ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE ROGER

Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact formels

Annales de l'institut Fourier, tome 30, n° 3 (1980), p. 249-257

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1980__30_3_249_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
30, 3 (1980), 249-257

SUR LA COHOMOLOGIE DE L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS DE CONTACT FORMELS

par Claude ROGER

Le but de cet article est de montrer que la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact formels est de dimension finie en tout degré, et nulle au delà d'un certain degré.

Introduction.

Les algèbres de Lie infinies transitives et primitives ont été classifiées [6], [11] : elles comprennent les algèbres irréductibles (dont celles de tous les champs formels et celles des champs symplectiques) et les algèbres des champs de contact. Le problème se pose d'étudier la cohomologie de ces algèbres infinies (cf. [2]) et en particulier de montrer la finitude de ces cohomologies : c'est le cas pour celle de tous les champs formels [3], [5] alors que le problème reste ouvert dans le cas symplectique [12], [14]. Il existe un critère général pour établir la finitude [4], [10] qui ne s'applique qu'à certaines algèbres irréductibles. Nous montrons dans cet article la finitude de la cohomologie de l'algèbre des champs de contact en généralisant certaines techniques de [10], [5]. Rappelons que la nullité du H^1 de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact sur une variété de contact a été établie par Rozenfeld [13]. Lichnerowicz [9] a considéré le cas des coefficients non triviaux pour étudier les dérivations et déformations de ces algèbres de Lie.

Généralités sur les champs de contact formels et notations.

Pour plus de détails sur les structures de contact, le lecteur est renvoyé à [7] p. 28, [1].

Soit $A = \mathbf{R}[[x_0, x_i, \overline{x}_i]]_{i=1,2,\ldots,n}$ l'algèbre des séries formelles à $2n+1$ indéterminées. L'algèbre des champs de vecteurs formels sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ sera notée $\mathcal{A}(2n+1)$.

Un champ $X \in \mathcal{A}(2n+1)$ s'écrit alors :

$$X = X_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{X}_i \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \right)$$

avec X_i et $\overline{X}_i$ dans A. On a une forme de contact canonique sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ $\omega = dx_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i d\overline{x}_i$. Elle vérifie : $\omega_\wedge (d\omega)^n$ partout non nulle.

DEFINITION. – *Un champ formel* $X \in \mathcal{A}(2n+1)$ *est de contact s'il existe* $a \in A$ *tel que* $L_X\omega + a\omega = 0$.

Il est facile de vérifier que les champs de contact forment une sous algèbre de Lie de $\mathcal{A}(2n+1)$ notée $\mathcal{C}(n)$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels : $\Phi : \mathcal{C}(n) \longrightarrow A$

$$\Phi(X) = i(X).\omega = X_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{X}_i$$

$$\Phi^{-1}(u) = \left(u - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_i} \right) \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}.$$

On peut transporter sur A la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{C}(n)$, ce qui définit le crochet de Legendre :

$$\{u, v\} = \frac{\partial v}{\partial x_0} \left(u - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_0} \left(v - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial v}{\partial \overline{x}_i} - \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_i} \frac{\partial v}{\partial \overline{x}_i} \right)$$

Φ devient un isomorphisme d'algèbres de Lie topologiques, pour la topologie m-adique définie par les puissances successives de l'idéal maximal. Par conséquent, pour étudier $H^*(\mathcal{C}(n))$, on peut considérer la cohomologie de A munie du crochet de Legendre.

Tous ces résultats sont classiques : voir [7].

Enoncé des résultats.

Soit $C^*(A)$ l'algèbre des cochaînes continues sur A à coefficients triviaux. $C^*(A)$ est une A-algèbre différentielle graduée (cf. [8]) : A opère naturellement sur $C^*(A)$ par le produit intérieur $i(u) : C^k(A) \longrightarrow C^{k-1}(A)$. Et on en déduit une action infinitésimale $\theta(u) : C^k(A) \longrightarrow C^k(A)$.

Pour tout $u \in A$, $\theta(u) = d \circ i(u) + i(u) \circ d$. $\theta(u)$ commute aux différentielles et est compatible avec le produit des cochaînes :

$$\theta(u) \cdot (f_1 \wedge f_2) = \theta(u) \cdot f_1 \wedge f_2 + f_1 \wedge \theta(u) \cdot f_2 .$$

Pour $f \in C^k(A)$, on a :

$$\theta(u) . f(u_1, \dots, u_k) = \sum_{i=1}^{k} - f(u_1, \dots, \{u, u_i\}, \dots, u_k),$$

f est dite de poids p par rapport à u si $\theta(u) . f = pf$.

