ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHÈLE MASTRANGELO
DANIÈLE DEHEN

Les p-topologies en théorie du potentiel

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 2 (1981), p. 153-173
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_2_153_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 2 (1981), 153-173.

LES p-TOPOLOGIES EN THÉORIE DU POTENTIEL

par M. MASTRANGELO et D. DEHEN

Introduction.

La topologie fine et la notion d'effilement ont été introduites et développées pour fournir un cadre intrinsèque à la théorie du potentiel, et donner une définition topologique de la petitesse d'un ensemble. Cependant les ouverts fins se révèlent parfois trop « pauvres » pour posséder certaines propriétés, permettant d'y effectuer naturellement la théorie des équations différentielles stochastiques. Nous nous intéressons ici à la propriété de Lindeberg qui joue un rôle important dans ces problèmes. Ceci nous conduit à la notion de p-topologie, tout à fait adaptée à la propriété de Lindeberg.

Nous disons que A est un p-voisinage de x (p appartenant à $\mathbf{R}_+^*$) si A contient un ouvert fin borélien B tel que x appartienne à B, et tel que $\mathbf{E}(T_{\complement B}^{-p})$ soit finie et finement continue sur B.

La notion de p-voisinage est caractérisée par un critère, exposé aux théorèmes 9 et 10, analogue à celui, démontré par N. Wiener, pour les points d'effilement d'un ensemble. Ce critère nous montre que les p-topologies forment une famille strictement décroissante lorsque p décrit $\mathbf{R}_+^*$, et qu'elles sont strictement comprises entre la topologie de la norme et la topologie fine.

1. Les p-ouverts.

Nous notons $(\Omega, X, \mathbf{P}^x, \theta_t)$ le mouvement brownien standard sur $\mathbf{R}^d (d \geqslant 2)$. Si B est un borélien de $\mathbf{R}^d$, nous définissons le temps d'entrée dans B par :

$$T_B(\omega) = \inf \{t > 0, X_\omega(t) \in B\}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

1. DÉFINITION. — *Soit* p *un réel strictement positif. Si* A *est un sous-ensemble de* $\mathbf{R}^d$, *nous disons que* A *est un p-voisinage d'un point* $x \in \mathbf{R}^d$ *s'il existe un ouvert fin* B *tel que* $x \in B \subset A$ *et pour lequel* $(z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z(T_{CB}^{-p}))$ *soit finie et finement continue sur* B.

Nous notons φ_p la fonction :

$$\varphi_p = (z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z(T_{CB}^{-p})).$$

La fonction φ_p est borélienne. En effet, on sait que $\mathbf{E}^\bullet(e^{-\lambda T_{CB}})$ est excessive donc s.c.i. Il en résulte, en utilisant les classes monotones, que $\mathbf{E}^\bullet(f(T_{CB}))$ est borélienne, pour toute fonction f, borélienne et positive sur $\mathbf{R}$.

Nous pouvons établir le résultat suivant :

2. THÉORÈME. — *Soit* B *un ouvert fin borélien, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) φ_p *est finement continue sur* B (*resp. en* $z \in B$),

b) φ_p *est finement localement bornée sur* B (*resp. bornée sur un voisinage fin de* z).

Démonstration. — On sait que la topologie fine admet une base constituée d'ouverts fins V, dont l'adhérence fine $\bar{V}^f$ est compacte pour la topologie ordinaire. On peut donc se ramener à montrer que, si φ_p est bornée par une constante M dans $\bar{V}^f$, elle est finement continue dans V.

Si $x \in V$ et si T est un temps d'arrêt inférieur ou égal à T_{CV}

$$\begin{aligned}\varphi_p(x) &= \mathbf{E}^x(T_{CB}^{-p}) \leqslant \mathbf{E}^x((T_{CB} - T)^{-p}) = \mathbf{E}^x[T_{CB} \circ \theta_T)^{-p} \\ &= \mathbf{E}^x[\mathbf{E}^{X(T)}(T_{CB})^{-p}]\end{aligned}$$

et φ_p est sous-médiane dans V.

Démontrons que φ_p est finement sous-harmonique dans V, c'est-à-dire que $M - \varphi_p$ est finement sur-harmonique dans V ; il suffit, pour cela de montrer que $M - \varphi_p$ est excessive dans V. Si T_n est une suite de temps d'arrêt, $T_n \leqslant T_{CV}$, $T_n \searrow 0\ (n \to \infty)$, $\mathbf{P}^x - p.s.$, alors ; on a :

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^x(M - \varphi_p \circ X(T_n)) \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^x(M - \mathbf{E}^{X(T_n)}(T_{CB}^{-p})) = \lim_{n\to\infty} (M - \mathbf{E}^x((T_{CB} - T_n)^{-p}))) \\ &\quad = M - \mathbf{E}^x(T_{CB}^{-p}) = M - \varphi_p(x),\end{aligned}$$

car : $(T_{\complement B} - T_n)^{-p} \leqslant (T_{\complement B} - T_1)^{-p}$ qui est intégrable puisque

$$\mathbf{E}^x[(T_{\complement B} - T_1)^{-p}] = \mathbf{E}^x[\varphi_p(X(T_1))] \leqslant M,$$

et puisque la suite $T_{\complement B} - T_n$ est une suite monotone croissante vers $T_{\complement B}$. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue.

3. PROPOSITION. — *La notion de p-voisinage définit une topologie, appelée p-topologie.*

Démonstration. — Il est clair que tout ensemble contenant un p-voisinage de x est un p-voisinage de x, et que l'ensemble B de la définition 1 est un p-voisinage de chacun de ses points. Reste à prouver que l'intersection de deux p-voisinages de x est un p-voisinage de x, ce qui résulte du théorème 2 et des inégalités

$$T_{\complement(B \cap B')} = T_{\complement B} \wedge T_{\complement B'},$$
$$T^{-p}_{\complement(B \cap B')} = T^{-p}_{\complement B} \vee T^{-p}_{\complement B'} \leqslant T^{-p}_{\complement B} + T^{-p}_{\complement B'}.$$

La fonction $(z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z[T^{-p}_{\complement(B \cap B')}])$ est donc finement localement bornée sur $B \cap B'$. Utilisant le théorème 2, nous pouvons déduire qu'elle est finement continue et finie sur $B \cap B'$.

Nous allons maintenant montrer que, si A est un p-voisinage de x, il existe un p-voisinage de x, B, tel que, pour tout $y \in B$, l'ensemble A soit un p-voisinage de y.

Nous notons B l'ouvert fin tel que $x \in B \subset A$, pour lequel $(z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z(T^{-p}_{\complement B}))$ soit finie et finement continue sur B; B est alors un p-voisinage de x ainsi que de chaque point y appartenant à B.

