

ROSE-MARIE HERVÉ

**Quelques propriétés du faisceau de fonctions
harmoniques associé à un opérateur
elliptique dégénéré**

Annales de l'institut Fourier, tome 25, n° 3-4 (1975), p. 245-261

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_3-4_245_0

© Annales de l'institut Fourier, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DU FAISCEAU DE FONCTIONS HARMONIQUES ASSOCIÉ A UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE DÉGÉNÉRÉ

par Rose-Marie HERVÉ

*Dédié à Monsieur M. Brelot à l'occasion
de son 70^e anniversaire.*

Cet article complète les propriétés du faisceau \mathcal{H} des fonctions harmoniques associées à un opérateur elliptique dégénéré [4].

On montre d'abord que l'on peut définir les fonctions harmoniques adjointes au faisceau \mathcal{H} , et qu'elles coïncident avec les solutions de l'équation adjointe ⁽¹⁾. Puis on compare la solution du problème de Dirichlet donnée par la théorie axiomatique, à la solution au sens variationnel construite par M. Derridj dans un ouvert assez régulier [2].

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on se donne un opérateur elliptique dégénéré de la forme

$$Lu = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + X_0 u + au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i u'_{x_i} + au,$$

où $X_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, r$, sont des champs de vecteurs réels de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et a une fonction $\in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Soit

$$L^*u = \sum_{k=1}^r X_k^2 u + X'_0 u + a'u$$

l'adjoint de L .

⁽¹⁾ La démonstration utilise de façon essentielle la notion d'ouverts c.d. due à M. Brelot.

On suppose que l'algèbre de Lie engendrée par X_1, \dots, X_r , soit $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$, est de rang n en tout point $\in \Omega$: d'après les résultats de J.-M. Bony ([1], corollaire du th. 5.3), le faisceau \mathcal{H} [resp. \mathcal{H}^*] des solutions de $Lu = 0$ [resp. $L^*u = 0$] satisfait aux axiomes 1, 2, 3 de l'axiomatique de M. Brelot. On marquera d'une * toutes les notions relatives à \mathcal{H}^* .

On suppose en outre l'existence d'un potentiel > 0 sur Ω , ce qui est vérifié en particulier si a est négatif, sans être $\equiv 0$, car alors les constantes > 0 sont surharmoniques sans être harmoniques dans Ω . On en déduit la proportionnalité des potentiels à support ponctuel donné ([4], th. 4).

Dans la suite on note $g(x, y)$ la fonction de Green construite par J.-M. Bony ([1], th. 4.3) dans tout ouvert ω très régulier, c'est-à-dire borné, tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et qu'en tout point $x \in \partial\omega$, il existe une normale ν à $\bar{\omega}$ satisfaisant à

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\nu_i\nu_j > 0; \quad g_y : x \longmapsto g(x, y)$$

est (à un facteur constant près) l'unique potentiel de support y dans ω ([4], lemme 6) et $(x, y) \longmapsto g(x, y)$ est s.c.i. sur $\omega \times \omega$, continue pour $x \neq y$. Il résulte alors de ces propriétés de g que tout L-potential dans ω peut s'écrire $G_\mu(x) = \int g_y(x) d\mu(y)$, μ mesure ≥ 0 sur ω ([3], th. 18.2 et 18.3).

La fonction de Green dans ω relative à L^* est

$$g^*(x, y) = g(y, x), \quad g_x^* : y \longmapsto g(x, y)$$

est le L^* -potential dans ω de support x , et tout L^* potential dans ω est de la forme $G_\mu^*(y) = \int g_x^*(y) d\mu(x)$.

I. LES FONCTIONS HARMONIQUES ADJOINTES ET LES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION ADJOINTE

Pour définir les fonctions harmoniques adjointes au faisceau ([3], chapitre vi), il suffit de démontrer l'existence d'une

base des ouverts formée de domaines c.d. (c'est-à-dire de domaines $\delta, \bar{\delta} \subset \Omega$, tels que, pour tout potentiel p dans Ω , harmonique dans δ , $R_p^{\delta} = p$ dans Ω) — cf. par exemple [3], 11, B —. Cette propriété d'existence étant locale, on peut se placer dans un ouvert ω très régulier.

On va montrer que tout ouvert régulier* $U \subset \omega$ est c.d., et pour cela il suffit de prouver que, pour tout $y \in \partial U$, g_y est conservé par balayage sur $\int_{\omega} U$ ([3], lemme 24.1). Ce qui suit a pour but d'établir la formule de réciprocité ⁽²⁾

$$\hat{R}_{g_y}^F(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{*F}(y)$$

pour tout fermé $F \subset \omega$, qui conduit au résultat cherché.

Formule de réciprocité pour les ouverts.

PROPOSITION 1. — *Pour tout ouvert $U \subset \omega$:*

$$R_{g_y}^U(x) = R_{g_x^*}^{*U}(y) \quad \forall x \text{ et } y \in \omega$$

et $G_{\mu^*}^* = R_{G_x^*}^{*U} \forall \mu$ mesure positive à support compact dans ω .