Pour $p \neq 0$, $C_p^*(A) \subset C^*(A)$ est le sous complexe des cochaînes de poids p par rapport à u. Il est acyclique : soit en effet $f \in C^*(A)$ vérifiant $\theta(u) . f = pf$ et $df = 0$, alors :

$$pf = i(u) . df + d(i(u) f), \quad \text{d'où} \quad f = d\left(\frac{i(u) . f}{p}\right).$$

$C^*(A)$ a donc même cohomologie que le sous complexe des cochaînes de poids 0 (cf. [5], [10]).

Nous allons essayer d'itérer ce procédé :

Considérons les $n + 1$ champs de $\mathcal{C}(n)$:

$$H_0 = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \qquad H_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \overline{x}_i \frac{\partial}{\partial \overline{x}_i} \quad i = 1, \dots, n$$

auxquels correspondent les séries

$$u_0 = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i \qquad u_i = - x_i \overline{x}_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

$C^*(A)$ sera le complexe des cochaînes de poids 0 par rapport aux $u_0, u_1, \dots, u_n$.

PROPOSITION. — $C_0^*(A)$ *a même cohomologie que* $C^*(A)$.

On en déduira le

THEOREME. — $H^k(\mathcal{C}(n))$ *est de dimension finie pour tout* k *et réduit à* 0 *pour* k *assez grand.*

Démonstration des résultats.

Démonstration de la proposition. — Soit $C_{0,i}^*(A)$ l'ensemble des cochaînes de poids 0 par rapport à $u_0, u_1, \dots, u_i$ pour i variant de 0 à n. Nous savons d'après ce qui précède que $C_{0,0}^*(A)$ a même cohomologie que $C^*(A)$. Nous allons montrer que pour tout i, $C_{0,i}^*(A)$ et $C_{0,i+1}^*(A)$ ont même cohomologie.

Soit donc $f \in C_{0,i}^k(A)$ de poids $p \neq 0$ par rapport à u_{i+1} et vérifiant $df = 0$. Nous allons montrer qu'il existe $g \in C_{0,i}^{k-1}(A)$ telle que $dg = f$, ce qui impliquera bien le résultat cherché.

Nous avons vu que $d\left(i(u_{i+1}) \cdot \dfrac{f}{p}\right) = f$; il suffit donc de vérifier que $i(u_{i+1}) . f$ est bien dans $C_{0,i}^{k-1}(A)$.

Soit $0 \leqslant m \leqslant i$, il faut montrer que $\theta(u_m) . i(u_{i+1}) . f = 0$.

$$\begin{aligned}\theta(u_m) . i(u_{i+1}) . f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} - i(u_{i+1}) . f(\xi_1, \dots, \{u_m, \xi_j\}, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k} - f(u_{i+1}, \xi_1, \dots, \{u_m, \xi_j\}, \dots, \xi_{k-1}) ;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\theta(u_m) . i(u_{i+1}) . f(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \theta(u_m) . f(u_{i+1}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ + f(\{u_m, u_{i+1}\}, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) .\end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que $\{u_i, u_j\} = 0$; donc comme $\theta(u_m) . f = 0$ car $f \in C_{0,i}^k(A)$, on a bien $\theta(u_m) . i(u_{i+1}) . f = 0$ et $i(u_{i+1}) . f \in C_{0,i}^{k-1}(A)$ ce qui achève la démonstration de la proposition.

Démonstration du théorème. — Nous allons établir que le complexe $C_0^*(A)$ est de dimension finie en chaque degré et réduit à 0 si le degré est assez grand, ce qui compte tenu de la proposition impliquera bien le théorème. On notera $P_u(f)$ le poids d'une cochaîne $f \in C^*(A)$ par rapport à $u \in A$.

L'anneau des séries formelles A se décompose en un produit direct d'espaces de dimension 1 :

$$A = \Pi\, A_{p,q^1,\ldots,q^n,r^1,\ldots,r^n}$$

$A_{p,q^1,\ldots,q^n,r^1,\ldots,r^n}$ étant engendré par le monôme $x_0^p \prod_{i=1}^{n} x_i^{q^i} \overline{x}_i^{r^i}$.
L'algèbre des cochaînes se décompose donc

$$C^k(A) = \Lambda^k(A^*) = \oplus \left(\bigwedge_{j=1}^{k} A^*_{p_j,q_j^1\ldots q_j^n,r_j^1\ldots r_j^n} \right),$$

la somme directe étant indexée par l'ensemble des suites à k éléments de $2n+1$-uplets $S_j = (p_j, q_j^1, \ldots, q_j^n, r_j^1, \ldots, r_j^n)$, $j = 1, \ldots, k$, distincts deux à deux.

