ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LENGYEL

Racines de fonctions différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 171-183

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_171_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 171-183

RACINES DE FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Pierre LENGYEL

Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{C}$; supposons qu'en chaque point x de Ω, la série de Taylor de f est la puissance $q^{\text{ième}}$ d'une série formelle. Alors, avec ces seules hypothèses, f n'admet pas toujours (même localement) une racine $q^{\text{ième}}$ de classe C^∞. Par exemple, dans [1]. G. Glaeser donne un exemple d'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, strictement positive en dehors de l'origine et plate à l'origine, n'admettant pas de racine carrée de classe C^2 au voisinage de 0. Un autre exemple est fourni par la fonction de deux variables réelles : $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$. Visiblement, les conditions formelles sont satisfaites en tout point de $\mathbf{R}^2$ et pourtant $y^2 + e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est pas, au voisinage de l'origine, le carré d'une fonction de classe C^1 (d'après le théorème des fonctions implicites ordinaire). On a cependant le résultat suivant dû à G. Glaeser ([1] ou [2]) : si f est une application de classe C^2 de Ω dans $\mathbf{R}^+$, 2-plate sur l'ensemble de ses zéros, alors sa racine carrée est de classe C^1 sur Ω.

Dans le § 2, nous considérons des fonctions positives, de classe C^p dans l'ouvert Ω, p-plate sur l'ensemble de leurs zéros ; nous donnons des conditions suffisantes pour que f admette une racine avec une certaine classe de différentiabilité. Les conditions envisagées sont des conditions de régularité, liées à l'inégalité de Łojasiewicz (ceci est développé dans le § 1). Dans le § 3, nous considérons une application f de Ω dans $\mathbf{C}$, de classe C^∞ et plate en aucun point de Ω. Modulo certaines inégalités analogues à celles utilisées par Hörmander [3], et l'existence d'une racine $q^{\text{ième}}$ formelle en chaque point de Ω, f admet localement une racine $q^{\text{ième}}$ de classe C^∞.

1. Inégalités de Łojasiewicz.

Nous allons établir tout d'abord des résultats dont nous nous servirons par la suite. Le point générique x de $\mathbf{R}^n$ aura pour coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ relativement à une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$; $\mathrm{H}_{n,q}$ désignera l'espace des polynômes homogènes sur $\mathbf{R}^n$ de degré q à coefficients réels ; si A est une partie de $\mathbf{R}^n$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)| \quad \text{et} \quad \|P\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |P(x)|.$$

Enfin, si Δ est une demi-droite issue de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et si $0 < \theta \leqslant \frac{\Pi}{2}$, on notera $\mathcal{C}_{\Delta,\theta}$ le cône plein ensemble des x de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ tels que l'angle de Ox et Δ soit majoré par θ.

LEMME 1.1. – *Il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$, *telle que, pour tout polynôme* P *de* $\mathrm{H}_{n,q}$, *tout* Δ *et tout* θ,

$$\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta,\theta}} \geqslant C \,.\, \theta^q \,.\, \|P\|.$$

Preuve. – L'image de l'ensemble

$$\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n \; ; x_i \geqslant 0 \,,\, i = 1, \ldots, n \; ; x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\}$$

par l'application linéaire U_θ définie par :

$$\mathrm{U}_\theta(e_1) = e_1 \; ; \mathrm{U}_\theta(e_i) = \cos\theta \; e_1 + \sin\theta \; e_i$$

si $i \geqslant 2$ est contenue dans $\mathcal{C}_{\mathrm{O}x_1,\theta}$. Soit O_Δ une transformation linéaire orthogonale de $\mathbf{R}^n$ appliquant le demi-axe Ox_1 sur Δ ; O_Δ transforme $\mathcal{C}_{\mathrm{O}x_1,\theta}$ en $\mathcal{C}_{\Delta,\theta}$ et alors

$$\|P\|_{\mathcal{C}_{\Delta,\theta}} \geqslant \|P \circ \mathrm{O}_\Delta \circ \mathrm{U}_\theta\|_\Gamma \geqslant C \|P \circ \mathrm{O}_\Delta \circ \mathrm{U}_\theta\|$$

où C est une constante > 0. Comme pour tout P et tout Δ,

$$\|P \circ \mathrm{O}_\Delta\| = \|P\|,$$

il suffit donc d'établir le résultat suivant : (1) il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que pour tout P et tout θ.

$$\|P \circ \mathrm{U}_\theta\| \geqslant C \,.\, \theta^q \,.\, \|P\|.$$

Si $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, tout polynôme P s'écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{q} P_i(x')\, x_1^{q-i}$$

où $P_i(x')$ est un polynôme homogène de degré i en x'.