Pour tout $y \in U$: $R_{g_y}^U = g_y$ sur U , donc aussi sur ω ([3], lemme 3.4). D'autre part ([3], th. 10.1) :

$$R_{g_y}^U(x) = \int g_y d\varepsilon_x^U = G_{\varepsilon_x^U}^{*U}(y);$$

ainsi $y \mapsto R_{g_y}^U(x)$ est une fonction surharmonique* coïncidant sur U avec g_x^* , donc

$$R_{g_y}^U(x) \geq R_{g_x^*}^{*U}(y).$$

On obtient l'inégalité inverse en remplaçant g_y par g_x^* . Enfin ([3], th. 10.1 et 22.4) :

$$\begin{aligned} G_{\mu^*}^*(y) &= \int g_y d\mu^U = \int R_{g_y}^U(x) d\mu(x) \\ &= \int R_{g_x^*}^{*U}(y) d\mu(x) = R_{G_x^*}^{*U}(y). \end{aligned}$$

Quelques propriétés des mesures positives, à support compact, engendrant un potentiel continu.

Soit $\mathfrak{M}(\omega)$ [resp. $\mathfrak{M}^*(\omega)$] la classe des mesures μ posi-

⁽²⁾ Toutes les balayées sont relatives à l'ouvert ω .

tives sur ω , à support compact dans ω , telles que

$$G_\mu [\text{resp. } G_\mu^*]$$

est fini continu sur ω .

LEMME 1. — *Quel que soit le compact $K \subset \omega$, les restrictions à K des différences $G_\mu - G_{\mu'}$, avec μ et $\mu' \in \mathfrak{M}(\omega)$ [resp. des différences $G_\mu^* - G_{\mu'}^*$, avec μ et $\mu' \in \mathfrak{M}^*(\omega)$] sont denses dans $\mathcal{C}(K)$.*

En effet, les différences de deux potentiels finis continus dans ω sont denses dans $\mathcal{C}(K)$ ([3], lemme 6.1); il suffit alors de balayer de tels potentiels sur un compact extérieurement régulier contenant K et contenu dans ω ([3], lemme 7.1).

LEMME 2. — *Pour que deux mesures positives λ et λ' sur ω , à support compact dans ω , soient égales, il suffit que*

$$\int G_\lambda d\mu = \int G_{\lambda'} d\mu \quad \text{pour toute } \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega).$$

L'hypothèse s'écrit $\int G_\mu^* d\lambda = \int G_\mu^* d\lambda' \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$, d'où $\lambda = \lambda'$ grâce au lemme 1.

LEMME 3. — *Soient λ_n des mesures positives sur ω , portées par un même compact $\subset \omega$. Si la suite (G_{λ_n}) est décroissante, on a :*

$$\lim G_{\lambda_n} = \widehat{\lim G_{\lambda_n}} \mu \text{ p.p. pour toute } \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega).$$

Si $G_\lambda = \widehat{\lim G_{\lambda_n}}$, on a ([3], corollaire 1 du théorème 23.1) λ limite vague de λ_n , donc $\forall \mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} \int G_\mu^* d\lambda &= \lim \int G_\mu^* d\lambda_n \\ \text{ou} \quad \int G_\lambda d\mu &= \lim \int G_{\lambda_n} d\mu \\ &= \int (\lim G_{\lambda_n}) d\mu. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2. — *Soit K un compact $\subset \omega$. Quel que soit $\mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$: μ^K est limite vague de μ^U selon l'ordonné filtrant décroissant des ouverts $U \supset K$ et d'adhérence $\subset \omega$.*

Étant donné G_λ fini continu sur ω , on a ([3], 5 B, propriété 8)

$$R_{G_\lambda}^K = \inf R_{G_\lambda}^U,$$

donc il existe une suite décroissante d'ouverts U_n telle que

$$\hat{R}_{G_\lambda}^K = \widehat{\lim} R_{G_\lambda^{U_n}}^U;$$

alors (lemme 3) :

$$\int \hat{R}_{G_\lambda}^K d\mu = \lim \int R_{G_\lambda^{U_n}}^U d\mu = \inf \int R_{G_\lambda^U}^U d\mu$$

ou $\int G_\lambda d\mu^K = \inf \int G_\lambda d\mu^U$ ([3], th. 10.1), et $\int G_\lambda d\mu^U$ est fonction croissante de U ; on achève grâce au lemme 1.

Formule de réciprocité pour les fermés.

PROPOSITION 3. — *Pour tout F fermé dans ω*

$$\hat{R}_{g_y^F}^F(x) = \hat{R}_{g_x^{*F}}^{*F}(y) \quad \forall x \text{ et } y \in \omega.$$

On peut supposer que F est un compact $K \subset \omega$ (cf. [3], démonstration de la proposition 31.3).

Comme dans la proposition 1, $x \mapsto \hat{R}_{g_x^{*K}}^{*K}(y)$ est le potentiel $G_{\varepsilon; *K}$ et, d'après le lemme 2, il suffit de montrer que pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^*(\omega)$:

$$\int \hat{R}_{g_y^K}^K(x) d\mu(x) = \int \hat{R}_{g_x^{*K}}^{*K}(y) d\mu(x).$$

Or

$$\int \hat{R}_{g_y^K}^K d\mu = \int g_y d\mu^K = G_{\mu^K}^{*K}(y),$$

et $\int \hat{R}_{g_x^{*K}}^{*K}(y) d\mu(x) = \hat{R}_{G_\mu^{*K}}^{*K}(y)$ ([3], th. 22.4).