4. THÉORÈME. — *Sur* $\mathbf{R}^d$, *nous notons* $\mathscr{C}$ *la topologie de la norme,* $\mathscr{F}$ *la topologie fine et* $\mathscr{S}_p$ *la p-topologie.*

Pour tout couple $(p,q) \in \mathbf{R}^2$ *et vérifiant* $0 < p < q < +\infty$, *nous avons les trois inclusions suivantes :*

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{S}_q \subset \mathscr{S}_p \subset \mathscr{F}.$$

Démonstration. — Nous établissons successivement les trois inégalités

a) $\mathscr{S}_p \subset \mathscr{F}$ évident,

b) $\mathscr{S}_q \subset \mathscr{S}_p$. Soit A un q-voisinage d'un point x. Il existe un ouvert fin B tel que $x \in B \subset A$ et pour lequel $\mathbf{E}^{\bullet}(T^{-q}_{\complement B})$ soit borné sur B

(théorème 2). Montrons qu'il en est de même pour $\mathbf{E}^{\bullet}(T_{\complement B}^{-p})$. Posant $f = T_{\complement B}^{-q}$, $p = \lambda q$ $(0<\lambda<1)$, cela se ramène à l'inégalité évidente :

$$\mathbf{E}(f^{\lambda}) = \mathbf{E}(f^{\lambda}.1_{\{f<1\}} + f^{\lambda}.1_{\{f\geqslant 1\}}) \leqslant 1 + \mathbf{E}(f).$$

c) $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}_q$. Nous allons montrer que, si A est un ouvert pour la norme de $\mathbf{R}^d$, alors, pour tout $q \in \mathbf{R}_+$, l'application

$$(z \rightsquigarrow \mathbf{E}^{z}(T_{\complement A}^{-q}))$$

est finie et finement continue sur A. C'est la partie intéressante du théorème. Il suffit de démontrer que la boule B(0,r) est un q-voisinage de 0, pour tout $q > 0$. Notons Y la première composante de X, qui est un mouvement brownien réel. Notons

$$X_t^{*} = \sup_{s\leqslant t} \|X_s\|, \qquad Y_t^{*} = \sup_{s\leqslant t} |Y_s|,$$
$$T_r = T_{\complement B} = \inf\{s : X_s^{*} \geqslant r\}, \qquad S_r = \inf\{s : Y_s^{*} \geqslant r\}.$$

Nous allons démontrer que $\mathbf{E}^{\bullet}(T_r^{-q})$ est bornée au voisinage de zéro. Or

$$\mathbf{E}^{\bullet}(T_r^{-q}) = q\int_0^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{T_r<t\}\,dt}{t^{q+1}} \leqslant dq\int_0^{\infty} \frac{\mathbf{P}\{S_{r/\sqrt{d}}<t\}\,dt}{t^{q+1}}$$

(car $T_r < t$ signifie $X_t^{*} > r$, à un ensemble négligeable près, ce qui exige que l'une, au moins, des composantes de X ait dépassé $r/\sqrt{d}$ entre 0 et t). On est donc ramené à un problème linéaire. Remplaçant $r/\sqrt{d}$ par r, si $|x| < r$, on a :

$$\mathbf{P}^{x}\{\sup_{s\leqslant t} |Y_s| > r\} \leqslant \mathbf{P}^{0}\{\sup_{s\leqslant t} |Y_s| > r - |x|\}.$$

Prenant x dans l'intervalle $[-r/2, r/2]$, on voit qu'en fait il suffit de démontrer que, pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{q+1}}\,\mathbf{P}^{0}\Big\{\sup_{s\leqslant t} |Y_s| > a\Big\}dt < \infty.$$

D'autre part,

$$\mathbf{P}^{0}\Big\{\sup_{s\leqslant t} |Y_s| > a\Big\} \leqslant 2\mathbf{P}^{0}\Big\{\sup_{s\leqslant t} Y_s > a\Big\} = 4\mathbf{P}^{0}\{Y_t > a\} = 4\mathbf{P}^{0}\{Y_1 > a/\sqrt{t}\},$$

d'après un résultat classique sur le mouvement brownien (cf. [12], p. 26). Or d'après Feller ([1]), vol. 1, chap. VII, lemme 2, on a :

$$\mathbf{P}^0\{Y_1 > b\} \sim (e^{-b^2/2})/(2\pi)^{1/2}b, \qquad \text{quand} \qquad b \to \infty.$$

Nous pouvons donc conclure que la boule $B(0,r)$ est un q-voisinage de 0, et $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}_q$.

Remarque. — Le théorème 42.1 de [13] fournit une autre démonstration de cette dernière assertion.

5. PROPOSITION (propriété de Lindeberg). — *Soient p un réel strictement positif et A un p-voisinage presque borélien d'un point $x \in \mathbf{R}^d$. Nous avons :*

$$\lim_{t \to 0} t^{-p}\mathbf{P}^x\{T_{\complement A} \leqslant t\} = 0.$$

Démonstration. — Sur l'espace Ω des trajectoires, muni de la probabilité $\mathbf{P}^x$, la fonction $T_{\complement A}^{-p}$ est intégrable. Par suite

$$M.\mathbf{P}^x(\{T_{\complement A}^{-p} \geqslant M\}) \to 0 \quad (M \to \infty).$$

Posant $M = t^{-p}$, la proposition est démontrée.

Nous étudions maintenant une majoration, en norme L^1, de la fonction de Green de certains ouverts fins, contenus dans des p-ouverts [7].

6. PROPOSITION. — *Soient B un p-ouvert borné dans $\mathbf{R}^d$ et x un point de B. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert fin $C \subset B$ tel que la mesure de Lebesgue de $B \backslash C$ soit majorée par ε et tel que :*

a) si $p \neq 1$, $\forall z \in C$, $\displaystyle\int_C g_C(y,z)\,dy \leqslant |p-1|^{-1} \frac{\sup\limits_{u \in C}\{\mathbf{E}^u(T_{\complement B}^{-p+1})\}}{\inf\limits_{v \in C}\{\mathbf{E}^v(T_{\complement B}^{-p})\}}$

b) si $p = 1$, $\forall z \in C$, $\displaystyle\int_C g_C(y,z)\,dy \leqslant \frac{\sup\limits_{u \in C}\{\mathbf{E}^u(\log T_{\complement B})\}}{\inf\limits_{v \in C}\{\mathbf{E}^v(T_{\complement B}^{-p})\}}.$

([1]) Feller W. An introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley publications in statistics, New York (1965).

Démonstration. — Nous l'effectuons pour $p \neq 1$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M \in \mathbf{R}$ telle que, posant :

$$C = \{\mathbf{E}^{\bullet}(T_{CB}^{-p}) \leqslant M\},$$

la mesure de Lebesgue de l'ensemble $(B \backslash C)$ soit inférieure à ε.