Si $Q(x) = P \circ U_\theta(x) = \sum_{i=0}^{q} Q_i(x')\, x_1^{q-i}$, $Q(x) =$

$$= \sum_{i=0}^{q} \sin^i \theta\, P_i(x')\, (x_1 + \cos\theta\, (x_2 + \cdots + x_n))^{q-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{q} \sin^i \theta\, P_i(x') \sum_{j=i}^{q} C_{q-i}^{q-j}\, x_1^{q-j}\, (\cos\theta\, (x_2 + \cdots + x_n))^{j-i}$$

et ainsi :

$$Q_j(x') = \sum_{i=0}^{j} C_{q-i}^{q-j} \sin^i \theta\, P_i(x')\, [\cos\theta\, (x_2 + \cdots + x_n)]^{j-i}.$$

On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que

$$\sin^j \theta\, \| P_j \| \leqslant \| Q_j \| + C' \sum_{i=0}^{j-1} \sin^i \theta\, \| P_i \|.$$

Puis, par récurrence sur j, l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que :

$$\sin^j \theta\, \| P_j \| \leqslant C'' \sum_{i=0}^{j} \| Q_i \|.$$

En particulier :

$$\sin^q \theta \sum_{j=0}^{q} \| P_j \| \leqslant (q+1)\, C'' \sum_{j=0}^{q} \| Q_j \|,$$

d'où le résultat.

LEMME 1.2. – *Soit φ une fonction numérique, définie et de classe C^p sur l'intervalle* $[0, 1]$. *Posons, pour tout* $q = 0, \ldots, p$,

$$M_q = \sup_{t \in [0,1]} |\varphi^{(q)}(t)|.$$

Alors :

$$M_q \leqslant 2 \left(e^2 \frac{p}{q}\right)^q M_0^{1 - \frac{q}{p}} [\sup (M_p , p\,!\, M_0)]^{\frac{q}{p}}.$$

Preuve. – Ce résultat est démontré dans [4].

Soit f une fonction numérique, définie et de classe C^p sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. La dérivée $q^{\text{ième}}$ de f en un point x de Ω s'identifie à un élément de $H_{n,q}$ et avec cette identification, A désignant une partie de $\mathbf{R}^n$,

$$\|f^{(q)}(x)\|_A = \sup_{h \in A} |f^q(x)(h^q)|, \ \|f^{(q)}(x)\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1} |f^{(q)}(x) . (h^q)|.$$

Si $\rho > 0$ et $x \in \Omega$; soit $\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}$ le cône de sommet x, translaté de l'homothétique $\rho . \mathcal{C}_{\Delta,\theta}$ du cône $\mathcal{C}_{\Delta,\theta}$. Enfin, pour toute partie B de Ω, soit $\|f^{(q)}\|_B = \sup_{x \in B} \|f^{(q)}(x)\|$.

LEMME 1.3. – *Avec les notations précédentes, il existe une constante* $C > 0$, *ne dépendant que de n et p telle que pour tout entier q,* $0 \leqslant q \leqslant p$, *tout* $x \in \Omega$ *et tout f de classe C^p dans* Ω :

$$\|f^{(q)}(x)\| \leqslant \frac{C}{\theta^q} \|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}}^{1 - \frac{q}{p}} . \left[\sup\left(\frac{p\,!}{\rho^p} \|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}} , \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}}\right)\right]^{\frac{q}{p}}.$$

Si $y \in \mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}$, posons pour $t \in [0, 1]$, $\varphi_y(t) = f((1 - t)x + ty)$.