D'après la proposition 2 et une propriété de la topologie T^* sur l'ensemble des potentiels $*$ ([3], proposition 19.3) :

$$G_{\mu^K}^{*K} = T^* - \lim G_{\mu^v}^{*v};$$

d'autre part

$$\hat{R}_{G_\mu^{*K}}^{*K} = \widehat{\inf} R_{G_\mu^{*U}}^{*U} = T^* - \lim R_{G_\mu^{*U}}^{*U}$$

([3], corollaire 2 du th. 23.1). On conclut grâce à la proposition 1.

Existence d'une base formée de domaines c.d.

THÉORÈME 1. — *Soit ω un ouvert très régulier. Tout ouvert régulier $*$ U contenu dans ω est c.d.*

On a déjà remarqué (cf. le début du paragraphe) qu'il suffit de montrer

$$\hat{R}_{g_y}^{\mathcal{L}^U}(x) = g_y(x) \quad \forall y \in \partial U \quad \text{et} \quad x \in \omega.$$

Or

$$\hat{R}_{g_y}^{\mathcal{L}^U}(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{\mathcal{L}^U}(y) \quad \forall x \quad \text{et} \quad y \in \omega \quad (\text{proposition 3}),$$

et $\hat{R}_{g_x^*}^{\mathcal{L}^U}(y) = g_x^*(y) \quad \forall x \in U \quad \text{et} \quad y \in \mathcal{C} U$, car U est régulier*. Par suite

$$R_{g_y}^{\mathcal{L}^U}(x) = g_y(x) \quad \forall y \in \mathcal{C} U \quad \text{et} \quad x \in U,$$

donc aussi $\forall x \in \omega$, et $\hat{R}_{g_y}^{\mathcal{L}^U} \equiv g_y$ en particulier pour tout $y \in \partial U$.

Comparaison des fonctions harmoniques et des fonctions harmoniques adjointes.*

On se place toujours dans un ouvert très régulier ω .

THÉORÈME 2. — *Les fonctions harmoniques adjointes définies à l'aide du potentiel g_y coïncident avec les fonctions harmoniques* (c'est-à-dire les solutions de $L^*u = 0$).*

Il suffit de montrer que, pour tout ouvert $U \subset \bar{U} \subset \omega$, la mesure harmonique adjointe en tout point $y \in U$, qui est la mesure associée à $\hat{R}_{g_y}^{\mathcal{L}^U}$ ([3], n° 29), coïncide avec la mesure harmonique*, c'est-à-dire $\varepsilon_y^{\mathcal{L}^U}$; et ceci est vérifié car

$$\hat{R}_{g_y}^{\mathcal{L}^U}(x) = \hat{R}_{g_x^*}^{\mathcal{L}^U}(y) = \int g_x^*(z) d\varepsilon_y^{\mathcal{L}^U}(z) = \int g_z(x) d\varepsilon_y^{\mathcal{L}^U}(z).$$

COROLLAIRE. — *Il y a identité entre les ensembles L -polaires et L^* -polaires.*

Cf. [3], th. 32.1.

II. COMPARAISON DES DEUX SOLUTIONS DU PROBLÈME DE DIRICHLET

On compare les deux solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert ω très régulier et de frontière $\in \mathcal{C}^\infty$, et on suppose

$$a(x) + a'(x) \leq -2\sigma < 0 \quad \forall x \in \omega.$$

1. Espaces fonctionnels. Rappels.

Espaces fonctionnels associés à l'opérateur L.

Pour construire la solution du problème de Dirichlet au sens variationnel [2], M. Derridj définit les normes suivantes sur l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\omega)$ des fonctions $u \in \mathcal{L}^2(\omega)$ ainsi que leurs dérivées partielles 1^{res}, ω ouvert $\subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \|u\|_M &= \|u\|_2 + \sum_{k=1}^r \|X_k u\|_2 \\ \|u\|_N &= \|u\|_M + \|X_0 u\|_{\mathcal{M}'}, \\ \|u\|_P &= \|u\|_M + \|X_0 u\|_2 \end{aligned}$$

où $\mathcal{M}'(\omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\omega)$ pour $\|\cdot\|_M$, et $\|\cdot\|_2$ désigne la norme dans $\mathcal{L}^2(\omega)$. On a $\|X_0 u\|_{\mathcal{M}'} \leq \|X_0 u\|_2$, donc si $M(\omega)$, $N(\omega)$ et $P(\omega)$ sont les complétés de $W^{1,2}(\omega)$ pour les normes $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_N$ et $\|\cdot\|_P$ respectivement :

$$W^{1,2}(\omega) \subset P(\omega) \subset N(\omega) \subset M(\omega),$$

les inclusions étant topologiques.

On désigne de même par $\mathcal{M}(\omega)$, $\mathcal{N}(\omega)$ et $\mathcal{P}(\omega)$ les adhérences de $\mathcal{D}(\omega)$ (ou de $W_0^{1,2}(\omega)$) ou encore de l'ensemble des fonctions $\in W^{1,2}(\omega)$ nulles p.p. hors d'un compact de ω), pour les mêmes normes, dans $M(\omega)$, $N(\omega)$ et $P(\omega)$ respectivement.

Quelques propriétés de ces espaces.

1^{re} PROPRIÉTÉ. — $u \in \mathcal{M}(\omega)$ et $X_0 u \in \mathcal{M}'(\omega) \iff u \in \mathcal{N}(\omega)$. Cf. [2], proposition 1.2.

