^\times$ et $|\rho| < 1, |\rho|$ assez proche de 1 et soit $X_\rho = \{a \in r^{-1}(p) \mid |t(a)| \leqslant |\rho|\}$. Sur $r^{-1}(p)$ on a $\|z_it - z_i^2\| < 1$ et donc $|z_i(a)| \leqslant |\rho|$ sur X_ρ. Alors

$$X_\rho = \{a \in r^{-1}(p) \mid |z_i(a)| \leqslant |\rho| \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

est un affinoïde de X contenu dans $r^{-1}(p)$. On a

$$\mathcal{O}_X(X_\rho) = \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle U\rangle/(t - \rho U) = \frac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle T_1,T_2,\ldots,T_n\rangle}{(z_i - \rho T_i)_i}$$
$$\simeq \frac{K\langle T_1,T_2,\ldots,T_n\rangle}{\left(T_iT_j + \frac{1}{\rho^2} r_{ij}(\rho T_1,\ldots,\rho T_n)\right)_{i<j}}.$$

La réduction de cette dernière algèbre pour la norme induite par $K\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$ est $\bar{K}[T_1,\ldots,T_n]/(T_iT_j)_{i<j}$, c'est une algèbre réduite, ce qui prouve que la norme induite par $K\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$ est la norme spectrale.

Soit $B = \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle S\rangle/(St - \rho)$, c'est une algèbre nœthérienne et de Banach pour la norme induite par celle de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle S\rangle$ (lemme 6). Notons ρt^{-1} l'image de S dans B. On a :

$$t^{-1}z_1 + \cdots + t^{-1}z_n = 1, \quad \|t^{-1}z_i\| \leqslant |\rho|^{-1}$$

et

$$\|t^{-1}z_it^{-1}z_j\| \leqslant \frac{1}{|\rho|^2}\|r_{ij}\|.$$

Soit ρ tel que $\|r_{ij}\| < |\rho|^4$. Ainsi les $t^{-1}z_i$ sont presque idempotents.

Soient $e \in B$ tel que $\|e^2 - e\| < |\rho|^2$ et $\|e\| < |\rho|^{-1}$ et

$e_* = 3e^2 - 2e^3 = e + (-2e+1)(e^2-e)$, alors on a $\|e_*-e\| \leqslant |\rho|$ et

$$\|e_*^2-e_*\| \leqslant \|e^2-e\|^2.\|4e^2-4e+3\| \leqslant \|e^2-e\|^2.$$

On a donc un procédé pour construire des idempotents $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{B}$ avec

$$\|t^{-1}z_i-e_i\| < 1, \quad e_ie_j = 0 \quad \text{si} \quad i<j,$$
$$e_i^2 = e_i \quad \text{et} \quad e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1.$$

Soit $\mathrm{A} = \mathrm{K} \hat{\otimes} k^\circ[\![\mathrm{T}]\!]\langle \mathrm{S}\rangle/(\mathrm{S}t-\rho)$ on voit facilement que

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}e_1 \times \mathrm{A}e_2 \times \cdots \times \mathrm{A}e_n \quad \text{et que} \quad \mathrm{A}e_i \simeq \mathrm{A}.$$

Il s'ensuit que

$$\{a \in r^{-1}(p) \mid |t(a)| \geqslant \rho\} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \quad \text{(réunion disjointe)}$$

où

$$\mathrm{X}_i = \{a \in r^{-1}(p) \mid |t(a)| \geqslant |\rho| \quad \text{et} \quad |e_i(a)| \geqslant 1\}.$$

Chaque X_i est un sous-espace analytique de X et l'application $a \mapsto te_i(a)$ de X_i dans $\{\lambda \in \mathrm{K} \mid |\rho| \leqslant |\lambda| < 1\}$ est un isomorphisme d'espaces analytiques. Soit l'espace analytique $\mathrm{R}_i = \{\lambda \in \mathrm{K} \mid |\rho| \leqslant |\lambda| \leqslant 1\}$, on construit l'espace analytique Y comme $\mathrm{X}_\rho \cup \mathrm{R}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{R}_n$ où $\cup_i \mathrm{R}_i$ est une réunion disjointe et R_i se colle sur X_ρ par

$te_i^{-1} : \{\lambda \in \mathrm{K} \mid |\rho| = |\lambda|\} \to \mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_\rho$ où

$$\mathrm{X}_i \cap \mathrm{X}_\rho = \{a \in r^{-1}(p) \mid |t(a)| = |\rho| \quad \text{et} \quad |e_i(a)| \geqslant 1\}.$$

La réduction de Y par rapport au recouvrement $\{\mathrm{X}_\rho, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n\}$ a la forme ci-dessous. L'espace Y est donc de genre 0 ([11], IV, 2, page 138), c'est donc un affinoïde connexe de $\mathbf{P}^1$(([11], IV, 2, theorem 2.4, p. 144) (fig. 2).

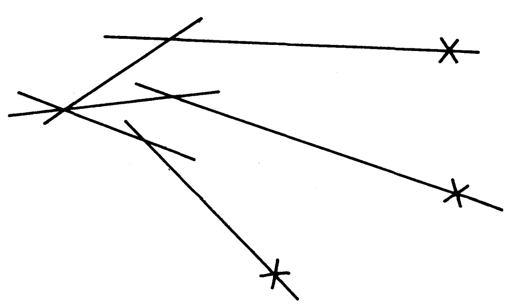

FIG. 2.

La réduction canonique $s : Y \to \bar{Y}$ est obtenue en contractant les droites projectives (fig. 3).

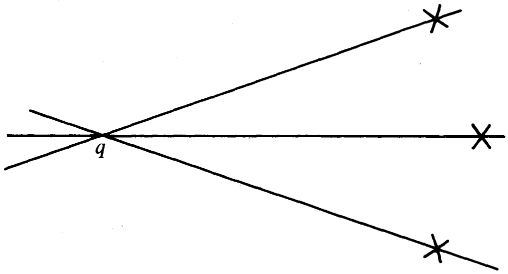

FIG. 3.

Ainsi $Y = \mathbf{P}^1_K - \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, |\rho_i|^-)$ où les disques fermés $B(a_i, |\rho_i|)$ sont disjoints.