$$\varphi_y^{(q)}(t) = f^{(q)}((1 - t)x + ty) . (y - x)^q ;$$

d'où
$$\varphi_y^{(q)}(0) = f^{(q)}(x)(y - x)^q$$

et ainsi :

$$\sup_y |\varphi_y^{(q)}(0)| = \|f^{(q)}(x)\|_{\mathcal{C}_{\Delta,\theta}} . \rho^q ; \ \sup_{t,y} |\varphi_y(t)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}} ;$$

$$\sup_{t,y} |\varphi^{(p)}(t)\| \leqslant \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}} . \rho^p ;$$

d'après les inégalités précédentes et (1.2) appliqué à φ_y on a :

$$\|f^{(q)}(x)\|_{\mathcal{C}_{\Delta,\theta}} \cdot \rho^q \leqslant 2\left(e^2 \cdot \frac{p}{q}\right)^q \|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}}^{1-\frac{q}{p}} \left[\sup\left(p\,!\,\|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}}, \|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta,\theta,\rho}}\right)\right]^{\frac{q}{p}}$$

et l'on conclut en appliquant (1.1).

Soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'anneau des fonctions numériques f, définies et de classe C^∞ dans Ω, $V_k(f)$ l'ensemble des points de k-platitude de f, c'est-à-dire l'ensemble des points où f et ses k premières dérivées s'annulent, $V_\infty(f)$ l'ensemble des points de platitude de f, c'est-à-dire l'ensemble des points où f et toutes ses dérivées s'annulent.

PROPOSITION 1.4. – *Si f est dans $\mathcal{E}(\Omega)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Toute fonction $g \in \mathcal{E}(\Omega)$, plate sur $V_0(f)$ est divisible par f dans $\mathcal{E}(\Omega)$.*

2) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C > 0$, $\alpha > 0$ telles que pour tout $x \in K$, $|f(x)| \geqslant Cd(x, V_0(f))^\alpha$ (i.e. f vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros).*

3) $V_\infty(f) = \phi$; *en outre, la condition suivante est satisfaite : (3') Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes $C > 0$, $\alpha \geqslant 1$ et pour tout $x \in K - V_0(f)$ une boule $B(x, \rho_x)$ avec*

$$\rho_x \geqslant Cd(x, V_0(f))^\alpha$$

tels que pour tout $x' \in B(x, \rho_x)$; $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|f(x')|$.

4) $V_\infty(f) = \phi$; *en outre, la condition suivante est satisfaite : (4') Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe des constantes*

$$C_1, C_2, C_3 > 0 \quad et \quad \alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 1, \alpha_3 \geqslant 0$$

et pour tout $x \in K - V_0(f)$ un cône $\mathcal{C}^x_{\Delta_x, \theta_x, \rho_x}$ avec

$$\theta_x \geqslant C_1\, d(x, V_0(f))^{\alpha_1}, \ \rho_x \geqslant C_2\, d(x, V_0(f))^{\alpha_2}$$

tels que :

pour tout $x' \in \mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}$, $|f(x)| \geqslant C_3\, |f(x')|\, d(x, V_0(f))^{\alpha_3}$.

1 $\Leftrightarrow$ 2. cf. [5], chap. V, proposition 4.3.

2 $\Rightarrow$ 3. Des inégalités

$$|f(x')| \leqslant |f(x)| + |f(x) - f(x')| \leqslant |f(x)| + \mathrm{A}d(x\,,x')$$

où A est une constante > 0 dépendant de K, il vient si

$$\rho_x = \frac{c}{\mathrm{A}}\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^\alpha \;:\; |f(x')| \leqslant 2\,|f(x)|.$$

En outre, la condition 2 implique que $\mathrm{V}_\infty(f) = \phi$, ce qui n'est pas trivial, malgré les apparences ; cf. [5], appendice.

3 $\Rightarrow$ 4. évident.

4 $\Rightarrow$ 2. La condition (2) étant de nature locale, il suffit de démontrer l'inégalité (2) au voisinage d'un point x_0 de Ω. Comme $\mathrm{V}_\infty(f) = \phi$, il existe un voisinage compact K de x_0 dans Ω, un réel $\beta_1 > 0$ et un entier q tels que pour tout $x \in \mathrm{K}$, $\|f^{(q)}(x)\| \geqslant \beta_1$. Si l'on pose $p = q + 1$, il existe une constante $\beta_2 > 0$ telle que pour tout $x \in \mathrm{K}$, $\|f^{(p)}\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}} \leqslant \beta_2$, les $\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}$ étant les cônes associés par l'hypothèse (4′) au compact K.

