ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Sur les G_δ de capacité nulle

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 103-109

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__103_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES G_δ DE CAPACITÉ NULLE (1)

par Gustave CHOQUET, Paris.

Pour toute application semi-continue inférieurement f d'un espace topologique dans la droite achevée $\overline{R}$, l'ensemble I_f des x tels que $f(x) = +\infty$ est un G_δ. C'est en particulier le cas si f est le potentiel N_μ d'une mesure $\mu \geqslant 0$ lorsque N est un noyau $\geqslant 0$ semi-continu inférieurement sur E localement compact (comme c'est le cas pour le noyau newtonien de $R^p (p \geqslant 3)$); mais on peut affirmer alors de plus que I_f est de capacité extérieure nulle (2).

Inversement, J. Deny a montré (3) que dans $R^p (p \geqslant 3)$, pour le noyau newtonien N, tout ensemble A qui est un G_δ de capacité extérieure nulle est l'ensemble des infinis d'un potentiel $N_\mu (\mu \geqslant 0)$; mais la mesure μ construite par Deny n'est pas portée par A; on peut ajouter cette restriction lorsque A est compact (G. C. Evans) (4) ou contenu dans un F_σ de capacité nulle (N. Ninomya) (5).

On va établir ici l'énoncé le plus précis; pour simplifier l'exposé, nous supposerons partout que le noyau étudié est le noyau newtonien de $E = R^p$.

(1) Ce mémoire développe un résultat annoncé dans :
G. Choquet, Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1710-1712.

(2) G. Choquet, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *C. R.*, t. 244, 1957, p. 1606-1609.

(3) J. Deny. Sur les infinis d'un potentiel, *C. R.*, t. 224, 1947, p. 524.

(4) G. C. Evans, *Monatshefte fur Math. u. Phys.* Bd 43, 1936, p. 419-424.

(5) N. Ninomya, Sur un ensemble de capacité nulle. *Math. J. Okoyama Univ.*, 2, n° 2, 1953.

Puis nous indiquerons pour terminer à quels autres noyaux s'étend le théorème obtenu.

LEMME 1. — *Soient* μ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* E; K *un compact de* E; φ *une fonction numérique continue sur* E, *telle que* $N\mu > \varphi$ *sur* K.

Il existe un voisinage ouvert ω_1 *de* μ (*dans l'espace* $\mathcal{M}_+(E)$ *des mesures* $\mu \geqslant 0$ *sur* E, *muni de la topologie vague*) *et un voisinage* ω_2 *de* K *dans* E, *tels que pour tout* $(\nu, x) \in \omega_1 \times \omega_2$ *on ait:*

$$N\nu(x) > \varphi(x).$$

En termes plus simples, si $N\mu(x) > \varphi(x)$ pour tout $x \in K$, l'inégalité reste vraie lorsqu'on modifie un peu μ, et un peu K.

En effet, l'application $(\nu, x) \to N\nu(x)$ de $\mathcal{M}_+(E) \times E$ dans $\overline{R}_+$ est semi-continue inférieurement; donc l'ensemble Ω des (ν, x) tels que $N\nu(x) - \varphi(x) > 0$ est ouvert dans $\mathcal{M}_+(E) \times E$. Or Ω contient $\mu \times K$, donc aussi un ouvert de la forme $\omega_1 \times \omega_2$ (en vertu de la compacité de K).

DÉFINITION. — *Pour tout ouvert* ω *de* E, *on appelle* recouvrement régulier *de* ω *une suite* (K_n) *de compacts de* ω *telle que*

a) *Pour tout n,* $\mathring{K}_n$ *est partout dense dans* K_n.

b) $\omega = \bigcup_n \mathring{K}_n$.

c) $K_i \cap K_j = o$ *pour* $|i - j| > 1$.

Il est bien connu que tout ouvert de R^p admet un tel recouvrement régulier.

LEMME 2. — *On se donne un ouvert* $\omega \subset E$; *une partie* X *de* ω; *une mesure* $\lambda \geqslant 0$ *portée par* $\overline{X} \cap \omega$; *une fonction numérique* φ *définie et continue dans* ω, *telle que* $N\lambda > \varphi$ *dans* ω.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ *et tout voisinage* V *de* λ (*dans* $\mathcal{M}_+(E)$), *il existe* $\mu \in V$, *portée par un sous-ensemble de* X *fini sur tout compact de* ω, *et telle que:*

1) $N\mu > \varphi - \varepsilon$ (6) *sur* ω.