Soit q le point multiple de Y, il nous reste à montrer que $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathcal{O}_Y(Y) & \to & \mathcal{O}_Y(X_\rho) \oplus \Sigma\mathcal{O}_Y(R_i) & \to & \Sigma\mathcal{O}_Y(X_\rho \cap R_i) & \to 0 \\
 & & \downarrow \alpha \qquad \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\
0 \to \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} & \to & \dfrac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle U \rangle}{(t-\rho U)} \oplus \dfrac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle S \rangle}{(St-\rho)} & \to & \dfrac{\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}\langle S, S^{-1} \rangle}{(St-\rho)} & \to 0 .
\end{array}$$

En copiant la démonstration du lemme 8 on montre que la seconde ligne est exacte. L'application α est l'identité, β est induite par $te_i : X_i \xrightarrow{\sim} \{\lambda \in K \mid |\rho| \leqslant |\lambda| < 1\} \subset R_i$, ces applications coïncident sur $\mathcal{O}_Y(X_\rho \cap R_i)$ elles induisent γ. Alors ce diagramme implique l'existence d'une application $\varphi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ qui rend le diagramme commutatif.

L'élément $t = te_1 + \cdots + te_n \in \operatorname{im} \beta$, alors c'est l'image d'un élément t_1 de $\mathcal{O}_Y(Y)$ par φ. On voit aisément que l'application de $K\langle T \rangle$ dans $\mathcal{O}_Y(Y)$ définie par $T \mapsto t_1$ est finie de degré n, que

$$X_\rho = \{a \in Y \mid |t_1(a)| \leqslant |\rho|\},$$
$$R_1 \cup \ldots \cup R_n = \{a \in Y \mid |t_1(a)| \geqslant |\rho|\}$$

et que

$$s^{-1}(q) = \{a \in Y \mid |t_1(a)| < 1\}.$$

En remplaçant la première ligne par la suite exacte

$$0 \to \hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)} \to \frac{\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}\langle U\rangle}{(t_1-\rho U)} \oplus \frac{\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}\langle S\rangle}{(St_1-\rho)} \to \frac{\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}\langle S,S^{-1}\rangle}{(St_1-\rho)} \to 0,$$

on voit que φ induit un isomorphisme $\psi : \hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. L'implication 2) $\Rightarrow$ 3) se déduit du § 3.3.1 puisque $\hat{\mathcal{O}}_{Y,(q)}$ est principal.

Montrons 3) implique 4). Soit $U \subset r^{-1}(p)$; l'homomorphisme canonique $\varphi : \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} \to \mathcal{O}_X(U)$ est dense. Soit $\mathfrak{M}$ un maximal de $\mathcal{O}_X(U)$, alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ est un maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Il est aisé de vérifier que $\varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{M}))$ est dense dans $\mathfrak{M}$. De plus $\mathrm{Pic}\,(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}) = (0)$ implique qu'il existe $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ avec $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}) = f.\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Ainsi $\mathfrak{M} \supset \varphi(f)\mathcal{O}_X(U)$. Comme $\mathcal{O}_X(U)$ est nœthérien $\varphi(f)\mathcal{O}_X(U)$ est fermé et alors $\varphi(f)\mathcal{O}_X(U)$ dense dans $\mathfrak{M}$, implique $\mathfrak{M} = \varphi(f)\mathcal{O}_X(U)$. Ainsi $\mathcal{O}_X(U)$ est principal puisque X est régulier. Il suit alors que U est un affinoïde de $\mathbf{P}^1$ ([7] theorem 2.1, page 159).

Montrons que 4) implique 1). Il existe une application injective, finie, de degré n, $\varphi : K\langle T\rangle \to \mathcal{O}(X)$ telle que $0 \in \bar{K} \simeq \mathrm{Spm}\,(\bar{K}[T])$ soit l'image de p par $\mathrm{Spm}\,\bar{\varphi}$. Soient $t = \varphi(T)$, $\rho \in K^\times$, $|\rho| < 1$ et $|\rho|$ assez proche de 1. Soient $p = p_1, p_2, \ldots p_s$ les points de $\bar{X}$ au-dessus de $0 \in K$. On a

$$Z_\rho^- = \{a \in X \mid |t(a)| \leqslant |\rho|\} = X_\rho \cup X_\rho^2 \cup \ldots \cup X_\rho^s$$

où

$$X_\rho = X_\rho^1 = \{a \in r^{-1}(p) \mid |t(a)| \leqslant |\rho|\},$$
$$X_\rho^i = \{a \in r^{-1}(p_i) \mid |t(a)| \leqslant |\rho|\}.$$

Il est facile de vérifier que les X_ρ^i sont rationnels, connexes dans X, deux à deux disjoints. Il suit que $\mathcal{O}(Z_\rho^-) = \oplus\, \mathcal{O}(X_\rho^i)$ est fini, de degré n sur $K\langle T/\rho\rangle$. Ainsi $\overline{Z_\rho^-} = \cup\, \overline{X_\rho^i}$ la réduction canonique $\overline{Z_\rho^-}$ est de degré n sur $\mathrm{Spm}\,(\overline{K\langle T/\rho\rangle}) \simeq \bar{K}$. Par hypothèse $X_\rho \simeq \mathbf{P}^1 - (B_1 \cup \ldots \cup B_{e(\rho)})$, où les B_i sont des disques ouverts disjoints puisque X_ρ est un affinoïde connexe de $\mathbf{P}^1$. Le nombre de ces disques est donc inférieur ou égal à n. Soit $e = \liminf_{|\rho| \uparrow 1} e(\rho)$. On choisit alors une suite $\{\rho_i\}$ d'éléments de K telle que $|\rho_1| < |\rho_2| < \ldots, \lim |\rho_i| = 1$ et $e(\rho_i) = e$ pour tout i. Alors $X_{\rho_n} = \mathbf{P}^1 - (B_{1,n} \cup \ldots \cup B_{e,n})$ et les disques fermés correspondant aux disques ouverts $B_{i,n}$ sont encore disjoints.

L'espace affinoïde X_{ρ_1} qui est un sous-espace de $\mathbf{P}^1$ a une réduction canonique composée de e droites affines $L_1, \ldots, L_e$ qui se coupent en un point q au-dessus de $0 \in \bar{K}$ (fig. 4).

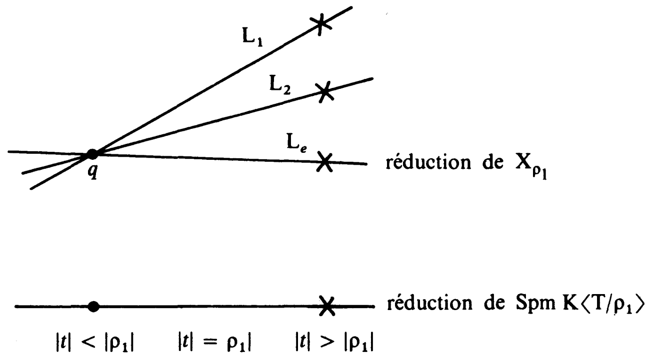

FIG. 4.