2^e PROPRIÉTÉ. — Soit $u \in N(\omega)$. Alors Lu défini par

$$\begin{aligned} \langle Lu, \varphi \rangle &= - \sum_{k=1}^r \int_{\omega} X_k u (X_k \varphi + \varphi \operatorname{div} X_k) dx \\ &\quad + \langle X_0 u, \varphi \rangle + \int_{\omega} a u \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), \end{aligned}$$

est dans $\mathcal{M}'(\omega)$, avec $\|Lu\|_{\mathcal{M}'(\omega)} \leq \alpha \|u\|_{N(\omega)}$, où

$$\alpha = \sup_{\omega} (1, |a|, |\operatorname{div} X_1|, \dots, |\operatorname{div} X_r|),$$

et la constante α est encore valable dans tout ouvert $\subset \omega$.

3^e PROPRIÉTÉ. — Soit $u \in \mathcal{N}(\omega)$. Alors

$$-\langle Lu, u \rangle = \sum_{k=1}^r \|X_k u\|_2^2 - \int_{\omega} \frac{a + a'}{2} u^2 dx \geq \beta \|u\|_{\mathbb{M}(\omega)}^2,$$

et par suite

$$\|Lu\|_{\mathbb{M}'(\omega)} \geq \beta \|u\|_{\mathbb{M}(\omega)},$$

avec $\beta = \frac{\sigma}{1 + r\sigma}$, et la constante β reste valable dans tout ouvert $\subset \omega$.

Il suffit de supposer $u \in \mathcal{D}(\omega)$, car si la suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\omega)$ tend vers $u \in \mathcal{N}(\omega)$ pour la norme de $\mathbb{N}(\omega)$, c'est vrai *a fortiori* pour les normes de $\mathcal{L}^2(\omega)$ et de $\mathbb{M}(\omega)$, et d'autre part $L\varphi_n$ tend vers Lu dans $\mathcal{M}'(\omega)$ (2^e propriété).

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, un calcul classique (cf. par exemple [5], p. 152) donne

$$\begin{aligned} \langle L\varphi, \varphi \rangle &= - \sum_{k=1}^r \|X_k \varphi\|_2^2 + \int_{\omega} \varphi^2 \left[a - \frac{1}{2} \operatorname{div} X_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (X_k \operatorname{div} X_k + (\operatorname{div} X_k)^2) \right] dx \\ &= - \sum_{k=1}^r \|X_k \varphi\|_2^2 + \int_{\omega} \varphi^2 \frac{a + a'}{2} dx \end{aligned}$$

d'où

$$-\langle L\varphi, \varphi \rangle \geq \sum_{k=1}^r \|X_k \varphi\|_2^2 + \sigma \|\varphi\|_2^2 \geq \beta \|\varphi\|_{\mathbb{M}(\omega)}^2.$$

Rappel de résultats de M. Derridj [2].

1. UN THÉORÈME D'ISOMORPHISME (th. 1.1) :

L'opérateur L est un isomorphisme de $\mathcal{N}(\omega)$ sur $\mathcal{M}'(\omega)$.

2. UN THÉORÈME DE RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS (th. 2.2) :

Soit u la solution $\in \mathcal{N}(\omega)$ de $Lu = g$, où $g \in \mathcal{M}'(\omega)$; alors $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega})$ entraîne $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega})$.

Du théorème d'isomorphisme, on déduit immédiatement la solution du problème de Dirichlet au sens variationnel :

THÉORÈME. — A toute fonction $f \in \mathbb{N}(\omega)$ correspond une solution unique $u \in \mathbb{N}(\omega)$ telle que $Lu = 0$ dans ω et

$$u - f \in \mathcal{N}(\omega).$$

On note L_f^ω cette solution et L^ω l'opérateur $f \mapsto L_f^\omega$ de $N(\omega)$ dans lui-même.

En effet, si $\varphi = u - f$, $L\varphi = -L_f$ qui appartient à $\mathcal{M}'(\omega)$, donc cette équation a une solution unique $\varphi \in \mathcal{N}(\omega)$.

Le problème consiste à comparer la solution L_f^ω qu'on vient de définir avec la solution H_f^ω du problème de Dirichlet, dans le cas où f appartient aussi à $\mathcal{C}(\overline{\omega})$.

2. Un principe du maximum pour les sous-solutions ⁽³⁾ $\in P(\omega)$.

On commence par montrer que les espaces $M(\omega)$ et $P(\omega)$ jouissent de propriétés analogues à celles des espaces de Sobolev.

PROPOSITION 4. — Si $u \in M(\omega)$ (resp. $P(\omega)$ ou $N(\omega)$) et $u = 0$ p.p. hors d'un compact $K \subset \omega$, alors $u \in \mathcal{M}(\omega)$ (resp. $\mathcal{P}(\omega)$ ou $\mathcal{N}(\omega)$).