On a, d'après l'hypothèse (4′) :

$$\mathrm{C}_3\,\|f\|_{\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}}\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^{\alpha_3} \leqslant |f(x)|\,,\ \theta_x \geqslant \mathrm{C}_1\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^{\alpha_1}\,,$$
$$\rho_x \geqslant \mathrm{C}_2\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^{\alpha_2}.$$

La condition (2) résulte alors de (1.3) appliqué au cône $\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}$ et des cinq inégalités précédentes.

Nous utiliserons au paragraphe suivant des inégalités analogues à celles de (4′). On dira qu'une fonction numérique f de classe C^p dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ vérifie une "*condition de Łojasiewicz faible*" s'il existe trois constantes $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 1$, $\alpha_3 \geqslant 0$ pour lesquelles elle vérifie la condition : $Ł(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3)$: *Il existe trois constantes* $\mathrm{C}_1 > 0$, $\mathrm{C}_2 > 0$, $\mathrm{C}_3 > 0$ *telles que pour tout* $x \in \Omega \setminus \mathrm{V}_0(f)$ *il existe un cône* $\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}$ *avec*

$$\theta_x \geqslant \mathrm{C}_1\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^{\alpha_1}\,,\ \rho_x \geqslant \mathrm{C}_2\, d(x\,,\mathrm{V}_0(f))^{\alpha_2}$$

tels que pour tout x' *de* $\mathcal{C}^x_{\Delta_x,\theta_x,\rho_x}$,

$$|f(x)| \geqslant C_3 \; |f(x')| \; d(x \, , V_0(f))^{\alpha_3} .$$

D'après la proposition précédente, la fonction f vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble de ses zéros, si et seulement si $V_\infty(f) = \phi$ et f vérifie une "condition de Łojasiewicz faible".

2. Racines d'une fonction de classe C^p, p-plate sur l'ensemble de ses zéros.

THEOREME 2.1. – *Soit f une fonction positive de classe C^p dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, p-plate sur l'ensemble non vide $V_0(f)$ de ses zéros ; on suppose qu'il existe trois constantes $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 1$, $\alpha_3 \geqslant 0$ pour lesquelles f vérifie la condition Ł $(\alpha_1 \, , \alpha_2 \, , \alpha_3)$.*

Alors, pour tout $\alpha \in \,]0 \, , 1[$, f^α est de classe C^k et k-plate sur $V_0(f)$, où $k = \left[\left[\dfrac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \right] \alpha \right]$. ($[x]$ désigne la partie entière de x).

Nous utiliserons les deux lemmes suivants :

LEMME 2.2. – *Si E , F , G sont trois espaces de Banach, f une application de classe C^p au voisinage d'un point $x \in$ E dans F, g une application de classe C^p au voisinage de $f(x)$ dans G, alors $g \circ f$ est une application de classe C^p au voisinage de x dans G et l'on a pour $0 \leqslant q \leqslant p$:*

$$\| (g \circ f)^{(q)}(x) \| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \| g^{(k)}(f(x)) \|$$

$$\sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_q = k \\ m_1 + 2m_2 + \ldots + q m_q = q}} \frac{q!}{m_1! m_2! \ldots m_q!} \left(\frac{\| f'(x) \|}{1!} \right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\| f^{(q)}(x) \|}{q!} \right)^{m_q}$$

Preuve. – Des développements limités à l'ordre p et f et g respectivement en x et $f(x)$, on en déduit pour $0 \leqslant q \leqslant p$:

$$\frac{1}{q!}(g\circ f)^{(q)}(x)\,[h,\ldots,h]=$$

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=q\\ 1\leqslant i_j\leqslant q}} g^{(k)}(f(x))\left(\frac{1}{i_1!}f^{(i_1)}(x)(h^{i_1}),\ldots,\frac{1}{i_k!}f^{(i_k)}(x)(h^{i_k})\right)$$

d'où $(g\circ f)^{(q)}(x)\,[h_1,\ldots,h_q]=$

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=q\\ 1\leqslant i_j\leqslant q}}\ \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant k\\ 1\leqslant\alpha_1^j<\ldots<\alpha_{i_j}^j\leqslant q\\ \alpha_i^u\neq\alpha_j^v \text{ pour } (u,i)\neq(v,j)}} g^{(k)}f(x))\,[f^{(i_1)}(x)(h_{\alpha_1^1},\ldots,h_{\alpha_{i_1}^1}),\ldots]$$

et aussi :

$$\|(g\circ f)^{(q)}(x)(h_1,\ldots,h_q)\|\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=q\\ 1\leqslant i_j\leqslant q}}\frac{q!}{i_1!\ldots i_k!}\|g^{(k)}f(x)\|\,\|f^{(i_1)}(x)\|\ldots\|f^{(i_k)}(x)\|\,\|h_1\|\ldots\|h_q\|$$