Soit l'espace analytique

$$X'_{\rho_1} = Z^+_{\rho_1} \cup X^2_{\rho_1} \cup \ldots \cup X^s_{\rho_1} \quad \text{où} \quad Z^+_{\rho_1} = \{a \in X \mid |t(a)| \geqslant |\rho_1|\}.$$

Alors $\mathscr{U} = \{Z^+_{\rho_1}, X^2_{\rho_1}, \ldots, X^s_{\rho_1}\}$ est un recouvrement pur. La réduction de

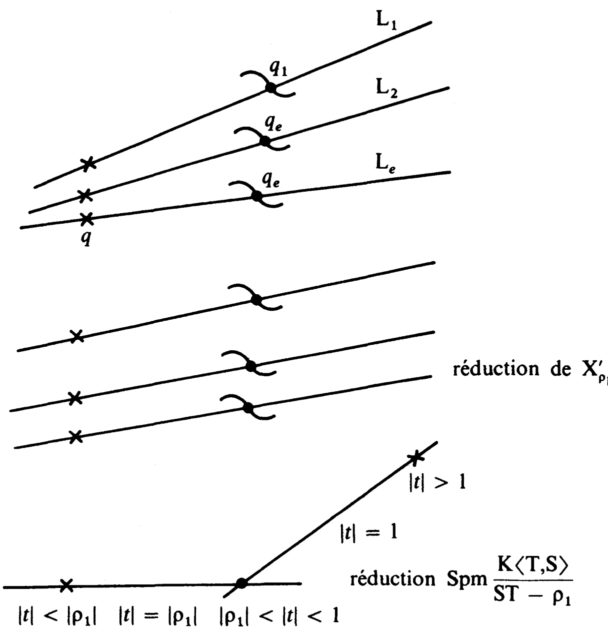

FIG. 5

X'_{ρ_1} par rapport à ce recouvrement a des composantes incomplètes (fig. 5). Il suit alors que X'_{ρ_1} est un affinoïde (theorem, p. 139, [11], [8]).

Ainsi la réduction canonique de X'_{ρ_1} a la forme ci-dessous (fig. 6).

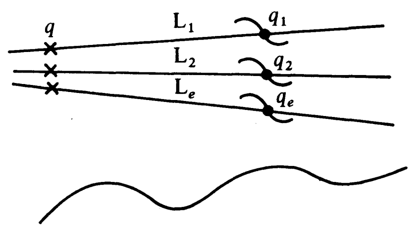

FIG. 6

Comme $\{X_{\rho_1}, X'_{\rho_1}\}$ est un recouvrement pur de X, la réduction $s : X \to Y$ de X selon ce recouvrement a exactement e composantes complètes. Ce sont les droites projectives $\hat{L}_1, \ldots, \hat{L}_e$ elles se coupent en un point q et coupent les composantes non complètes en $q_1, q_2, \ldots, q_e$ (fig. 7).

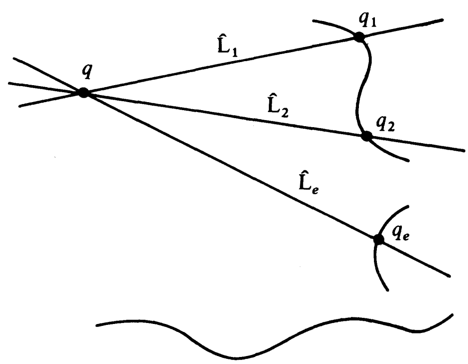

FIG. 7.

Soient $Y_1 = \hat{L}_1 \cup \ldots \cup \hat{L}_e$ la réunion des composantes complètes de Y, $\varphi : Y \to \bar{X}$ le morphisme canonique tel que $r = \varphi \circ s$ où r est la réduction canonique. On a $\varphi(Y_1) = \varphi(q) = p$ (les composantes complètes se contractent en un point). Quitte à changer $\bar{X}$ en un ouvert principal plus petit on peut supposer que $\bar{X} - \{p\}$ est régulier.

Le lemme 11 (ci-après) montre que $Y - Y_1 \xrightarrow[\sim]{\varphi} X - \{p\}$, donc que $Y - Y_1$ est régulier.

L'affinoïde $\{a \in r^{-1}(p) | \, |t(a)| \geqslant |\rho_1|\}$ est réunion disjointe de e espaces analytiques, $X_1, \ldots, X_e$. Si $r' : X'_\rho \to \overline{X'_\rho}$ est la réduction canonique de $\overline{X'_\rho}$, on a $r'^{-1}(q_i) = \{a \in X_i | \, |\rho_1| < |t(a)| < 1\}$, c'est-à-dire

$$r'^{-1}(q_i) = \bigcup_{n \geqslant 1} \{a \in X_i | \, |\rho_1| < |t(a)| < |\rho_n|\}$$

est une réunion d'espaces isomorphes à des couronnes non circonférenciées de $\mathbf{P}^1$. Il suit alors du lemme 10 (ci-après) que q_i est un point double ordinaire de Y.

Il nous reste à montrer que $p = \varphi(q)$ est un point multiple ordinaire de $\bar{X}$. Soient $\eta : \tilde{Y} \to Y$ la normalisation de Y et la suite exacte de faisceau sur Y

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \eta_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \to A \to 0 .$$

On a la suite exacte de cohomologie

$$0 \to \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(\tilde{Y}) \to H^0(A) \to H^1 \mathcal{O}_Y) \to H^1(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0 .$$

En effet, $\tilde{Y}$ est réunion disjointe de courbes affines et de droites projectives, ainsi on a $H^1(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0$.

Posons $Y = (\cup \hat{L}_i) \cup N$ où N est la réunion des composantes non complètes (la réunion est disjointe). D'autre part on a

$$H^0(A) = \bigoplus_{i=1}^{e} \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q_i}/\mathcal{O}_{Y,q_i} \oplus \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q}/\mathcal{O}_{Y,q} .$$

On a

$$\dim_{\bar{K}} \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q_i}/\mathcal{O}_{Y,q_i} = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\bar{K}} \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q}/\mathcal{O}_{Y,q} = e - 1$$

puisque q et q_i sont des points multiples ordinaires. Or le morphisme de $\widetilde{\mathcal{O}(Y)} = \oplus \mathcal{O}(\hat{L}_i) \oplus \mathcal{O}(N)$ dans $H^0(A) = \bigoplus_i \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q_i}/\mathcal{O}_{Y,q_i} \oplus \tilde{\mathcal{O}}_{Y,q}/\mathcal{O}_{Y,q}$ est défini par

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_e, f) \mapsto (f(q_1) + \lambda_1, \ldots, f(q_e) + \lambda_e, \overline{(\lambda_1, \ldots, \lambda_e)});$$

on identifie $\tilde{\mathcal{O}}_{Y,q}/\mathcal{O}_{Y,q}$ à $\dfrac{\bar{K}^e}{\bar{K}(1, \ldots, 1)}$ et $\overline{(\lambda_1, \ldots, \lambda_e)}$ à l'image de

$(\lambda_1,\ldots,\lambda_e)$ dans le quotient. Il est alors facile de vérifier que ce morphisme est surjectif, ce qui prouve que $H^1(\mathcal{O}_Y) = 0$.