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\omega)$, égale à 1 sur un voisinage de K et $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ tendant vers u dans $M(\omega)$ (resp. $P(\omega)$ ou $N(\omega)$): $(\chi u_n) \subset W_0^{1,2}(\omega)$; $\lim (\chi u_n) = u$ dans $\mathcal{L}^2(\omega)$; $X_k(\chi u_n) = \chi \cdot X_k u_n + u_n X_k \chi$ tend vers $X_k u$ dans $\mathcal{L}^2(\omega)$. En outre si $u \in N(\omega)$:

$$|\langle (\chi \cdot X_0 u_n - X_0 u), \varphi \rangle| = |\langle (X_0 u_n - X_0 u), \chi \varphi \rangle| \leq C^{ste} \|X_0 u_n - X_0 u\|_{\mathcal{M}'} \|\varphi\|_{\mathcal{M}},$$

donc $X_0(\chi u_n) \rightarrow X_0 u$ dans $\mathcal{M}'(\omega)$.

PROPOSITION 5. — $u \in M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] entraîne

$$u^+ \in M(\omega)$$

[resp. $P(\omega)$]. En outre :

$$X_k u^+ = (\sigma \circ u) X_k u, k = 1, \dots, r \text{ (resp. et } k = 0),$$

où σ est la fonction caractéristique de $]0, +\infty[$,

$$X_k u = 0 \text{ p.p. sur } \{u = 0\}, k = 1, \dots, r \text{ (resp. et } k = 0),$$

et l'application $u \mapsto u^+$ est continue.

⁽³⁾ Ou pour les fonctions sous-harmoniques $\in P(\omega)$, car on sait que u égale p.p. à une fonction sous-harmonique dans ω équivaut à u localement intégrable dans ω et $Lu \geq 0$ dans ω ([4], th. 5).

Soient $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ tendant vers u dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] et h l'application $R \rightarrow R$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0 \\ \sqrt{t^2 + \alpha^2} - \alpha & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha > 0;$$

alors : $h(t) \leq |t|$ et $0 \leq h'(t) \leq 1 \quad \forall t$, $(h \circ u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$
 car $\frac{\partial(h \circ u_n)}{\partial x_i} = (h' \circ u_n) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$, donc $X_k(h \circ u_n) = (h' \circ u_n) X_k u_n$.
 D'autre part, dans $\mathcal{L}^2(\omega)$:

$$h \circ u = \lim_n (h \circ u_n),$$

$X_k(h \circ u) = \lim_n X_k(h \circ u_n)$, $k = 1, \dots, r$ (resp et $k = 0$),
 car $\lim_n (h' \circ u_n)(X_k u_n - X_k u) = 0$ et, pour une suite partielle,
 encore notée (u_n) , tendant vers u ponctuellement p.p. :

$$\lim_n (h' \circ u_n - h' \circ u) X_k u = 0.$$

Ainsi,

$$h \circ u \in M(\omega) \text{ [resp. } P(\omega)\text{]}$$

et

$$X_k(h \circ u) = (h' \circ u) X_k u.$$

On fait tendre α vers 0; dans $\mathcal{L}^2(\omega)$:

$$u^+ = \lim_{\alpha > 0} h \circ u$$

et

$$(\sigma \circ u) X_k u = \lim_{\alpha > 0} (h' \circ u) X_k u, \quad k = 1, \dots, r \text{ (resp. et } k = 0).$$

Donc

$$u^+ \in M(\omega) \text{ [resp. } P(\omega)\text{]} \text{ et } X_k u^+ = (\sigma \circ u) X_k u \text{ p.p.}$$

En appliquant ce résultat à u et à $-u$:

$$X_k u = X_k u^+ - X_k u^- = [\sigma(u) + \sigma(-u)] X_k u \text{ p.p.,}$$

donc $= 0$ p.p. si $u = 0$.

Enfin, si $u_n \rightarrow u$ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], dans $\mathcal{L}^2(\omega)$:

$$u^+ = \lim_n u_n^+$$

et $X_k u^+ = \lim_n X_k u_n^+$, $k = 1, \dots, r$ (resp. et $k = 0$), car $\lim_n (\sigma \circ u_n)(X_k u_n - X_k u) = 0$ et, pour une suite partielle choisie comme ci-dessus, $\lim_n (\sigma \circ u_n - \sigma \circ u)X_k u = 0$.

COROLLAIRE 1. — $u \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraîne $u^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] et même, u^+ est limite dans $\mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] d'une suite contenue dans $\mathcal{D}^+(\omega)$.

En effet, $u = \lim u_n$ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$] avec $(u_n) \subset W^{1,2}(\omega)$ et $u_n = 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$. Alors $u^+ = \lim u_n^+$, et (u_n^+) possède les mêmes propriétés que (u_n) ; en régularisant u_n^+ , on obtient une suite

$$(\varphi_n) \subset \mathcal{D}^+(\omega),$$

et tendant vers u^+ dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$].

COROLLAIRE 2. — $u \in M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], $u \geq 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$ et $v \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraînent $\inf(u, v) \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$].

Soit $(v_n) \subset W^{1,2}(\omega)$, chaque v_n étant nulle p.p. hors d'un compact $\subset \omega$, et v_n tendant vers v dans $M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$]: $\inf(u, v_n) \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] (proposition 4), donc aussi la limite $\inf(u, v)$.

COROLLAIRE 3. — $u \in M(\omega)$ [resp. $P(\omega)$], $0 \leq u \leq v$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$ et $v \in \mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$] entraînent u dans $\mathcal{M}(\omega)$ [resp. $\mathcal{P}(\omega)$].

On peut alors démontrer un premier principe du maximum pour les sous-solutions $\in P(\omega)$.