Si $z \in C \subset B$:

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in C} \{\mathbf{E}^{v}(T_{CB}^{-p})\} \times & \int_C g_C(y,z)\, dy \\
& \leqslant \int_C g_C(y,z) \mathbf{E}^{y}(T_{CB}^{-p})\, dy = \mathbf{E}^{z}\left[\int_0^{T_{CC}} \mathbf{E}^{X(s)}(T_{CB}^{-p})\, ds\right] \\
& = \mathbf{E}^{z}\left[\int_0^{T_{CC}} (T_{CB} - s)^{-p}\, ds\right] \\
& = \frac{1}{|p-1|} |\{\mathbf{E}^{z}[\mathbf{E}^{X(T_{CC})}(T_{CB}^{-p+1})] - \mathbf{E}^{z}(T_{CB}^{-p+1})\}| \\
& \leqslant |p-1|^{-1} \sup_{u \in C} \{\mathbf{E}^{u}(T_{CB}^{-p+1})\}.
\end{aligned}$$

Remarque. — La p-topologie vérifie la propriété de quasi-Lindelöf puisqu'elle est moins fine que la topologie fine qui satisfait à cette propriété. Elle ne vérifie pas la propriété de Lindelöf, car si A est un polaire non dénombrable (par exemple une droite dans $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$) et si $x \in A$, en notant U_x la réunion de $\{x\}$ et du complémentaire de A, alors U_x est un ouvert de la p-topologie.

De plus l'espace est réunion des U_x pour tous les x appartenant à A, mais on ne peut en extraire un sous-recouvrement dénombrable.

Nous allons maintenant établir une condition nécessaire permettant d'affirmer qu'un ensemble mesurable $A \subset \mathbf{R}^d$ est un p-voisinage de l'origine. Cette propriété s'énonce en considérant les probabilités de transition du mouvement brownien :

$$p_t(x,dy) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left[-\frac{\|y-x\|^2}{2t}\right] dy.$$

Nous notons $(C_n)_{n \in N}$ les couronnes :

$$C_n = B(0,2^{-n}) \backslash B(0,2^{-n-1}).$$

7. PROPOSITION. — *Une condition nécessaire pour qu'un sous-ensemble mesurable* $A \subset \mathbf{R}^d$ *soit un p-voisinage de* 0 *est que :*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{np} p_{2^{-n}}(0, \complement A \cap C_n) < \infty .$$

Démonstration. — Si A est un p-voisinage de 0, alors nous avons

$$\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{np} \mathbf{P}^0(\{2^{-n-1} < T_{\complement A} \leqslant 2^{-n}\}) < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{np} \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-n}\}) < \infty .$$

Or

$$p_{2^{-n}}(0, \complement A \cap C_n) \leqslant p_{2^{-n}}(0, \complement A) \leqslant \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-n}\}).$$

La proposition est donc établie.

Nous allons maintenant établir, pour les p-voisinages, une propriété caractéristique présentant une grande analogie avec le critère de Wiener. Ce dernier caractérise les points d'effilement d'un ensemble et nous rappelons qu'il s'exprime, pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbf{R}^d$, par :

$$\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} = 0\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} 2^{n(d-2)} \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \end{cases}$$

lorsque la dimension d est supérieure ou égale à 3, et

$$\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} = 0\}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} n \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \end{cases}$$

lorsque la dimension d est égale à 2, où C_n désigne la couronne précédente, et Cap désigne la capacité newtonienne relativement à une sphère centrée à l'origine [12].

La propriété que nous allons démontrer, pour les p-ouverts est, en fait, plus précise. Nous allons encadrer $\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p})$ par deux séries dont la forme est analogue à celle du critère de Wiener et nous allons prouver qu'il existe trois constantes α, β et γ, réelles et strictement positives telles que :

$$\beta \sum_{n\geqslant 1} 2^{(4p+d-2)n} \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) \leqslant \mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p})$$

$$\leqslant \alpha \sum_{n\geqslant 1} 2^{(4p+d-2)n} \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) + \gamma ,$$

si la dimension d est strictement supérieure à 2, et

$$\beta \sum_{n\geqslant 1} 2^{4np} n \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) \leqslant \mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \leqslant \alpha \sum_{n\geqslant 1} 2^{4np} n \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) + \gamma,$$

si la dimension d est égale à 2.

8. PROPOSITION. — *Il existe deux constantes* α *et* γ, *réelles positives telles que, pour tout ensemble mesurable* $A \subset \mathbf{R}^d (d \geqslant 3)$:

$$\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \leqslant \alpha \left[\sum_{n\in \mathbf{N}_*} 2^{(4p+d-2)n} \operatorname{Cap}(C_n \cap \complement A) \right] + \gamma.$$

Démonstration. — Nous allons l'effectuer dans le cas où la dimension d est égale à 3.

Nous notons :

$$B_n = C_n \cap \complement A.$$

Nous avons alors, notant $E[x]$ la partie entière du réel positif x :

$$\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-n}\}) \leqslant \sum_{k \geqslant E\left[\frac{n}{4}\right]} \mathbf{P}^0(\{T_{B_k} \leqslant 2^{-n}\}) + \mathbf{P}^0\left(\left\{T_{C_{E\left[\frac{n}{4}\right]-1}} \leqslant 2^{-n}\right\}\right).$$

Or :

$$\mathbf{P}^0\left(\left\{T_{C_{E\left[\frac{n}{4}\right]-1}} \leqslant 2^{-n}\right\}\right) = \mathbf{P}^0\left(\left\{\sup_{t\leqslant 2^{-n}} \|X(t)\| \geqslant 2^{-E\left[\frac{n}{4}\right]}\right\}\right) \leqslant \mathbf{P}^0\left(\left\{\sup_{t\leqslant 2^{-n}} \|X(t)\| \geqslant 2^{-n/4}\right\}\right).$$

Utilisant le théorème 42.1 de [13], nous savons que la variable aléatoire :

$$M(\bar{c}) = \sup_{t\leqslant \bar{c}} \|X(t)\|$$

admet la loi de probabilité :

$$\mathbf{P}^0(\{M(\bar{c}) \leqslant x\}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \bar{c}}} \int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2\bar{c}}\right) du.$$

Nous pouvons en déduire que :

$$\mathbf{P}^0\left(\left\{T_{C_{E\left[\frac{n}{4}\right]-1}} \leqslant 2^{-n}\right\}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n/2} \int_{2^{-n/4}}^{\infty} \exp(-2^{n-1}u^2)\, du.$$

Nous effectuons le changement de variable $v = 2^{n/2}u$

$$\mathbf{P}^0\left(\left\{T_{C_{E\left[\frac{n}{4}\right]-1}} \leqslant 2^{-n}\right\}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{202nn/4}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv$$

$$\leqslant \pi^{-1/2} \int_{2^{n/4}}^{\infty} \exp(-v^2/2)v\, dv \leqslant \pi^{-1/2} \exp(-2^{(n-2)/2}).$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k \geqslant E\left[\frac{n}{4}\right]} \mathbf{P}^0(\{T_{B_k} \leqslant 2^{-n}\}) \leqslant \sum_{k \geqslant E\left[\frac{n}{4}\right]} \mathbf{P}^0(\{T_{B_k} < \infty\}) \leqslant \sum_{k \geqslant E\left[\frac{n}{4}\right]} (4\pi)^{-1} \cdot 2^{k+1} \cdot \mathrm{Cap}(B_k).$$