On a la suite exacte ([11], p. 141)

$$0 \to H^1(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ) \otimes \bar{K} \to H^1(Y,\mathcal{O}_Y) \to \mathrm{Tor}_1^{K^\circ}(H^2(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ), \bar{K}) = 0.$$

Il suit donc que $H^1(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ) \otimes \bar{K} = 0$, comme $H^1(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ)$ est un K°-module de type fini ([11], page 141), le lemme de Nakayama montre que $H^1(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ) = 0$. Enfin la suite exacte ([11], page 141)

$$0 \to H^0(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ) \otimes \bar{K} \to H^0(Y,\mathcal{O}_Y) \to \mathrm{Tor}_1^{K^\circ}(H^1(Y,s_*\mathcal{O}_X^\circ),\bar{K}) = 0$$

implique $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(Y)$. Or $Y - U(\hat{L}_i - q_i)$ est la normalisation $\tilde{\bar{X}}$ de $\bar{X}$. Il est clair que $\mathcal{O}(Y) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{\bar{X}}) | f(q_1) = \ldots = f(q_e)\}$. Ce qui prouve que $\varphi(p)$ est un point multiple ordinaire de multiplicité e.

LEMME 10. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit sur un corps* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{X}$. *On suppose en plus que* $r^{-1}(p) = \bigcup_{n \geqslant 1} C_n$, $C_n \subset C_{n+1}$ *pour* $n \geqslant 1$; C_n *est isomorphe par* f_n *à la couronne non circonférenciée de* $\mathbf{P}^1$, $D_n = \{z \in K \,|\, 1 < |z| < |r_n|\}$ *où* $r_n \in K$, $|r_n| \uparrow |r|$ *et enfin* $\lim_{|z| \downarrow 1} |f_n \circ i \circ f_1^{-1}(z)| = 1$ *où* i *est l'injection canonique de* C_1 *dans* C_n. *Alors* p *est un point double ordinaire.*

Démonstration. — Soit $L \supset K$ un corps maximalement complet avec $\bar{L} = \bar{K}$, $|L^\times| = \mathbf{R} > 0$, alors l'affinoïde $X_K \times L$ a la même réduction que X. On peut donc supposer que $K = L$ et ainsi $|r| \in |K^\times|$.

Quitte à multiplier f_n par $\alpha_n \in K$ et $|\alpha_n| = 1$, on peut supposer que $g_n = f_n \circ i \circ f_1^{-1}$ est de la forme

$$g_n(z) = z^{-1} + \sum_{i \geqslant 2} a_i^n z^{-1} + \sum_{j \geqslant 1} b_j z^j, \quad \text{avec} \quad |a_i| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |b_j| \leqslant 1.$$

Soient ℓ^∞ le K-espace de Banach des suites bornées, φ la forme linéaire continue sur le sous-espace des suites convergentes défini par $\varphi((a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)) = \lim_{n \to \infty} a_n$; alors $\|\varphi\| = 1$ et le théorème de Hahn-Banach montre que φ se prolonge à ℓ^∞ en une forme linéaire continue de norme 1, toujours notée φ. On définit une application $F : \cup C_n \to \cup D_n$; si $b \in C_{n_0}$ on pose $F(b) = \varphi(0,\ldots,0,f_{n_0}(b),\ldots,f_n(b),\ldots)$. Il nous reste à montrer que F est un isomorphisme de $r^{-1}(p)$ sur $\{z \in K \mid 1 < |z| < |r|\}$. Il suffit pour cela de montrer que $F|C_n$ est un isomorphisme de C_n sur D_n. Montrons le pour $n = 1$; ceci revient à montrer que $z \to \varphi(g_1(z),\ldots,g_n(z),\ldots)$ est un isomorphisme de D_1 sur D_1. Si $z \in D_1$, $\lim_i |z^{-i}| = 0$ et $\lim_j |z/r_1|^j = 0$. Il est facile de vérifier que

$$F(g_1(z),\ldots,g_m(z),\ldots) = z^{-1} + \sum_{i\geqslant 2} \varphi(a_i)z^{-i} + \sum_{j\geqslant 1} \varphi(b_j)(z/r_1)^j$$

où $a_i = (a_i^1, a_i^2,\ldots,a_i^n,\ldots)$, $b_j = \left(b_j^1\left(\frac{r_1}{r_1}\right)^j,\ldots,b_j^n\left(\frac{r_1}{r_n}\right)^j,\ldots\right)$.

Ce qui montre que $b \mapsto F(b)$ est un isomorphisme de C_1 sur D_1. On montrerait de même que F est un isomorphisme de C_n sur D_n, donc de $r^{-1}(p)$ sur $\{z \in K \mid 1 < |z| < |r|\}$.

Si $\mathcal{O}$ est le faisceau structural sur $r^{-1}(p)$ on a donc

$$\mathcal{O}(r^{-1}(p))^{\circ} \xrightarrow{\sim} \left\{ f = \sum_{i\geqslant 0} a_i z^{-i} + \sum_{j\geqslant 1} b_j \left(\frac{z}{r}\right)^j \,\middle|\, \text{où } a_i, b_j \in K^{\circ} \right\}.$$

Il suit alors clairement que $\overline{\mathcal{O}(r^{-1}(p))} \simeq \dfrac{\bar{K}[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2)}$ et comme $\overline{\mathcal{O}(r^{-1}(p))} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ ([11], theorem 4.2, page 170), il suit que p est un point double ordinaire.

LEMME 11. — *Soient* X *un espace affinoïde réduit de dimension* 1 *sur un corps* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $s : X \to Y$ *sa réduction relativement à un recouvrement pur fini et* $\varphi : Y \to \bar{X}$ *le morphisme canonique tel que* $r = \varphi \circ s$.

1) *Si* Y *est une variété algébrique affine, alors le morphisme* φ *est un isomorphisme.*

2) *Supposons en plus que* X *soit irréductible et que* Y_1 *soit la réunion des composantes irréductibles complètes de* Y; *alors* φ *induit un isomorphisme de* $Y - Y_1$ *sur* $\bar{X} - \varphi(Y_1)$.

