ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARCOS SEBASTIANI

La dimension de la frontière d'un ensemble analytique dans son saturé par une application

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 3 (1981), p. 91-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_3_91_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 3 (1981), 91-97

LA DIMENSION DE LA FRONTIÈRE D'UN ENSEMBLE ANALYTIQUE DANS SON SATURE PAR UNE APPLICATION

par Marcos SEBASTIANI

1. Enoncé des résultats.

On considère un germe γ d'ensemble analytique dans $0 \in \mathbf{C}^n$ de dimension q.

DEFINITION 1. – *On dira que γ est une intersection complète si l'idéal de γ dans $\mathcal{O}$ (anneau local de $\mathbf{C}^n$ en 0) est engendré par $n - q$ éléments*

LEMME 1. – *Si γ est une intersection complète, alors il existe une application analytique locale $F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ de type fini telle que :*

a) $\gamma = F^{-1}(f)$ *où f est un germe analytique non-singulier dans* $0 \in \mathbf{C}^n$;

b) f *n'est pas contenu dans le lieu discriminant de* F.

Ce lemme rend naturelle la définition suivante :

DEFINITION 2. – *On dira que γ est prénormal si il existe une application analytique locale $F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$ de type fini telle que :*

a) $\gamma = F^{-1}(f)$ *où f est un germe analytique normal en* $0 \in \mathbf{C}^n$;

b) f *n'est pas contenu dans le lieu discriminant de* F.

D'après le lemme 1, toute intersection complète est prénormale. Tout germe normal est prénormal.

PROPOSITION 1. – *Supposons que* γ *est un germe prénormal de dimension* q. *Alors :*

a) *toutes les composantes irréductibles de* γ *ont dimension* q ;

b) *si* σ *est une composante irréductible de* γ *telle que* $\mathcal{O}(\sigma)$ *(son anneau local) soit un domaine de factorisation unique, alors ou bien* $\sigma = \gamma$, *ou bien il existe une composante irréductible* $\tau \neq \sigma$ *de* γ *telle que* $\dim(\tau \cap \sigma) = q - 1$.

Exemple 1. – Soit γ le germe en $0 \in \mathbf{C}^4$ de l'union des deux plans $z_1 = z_2 = 0$ et $z_3 = z_4 = 0$. Alors, par la Prop. 1, γ n'est pas prénormal. En particulier, γ n'est pas une intersection complète (dans [1] il est démontré que γ n'est pas intersection complète, même dans *le sens plus large* que γ ne peut pas se définir par deux équations).

Exemple 2. – Soit σ un germe d'intersection complète et soit $\tau \not\supset \sigma$ un germe analytique en $0 \in \mathbf{C}^n$ avec $\dim \sigma = \dim \tau = q$. Soit $\gamma = \sigma \cup \tau$. Supposons que le lieu singulier de γ est de codimension $\geqslant 4$. Alors γ n'est pas prénormal. En effet, *par un théorème connu,* $\mathcal{O}(\sigma)$ est un domaine de factorisation unique. Mais si $\mathfrak{f}$ est une composante irréductible de τ, alors $\dim(\mathfrak{f} \cap \sigma) \leqslant q - 4$, ce qui implique que γ n'est pas prénormal par la Prop. 1.

PROPOSITION 2. – *Soient* $U, V \subset \mathbf{C}^n$ *des ouverts et soit* $F : U \longrightarrow V$ *une application analytique propre. Soit* X *un sous-ensemble analytique (fermé) de* U *irréductible et de dimension* q. *Soit* $Y = F(X)$ *et soit* $Z = F^{-1}(Y)$ *(saturé de* X *par* F). *Soit* T *l'intersection de* X *avec l'adhérence dans* U *de* $Z - X$ *(frontière de* X *dans* Z). *Alors :*

a) T *est un sous-ensemble analytique (fermé) de* X ;

b) T *est de dimension pure* $q - 1$ *(éventuellement vide) si les trois conditions (i), (ii), (iii) suivantes sont satisfaites :*

i) Y *est normal ;*

ii) $\mathcal{O}_P(X)$ *(anneau local de* X *en* P) *est un domaine de factorisation unique pour tout* $P \in X$;

iii) X *n'est pas contenu dans l'ensemble des zéros du jacobien de* F.