2) $|N\mu - N\lambda| < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$ (*là où la différence est définie*).

3) $\mu(E) = \lambda(E)$.

(6) Lorsque $\overline{\omega}$ est compact, on peut remplacer cette inégalité par $N\nu > \varphi$.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω; par commodité pour la suite, on posera $K_0 = \emptyset$.

Soit (λ_n) une partition (facile à réaliser) de λ en mesures $\lambda \geqslant 0$ telles que :

$$S\lambda_n \subset K_n, \qquad \text{donc aussi} \qquad S\lambda_n \subset \overline{X} \cap K_n$$

(où $S\lambda_n$ désigne le support de λ_n).

Comme N est continu hors de la diagonale de $E \times E$ et tend vers 0 à l'infini, il existe pour tout $n \geqslant 1$ un voisinage U_n de λ_n dans $\mathfrak{M}_+(\overline{X} \cap K_n)$ tel que, pour toute $\mu_n \in U_n$ on ait :

$$(1) \quad |N\mu_n - N\lambda_n| < \varepsilon/2^n \quad \text{sur} \quad \left(\bigcup_{\substack{i<n-1 \\ \text{ou } i>n+1}} K_i\right) \cup \left(\int \omega\right).$$

D'autre part, comme $N\left(\sum_{\substack{i<n-1 \\ i>n+1}} \lambda_i\right)$ est continu sur K_n, il existe pour tout $n \geqslant 1$, d'après le lemme 1, des voisinages V_{n-1}^{-1}, V_n^0, V_{n+1}^1 de λ_{n-1}, λ_n, λ_{n+1} respectivement, dans $\mathfrak{M}_+(E)$, tels que les relations : $\mu_{n-1} \in V_{n-1}^{-1}$, $\mu_n \in V_n^0$, $\mu_{n+1} \in V_{n+1}^1$ entraînent

$$(2) \quad N\left(\mu_{n-1} + \mu_n + \mu_{n+1} + \sum_{\substack{i<n+1 \\ i>n+1}} \lambda_i\right) > \varphi \quad \text{sur } K_i.$$

Pour tout $p \geqslant 1$, choisissons maintenant

$$\mu_p \in U_p \cap V_p^{-1} \cap V_p^0 \cap V_p^1, \qquad \text{avec en outre} \qquad \mu_p(E) = \lambda_p(E).$$

Posons $\mu = \sum_p \mu_p$; on a $\lambda(E) = \mu(E)$.

Des relations (1) et (2) on tire successivement :

$$|N\mu - N\lambda| < \varepsilon \quad \text{sur} \quad \int \omega,$$
$$N\mu > \varphi - \varepsilon \quad \text{sur} \quad \omega.$$

Enfin, comme $X \cap \mathring{K}_n$ est partout dense dans $\overline{X} \cap K_n$, on peut toujours prendre μ_n à support fini contenu dans $X \cap K_n$.

La condition $\mu \in V$ est automatiquement réalisée si l'on choisit les U_p et V_p assez petits.

Remarque. — Comme le support de μ est fini sur tout compact de ω, $N\mu$ est fini et continu en tout point de ω, sauf aux points de l'ensemble (dénombrable et fermé relativement à ω) qui porte μ, à savoir $\omega \cap S\mu$.

LEMME 3. — *Soit* ω *un ouvert de* E, *de capacité* $< \omega$. *Pour tout* $X \subset \omega$ *et tout nombre* $\varepsilon > 0$, *il existe une mesure* $\mu \geqslant 0$ *portée par une partie* Y *de* X *dont la trace sur tout compact de* ω *est finie et telle que :*

1) $\mu(E) < a$.

2) $N\mu > 1$ *sur* $\overline{X} \cap \omega$.

3) $N\mu < 1 + \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$.

On dit qu'une telle μ *est* associée *à* $(a, \varepsilon, \omega, X)$; *son potentiel est partout fini hors de* X.