De plus, il existe une constante a strictement positive et indépendante de A, pour laquelle nous ayons :

$$\sum_{k \in \mathbf{N}_*} 2^{(4p+1)k} \mathrm{Cap}\, B_k \geqslant a \sum_{k \in \mathbf{N}_*} \left(\sum_{n \leqslant 4k+3} 2^{np} \right) 2^k \mathrm{Cap}\, B_k$$

$$\geqslant a \sum_{k \in \mathbf{N}_*} \left(\sum_{k \geqslant E\left[\frac{n}{4}\right]} 2^k \mathrm{Cap}\, B_k \right) 2^{np}.$$

Ceci implique

$$\sum_{n \in \mathbf{N}_*} 2^{np} \left[\sum_{k \geqslant E[n/4]} \mathbf{P}^0(\{T_{B_k} \leqslant 2^{-n}\}) \right] \leqslant a^{-1}(2\pi)^{-1} \sum_{k \in \mathbf{N}_*} 2^{(4p+1)k} \mathrm{Cap}\, B_k.$$

Nous pouvons conclure que, pour une constante C finie et indépendante de A :

$$\mathbf{E}^0(T_{C_A}^{-p}) \leqslant 1 + C \sum_{n \in \mathbf{N}_*} 2^{np} \mathbf{P}^0(\{T_{C_A} \leqslant 2^{-n}\})$$

$$\leqslant 1 + C \sum_{n \in \mathbf{N}_*} 2^{np} \pi^{-1/2} \exp(-2^{(n-2)/2})$$

$$+ C \sum_{n \in \mathbf{N}_*} 2^{np} \left(\sum_{k \geqslant E[n/4]} \mathbf{P}^0(\{T_{B_k} \leqslant 2^{-n}\}) \right).$$

Par conséquent :

$$\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \leqslant \alpha\left[\sum_{n\in\mathbf{N}_*} 2^{(4p+1)n}\,\mathrm{Cap}\,B_n\right] + \gamma.$$

9. THÉORÈME. — *Avec les notations de la proposition* 8, *il existe trois constantes* α, β *et* γ, *réelles, strictement positives et ne dépendant que de la dimension* d, *telles que, pour tout ensemble mesurable* $A \subset \mathbf{R}^d$, *nous ayons :*

$$\beta.\sum_{n\geqslant 1} 2^{(4p+d-2)n}\,\mathrm{Cap}\,(\complement A\cap C_n) \leqslant \mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \leqslant \alpha\sum_{n\geqslant 1} 2^{(4p+d-2)n}\,\mathrm{Cap}\,(\complement A\cap C_n) + \gamma.$$

Comme pour la proposition 8 nous allons effectuer la démonstration dans le cas $d = 3$.

Nous allons d'abord établir le lemme suivant :

10. LEMME. — *En notant* S *la mesure superficielle de la sphère unité de* $\mathbf{R}^3$, *alors, si* $n \geqslant k/4$:

$$\varepsilon(n,k) = \mathrm{Cap}^{-1}(\complement A\cap C_n).\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A\cap C_n} > 2^{-k}\}) \leqslant S[3.2^{-1}+\sqrt{\pi}]\,(2\pi)^{-1/2}.$$

Démonstration du lemme. — Nous notons $a_n^k = \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A\cap C_n} > 2^{-k}\})$. Alors :

$$a_n^k \leqslant \mathbf{E}^0[\mathbf{P}^{X(2^{-k})}(\{T_{\complement A\cap C_n} < \infty\})]$$

$$a_n^k \leqslant \int_{y\in\mathbf{R}^3} \exp(-\|y\|^2 2^{k-1}).(2\pi)^{-1/2}\,2^{k/2}\int_{\complement A\cap C_n} \|y-z\|^{-1}\,de_{\complement A\cap C_n}(z)\,dy$$

où $e_{\complement A\cap C_n}$ est la distribution newtonienne de $\complement A\cap C_n$

$$a_n^k \leqslant \int_{\complement A\cap C_n}\int_{y\in\mathbf{R}^3} \exp(-\|y+z\|^2.2^{k-1}).(2\pi)^{-1/2}\,2^{k/2}\|y\|^{-1}\,dy\,de_{\complement A\cap C_n}(z).$$

Or :

$$b_z^k = \int_{y\in\mathbf{R}^3} \exp(-\|y+z\|^2.2^{k-1})2^{k/2}\|y\|^{-1}\,dy$$

$$= \int_{\|y\|<\|z\|} \exp(-\|y+z\|^2.2^{k-1})2^{k/2}\|y\|^{-1}\,dy + \int_{\|y\|\geqslant\|z\|} \exp(-\|y+z\|^2.2^{k-1})2^{k/2}\|y\|^{-1}\,dy.$$

Cette expression se majore alors :

$$b_z^k \leqslant 2^{k/2}\mathrm{S}.\int_0^{\|z\|} \rho\, d\rho + \mathrm{S}\int_{\|z\|}^{\infty} \exp\,[(-\rho^2 - \|z\|^2 + 2\rho.\|z\|)2^{k-1}]2^{k/2}\rho\, d\rho.$$

Par conséquent :

$$b_z^k \leqslant 2^{-1+k/2}.\mathrm{S}.\|z\|^2 + \mathrm{S}\int_{\|z\|2^{k/2}}^{\infty} \exp\,[2^{-1}(-\sigma^2 - 2^k\|z\|^2 + 2\sigma 2^{k/2}\|z\|)]2^{-k/2}\sigma\, d\sigma$$

$$b_z^k \leqslant 2^{-1}.\mathrm{S}.2^{k/2}\|z\|^2 + \mathrm{S}\int_{\|z\|2^{k/2}}^{\infty} \exp\,[-2^{-1}(\sigma - 2^{k/2}\|z\|)^2]2^{-k/2}(\sigma - 2^{k/2}\|z\|)\, d\sigma + \mathrm{S}\int_{\|z\|2^{k/2}}^{\infty} \exp\,[-2^{-1}(\sigma - 2^{k/2}\|z\|)^2]\|z\|.d\sigma$$

$$b_z^k \leqslant 2^{-1}.\mathrm{S}.2^{k/2}\|z\|^2 + 2^{-k/2}\mathrm{S} + \sqrt{\pi}.\|z\|.\mathrm{S}.$$

Reportant dans l'expression de a_n^k :

$$a_n^k = \int_{C_n \cap \complement A} (2\pi)^{-1/2}.b_z^k.de_{C_n \cap \complement A}(z) \leqslant \mathrm{Cap}\,(C_n \cap \complement A)[2^{-1}\mathrm{S}.2^{k/2}\,2^{-2n} + 2^{-k/2}\mathrm{S} + \sqrt{\pi}.2^{-n}\mathrm{S}](2\pi)^{-1/2}.$$

Il en résulte l'énoncé du lemme :

$$\mathrm{Cap}^{-1}(C_n \cap \complement A)\; a_n^k \leqslant \mathrm{S}[3.2^{-1} + \sqrt{\pi}](2\pi)^{-1/2}.$$

Démonstration du théorème 9. — Comme $\complement A \supset C_n \cap \complement A$

$$\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-k}\}) \geqslant \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_n} \leqslant 2^{-k}\}).$$

Ce qui implique :

$$\sum_{k \geqslant 1} 2^{kp}\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-k}\}) \geqslant \sum_{k \geqslant 1} 2^{kp}\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_{n_k}} \leqslant 2^{-k}\}),$$

ceci pour toute application $(k \rightsquigarrow n_k)$ de $\mathbf{N}_*$ dans lui-même.