Observation. – Il résulte de [1] que la Prop. 2 est encore valable si on remplace les conditions (i), (ii), (iii) par la seule condition : «Y est localement défini, en chacun de ses points, par $n-q$ équations».

La proposition 2 généralise le théorème 4.2 de [3].

L'auteur remercie M. Klaus Hulek pour des entretiens utiles et l'orientation dans la littérature.

2. Lemmes auxiliaires.

D'abord, on va prouver le lemme 1. Supposons γ intersection complète et soient $f_{q+1}, \ldots, f_n$ des fonctions analytiques dans un voisinage U de $0 \in \mathbf{C}^n$ dont les germes en 0 engendrent l'idéal de γ.

Par le théorème de paramétrisation locale, si U est convenablement choisi, on peut représenter les composantes irréductibles de γ par des sous-ensembles analytiques $X_1, \ldots, X_r$ de U et on peut choisir des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ telles que l'ensemble : $z_1 = \ldots = z_q = f_{q+1} = \ldots = f_n = 0$ se réduise à 0 et que la projection $(z_1, \ldots, z_n) \longrightarrow (z_1, \ldots, z_q)$, restreinte à des ouverts denses $U_1, \ldots, U_r$ des points non-singuliers de $X_1, \ldots, X_r$ respectivement, soit un homéomorphisme local. Soit

$$F = (z_1, \ldots, z_q, f_{q+1}, \ldots, f_n) \quad F : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, 0)$$

et soit J le jacobien de F. Alors, $F^{-1}(0) = 0$ (c'est-à-dire, F est de type fini), $\gamma = F^{-1}(\mathfrak{f})$ (où $\mathfrak{f}$ est le germe de $z_{q+1} = \ldots = z_n = 0$) et J ne s'annule sur aucun point de U_i pour $i = 1, \ldots, r$ (ce qui implique que $\mathfrak{f}$ n'est pas contenu dans le lieu discriminant de F).

Considérons, maintenant, une application analytique $F : U \longrightarrow V$ entre des voisinages de $0 \in \mathbf{C}^n$ avec $F^{-1}(0) = 0$. En particulier, on peut supposer, en prenant U, V assez petits, que F est propre. Soient $R = \mathcal{O}_0(U)$ et $S = \mathcal{O}_0(V)$. Alors, on peut supposer $S \subset R$ par composition avec F. Soient $N \subset M$ les corps de fractions de R, S respectivement. Alors $[M : N]$ est fini (c'est le degré local de F en 0) et R est la clôture intégrale de S dans M. Soit $\mathrm{Tr} : M \longrightarrow N$ l'application trace définie par l'extension M/N.

Soit Y un sous-ensemble analytique (fermé) de V, irréductible et de dimension q en 0. Soit $Z = F^{-1}(Y)$. Soit $I_Z \subset R$ l'idéal du germe de Z en 0 et $I_Y = I_Z \cap S$ celui de Y (I_Y est un idéal premier, par hypothèse).

LEMME 2. –

a) *Chaque composante irréductible de* Z *en* 0 *est de dimension* q.

b) *Soit* $\alpha \in R$. *Alors* $\alpha \in I_Z$ *si et seulement si* $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ *pour tout* $\beta \in R$.

Démonstration. – On a $I_Z = P_1 \cap \ldots \cap P_s$, où les P_j sont les idéaux premiers de R dont l'intersection avec S est I_Y et $\dim R_{P_j} = \dim S_{I_Y}$ pour tout j. Cela entraîne (a).

Il est évident que si $\alpha \in I_Z$, alors $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$, puisque $\alpha\beta \in I_Z$.

Pour prouver la réciproque, on prend U, V convenablement petits pour que l'ensemble des points non-singuliers de Y soit connexe et que α possède un représentant f analytique sur U. Nous voulons prouver que $f \mid Z = 0$.

Soit $z \in Z$ et soit $w = F(z) \in Y$. Soit

$$F^{-1}(w) = \{z = z_1, z_2, \ldots, z_r\}.$$

Soit m_j le degré local de F en z_j. Soit $g : U \longrightarrow \mathbf{C}$ analytique telle que $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = \ldots = g(z_r) = 0$. Si β est le germe de g en 0, on a $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ par hypothèse. Mais $\mathrm{Tr}(\alpha\beta)$ est le germe en 0 d'une fonction h dont la valeur en w est :

$$h(w) = m_1 f(z_1) g(z_1) + m_2 f(z_2) g(z_2) + \ldots = m_1 f(z_1).$$

Comme $h \mid Y = 0$ on a $h(w) = 0$. Donc, $f(z) = 0$, ce qui complète la preuve de (b).