Démonstration. — 1) Montrons d'abord qu'il existe une mesure $\pi \geqslant 0$ portée par $\overline{X} \cap \omega$ et telle que :

$\pi(E) < a$; $N\pi > (1 - \varepsilon)$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$; $N\pi \leqslant 1$ partout.

Si cap $(\overline{X} \cap \omega) = 0$, on prend $\pi = 0$; sinon soit ν la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

On a $\nu = \nu' + \nu''$, où ν' est portée par ω^* et ν'' est portée par $\overline{X} \cap \omega$.

Comme $N\nu' \leqslant 1$ partout et que N est un noyau régulier, on peut écrire $\nu' = \sum_n \nu_n$, où pour tout n on a : $\nu_n \geqslant 0$; $S\nu_n$ compact; $N\nu_n$ continu.

Soit ν_n^K la balayée de ν_n sur le compact K de $\overline{X} \cap \omega$; on a : $\nu_n = \lim \nu_n^K$ suivant l'ordonné filtrant croissant de ces compacts (7) K.

Soit C_n un compact assez grand pour que $N\nu_n < \varepsilon/2^n$ hors de C_n. Comme $N\nu_n$ est continu, il existe d'après le lemme 1 un compact $K_n \subset \overline{X} \cap \omega$, tel que

$$N\nu_n^{K_n} > N\nu_n - \varepsilon/2^n \text{ sur } C_n.$$

Cette inégalité est évidemment vraie aussi hors de C_n puisque $N\nu_n^{K_n} \geqslant 0$. On a donc partout dans E :

$$N\nu_n - \varepsilon/2^n < N\nu_n^{K_n} \leqslant N\nu_n.$$

D'où par addition :

$$N\nu' - \varepsilon < N(\Sigma\nu_n^{K_n}) \leqslant N\nu'. \tag{1}$$

(7) En effet, si ν_n' désigne une valeur d'adhérence des $\nu_n^{K_n}$, on a d'après le théorème classique de convergence : $N\nu_n' = 1$ quasi-partout sur $\overline{X} \cap \omega$ et $\nu_n'(E) \leqslant \nu^n(E)$. Il en résulte $\nu_n' = \nu_n$ à cause de l'unicité de la distribution capacitaire de $\overline{X} \cap \omega$.

Posons $\pi = \nu'' + \sum_n \nu_n^{K_n}$; la relation (1) devient :

$$N\nu - \varepsilon < N\pi \leqslant N\nu \leqslant 1.$$

Comme par ailleurs $\pi(E) \leqslant \nu(E) < a$, la mesure π a les propriétés annoncées.

2) L'ensemble A des points de $\overline{X} \cap \omega$ en lesquels $N\pi < 1$ est un F_σ de capacité nulle. Posons $A = \bigcup A_n$, où les A_n sont des compacts de $\overline{X} \cap \omega$.

D'après la propriété d'Evans, il existe une mesure $\varkappa_n \geqslant 0$ portée par A_n, de masse $< \varepsilon/2^n$, avec $N\varkappa_n = +\infty$ sur A_n, et $N\varkappa_n < \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Donc $\lambda = \pi + \Sigma\varkappa_n$ est portée par $\overline{X} \cap \omega$; elle a une masse totale $< a$ si ε est assez petit; son potentiel est $> (1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et $< (1 + \varepsilon)$ sur $\complement\omega$.

On va maintenant utiliser le lemme 2. Comme $N\lambda > (1 - \varepsilon)$ sur $(\overline{X} \cap \omega)$, il existe une fonction numérique continue φ sur ω, égale à $(1 - \varepsilon)$ sur $\overline{X} \cap \omega$ et telle que $N\mu > \varphi$ partout dans ω. Donc d'après le lemme 2, il existe $\mu \geqslant 0$ portée par un sous-ensemble de X fini sur tout compact de ω, et telle que :

$$\mu(E) < a; \quad N\mu > 1 - 2\varepsilon \text{ sur } \overline{X} \cap \omega; \quad N\mu \leqslant 1 + 2\varepsilon \text{ sur } \complement\omega.$$

La mesure $\mu/(1 - 2\varepsilon)$ répond à la question, après un changement élémentaire du ε.