Or

$$\mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_{n_k}} \leqslant 2^{-k}\}) = \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_{n_k}} < \infty\}) - \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_{n_k}} > 2^{-k}\})$$

$$\geqslant \int_{\complement A \cap C_{n_k}} \|z\|^{-1} \, de_{\complement A \cap C_{n_k}}(z) - \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A \cap C_{n_k}} > 2^{-k}\})$$

$$\geqslant 2^{n_k} . \mathrm{Cap}\,(\complement A \cap C_{n_k}) - \varepsilon(n_k,k) . \mathrm{Cap}\,(\complement A \cap C_{n_k})$$

où

$$\varepsilon(n_k,k) \leqslant S[3 . 2^{-1} + \sqrt{\pi}](2\pi)^{-1/2}$$

lorsque $n_k \geqslant k/4$.

Notant $k = 4n_k$:

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{4np} \mathbf{P}^0(\{T_{\complement A} \leqslant 2^{-4n}\}) \geqslant \sum_{n \geqslant 1} 2^{4np} . 2^n \, \mathrm{Cap}\,(\complement A \cap C_n)$$

$$- \sum_{n \geqslant 1} 2^{4np} . \varepsilon(n,4n) . \mathrm{Cap}(\complement A \cap C_n) \geqslant \beta . \sum_{n \geqslant 1} 2^{(4p+1)n} \, \mathrm{Cap}(\complement A \cap C_n)$$

où β est un réel strictement positif.

En conclusion, nous pouvons déduire qu'il existe une constante β strictement positive telle que

$$\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \geqslant \beta \sum_{n \geqslant 1} 2^{(4p+1)n} \, \mathrm{Cap}\,(\complement A \cap C_n).$$

Utilisant l'assertion 8, nous pouvons conclure à l'énoncé de ce théorème 9.

10. THÉORÈME. — *Dans le plan* $\mathbf{R}^2$, *conservant les notations du théorème* 9, *il existe trois constantes* α, β *et* γ *réelles et strictement positives telles que, pour tout ensemble mesurable* $A \subset \mathbf{R}^2$, *nous ayons :*

$$\beta \sum_{n \geqslant 1} 2^{4np} n \, \mathrm{Cap}\,(\complement A \cap C_n) \leqslant \mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) \leqslant \alpha \sum_{n \geqslant 1} 2^{4np} n \, \mathrm{Cap}(\complement A \cap C_n) + \gamma .$$

La démonstration est calquée sur celles des théorèmes 8 et 9, en tenant compte du fait que $\mathbf{R}^2$ n'est pas greenien et que, si $B = B(0,\rho)$ est une boule, alors sa fonction de Green s'écrit, notant x^* l'inverse de x par rapport à ∂B :

$$g_B(x,z) = \log \frac{\|x\|}{\rho} \frac{\|z - x^*\|}{\|z - x\|} \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

$$g_B(0,z) = \log \frac{\rho}{\|z\|} \quad \text{si} \quad z \neq 0, \qquad g_B(0,0) = + \infty .$$

Utilisant les critères donnés aux théorèmes 9 et 10, nous allons montrer que les inclusions de topologies établies au théorème 4 sont strictes.

11. THÉORÈME. — *Pour tout entier $d \geqslant 2$ et pour tous réels p et ε strictement positifs, les inclusions suivantes sont strictes*

$$\mathscr{C} \subsetneqq \mathscr{S}_{p+\varepsilon} \subsetneqq \mathscr{S}_p \subsetneqq \mathscr{F}.$$

Démonstration. — Nous allons donner des exemples de p-ouverts qui ne soient pas des $(p+\varepsilon)$-ouverts. Soit Δ une droite dans $\mathbf{R}^d$ passant par O et engendrée par un vecteur unitaire e. On note :

$$A_n = \bar{B}(x_n e, r_n)$$

et

$$A = \complement\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right).$$

Lorsque $x_n = 3.2^{-n-2}$ et $r_n < 2^{-n-2}$, alors A_n est contenu dans C_n.

Par conséquent

$$\operatorname{Cap} A_n = \operatorname{Cap}(A_n \cap C_n) = \begin{cases} r_n^{d-2} & \text{si } d \geqslant 3 \\ (-\log r_n)^{-1} & \text{si } d = 2. \end{cases}$$

Les exemples seront donnés dans $\mathbf{R}^3$.

Si ρ_n est une série à termes positifs convergente, et si on note $r_n = 2^{-(4p+1)n}.\ \rho_n$, alors la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} 2^{(4p+1)n} r_n$ est convergente, et par conséquent $\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) < \infty$. Comme A est un voisinage de tout point différent de l'origine et comme le complémentaire de A est effilé en zéro, A est un ouvert fin ; c'est donc aussi un p-ouvert car $(x \rightsquigarrow \mathbf{E}^x(T_{\complement A}^{-p})$ est fini et finement continue sur A.

D'après le théorème 4, si ε est un réel strictement positif $\mathscr{S}_{p+\varepsilon} \subset \mathscr{S}_p$, nous allons montrer que l'inclusion est stricte.

On choisit par exemple $\rho_n = 2^{-2\varepsilon n}$, alors $\sum_{n\in\mathbf{N}} \rho_n < \infty$ et par suite $\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-p}) < \infty$, mais d'autre part

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{[4(p+\varepsilon)+1]n} r_n = \sum_{n\geqslant 0} 2^{[4(p+\varepsilon)+1]n} 2^{-[4p+1]n} \rho_n$$

est une série divergente, et par conséquent

$$\mathbf{E}^0(T_{\complement A}^{-(p+\varepsilon)}) = +\infty.$$

L'ensemble A est un p-voisinage de 0 sans être un $(p+\varepsilon)$-voisinage de 0.

2. *Les* p-ξ-ouverts.