Démonstration. — On a les résultats suivants

(1)
$$0 \to \mathrm{H}^i(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}) \underset{\mathrm{K}^{\circ}}{\otimes} \bar{\mathrm{K}} \to \mathrm{H}^i(\mathrm{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{K}^{\circ}}(\mathrm{H}^{i+1}(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}),\bar{\mathrm{K}}) \to 0$$

où $\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}})$ est un K°-module de type fini pour $i \geqslant 1$ et $\mathrm{H}^i(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}) = 0$ pour $i \geqslant 2$ ([11], page 141).

Si Y est affine en utilisant (1) pour $i = 1$ on obtient $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}) \otimes \bar{\mathrm{K}} = 0$ puisque $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}) = 0$. Comme $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}})$ est un K°-module de type fini, le lemme de Nakayama montre que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}) = 0$. Alors l'utilisation de (1) pour $i = 0$ montre que $\mathrm{H}^0(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}) \otimes \bar{\mathrm{K}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{Y},\mathcal{O}_{\mathrm{Y}})$, soit donc $\mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\bar{\mathrm{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})$, ce qui prouve la première partie du lemme.

Montrons la deuxième partie. L'image par φ d'une composante complète est un point puisque $\bar{\mathrm{X}}$ est affine. Ainsi $\varphi(\mathrm{Y}_1)$ est un ensemble fini de points de $\bar{\mathrm{X}}$, $\{p_1,\ldots,p_s\}$. Ainsi $\mathrm{Y} - \varphi^{-1}(\{p_1,\ldots,p_s\})$ est un ouvert affine de Y. La restriction de s à

$$r^{-1}(\mathrm{X}-\{p_1,\ldots,p_s\}) = s^{-1}(\mathrm{Y}-\varphi^{-1}(\{p_1,\ldots,p_s\}))$$

définit une réduction dont $\mathrm{Y} - \varphi^{-1}(\{p_1,\ldots,p_s\})$ est l'image par s. Il suit de la première partie que φ induit un isomorphisme de $\mathrm{Y} - \varphi^{-1}(\{p_1,p_2,\ldots,p_s\})$ sur $\bar{\mathrm{X}} - \{p_1,\ldots,p_s\}$. Il nous reste à montrer que $\mathrm{Y}_1 = \varphi^{-1}(\{p_1,\ldots,p_s\})$. La relation (1) pour $i = 0$ s'écrit

$$0 \to \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\bar{\mathrm{X}}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{K}^{\circ}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}),\bar{\mathrm{K}}) \to 0.$$

Or, $\dim_{\bar{\mathrm{K}}} \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{K}^{\circ}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{Y},s_*\mathcal{O}^{\circ}_{\mathrm{X}}),\bar{\mathrm{K}}) < \infty$. Soit Z une composante irréductible de Y, alors il suit de la finitude de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{Y})/\mathrm{im}\,\psi$ que l'adhérence de $\varphi(\mathrm{Z})$ est de dimension zéro si et seulement si Z est complète. Il suit facilement qu'il existe $t \in \mathcal{O}_{\bar{\mathrm{X}}}(\bar{\mathrm{X}})$ tel que $\psi(t)|_{\mathrm{Y}_1} = 0$ et $\psi(t)|_{\mathrm{Z}} \not\equiv 0$ pour toute composante irréductible non complète Z de Y.

Soit U un ouvert de Y tel que

$$\mathrm{Y}_1 \subseteq \mathrm{U} \subseteq \mathrm{Y} - \text{les zéros de } t \text{ sur } \mathrm{Y}_2 - (\mathrm{Y}_1 \cap \mathrm{Y}_2)$$

où Y_2 est la réunion des composantes non complètes de Y.

Soient $\mathrm{X}_1 = s^{-1}(\mathrm{Y}-\mathrm{Y}_1)$, $\mathrm{X}_2 = s^{-1}(\mathrm{U})$. Pour la réduction induite par s, $s^{-1}(Y-Y_1)$ a pour réduction $Y - Y_1$ qui est affine, ainsi $s^{-1}(Y-Y_1)$ est affinoïde ([11] théorème p. 139) et il suit de la partie 1°) que $Y - Y_1$ est sa réduction canonique. D'autre part U a des composantes irréductibles non complètes, le même théorème montre que $X_2 = s^{-1}(U)$ est affinoïde. De plus $\mathcal{U} = \{X_1, X_2\}$ est un recouvrement pur. D'abord $X_1 \cap X_2 = s^{-1}(Y-Y_1$-nombre fini de points) est pur dans X_1 et $X_1 \cap X_2 = \{a \in X_2 \mid |T(a)| = 1\}$ est pur dans $X_2(T \in \mathcal{O}(X)^\circ$ et a pour image $t \in \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X}))$. La réduction $\bar{X}_{\mathcal{U}} = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2$ n'a pas de composantes complètes, alors la première partie montre que $\bar{X}_{\mathcal{U}} = \bar{X}$. Ainsi $\{p_1, \ldots, p_s\} \subset \bar{X}_2$ et donc $\varphi^{-1}(\{p_1, \ldots, p_s\}) \subset U$. Comme cela est valable pour tout ouvert U, on a $Y_1 = \varphi^{-1}(\{p_1, \ldots, p_s\})$.

3.3.3. *Le groupe de Picard de* $\mathcal{O}_{X,(p)}$.

Le théorème 9 décrit la relation entre le point multiple ordinaire $p \in \bar{X}$ et l'espace analytique $r^{-1}(p) \simeq \mathbf{P}^1 - \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, |\rho_i|)$. En effet on a le diagramme commutatif suivant

(1)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{O}_X(X)^\circ & \to & \mathcal{O}^\circ_{X,(p)} & \to & \hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)} & \xrightarrow{\sim} & \hat{\mathcal{O}}^\circ_{Y,(q)} & \xrightarrow{\sim} & K^\circ \hat{\otimes} k^\circ[[\frac{\rho_1}{z-a_1}, \ldots, \frac{\rho_n}{z-a_n}]] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow s \\
\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{X}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_{\bar{X},p} & \xrightarrow{\psi} & \hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p} & \xrightarrow{\sim} & & & \dfrac{\bar{K}[[Z_1, \ldots, Z_n]]}{(Z_i Z_j)_{i<j}} \simeq \bar{K}[[z_1, \ldots, z_n]]
\end{array}$$

où

$$s\left(c + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m>0} c_{i,m}\left(\frac{\rho_i}{z-a_i}\right)^m\right) = \bar{c} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m>0} \bar{c}_{i,m} z_i^m.$$

On dira alors que $\left(\dfrac{\rho_i}{z-a_i}\right) \mapsto z_i$ définit *une bijection entre les circonférences des disques* $B_i(a_i, |\rho_i|)$ *et les tangentes en* p *à* $\bar{X}$.