Il est immédiat que $N\mu$ est partout fini hors de X.

LEMME 4. — *Soit ω un ouvert de* E; *soit* $A \subset \omega$, *avec* $\operatorname{cap}^* A = 0$; *soit* $X \subset A$ *avec* X *partout dense dans* A; *et soit ε un nombre* > 0.

Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ portée par une partie dénombrable de X *et telle que :*

$\mu(E) < \varepsilon$; $N\mu \geqslant 1$ *sur* A; $N\mu < \varepsilon$ *sur* $\complement\omega$; $N\mu$ *est finie hors de* X.

Démonstration. — Soit (K_n) un recouvrement régulier de ω. Soit ε_n une constante > 0 assez petite pour que toute mesure positive portée par K_n et de masse totale $< \varepsilon_n$ ait un potentiel $< \varepsilon/2^n$ sur $\complement\omega$.

Posons $A_n = A \cap \mathring{K}_n$ et $X_n = X \cap \mathring{K}_n$.

Comme $\text{cap}^* A_n = 0$, il existe un ouvert $\omega_n \subset \mathring{K}_n$ tel que

$$A_n \subset \omega_n \qquad \text{et} \qquad \text{cap}\, \omega_n < \varepsilon'_n = \inf(\varepsilon_n, \varepsilon/2^n).$$

Soit μ_n une mesure associée à $(\varepsilon'_n, \varepsilon/2^n, \omega_n, X_n)$.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$; on vérifie aisément toutes les propriétés indiquées dans l'énoncé.

On peut même ajouter que μ est portée par un ensemble dont tout point est isolé.

THÉORÈME. — *Soit* $A \subset E$, *où* A *est un* G_δ *non vide de capacité extérieure nulle.*

Il existe une mesure $\mu > 0$ *portée par* A, *dont le potentiel* $N\mu$ *est infini en tout point de* A *et fini hors de* A.

Plus précisément, pour tout X *dénombrable* $\subset A$, *tel que* $\overline{X} = \overline{A}$, *on peut imposer à* μ *d'être portée par* X.

Démonstration. — Posons $A = \bigcap \omega_n$, où la suite des ouverts ω_n est décroissante. D'après le lemme 4, il existe une mesure μ_n portée par X et telle que :

$\mu_n(E) < 1/2^n$; $N\mu_n \geqslant 1$ sur A; $N\mu_n < 1/2^n$ sur $\complement\omega_n$; $N\mu_n$ est finie hors de X.

Posons $\mu = \Sigma\mu_n$. On a $\mu(E) < 1$ et $N\mu = +\infty$ sur A. Enfin, pour tout $x \notin A$, il existe n_0 tel que $x \notin \omega_n$ (pour tout $n \geqslant n_0$). On a donc :

$$N\mu(x) = \Sigma N\mu_n(x) \leqslant \sum_1^{n_0-1} N\mu_n(x) + \sum_{n_0}^{\infty} 1/2^n < \infty.$$

Espaces et noyaux auxquels s'étend le théorème.

Nous ne rechercherons pas la généralité maxima; les conditions qui vont être données montreront que le théorème est valable pour tous les « bons » noyaux de la théorie du potentiel, en particulier pour les noyaux de Green et les noyaux $r^{\alpha-p}$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ dans R^p $(p \geqslant 3)$.

On verrait aisément qu'il est valable aussi dans R^2 pour le noyau logarithmique (bien qu'il ne soit pas positif), à cause du fait que, localement, ce noyau est un « bon » noyau.

Conditions suffisantes. — E est un espace localement compact à base dénombrable.

Le noyau N est une application continue de $E \times E$ dans $[0, +\infty]$, finie hors de la diagonale Δ, infinie sur Δ.

N est symétrique et satisfait au principe du maximum ordinaire.

N satisfait au principe du balayage (ou, ce qui est équivalent, au principe de domination).

N tend vers 0 à l'infini, en ce sens que, pour tout compact $K \subset E$, $\sup_{a \in K} N\varepsilon_a(x)$ tend vers 0 lorsque a tend vers le point à l'infini de E.

Notons que la symétrie de N n'a rien d'indispensable et n'est imposée ici que pour simplifier l'énoncé des conditions.