Dans $\mathbf{R}^d$, la formule d'Ito permet d'établir que, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, dont les dérivées d'ordre 0, 1 et 2 sont, en module, majorées par une expression de la forme

$$\|g(x)\| \leqslant C(1+\|x\|^N) \qquad \text{avec} \qquad N \in \mathbf{N},$$

alors le laplacien de f s'exprime par :

$$\Delta f = \lim_{t\to 0} 2t^{-1}\{\mathbf{E}^\bullet[f \circ X(t)] - f(x)\}.$$

Plus généralement, soit $\xi(t)$ un processus de diffusion de différentielle stochastique :

$$d\xi(t) = a(\xi(t),t)\,dt + B(\xi(t),t)\,dX(t)$$

où $a(x,t) : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}^d$ et $B(x,t) : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}_+ \to \mathscr{L}(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^d)$ vérifient les hypothèses suivantes (de Gihman et Skorohod) :

a) $\exists L \in \mathbf{R} : \|a(x,t)\|^2 + \|B(x,t)\|^2 \leqslant L(1+\|x\|^2)$,

b) $\exists C \in \mathbf{R} : \|a(y,t)-a(x,t)\| + \|B(y,t)-B(x,t)\| \leqslant C\|y-x\|$,

c) $\exists \varepsilon : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, telle que $\varepsilon(\alpha) \to 0$ $(\alpha \to 0)$, pour laquelle

$$\|a(x,t+\alpha)-a(x,t)\|^2 + \|B(x,t+\alpha)-B(x,t)\|^2 \leqslant (1+\|x\|^2)\varepsilon(\alpha).$$

La formule d'Ito permet alors d'établir que :

$$\lim_{\substack{s<t \\ t\searrow s}} (t-s)^{-1}\mathbf{E}^x[f \circ \xi(t) - f \circ \xi(s)]$$

$$= \sum_{i=1}^{d} a_i(x,s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + 2^{-1}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)\sum_{k=1}^{d} b_{ik}(x,s)b_{jk}(x,s).$$

12. Définitions. — 12.*a*) Si ξ est un processus de diffusion, de différentielle stochastique $d\xi(t) = a(\xi(t),t)\,dt + B(\xi(t),t)\,dX(t)$, nous

disons que ξ est un G-S-processus lorsque ξ vérifie les hypothèses *a*), *b*) et *c*) du début de ce paragraphe [10].

12.*b*) Soit ξ un G-S-processus. Si B est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^d$, universellement mesurable dans $\mathbf{R}^d$, nous appelons temps d'entrée de ξ dans B :

$$T_B^{\xi}(\omega) = \inf\{t>0, \xi_\omega(t) \in B\}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier ces propriétés localement sur des p-ouverts. A une translation du temps près, nous pouvons supposer que $s = 0$. Pour aller plus avant, nous allons établir, tout d'abord, les deux lemmes suivants.

Nous savons que, si x est un point de $\mathbf{R}^d$, $\mathbf{P}^x$-presque sûrement les trajectoires browniennes ne sont pas finement continues. Car si cela était, l'image d'un segment $[0,t]$ serait un compact fin de $\mathbf{R}^d$, donc un ensemble fini et, par raison de connexité, l'image de $[0,t]$ serait nécessairement réduite à un point. Cependant, si F est un fermé fin, alors $\mathbf{P}^x$-presque sûrement, les $X(T_{\complement F})$ appartiennent à F, comme nous allons le démontrer ci-dessous :

13. LEMME. — *Si* F *est un fermé fin, si* $x \in F$, *alors,* $\mathbf{P}^x$*-presque sûrement :* $X(T_{\complement F}) \in F$.

Démonstration. — Soit $e_F^p (p>0)$ le p-potentiel d'équilibre de F :

$$e_F^p(x) = \mathbf{E}^x(e^{-pT_F}).$$

Nous voyons que

$$\{e_F^p = 1\} = \operatorname{reg} F = \{\mathbf{P}^\bullet(\{T_F = 0\}) = 1\}.$$

Comme e_F^p est p-excessive, la fonction $(t \rightsquigarrow e_F^p \circ X_\omega(t)) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est continue pour les trajectoires ω appartenant à un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$, tel que $\mathbf{P}^x(\Omega_1) = 1$. Si $\omega \in \Omega_1$, nous avons deux possibilités :

a) ou bien $T_{\complement F}(\omega) > 0$; alors

$$e_F^p \circ X_\omega(T_{\complement F}) = \lim_{\substack{t \nearrow T_{\complement F} \\ 0<t<T_{\complement F}}} e_F^p \circ X_\omega(t).$$

Or, si $t < T_{\complement F}$, $X_\omega(t)$ appartient à F ; comme, par ailleurs F\reg F est

polaire, pour $\mathbf{P}^x$-presque toute trajectoire :

$$e_F^p \circ X_\omega(T_{CF}) = \lim_{\substack{t \nearrow T_{CF} \\ 0<t<T_{CF}}} e_F^p \circ X_\omega(t) = 1.$$

Donc $X_\omega(T_{CF})$ appartient à $\operatorname{reg} F \subset F$;

b) ou bien $T_{CF}(\omega) = 0$; alors $x = X_\omega(T_{CF}) \in F$.

14. LEMME. — *a*) *Si* ξ *est un* G-S-*processus, alors, pour toute mesure initiale* μ, $\mathbf{P}^\mu$-*presque sûrement, les trajectoires*

$$(t \dot{\rightsquigarrow} \xi_\omega(t))$$

sont continues.

b) *Si* F *est un fermé* (*pour la norme de* $\mathbf{R}^d$), *si* $x \in F$, *alors,* $\mathbf{P}^x$-*presque sûrement :* $\xi(T^\xi_{CF}) \in F$.

Démonstration. — L'assertion *a*) résulte du théorème 2, § 3, Ch. I, Part II, de [10].

b) résulte de la continuité presque sûre des trajectoires.

15. DÉFINITION. — *Soit* ξ *un* G-S-*processus. Si* A *est un sous-ensemble de* $\mathbf{R}^d$, *nous disons que* A *est un* ξ-*ouvert fin si, pour tout* $x \in A$, *il existe un borélien* B *tel que* $x \in B \subset A$, *pour lequel :* $\mathbf{P}^x(\{T^\xi_{CB} = 0\}) = 0$.

16. DÉFINITION. — *Soit p un réel strictement positif. Si* A *est un sous-ensemble de* $\mathbf{R}^d$, *nous disons que* A *est un p-*ξ-*voisinage d'un point* $x \in \mathbf{R}^d$, *s'il existe un* ξ-*ouvert fin* B *tel que* $x \in B \subset A$ *et pour lequel* $(z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z[(T^\xi_{CB})^{-p}])$ *soit finie et* ξ-*finement continue sur* B.

Considérant, comme au paragraphe 1, la fonction

$$\varphi_p = z \rightsquigarrow \mathbf{E}^z[(T^\xi_{CB})^{-p}],$$

nous voyons que cette fonction est sous-médiane relativement au processus ξ. Comme au théorème 2, nous pouvons établir que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) φ_p est ξ-finement continue sur B,

b) φ_p est ξ-finement localement bornée sur B.

Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 montre alors que la notion de p-ξ-voisinage définit une topologie, que nous appelons p-ξ-topologie.