LEMME 3. – *Soit* J *le germe en* 0 *du jacobien de* F. *Il existe* $N > 0$ *tel que si* $\alpha \in I_Z^N$, *alors* $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ *pour tout* $\beta \in R$.

Démonstration. – En effet, pour N assez grand, $I_Z^N \subset RI_Y$. Alors, $\alpha \in I_Z^N$ entraîne $\alpha = \Sigma \alpha_i \beta_i$ avec $\alpha_i \in R$, $\beta_i \in I_Y$. Donc, si $\beta \in R$: $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) = \Sigma \beta_i \mathrm{Tr}(\alpha_i \beta/J) \in I_Y$.

LEMME 4. – *Supposons* Y *normal en* 0. *Soit* σ *une composante irréductible du germe* γ *de* Z *en* 0. *Supposons que :*

a) $\sigma \neq \gamma$;

b) σ *n'est pas contenue dans le lieu critique de* F *(c'est-à-dire,* J *ne s'annule pas sur* σ) ;

c) $\mathcal{O}(\sigma)$ *est un domaine de factorisation unique. Alors, il existe une composante irréductible* τ *de* γ *telle que* $\dim \sigma \cap \tau = q - 1$.

Démonstration. – On peut supposer que $Z = Z' \cup X$ où Z' est un sous-ensemble analytique de U qui représente la réunion des composantes irréductibles de γ différentes de σ et que X est un sous-ensemble analytique de U qui représente σ.

Soit I_X l'idéal de σ dans R et soit :

$$\mathcal{J} = \{\alpha \in R : \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y \quad \text{pour tout} \quad \beta \in I_X\},$$

idéal de R. Soient $A = R/I_X$, $B = S/I_Y$. Considérons l'application : $\psi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(R, S)$ définie par :

$$\psi(\alpha)(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J), \quad \alpha \in \mathcal{J}, \quad \beta \in R.$$

Alors, pour chaque $\alpha \in \mathcal{J}$, $\psi(\alpha)$ passe au quotient et définit un B-homomorphisme $\varphi(\alpha) : A \longrightarrow B$. On a ainsi défini une application : $\varphi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(A, B)$.

Cette application φ est additive et compatible avec la projection canonique $R \longrightarrow A$ pour les structures respectives de R et A-module. Nous allons prouver :

i) φ est surjective et $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathcal{J} \cap I_X$

ii) $I^N \subset \mathcal{J} \subset I$, pour N assez grand, où I est l'idéal du germe γ' de Z' en 0 ($I_Z = I \cap I_X$).

Admettons, pour l'instant, les assertions (i) et (ii) et prouvons le lemme 4. Par la dualité locale, on sait que $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ est un A-module principal (c'est-à-dire, engendré par un seul élément) ([3] (3.7) et (3.8)). Comme $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Hom}_B(A, B)$, on déduit que $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un R-module principal. Par (i), $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un quotient de $\mathcal{J}/\mathrm{Ker}\,\varphi$. Donc, $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un R-module principal. Alors, $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est un idéal principal de A. Par (ii), le radical de $\mathcal{J}/\mathcal{J} \cap I_X$ est le même que celui de $I/I \cap I_X$ (dans A). Le germe des zéros de $I/I \cap I_X \subset A$ est $\gamma' \cap \sigma$. Donc, $\gamma' \cap \sigma$ est

le germe des zéros de $\mathcal{I}/\mathcal{I} \cap I_X \subset A$. Comme cet idéal est principal, $\dim \gamma' \cap \sigma = q - 1$, ce qui prouve le lemme 4.

Il reste à prouver (i) et (ii). Soit $\tilde{L} \in \mathrm{Hom}_B(A, B)$. Comme R est un S-module libre ([2] theor. 24.16), $\tilde{L}$ se relève en un S-homomorphisme $L : R \longrightarrow S$. Par la dualité locale, il existe $\alpha \in R$ tel que : $L(\beta) = \mathrm{Tr}(\alpha\beta/J)$ pour tout $\beta \in R$. Comme $L(I_X) \subset I_Y$, on a $\alpha \in \mathcal{I}$. Alors, $\tilde{L} = \varphi(\alpha)$. Ceci prouve que φ est surjective.