Soit $f \in A^*_{p,q^1,\ldots,q^n,r^1,\ldots,r^n}$; un calcul immédiat montre que

$$P_{u_0}(f) = -\left(p + \sum_{i=1}^{n} r^i - 1\right)$$

$$P_{u_i}(f) = r^i - q^i .$$

Soit $f_{S_j} \in C^k(A)$; compte tenu de la multiplicativité des $\theta(u_i)$, les poids s'additionnent et on obtient

$$P_{u_0}(f_{S_j}) = -\sum_{j=1}^{k} \left(p_j + \sum_{i=1}^{n} r_j^i\right) + k$$

$$P_{u_i}(f_{S_j}) = \sum_{j=1}^{k} (r_j^i - q_j^i).$$

Par conséquent, une base de $C_0^k(A)$ est constituée par l'ensemble des suites à k éléments $[S_j]_{j=1,\ldots,k}$ de $(2n+1)$-uplets $S_j = (p_j, q_j^1, \ldots, q_j^n, r_j^1, \ldots, r_j^n)$ d'entiers positifs ou nuls, vérifiant

$$(a) \quad \sum_{j=1}^{k} \left(p_j + \sum_{i=1}^{n} r_j^i\right) = k$$

$$(b_i) \quad \sum_{j=1}^{k} r_j^i = \sum_{j=1}^{k} q_j^i \qquad i = 1, \ldots, n$$

et $j \neq j'$ implique $S_j \neq S_{j'}$.

Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que le système (a), $(b_i)_{i=1,\dots,n}$

(1) n'a qu'un nombre fini de solutions pour k fini

(2) n'en a aucune dès que k est assez grand.

(1) est trivial, car les p_j, q_j^i, r_j^i sont nécessairement bornés par k et on ne peut donc trouver qu'un nombre fini de suites répondant à la question.

Pour établir (2), considérons une suite $S = [S_j]_{j=1,\dots,k}$ vérifiant le système.

Pour tout $(n+1)$-uplet $(a, b^1, \dots, b^n)$ d'entiers positifs ou nuls, posons : $I(a, b^i) = \{j = 1, \dots, k / p_j = a,\ r_j^i = b^i,\ i = 1, \dots, n\}$ (éventuellement $I(a, b^i) = \emptyset$) et $n(a, b^i) = \mathrm{Card}\,(I(a, b^i))$.

On a évidemment $\sum n(a, b^i) = k$ (α) et on déduit de (a) : $\sum \left(a + \sum_{i=1}^{n} b^i\right) n(a, b^i) = k$ (β) les sommations étant faites sur tous les $(n+1)$-uplets.

(β) peut s'écrire $k = \sum\limits_{a+\sum_{i=1}^{n} b^i = 1} n(a, b^i) + \sum\limits_{a+\sum_{i=1}^{n} b^i > 1} \left(a + \sum_{i=1}^{n} b^i\right) n(a, b^i)$

Finalement,

$$k = n(0, \dots, 0) + \sum_{a+\sum_{i=1}^{n} b^i = 1} n(a, b^i) + \sum_{a+\sum_{i=1}^{n} b^i > 1} n(a, b^i)$$

$$\leqslant 2n(0, \dots, 0) + \sum_{a+\sum_{i=1}^{n} b^i = 1} n(a, b^i) \quad (\gamma).$$

Dans le membre de gauche apparaissent $n+3$ termes du type $n(a, b^i)$. Nous allons majorer les $n(a, b^i)$ par une fonction de k croissant moins vite que l'identité, ce qui donnera lieu à une contradiction pour k assez grand.

Cas où $n = 1$: On considère donc des suites de triples $(p_j, q_j, r_j)_{j=1,2,\dots,k}$.

Ces triplets doivent être deux à deux distincts, donc quand j varie dans $I(a, b)$, les q_j prennent $n(a, b)$ valeurs distinctes et donc $\sum_{j\in I(a,b)} q_j \geqslant \frac{n(a,b)[n(a,b)-1]}{2}$; d'où pour tout couple (a,b) : $\frac{n(a,b)(n(a,b)-1)}{2} \leqslant k$.

Soit $n(a,b) \leqslant \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$; (γ) donne

$$k \leqslant 2n(0,0) + n(0,1) + n(1,0) \leqslant 2(1+\sqrt{1+8k}) ;$$

$k \leqslant 2(1+\sqrt{1+8k})$ n'est possible que si $k \leqslant 36$.

Nous avons donc finalement montré que $H^k(\mathcal{C}(1)) = 0$ si $k > 36$.

Cas où n *est quelconque :*

Nous allons utiliser la même idée que pour $n = 1$. Quand j varie dans $I(a, b^i)$, les n-uplets $\sigma_j = (q_j^1, \ldots, q_j^n)$ sont nécessairement deux à deux distincts. On peut en déduire une estimation de $\sigma(n(a,b^i)) = \sum_{j\in I(a,b^i)} \left(\sum_{i=1}^{n} q_j^i\right)$.