THÉORÈME 3. — Soit $u \in P(\omega)$, $Lu \geq 0$ sur ω et $u \leq v$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$, où $v \in \mathcal{M}(\omega)$. Alors $u \leq 0$ p.p. dans ω .

On a :

$$(*) \quad 0 \leq u^+ \leq v^+ \text{ p.p. hors d'un compact } \subset \omega.$$

$v^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ (corollaire 1); $u^+ \in P(\omega)$ (proposition 5), donc

$$u^+ \in M(\omega) \quad \text{et} \quad X_0 u^+ \in \mathcal{L}^2(\omega).$$

L'inégalité (*) montre alors que $u^+ \in \mathcal{M}(\omega)$ (corollaire 3), et comme $X_0 u^+ \in \mathcal{L}^2(\omega)$, $u^+ \in \mathcal{N}(\omega)$ (n° 1, propriété 1). D'autre part $\langle Lu, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$ donc aussi

$$\langle Lu, u^+ \rangle \geq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \langle Lu, u^+ \rangle &= \langle Lu^+, u^+ \rangle = - \sum_{k=1}^r \|X_k u^+\|_2^2 \\ &\quad + \int_{\omega} \frac{a + a'}{2} u^{+2} dx \leq 0, \end{aligned}$$

et $u^+ = 0$ p.p. dans ω (4).

3. Positivité de l'opérateur L^ω .

Il s'agit de montrer que L_f^ω est ≥ 0 dans ω , si f l'est au voisinage de la frontière, ou plus précisément, si f appartient à l'espace $N^+(\omega)$ ainsi défini :

DÉFINITION. — $N^+(\omega)$ est l'adhérence dans $N(\omega)$ de l'ensemble $\{u \in W^{1,2}(\omega), u \geq 0 \text{ p.p. hors d'un compact } \subset \omega\}$.

Comme on sera amené à régulariser f dans ω , on commence par étudier la limite de $L_f^{\omega_n}$, où les ω_n sont des ouverts de frontière \mathcal{C}^∞ et très réguliers tendant vers ω , et pour cela, on étudie la norme de L_f^ω dans $M(\omega)$.

PROPOSITION 6. — Pour toute $f \in N(\omega)$:

$$\|L_f^\omega\|_{M(\omega)} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{N(\omega)}$$

et les constantes α et β sont encore valables dans tout ouvert $\subset \omega$.

D'après les propriétés 2 et 3 citées au n° 1 :

$$\|L_f^\omega - f\|_{M(\omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|Lf\|_{M(\omega)} \leq \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{N(\omega)}$$

et les constantes α et β sont valables dans tout ouvert $\subset \omega$.

(4) Même en supposant seulement $a + a' < 0$ sur ω .

PROPOSITION 7. — Soit (ω_n) une suite croissante d'ouverts satisfaisant aux mêmes hypothèses que ω (c'est-à-dire de frontière \mathcal{C}^∞ et très réguliers) et dont la réunion est ω ⁽⁵⁾.

Pour $f \in N(\omega)$, la fonction

$$f_n = \begin{cases} L_f^{\omega_n} & \text{dans } \omega_n \text{ }^{(6)} \\ f & \text{dans } \omega - \omega_n \end{cases} \text{ est dans } M(\omega),$$

$\|f_n\|_{M(\omega)} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{N(\omega)}$ et L_f^ω est limite faible de f_n dans $M(\omega)$.

Pour chaque n , $L_f^{\omega_n} - f \in \mathcal{N}(\omega_n)$: cette fonction est limite dans $N(\omega_n)$ d'une suite $\subset \mathcal{D}(\omega_n)$; son prolongement par 0 hors de ω_n est donc limite dans $M(\omega)$ de la suite précédente, prolongée par 0 hors de ω_n ; ce prolongement appartient donc à $\mathcal{M}(\omega)$ et $f_n \in M(\omega)$.

Les constantes α et β sont encore valables dans ω_n , d'où

$$\|f_n - f\|_{M(\omega)} = \|L_f^{\omega_n} - f\|_{M(\omega_n)} \leq \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{N(\omega_n)} \leq \frac{\alpha}{\beta} \|f\|_{N(\omega)}$$

et

$$\|f_n\|_{M(\omega)} \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_{N(\omega)}.$$

Une suite partielle convenable ayant été extraite, la suite f_n a une limite faible dans $M(\omega)$, soit g ; alors, dans chaque ω_p :

$$L f_n = 0 \quad \text{pour } n \geq p,$$

soit

$$\langle X_0 f_n, \varphi \rangle = \int_\omega \left[\sum_{k=1}^r X_k f_n (X_k \varphi + \varphi \operatorname{div} X_k) - a f_n \varphi \right] dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega_p).$$

A la limite on a

$$\langle X_0 g, \varphi \rangle = \int_\omega \left[\sum_{k=1}^r X_k g (X_k \varphi + \varphi \operatorname{div} X_k) - a g \varphi \right] dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega);$$

ainsi, $X_0 g \in \mathcal{M}'(\omega)$ et $Lg = 0$ dans ω .

⁽⁵⁾ On peut prendre par exemple des ouverts de frontière parallèle à celle de ω et voisine.

⁽⁶⁾ Qui a bien un sens, car $f|_{\omega_n} \in N(\omega_n)$.