LEMME 12. — *Soient* X *un espace affinoïde régulier connexe de dimension* 1 *sur* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction canonique,* $p \in \bar{X}$ *un point multiple ordinaire qui est le seul point singulier de*

$\bar{\mathrm{X}}$. *L'espace analytique* $r^{-1}(p)$ *est isomorphe à* $\mathbf{P}^1 - \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}(a_i, |\rho_i|)$. *Soient* $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_s$ *les composantes irréductibles de* $\bar{\mathrm{X}}$, $\mathrm{B}(a_{i_1}, |\rho_{i_1}|), \ldots, \mathrm{B}(a_{i_{n_i}}, |\rho_{i_{n_i}}|)$ *les disques dont les circonférences correspondent aux tangentes en* p *à* Y_i. *Soit* $|.|_i$ *la valeur absolue sur* $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}))$ *définie par* $|f| = \lim\limits_{|z-a_i| \downarrow |\rho_i|} |f(z)|$. *Alors pour tout* $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X})$ *on a*

$$\|f\| = \max(|f|_1, \ldots, |f|_n), \quad \|f\| = \|f\|_{r^{-1}(p)},$$
$$\|f\|_{r^{-1}(\mathrm{Y}_i - p)} = |f|_{i_1} = \ldots = |f|_{i_{n_i}} \quad pour \quad 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathcal{O}(\mathrm{X})$, $\|h\| = 1$, alors on a les équivalences suivantes :

i) $\bar{h}|\mathrm{Y}_i \neq 0$ (resp. $\bar{h}|\mathrm{Y}_i = 0$)

ii) $\|h\|_{r^{-1}(\mathrm{Y}_i - p)} = 1$ (resp. $\|h\|_{r^{-1}(\mathrm{Y}_i - p)} < 1$)

iii) $|h|_{i_1} = |h|_{i_2} = \ldots = |h|_{i_{n_i}} = 1$ (resp. $|h|_{i_1} < 1, \ldots, |h|_{i_{n_i}} < 1$).

L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ ii) est immédiate. L'équivalence i) $\Leftrightarrow$ iii) se déduit du diagramme (1).

Il suit de ces équivalences que $\|f\| = \max(|f|_1, \ldots, |f|_n)$ et alors $\|f\| = \|f\|_{r^{-1}(p)}$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{O}(\mathrm{X})$, $f \neq 0$, $|f|_{i_1} = 1 \geqslant |f|_{i_j}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n_i$. Soit $t_i \in \mathcal{O}(\mathrm{X})^{\circ}$ tel que $\bar{t}_i|\mathrm{Y}_i \neq 0$ et $\bar{t}_i|\mathrm{Y}_j = 0$ pour $j \neq i$. Il existe $n \geqslant 1$ tel que $|ft_i^n|_j < 1$ pour $j \neq i$ et comme $h \mapsto |h|_i$ est multiplicatif on aura $|ft_i^n|_{i_1} = 1 \geqslant |ft_i^n|_j$ pour $i_1 \leqslant j \leqslant i_{n_i}$. Ainsi $\|ft_i^n\| = 1$, en posant $h = ft_i^n$ les équivalences montrent que $\bar{h}|\mathrm{Y}_j = 0$ pour $j \neq i$ et donc $\bar{h}|\mathrm{Y}_i \neq 0$ puisque $h \neq 0$. Il suit que

$$1 = \|h\|_{r^{-1}(\mathrm{Y}_i - p)} = |h|_{i_1} = \ldots = |h|_{i_{n_i}},$$

comme $h \mapsto \|h\|_{r^{-1}(\mathrm{Y}_i - p)}$ et $g \mapsto |h|_j$ sont multiplicatifs, le lemme suit.

Si A est un anneau de Dedekind, le *groupe des diviseurs sur* Spm(A) est le groupe abélien libre engendré par les idéaux maximaux de A et on le note Div (Spm A). A tout $f \in \mathrm{Fr}(\mathrm{A})^{\times}$ on associe de façon évidente un élément de Div (Spm A) qui constitue un sous-groupe appelé le sous-groupe des *diviseurs principaux* que l'on note $\mathrm{Div}(\mathrm{Fr}(\mathrm{A})^{\times})$. Et on a $\mathrm{Pic}(\mathrm{A}) = \mathrm{Div}(\mathrm{Spm}\,\mathrm{A})/\mathrm{Div}(\mathrm{Fr}(\mathrm{A})^{\times})$.

THÉORÈME 10. — *Soient* X *un espace affinoïde régulier de dimension* 1 *sur un corps* K *algébriquement clos,* $r : \mathrm{X} \to \bar{\mathrm{X}}$ *sa réduction canonique,*

$p \in \bar{X}$ un point multiple ordinaire. Alors

$$r^{-1}(p) \simeq \mathbf{P}^1 - \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i,|\rho_i|),$$

les disques $B(a_i,|\rho_i|)$ sont en bijection avec les tangentes à $\bar{X}$ en p. Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ les composantes irréductibles de X passant par p, $B(a_{i_1},|\rho_{i_1}|), \ldots, B(a_{i_{n_i}},|\rho_{i_{n_i}}|)$ les disques correspondant aux tangentes en p à Y_i. Enfin soit $f \to |f|_i = \lim_{|z-a_i| \downarrow |\rho_i|} |f(z)|$ la valeur absolue associée à $B(a_i,|\rho_i|)$ sur $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$. Alors l'homomorphisme surjectif $\alpha : \operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\times \mapsto |K^\times|^n$ défini par $\alpha(f) = (|f|_1, \ldots, |f|_n)$ induit un isomorphisme de

$$\operatorname{Div}(\operatorname{Spm}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})) = \operatorname{Div}(\operatorname{Spm}(\mathcal{O}_{X,(p)})$$

sur $\dfrac{|K^\times|^n}{\alpha(\hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)})}$ qui lui-même induit l'isomorphisme

$$\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)}) \xrightarrow{\sim} \frac{|K^\times|^n}{M} \xrightarrow{\sim} \frac{|K^\times|^{n-s}}{Z},$$

où M est le sous-groupe engendré par $\alpha(\hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)})$ et

$$\{(r_{i_j}) \in |K^\times|^n \mid r_{i_j} = r_{i_{j'}} \quad \textit{pour tout } i, j, j'\}$$

et où Z est un sous-groupe engendré par au plus $n-1$ éléments.