Appelons S_p^n l'ensemble des suites de n entiers positifs ou nuls $(a_1, \ldots, a_n)$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} a_i = p$ et soit A_p^n le cardinal de S_p^n.

Posons
$$f(p) = A_0^n + A_1^n + \ldots + A_p^n$$
$$g(p) = A_1^n + 2A_2^n + \ldots + pA_p^n ,$$

alors si $n(a,b^i) \geqslant f(p)$, $\sigma(n(a,b^i)) \geqslant g(p)$.

Comme $\sigma(n(a,b^i)) \leqslant k$ d'après (a) et (b^i), on a $k \geqslant g(p)$. Supposons $g(p) \leqslant k \leqslant g(p+1)$; alors pour tout

$$(a,b^i),\ n(a,b^i) \leqslant f(p+1).$$

Donc d'après (γ),

$$g(p) \leqslant k \leqslant (n+3) \sup n(a,b^i) \leqslant (n+3) f(p+1).$$

Un calcul par récurrence montre que A_p^n est une fonction croissant comme p^{n+1}. Donc $f(p)$ et $g(p)$ croissent à l'infini comme p^n et p^{n+1} respectivement ; par conséquent, l'inégalité $g(p) \leqslant (n+3) f(p+1)$ ne peut avoir lieu dès que p est supérieur à une certaine valeur p_0 ; alors dès que $k \geqslant g(p_0)$, $C_0^k(A)$ et donc $H^k(\mathcal{C}(n))$ sont réduits à 0.

Remarque finale. – Des formules sommatoires explicites pour les fonctions f et g nous donneraient une estimation en fonction de n du degré au delà duquel $H^*(\mathcal{C}(n))$ s'annule. D'autre part, il est possible qu'un virtuose de la programmation puisse calculer explicitement la cohomologie, à partir de l'algorithme donné ici.

Addendum. – Dimitri B. Fuks m'a informé (Mai 1980) qu'il a obtenu des résultats analogues et en particulier calculé explicitement la cohomologie de $\mathcal{C}(1)$:

$$H^k(\mathcal{C}(1)) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 0, 7, 10$$
$$\dim H^7(\mathcal{C}(1)) = 3$$
$$\dim H^{10}(\mathcal{C}(1)) = 2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. CHAPERON, Singularités en géométrie de contact, *Astérisque*, 59-60 (1978).

[2] I.M. GELFAND, The Cohomology of infinite dimensional Lie algebras. Some questions of integral geometry, Actes du Congrès international des mathématiciens, Nice, 1970.

[3] I.M. GELFAND et B.A. FUKS, The Cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 34 (1970), 322-337.

[4] I.M. GELFAND et B.A. FUKS, Upper bounds for cohomology of infinite dimensional Lie algebras, Functional analysis and its applications, vol. 4, n° 4, 1970.

[5] C. GODBILLON, Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs, Séminaire Bourbaki 421, 1972.

[6] V. GUILLEMIN, D.G. QUILLEN, S. STERNBERG, The Classification of the irreducible complex algebras of infinite type, *J. Analyse Math.*, t. 18 (1967), 107-112.

[7] S. KOBAYASHI, Transformation groups in differential geometry, *Ergebnisse der Mathematik une ihrer Grenzgebiete*, Band 70 (1972).

[8] F. KAMBER et P. TONDEUR, Foliated bundles and characteristic classes, *Lecture notes in math.*, 493 (1975).

[9] A. LICHNEROWICZ, Cohomologie 1-différentiable des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact, *J. Math. Pures et Appl.*, t. 53 (1974), 459-484.

[10] M.V. LOZIK, On the Cohomologies of infinite dimensional Lie algebras of vector fields, Functional analysis and its applications, vol. 4, n° 2 (1970), 127.

[11] J. MORIMOTO et T. TANAKA, The Classification of real primitive infinite Lie algebras, *Journal Math. Kyoto,* (1970), 207-243.

[12] J. PERCHIK, Cohomology of hamiltonian and related formal vector field Lie algebras, *Topology.*

[13] B.I. ROZENFELD, One dimensional cohomologies of a Lie algebra of contact vector fields, Functional analysis and its applications, vol. 4, n° 3 (1970), 171.

[14] J. VEY, Rapport sur les champs symplectiques formels, *Publ. Dépt. Math. Université de Lyon I,* t. 13, fasc. 3 (1976).

Manuscrit reçu le 7 février 1980.

Claude ROGER,
E.N.S.J.F.
1, rue Maurice Arnoux
92120 Montrouge (France).