Pour que $g = L_f^\omega$ il suffit alors de montrer que

$$g - f \in \mathcal{N}(\omega);$$

on a vu que $f_n - f \in \mathcal{M}(\omega)$, qui est faiblement fermé dans $\mathbf{M}(\omega)$, donc à la limite $g - f \in \mathcal{M}(\omega)$; comme

$$X_0(g - f) \in \mathcal{M}'(\omega), \quad g - f \in \mathcal{N}(\omega)$$

(n° 1, propriété 1).

THÉORÈME 4. — Si $f \in \mathbf{N}^+(\omega)$, L_f^ω est ≥ 0 dans ω . En particulier, si $f \in \mathbf{P}(\omega)$ et $f \geq 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$, L_f^ω est ≥ 0 dans ω .

Grâce à la proposition 6, on se borne à $f \in \mathbf{W}^{1,2}(\omega)$, et ≥ 0 p.p. hors d'un compact $\subset \omega$; alors (proposition 4) $f - f^+ \in \mathcal{N}(\omega)$, donc $L_f^\omega = L_{f^+}^\omega$, ce qui permet de supposer $f \in \mathbf{W}^{1,2}(\omega)$ et ≥ 0 p.p. dans ω ; enfin (proposition 7), il suffit de montrer $L_f^{\omega_0} \geq 0$ dans ω_0 , où ω_0 est un ouvert possédant les mêmes propriétés que ω et d'adhérence $\subset \omega$.

Par régularisation de f appartenant à $\mathbf{W}^{1,2}(\omega)$ et ≥ 0 p.p. sur ω , on obtient des fonctions $g_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega}_0)$, ≥ 0 , qui tendent vers f dans $\mathbf{W}^{1,2}(\omega_0)$ donc *a fortiori* dans $\mathbf{N}(\omega_0)$, et la proposition 6 montre encore qu'il suffit de prouver $L_{g_n}^{\omega_0} \geq 0$ dans ω_0 . Or $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega}_0)$ entraîne $Lg \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega}_0)$, donc (n° 1, rappel 2) $L_{g^0}^\omega - g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\omega}_0)$. Le théorème 3 s'applique à $u = -L_{g^0}^\omega$, qui est en particulier dans $\mathbf{P}(\omega_0)$, et à

$$v = g - L_{g^0}^\omega$$

et montre que si g est ≥ 0 dans ω_0 , $L_{g^0}^\omega$ est ≥ 0 dans ω_0 .

Soit maintenant $f \in \mathbf{P}(\omega)$ et $f \geq 0$ p.p. hors d'un compact $\subset \omega$. Pour montrer que $f \in \mathbf{N}^+(\omega)$, on écrit

$$f = f^+ + (f - f^+);$$

f est limite dans $\mathbf{P}(\omega)$ d'une suite $(u_n) \subset \mathbf{W}^{1,2}(\omega)$, d'où $f^+ = \lim u_n^+$ dans $\mathbf{P}(\omega)$; $f - f^+ \in \mathcal{P}(\omega)$ donc est limite, dans $\mathbf{P}(\omega)$, d'une suite $(v_n) \subset \mathbf{W}^{1,2}(\omega)$, chaque v_n étant nulle p.p. hors d'un compact de ω . Ainsi f est limite dans $\mathbf{P}(\omega)$, donc dans $\mathbf{N}(\omega)$, de la suite $(u_n^+ + v_n) \subset \mathbf{W}^{1,2}(\omega)$ et

$$u_n^+ + v_n \geq 0 \text{ p.p.}$$

hors d'un compact $\subset \omega$.

**4. Un principe du maximum pour les solutions.
 Comparaison des deux solutions
 du problème de Dirichlet.**

On commence par démontrer un principe du maximum pour les solutions de $Lu = 0$, c'est-à-dire pour les fonctions harmoniques (7).

THÉORÈME 5. — Soit u solution de $Lu = 0$ dans ω et $u \leq \nu$ p.p. hors d'un compact de ω , où $\nu \in \mathcal{N}(\omega)$ et

$$\nu|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$$

quel que soit $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \omega$ (8); alors u est ≤ 0 dans ω .

Soit K un compact $\subset \omega$ hors duquel $u \leq \nu$ p.p. Si $\omega_0 \supset K$, $(\nu - u)|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$ et est ≥ 0 p.p. sur $\omega_0 - K$ donc (théorème 4), $L_{\nu}^{\omega_0} \geq L_u^{\omega_0}$ dans ω_0 , soit $L_{\nu}^{\omega_0} \geq u$ dans ω_0 . En considérant une suite croissante d'ouverts ω_n possédant les propriétés énoncées dans la proposition 7, et en remarquant que la limite faible de $L_{\nu}^{\omega_n}$ est $L_{\nu}^{\omega} = 0$, on obtient $u \leq 0$ dans ω .

THÉORÈME 6. — Soit $f \in \mathcal{C}(\bar{\omega})$. Si $f \in N(\omega)$ et si

$$f|_{\omega_0} \in P(\omega_0)$$

quel que soit $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \omega$, en particulier si $f \in P(\omega)$, alors $H_f^{\omega} = L_f^{\omega}$ dans ω .

Il suffit de montrer $H_f^{\omega} \leq L_f^{\omega}$ dans ω .