Démonstration. — Comme $r^{-1}(p)$ est régulier de dimension 1, $\mathcal{O}_{X,(p)}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ sont deux anneaux de Dedekind. Comme $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est principal (théorème 9) on a $\operatorname{Div}(\operatorname{Spm}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})) = \dfrac{\operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\times}{\hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)}}$. De plus $\operatorname{Div}(\operatorname{Spm}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})) = \operatorname{Div}(\operatorname{Spm}(\mathcal{O}_{X,(p)})) = \operatorname{Div}(r^{-1}(p))$. Soit

$$\tau : \operatorname{Fr}(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\times \to |K^\times|^n \to \frac{|K^\times|^n}{M},$$

il s'agit donc de démontrer que $\ker \tau = \hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)} . \operatorname{Fr}(\mathcal{O}_{X,(p)})^\times$.

Pour $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)} . \operatorname{Fr}(\mathcal{O}_{X,(p)})^\times \subset \ker \tau$; il suffit de voir que $\mathcal{O}_{X,(p)} - \{0\} \subset \ker \tau$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,(p)}$, alors il existe un ouvert principal $U \ni p$ de $\bar{X}$ tel que $U - p$ soit régulier et il existe $g \in \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ avec $\|f-g\| < \min(|f|_1, \ldots, |f|_n)$. Ainsi $|f|_i = |g|_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et alors le lemme 12 appliqué à $r^{-1}(U)$ montre que $|g|_{i_j} = |g|_{i_{j'}}$ pour tout i, j, j', ce qui montre que $\alpha(f) \in M$, donc $f \in \ker \tau$.

Soit maintenant $f \in \ker \tau$, on peut supposer, quitte à multiplier f par un inversible de $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$, que $|f|_{i_j} = |f|_{i_{j'}}$ pour tout i, j, j'.

Soit $U \ni p$ un ouvert principal de X tel que $U - p$ soit régulier. Alors le lemme 12 appliqué à $r^{-1}(U)$ montre que les valeurs absolues $|\,.\,|_{i_1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$ de $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ sont indépendantes. Ainsi il existe $g \in \mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_X(r^{-1}(U)))^\times$ tel que $|g|_{i_1} = |f|_{i_1}$. Soit donc $h = fg^{-1} \in \mathrm{Fr}\,(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\times$ on a $|h|_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On souhaite trouver un élément $\ell \in \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))$ de façon que $\ell h \in \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ et $|\ell h|_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Soient q un pôle de h et $t \in \mathcal{O}_X(r^{-1}(U))^\circ$ tel que $\bar{t}(p) = 0$ et $|\bar{t}|Y_i \neq 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Il suit du lemme 12 que $|t|_1 = \ldots = |t|_n = 1$, de plus $|t(q)| < 1$, ainsi $|t - t(q)|_1 = \ldots = |t - t(q)|_n = 1$. Il suit qu'un produit $\Pi(t - t(q)))^{\alpha_i}$ conviendra pour ℓ. Soit donc $h_1 = \ell h$.

On a $1 = \|h_1\| = \max\,(|h_1|_1, \ldots, |h_1|_n)$. Si $h_1 \in \hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)}$ il suit que $f \in \hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)}.\mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_{X,(p)})^\times$. Sinon $\bar{h}_1$ appartient à l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$ et $1 = |h_1|_1 = \ldots = |h_1|_n$ implique que $\|u.h_1\| = \|u\|$ pour tout $u \in \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$, ou ce qui est équivalent, que $\bar{h}_1$ ne divise pas zéro. Il suit de cela que $(h_1^2\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\circ = h_1^2\hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}$ et donc

$$(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}/h_1^2\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})^\circ = \hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}/h_1^2\hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}.$$

Ainsi $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}/h_1^2\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ a pour réduction $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}/\bar{h}_1^2\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},p}$. Puisque $\bar{h}_1$ ne divise pas zéro, cette dernière algèbre est de dimension zéro et donc aussi $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}/h_1^2\hat{\mathcal{O}}_{X,p}$. Ainsi l'application $\mathcal{O}^\circ_{X,(p)} \xrightarrow{\varphi} \hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}/h_1^2\hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}$ qui est surjective en réduction est donc surjective. Il existe donc $h_2 \in \mathcal{O}^\circ_{X,(p)}$ tel que $\varphi(h_2) = h_1$ modulo $h_1^2\hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}$; ainsi $h_2 = h_1 + h_1^2h_3$ où $\|h_3\| \leqslant 1$. Or $1 + h_1h_3$ est inversible en réduction, donc $1 + h_1h_3 \in \hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)}$. Il suit que $f \in \hat{\mathcal{O}}^\circ_{X,(p)}.\ \mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_{X,(p)})^\times$. Ce qui prouve l'isomorphisme $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)}) \xrightarrow{\sim} |K^\times|^n/M$.

D'autre part il est clair que $|K^\times|^n/\{(r_{i_j})|r_{i_j} = r_{i_{j'}}$ pour tout $i,j,j'\} \simeq |K^\times|^{n-s}$. Comme l'image de $\alpha(\hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)})$ dans $|K^\times|^n/|K^\times|(1, \ldots, 1)$ est un réseau de dimension $n - 1$ (§ 3.3.1), il suit bien que Z est un sous-groupe engendré par au plus $n - 1$ éléments.

Corollaire 1 ([8]). — *Soient* X *un espace affinoïde régulier de dimension* 1 *sur un corps* K *algébriquement clos,* $r : X \to \bar{X}$ *sa réduction* *canonique,* $p \in X$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) p *est une intersection multiple*

2) $(0) = \operatorname{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)}) = (R^1 r_* \mathcal{O}_X^\times)_p$.

Démonstration. — On dit que $p \in \bar{X}$ est une intersection multiple si p est un point multiple ordinaire de multiplicité n et si $\bar{X}$ a n composantes irréductibles passant par p.

Alors 1) implique 2) est une application immédiate du théorème.

Supposons 2) satisfait. Comme X est régulier de dimension 1, $\mathcal{O}_{X,(p)}$ est un anneau de Dedekind et donc principal puisque $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)}) = (0)$. Comme $\mathcal{O}_{X,(p)}$ et $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ ont les mêmes idéaux maximaux il suit que $\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$ est principal et le théorème 9 montre que p est un point multiple ordinaire. Le théorème 10 montre qu'alors $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)}) = (0)$ si et seulement si $n = s$, ce qui prouve que p est une intersection multiple.

COROLLAIRE 2. — *Les hypothèses sont celles du théorème avec* $s = 1$. *Alors* $\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_{X,(p)}) \simeq |K^\times|^{n-1}/\Lambda$ *où* Λ *est un réseau de* $|K^\times|^{n-1}$.