Nous considérons une fonction f, définie sur un p-ξ-ouvert $A \subset \mathbf{R}^d$, et à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Nous pouvons alors définir deux limites, sous réserve d'existence :

$$\Lambda_1^A f(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \mathbf{E}^x[f \circ \xi(t) . \mathbf{1}_{\{t < T^{\xi}_{\complement A}\}} - f(x)]$$

$$\Lambda_2^A f(x) = \lim_{t \to 0} \mathbf{E}^x[t^{-1}(f \circ \xi(t) - f(x)) . \mathbf{1}_{\{t < T^{\xi}_{\complement A}\}}].$$

Lorsque f est définie sur l'adhérence normique de A [resp. f est définie sur l'adhérence fine de A, lorsque ξ est égal au mouvement brownien X], nous pouvons, utilisant le lemme 14.*b*) [resp. le lemme 13], introduire les deux limites suivantes, sous réserve d'existence :

$$\Lambda_3^A f(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \mathbf{E}^x[f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{\complement A}) - f(x)]$$

$$\Lambda_4^A f(x) = \lim_{t \to 0} \mathbf{E}^x[(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})^{-1}(f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{\complement A}) - f(x))].$$

Nous remarquons que Λ_1^A et Λ_3^A [resp. Λ_2^A et Λ_4^A] sont de même nature, le temps t étant remplacé par le temps d'arrêt $t \wedge T^{\xi}_{\complement A}$.

Dans toute la suite, nous supposons que ξ est un G-S-processus. Notre objectif est d'étudier sous quelles hypothèses, nous pouvons affirmer l'égalité de ces limites, lorsqu'elles existent et leur indépendance relativement au p-ξ-ouvert A.

Nous allons tout d'abord établir l'indépendance de Λ_1 relativement au p-ξ-voisinage de x.

17. THÉORÈME. — *Soient* $p \geqslant 1$ *et* A *et* B *deux* p-ξ-*voisinages d'un point* x *de* $\mathbf{R}^d$. *Si* f *est une fonction, définie sur* $A \cup B$ *et telle que :*

1° $|f(x)| < \infty$,

2° $\| f \circ \xi(t) . \mathbf{1}_{\{t < T^{\xi}_{\complement A}\} \cup \{t < T^{\xi}_{\complement B}\}} \|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)} \leqslant M < \infty$, $\forall t \geqslant 0$,

3° $\Lambda_1^A f(x)$ *existe*

alors $\Lambda_1^B f(x)$ *existe aussi et* $\Lambda_1^B f(x)$ *est égal à* $\Lambda_1^A f(x)$.

Démonstration. — Considérant, éventuellement, l'intersection de A et B, nous pouvons supposer que B est contenu dans A.

$$
\begin{aligned}
&|t^{-1}\mathbf{E}^x[f\circ\xi(t).\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement A}\}}-f\circ\xi(t).\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement B}\}}]\\
&\quad\leqslant t^{-1}\mathbf{E}^x[|f\circ\xi(t)|.\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement B}\leqslant t<T^{\xi}_{\complement A}\}}]\\
&\quad\leqslant t^{-1}\mathbf{E}^x[|f\circ\xi(t)|.\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement A}\}}.\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement B}\leqslant t\}}]\\
&\quad\leqslant t^{-1}[\mathbf{P}^x(\{T^{\xi}_{\complement B}\leqslant t\})]^{1/p}.[\mathbf{E}^x[(|f\circ\xi(t)|.\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement A}\}})^{p(p-1)^{-1}}]]^{(p-1)p^{-1}}\\
&\quad\leqslant [t^{-p}\mathbf{P}^x(\{T^{\xi}_{\complement B}\leqslant t\})]^{1/p}.\|f\circ\xi(t).\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement A}\}}\|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)}.
\end{aligned}
$$

D'après la proposition 5, cette expression converge vers zéro avec t ; ce qui prouve que, dès qu'une des deux limites $\Lambda_1^{\mathrm{A}}\ f(x)$ ou $\Lambda_1^{\mathrm{B}}\ f(x)$ existe, il en est de même pour l'autre et qu'elles sont égales.

Nous nous intéressons maintenant à l'égalité des deux limites Λ_1 et Λ_2.

18. THÉORÈME. — *Soient* $p\geqslant 1$, A *un* p-ξ-*voisinage de* $x\in\mathbf{R}^d$ *et* f *une fonction, définie sur* A, *à valeurs dans* $\mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ *et telle que :*

1° $|f(x)|<+\infty$

2° $\Lambda_1^{\mathrm{A}}\ f(x)$ *ou bien* $\Lambda_2^{\mathrm{A}}\ f(x)$ *existe.*

Alors les deux limites $\Lambda_1^{\mathrm{A}}\ f(x)$ *et* $\Lambda_2^{\mathrm{A}}\ f(x)$ *existent et sont égales.*

Démonstration.

$$
|t^{-1}\mathbf{E}^x[f(x).\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A}\leqslant t\}}]|\leqslant|f(x)|.[t^{-p}.\mathbf{P}^x(\{T^{\xi}_{\complement A}\leqslant t\})]^{1/p}.
$$

Comme lors de la démonstration du théorème 17, l'existence d'une des limites $\Lambda_1^{\mathrm{A}}\ f(x)$ ou $\Lambda_2^{\mathrm{A}}\ f(x)$ implique l'existence de l'autre et l'égalité des deux.

19. COROLLAIRE. — *Soient* $p\geqslant 1$ *et* A *et* B *deux* p-ξ-*voisinages de* $x\in\mathbf{R}^d$. *Si* f *est une fonction, définie sur* $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$, *et telle que :*

1° $|f(x)|<\infty$,

2° $\|f\circ\xi(t).\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{\complement A}\}\cup\{t<T^{\xi}_{\complement B}\}}\|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)}\leqslant \mathrm{M}<\infty,\ \forall t\geqslant 0$,

3° $\Lambda_2^{\mathrm{A}}\ f(x)$ *existe,*

alors $\Lambda_2^{\mathrm{B}}\ f(x)$ *existe aussi et* $\Lambda_2^{\mathrm{B}}\ f(x)$ *est égal à* $\Lambda_2^{\mathrm{A}}\ f(x)$.

Démonstration. — Ce corollaire résulte directement des théorèmes 17 et 18.

Nous supposons maintenant que f est définie sur l'adhérence de A [resp. sur l'adhérence fine de A, lorsque le processus ξ est le mouvement brownien X] et nous nous intéressons aux limites Λ_3 et Λ_4.

20. THÉORÈME. — *Soient* $p \geqslant 1$ *et* A *un* p-ξ-*voisinage de* $x \in \mathbf{R}^d$. *Si* f *est une fonction, définie sur adh* A [*resp. sur adh* f A *lorsque* ξ *est le mouvement brownien standard* X], *à valeurs dans* $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *et telle que :*

1° $|f(x)| < +\infty$,

2° $f \circ \xi(T^{\xi}_{\complement A}) \in \mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)$,

3° $\Lambda_3^A f(x)$ *ou bien* $\Lambda_4^A f(x)$ *existe,*

alors les deux limites $\Lambda_3^A f(x)$ *et* $\Lambda_4^A f(x)$ *existent et sont égales.*

Démonstration. — Nous évaluons la différence :

$$\mathbf{E}^x[f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})[(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})^{-1} - t^{-1}] - f(x)[(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})^{-1} - t^{-1}]].$$

Or :

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}^x[f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})^{-1} - t^{-1}]]| \\
&\qquad \leqslant \mathbf{E}^x[|f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})| . \mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A} < t\}}[(T^{\xi}_{\complement A})^{-1} - t^{-1}]] \\
&\qquad \leqslant \mathbf{E}^x[|f \circ \xi(T^{\xi}_{\complement A})| . \mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A} < t\}} . (T^{\xi}_{\complement A})^{-1}] \\
&\qquad \leqslant \{\mathbf{E}^x[\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A} < t\}}(T^{\xi}_{\complement A})^{-p}]\}^{p-1} \{\mathbf{E}^x[|f \circ \xi(T^{\xi}_{\complement A})|^{(p-1)^{-1}p}]\}^{p^{-1}(p-1)} \\
&\qquad \leqslant \|f \circ \xi(T^{\xi}_{\complement A})\|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)} . \{\mathbf{E}^x[\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A} < t\}}(T^{\xi}_{\complement A})^{-p}]\}^{p^{-1}}.
\end{aligned}$$

Cette expression tend vers zéro avec t.