Soit h une fonction harmonique de borne inférieure > 0 sur ω ; comme ω est régulier, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$H_f^{\omega} \leq f + \varepsilon h$$

hors d'un compact $K_{\varepsilon} \subset \omega$, soit $H_f^{\omega} - L_f^{\omega} - \varepsilon h \leq f - L_f^{\omega}$ hors de K_{ε} . $f - L_f^{\omega} \in \mathcal{N}(\omega)$ et sa restriction à chaque $\omega_0 \subset \bar{\omega}_0 \subset \omega$ est dans $P(\omega_0)$, par suite (théorème 5)

$$H_f^{\omega} - L_f^{\omega} - \varepsilon h \leq 0$$

dans ω , puis $H_f^{\omega} \leq L_f^{\omega}$ dans ω .

(7) Rappelons que les fonctions harmoniques sont de classe \mathcal{C}^{∞} , d'après le théorème d'hypoellipticité de Hörmander [5].

(8) En particulier si $\nu \in \mathcal{P}(\omega)$, elle satisfait à ces conditions.

**5. Un principe du maximum
pour les sous-solutions $\in \mathcal{N}(\omega)$.**

On peut enfin démontrer un principe du maximum pour les sous-solutions $\in \mathcal{N}(\omega)$, ce qui permet de caractériser les potentiels $\in \mathcal{N}(\omega)$.

LEMME 4. — Soit $u \in \mathcal{N}(\omega)$. Alors

$$- \langle Lu, u^+ \rangle \geq \beta \|u^+\|_{\mathbb{M}(\omega)}^2.$$

Pour $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$, $\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\omega) \subset \mathcal{N}(\omega)$, donc (n° 1, 3^e propriété)

$$- \langle L\varphi, \varphi^+ \rangle = - \langle L\varphi^+, \varphi^+ \rangle \geq \beta \|\varphi^+\|_{\mathbb{M}(\omega)}^2.$$

Si $u \in \mathcal{N}(\omega)$, il est limite dans $\mathcal{N}(\omega)$ d'une suite

$$(\varphi_n) \subset W_0^{1,2}(\omega);$$

$\varphi_n^+ \rightarrow u^+$ dans $\mathbb{M}(\omega)$ (proposition 5), et $L\varphi_n \rightarrow Lu$ dans $\mathcal{M}'(\omega)$ (n° 1, 2^e propriété), donc à la limite

$$- \langle Lu, u^+ \rangle \geq \beta \|u^+\|_{\mathbb{M}(\omega)}^2.$$

THÉORÈME 7. — Soit $u \in \mathcal{N}(\omega)$ et $Lu \geq 0$ dans ω . Alors $u \leq 0$ p.p. dans ω .

D'une part :

$$\langle Lu, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^+(\omega)$$

entraîne $\langle Lu, u^+ \rangle \geq 0$, car $Lu \in \mathcal{M}'(\omega)$ et u^+ est limite dans $\mathcal{M}(\omega)$ d'une suite $\subset \mathcal{D}^+(\omega)$ (corollaire 1 de la proposition 5).

D'autre part (lemme 4) :

$$\langle Lu, u^+ \rangle \leq 0.$$

Par suite $\langle Lu, u^+ \rangle = 0$, $\|u^+\|_{\mathbb{M}(\omega)} = 0$ et $u^+ = 0$ p.p. dans ω .

COROLLAIRE. — Soit $u \in \mathcal{N}(\omega)$ et $Lu \geq 0$ dans ω . Alors $u \leq L_u^\omega$ p.p. dans ω .

En effet $u - L_u^\omega$ est ≤ 0 p.p. dans ω .

Une classe de potentiels.

THÉORÈME 8. — *Pour toute fonction u , surharmonique sur ω , $u \in N(\omega)$ et telle que $u|_{\omega_0} \in P(\omega_0) \quad \forall \omega_0$ relativement compact dans ω , la p.g.m.h. de u dans ω existe et égale L_u^ω , donc : u est un potentiel dans ω équivaut à $u \in \mathcal{N}(\omega)$.*

u surharmonique sur ω entraîne $Lu \leq 0$ dans ω ([4], th. 5); comme $u \in N(\omega)$, on a (corollaire ci-dessus) $u \geq L_u^\omega$ p.p., donc partout ([4], proposition 1).

Si h est une minorante harmonique de u dans ω :

$$h - L_u^\omega \leq u - L_u^\omega \quad \text{sur } \omega,$$

donc (théorème 5)

$$h \leq L_u^\omega \quad \text{sur } \omega;$$

par suite L_u^ω est la p.g.m.h. de u dans ω .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. BONY, Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel, *Cours du C.I.M.E.*, Stresa, Juillet 1969.
- [2] M. DERRIDJ, Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du 2^e ordre hypoelliptiques, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 21, fasc. 4 (1971), 99-148, chapitre 3.
- [3] R.-M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 12 (1962), 445-571.
- [4] M. et R.-M. HERVÉ, Les fonctions surharmoniques dans l'axiomatique de M. Brelot associées à un opérateur elliptique dégénéré, *Ann. de l'Inst. Fourier*, 22, fasc. 2 (1972), 131-145.
- [5] L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, Uppsala, 119 (1967), 147-171.

Manuscrit reçu le 11 janvier 1975.

Rose-Marie HERVÉ,
 Université Pierre et Marie Curie
 4, place Jussieu
 75005 Paris.