Démonstration. — En effet, on sait que $|K^\times|^n/\alpha(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}^\times)$ est isomorphe à $|K^\times|^{n-1}/\Lambda$ où Λ est un réseau de $|K^\times|^{n-1}$ (§ 3.3.1).

Exemple. — Soit X le sous-affinoïde de la courbe de Tate $K^\times/\langle q \rangle$ image du sous-affinoïde X′ de K donné par les inégalités $|q| \leqslant |z| \leqslant 1$,

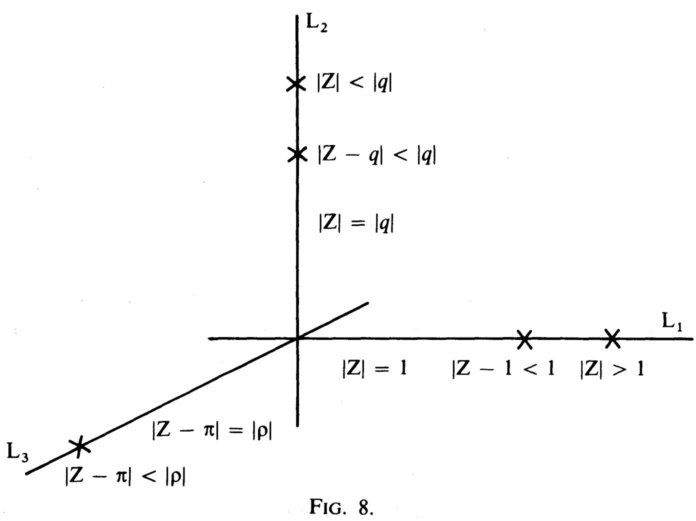

FIG. 8.

$|z-1| = 1$, $|z-q| \geqslant |q|$, $|z-\pi| \geqslant |\rho|$ et où $|q| < |\pi| < 1$; $0 < |\rho| < |\pi|$. La réduction canonique de X′ est donnée par la figure 8.

X se déduit de X′ en identifiant les z de X′ tel que $|z| = 1$ avec $qz \in X'$. La réduction canonique de X se déduit de $\bar{X}'$ en identifiant les droites L_1 et L_2. Cela donne

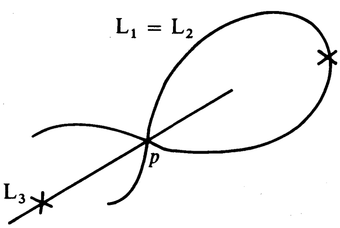

FIG. 9.

(voir aussi « stable reductions » [8], 1.7).

Le point multiple ordinaire p de $\bar{X}$ a les propriétés

(i) $r^{-1}(p) = \mathbf{P}^1 - B_1 \cup B_2 \cup B_3$ où $B_1 = \{z \in \mathbf{P}^1 \mid |z| \geqslant 1\}$, $B_2 = \{z \in \mathbf{P}^1 \mid |z| \leqslant |q|\}$ et $B_3 = \{z \in \mathbf{P}^1 \mid |z-\pi| \leqslant |\rho|\}$.

(ii) B_1 et B_2 correspondent à la composante « $L_1 = L_2$ » de $\bar{X}$ et B_3 correspond à la composante L_3 de $\bar{X}$.

Soient $|f|_1$, $|f|_2$, $|f|_3$ (pour $f \in \mathrm{Fr}\,(\hat{\mathcal{O}}_{X,(p)})$) les trois valeurs absolues associées à B_1, B_2 et B_3. Selon le théorème 10, $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)}) \cong |K^\times|/Z$ où Z est l'image de Λ dans $|K^\times|$.

On a $\hat{\mathcal{O}}^\times_{X,(p)} = \{\lambda(1+u)z^\alpha(z-\pi)^\beta\}$ où $\lambda \in K^\times$, $u \in \hat{\mathcal{O}}_{X,(p)}$; $|u(a)| < 1$ pour chaque $a \in r^{-1}(p)$; $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$. On en déduit que Z est engendré par $|q|$ et $|\pi|$.

Pour cet exemple une méthode globale permet aussi de calculer $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)})$. Un diviseur $D = \Sigma n_i[a_i]$ sur $r^{-1}(p)$ est le diviseur d'un élément de $\mathrm{Fr}\,(\mathcal{O}_{X,(p)})^\times$ si et seulement s'il existe une fonction méromorphe f sur $K^\times/\langle q\rangle$ avec $\mathrm{div}\,(f)|_{r^{-1}(p)} = D$. De plus un diviseur $\Sigma m_j[b_j]$ sur $K^\times/\langle q\rangle$ est le diviseur d'une fonction méromorphe sur $K^\times|\langle q\rangle$ si et seulement si $\Sigma m_j = 0$ et $\Pi b_j^{m_j} = 1 \in K^\times/\langle q\rangle$. Cela implique que D est principal si et seulement si $\Pi |a_i|^{n_i} \in \langle |q|, |\pi| \rangle$. Alors $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{O}_{X,(p)}) \simeq |K^\times|/\langle |q|,|\pi|\rangle$.

Remarquons que le groupe $Z \subset |K^\times|$, image de Λ, peut être un sous-groupe non-discret.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Bosch, Orthonormalbasen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Manuscripta mathematica*, vol. 1 (1969), 35-57.
[2] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris.
[3] J. Fresnel et M. van der Put, Géométrie analytique rigide et applications, *Progress in mathematics*, Birkhäuser.
[4] E. Heinrich et M. van der Put, *Über die Picardgruppen affinoider Algebren*, à paraître.
[5] M. Krasner, *Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres*, Édition du C.N.R.S., (1966), 97-141.
[6] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin, 1969.
[7] M. van der Put, The class group of one-dimensional affinoïd space, *Annales de l'Institut Fourier*, t. 30, fasc. 4 (1980), 155-164.
[8] M. van der Put, *Stable reductions of algebraic curves*, à paraître.
[9] Ph. Robba, Une classe d'ensembles analytiques à plusieurs dimensions, *Bull. Soc. Math. France*, mémoire 39-40 (1974), 351-357.
[10] J. Tate, Rigid analytic spaces, *Invent. Math.*, vol. 12 (1971), 257-289.
[11] L. Gerritzen et M. van der Put, Schottky groups and Mumford curves, *Lecture notes* 817, Springer Verlag.
[12] M. Nagata, *Local rings*, J. Wiley.

Manuscrit reçu le 16 septembre 1982.

J. Fresnel,
Laboratoire associé au CNRS n° 226
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
F 33405 Talence Cedex.

M. van der Put,
Rijksuniversiteit Groningen
Mathematisch Instituut
Postbus 800
9700 Av. Groningen (Netherlands).