De même :

$$|f(x) . \mathbf{E}^x[(t \wedge T^{\xi}_{\complement A})^{-1} - t^{-1}]| \leqslant |f(x)| . \{\mathbf{E}^x[\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{\complement A} < t\}}(T^{\xi}_{\complement A})^{-p}]\}^{p^{-1}}$$

tend vers zéro avec t. Ceci prouve que, dès qu'une des deux limites $\Lambda_3^A f(x)$ ou $\Lambda_4^A f(x)$ existe, il en est de même pour l'autre et elles sont égales.

21. THÉORÈME. — *Soient* $p \geqslant 1$ *et* A *un* p-ξ-*voisinage de* $x \in \mathbf{R}^d$. *Si* f *est une fonction, définie sur adh* A [*resp. sur* Adh$f$ A *si* ξ *est le*

mouvement brownien standard X], à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et telle que :

1° $|f(x)| < \infty$,

2° $f \circ \xi(T^{\xi}_{CA}) \in \mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)$,

3° $\Lambda^A_1 f(x)$ *ou bien* $\Lambda^A_3 f(x)$ *existe,*

alors les deux limites $\Lambda^A_1 f(x)$ *et* $\Lambda^A_3 f(x)$ *existent et sont égales.*

Démonstration. — Nous évaluons :

$$t^{-1}|\mathbf{E}^x[f \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{CA}) - f \circ \xi(t).\mathbf{1}_{\{t<T^{\xi}_{CA}\}}]|$$
$$\leqslant t^{-1}\mathbf{E}^x[|f \circ \xi(T^{\xi}_{CA})|.\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{CA}\leqslant t\}}]$$
$$\leqslant \mathbf{E}^x[|f \circ \xi(T^{\xi}_{CA})|(T^{\xi}_{CA})^{-1}.\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{CA}\leqslant t\}}]$$
$$\leqslant \|f \circ \xi(T^{\xi}_{CA})\|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)} \cdot \{\mathbf{E}^x[\mathbf{1}_{\{T^{\xi}_{CA}\leqslant t\}}.(T^{\xi}_{CA})^{-p}]\}^{p^{-1}}.$$

Cette expression tend vers zéro avec t et le théorème est démontré.

22. COROLLAIRE. — *Soient* $p \geqslant 1$ *et* A *et* B *deux p-ξ-voisinages d'un point* x *de* $\mathbf{R}^d$. *Si* f *est une fonction, définie sur adh* A $\cup$ *adh* B [*resp. adhf* A $\cup$ *adhf* B *lorsque* ξ *est le mouvement brownien standard*] *et telle que :*

1° $|f(x)| < \infty$,

2° $\exists M < \infty$, $\forall t \geqslant 0$:

$$\| |f| \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{CA}) + |f| \circ \xi(t \wedge T^{\xi}_{CB})\|_{\mathscr{L}^{p(p-1)^{-1}}(\mathbf{P}^x)} \leqslant M,$$

3° $\Lambda^A_i f(x)$ *existe pour un* $i \in \{1,2,3,4\}$,

alors tous les $\Lambda^A_j f(x)$ *et les* $\Lambda^B_j f(x)$ $(j \in \{1,2,3,4\})$ *existent et ils sont tous les huit égaux.*

Démonstration. — Elle résulte des théorèmes 17, 18, 20 et 21.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. BLUMENTHAL et R. K. GETOOR, Markov processes and potential theory, Academic Press (1968).

[2] M. BRELOT, Introduction axiomatique de l'effilement, *Ann. Mat. Pure ed Appl.*, (4), 57 (1962), 77-96.

[3] M. BRELOT, Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement, *Sém. Théorie du Potentiel*, 6e année (1962), n° 1C.
[4] M. BRELOT, La topologie fine en théorie du potentiel, *Lect. Notes in Math.*, 31, Berlin (1967), pp. 36-47.
[5] G. CHOQUET, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, *Sém. Théorie du Potentiel*, 1re année (1957), n° 1.
[6] G. CHOQUET, Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité, *Ann. Institut Fourier*, 9 (1959), 91-102.
[7] D. DEHEN et M. MASTRANGELO, Propriété de Lindeberg et points finement intérieurs, *Bull. Sciences Math.*, 2e série, 100 (1976), 209-228.
[8] J. L. DOOB, Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 579-600.
[9] B. FUGLEDE, Finely harmonic functions, *Lect. Notes in Math.*, Berlin, 289 (1972).
[10] I. I. GIHMAN et A. V. SKOROHOD, Stochastic differential equations. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete*, Springer Verlag, Band 72, (1972).
[11] L. L. HELMS, Introduction to potential theory, Wiley, *Interscience series in pure and applied mathematics*, Vol. 22 (1969).
[12] K. ITO et H. P. MCKEAN, Diffusion processes and their sample paths, *Di Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag (1965).
[13] P. LEVY, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthiers-Villars, Paris (1948).
[14] P. MALLIAVIN, Géométrie différentielle stochastique. Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal, Presses de l'Université de Montréal, (1978).
[15] M. MASTRANGELO, Propriété de Lindeberg forte sur les ouverts fins, *Bull. Sciences Math.*, 2e série, 101 (1977), n° 3, 295-303.
[16] M. MASTRANGELO, Propriété de Lindeberg sur les ouverts fins, *Bull. Sciences Math.*, 2e série, 103 (1979), 401-407.
[17] M. MASTRANGELO, Laplacien fin de fonctions à moyenne convexe, Sem. Théorie du Potentiel, Paris, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, n° 681.
[18] M. MASTRANGELO, Différentiabilité fine et différentiabilité sur les compacts, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, 108, fasc. 1 (1980).
[19] P. A. MEYER, Processus de Markov, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 26 (1967).
[20] N. WIENER, The Dirichlet problem, *J. Math. Phys.*, 3 (1924), 127-146.
[21] N. WIENER, Certain notions in potential theory, *J. Math. Phys.*, 3 (1924), 24-51.

Manuscrit reçu le 23 mai 1980
révisé le 20 septembre 1980.

M. MASTRANGELO et D. DEHEN,
Institut de Mathématiques
Pures et Appliquées (U.E.R. 47)
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.