Soit $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$. En particulier, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in R$. Donc, d'après le lemme 2(b), $\alpha \in I_Z$. En particulier, $\alpha \in I_X$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathcal{I} \cap I_X$.

Soit $\alpha \in \mathcal{I}$. Alors, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta/J) \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$. En particulier, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta) \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$. Donc, $\mathrm{Tr}(\alpha\beta\beta') \in I_Y$ pour tout $\beta \in I_X$, $\beta' \in R$. Alors, par le lemme 2(b), $\alpha\beta \in I_Z$ pour tout $\beta \in I_X$. Donc, $\alpha\beta \in I$ pour tout $\beta \in I_X$. Comme I est intersection d'idéaux premiers qui ne contiennent pas I_X, par le lemme 2(a), cela entraîne $\alpha \in I$. Ceci prouve que $\mathcal{I} \subset I$.

Maintenant, nous allons utiliser l'hypothèse (b). Soit $w \in Y$ tel que aucun point de $F^{-1}(w) \cap X$ ne soit point critique de F et que $F^{-1}(w) \cap X \cap Z'$ soit vide. Soit

$$F^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_r\} \quad \text{avec} \quad X \cap F^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_s\},\ s < r.$$

Pour chaque z_j avec $s < j \leqslant r$, on peut choisir $N > 0$ tel que si f est une fonction analytique sur U telle que $f|Z' = 0$, alors $\mathrm{Tr}_j(\alpha_j^N f/J_j)$ s'annule sur le germe de Y en w, où α_j est le germe de f en z_j, f est un élément quelconque de $\mathcal{O}_{z_j}(U)$, J_j est le germe du jacobien de F en z_j et Tr_j est l'application trace associée à l'application locale $F : (\mathbf{C}^n, z_j) \longrightarrow (\mathbf{C}^n, w)$ (lemme 3).

Si $1 \leqslant j \leqslant s$, $\mathrm{Tr}_j(\alpha_j f/J_j)$ s'annule sur le germe de Y en w, pour tout $f \in \mathcal{O}_{z_j}(U)$ nul sur le germe de X en z_j, puisque $J_j(z_j) \neq 0$ (lemme 2a).

En définitive, il existe $N > 0$ tel que si f est une fonction analytique sur U nulle sur Z' et g est une fonction analytique sur U nulle sur X, alors $\sum_{j=1}^{r} \mathrm{Tr}_j(\alpha_j^N \beta_j/J_j)$ est nul sur le germe de Y en w, où β_j est le germe de g en z_j, α_j celui de f et J_j celui du jacobien de F. Alors $\mathrm{Tr}(\alpha^N\beta/J) \in I_Y$ où α est le germe de f en 0 et β celui de g.

Cela entraîne que $I^N \subset \mathcal{J}$ pour N assez grand (I, I_X sont des B-modules de type fini).

3. Démonstration des propositions 1 et 2.

La partie (a) de la Prop. 1 suit du lemme 2a. La partie (b) découle du lemme 4, parce que si γ est l'image réciproque d'un germe irréductible qui n'est pas contenu dans le lieu discriminant, aucune composante irréductible de γ n'est contenue dans le lieu critique.

Pour prouver la Prop. 2 observons que, d'après les hypothèses, $C \cap X$ est un ensemble de dimension pure $q-1$, si C est l'ensemble critique de F. La partie (a) de la Prop. 2 est immédiate, puisque l'adhérence dans U du complémentaire de X dans Z est un sous-ensemble analytique de Z. Pour prouver (b) il suffit d'observer que le problème est local, puisque $F|X : X \longrightarrow Y$ est ouverte (parce que Y est irréductible en chaque point), et appliquer le lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. HARTSHORNE, Complete intersections and connectedness, *Amer. J. of Math.*, 84 (1962), 497-508.

[2] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience, 1962.

[3] M. SEBASTIANI, Sur la dualité locale, *Annales de l'Institut Fourier*, 30, 1 (1980), 65-90.

Manuscrit reçu le 3 novembre 1980.

Marcos SEBASTIANI,
Instituto de Matemática da UFRGS
Rua Sarmento Leite 425
90.000 – Porto Alegre, RS (Brasil).