Mais de l'égalité $\displaystyle\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=q\\ 1\leqslant i_j\leqslant q}}\frac{q!}{i_1!\ldots i_k!}\|f^{(i_1)}(x)\|\ldots\|f^{(i_k)}(x)\|=$

$$\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_q=k\\ m_1+2m_2+\ldots+qm_q=q}}\frac{k!\,q!}{(1!)^{m_1}\ldots(q!)^{m_q}\,m_1!\ldots m_q!}\|f'(x)\|^{m_1}\ldots\|f^{(q)}(x)\|^{m_q}$$

on déduit le résultat.

LEMME 2.3. – *Si f est une application de classe C^p au voisinage d'un point x d'un espace de Banach dans $\mathbf{R}_*^+$, alors pour tout $\alpha\in\,]0\,,1[$, f^α est de classe C^p au voisinage de x et l'on a pour $0\leqslant q\leqslant p$:*

$$\|\varphi^{(q)}(x)\|\leqslant\frac{q!}{f(x)^{q-\alpha}}\sum_{\substack{m_0+\ldots+m_q=q\\ m_1+2m_2+\ldots+qm_q=q}}$$

$$\frac{|\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-q+m_0+1)|}{m_1!\ldots m_q!\,(1!)^{m_1}\ldots(q!)^{m_q}}(f(x))^{m_0}\|f'(x)\|^{m_1}\ldots\|f^{(q)}(x)\|^{m_q}$$

Preuve. – Il suffit d'appliquer 2.2 à $g : x \to x^\alpha$.

Preuve de 2.1. – Soit $x_0 \in V_0(f)$, U un voisinage de x_0 dans Ω, $M_p = \sup_{y \in U} \|f^p(y)\|$ et des entiers $0 \leqslant q \leqslant k \leqslant p$. Il existe une constante $C_1 > 0$ ne dépendant que de n et p (1.3 et les hypothèses de 2.1) telle que pour tout $x \in U \setminus V_0(f)$

$$\|f^q(x)\| \leqslant \frac{C_1(f(x))^{1-\frac{q}{k}}}{d(x\,,V_0(f))^{\alpha_1 q+\alpha_3(1-\frac{q}{k})}}$$

$$\left(\sup\left(\frac{k!\,f(x)}{C_2^k C_3\, d(x\,,V_0(f))^{\alpha_2 k+\alpha_3}}\,,\ \|f^{(k)}\|_{e_{x}\Delta_x,\theta_x,\rho_x}\right)\right)^{\frac{q}{k}}$$

Il existe donc une constante $C_2 > 0$ ne dépendant que de n et p telle que :

$$\|f^q(x)\| \leqslant C_2\,(f(x))^{1-\frac{q}{k}}\,.\,M_p^{\frac{q}{k}}\,d(x\,,V_0(f))^r$$

où $r = (\inf\,(p-k,\,p-\alpha_2\,k-\alpha_3))\,\dfrac{q}{k} - \left(\alpha_1\,q + \alpha_3\left(1-\dfrac{q}{k}\right)\right)$.

En appliquant (2.3) à $\varphi = f^\alpha$, il existe une constante $C_3 > 0$ telle que :

$$\|\varphi^{(q)}(x)\| \leqslant C_3\,(f(x))^{\alpha-\frac{q}{k}}\,.\,M_p^{\frac{q}{k}}\,d(x\,,V_0(f))^s\ ;$$

où $\quad s = (\inf\,(p-k,\,p-\alpha_2 k-\alpha_3) - (\alpha_1 k + \alpha_3(k-1)))\,\dfrac{q}{k}$

Si l'on prend $\qquad s \geqslant 0 \quad$ et $\quad \alpha - \dfrac{q}{k} \geqslant 0,$

$\alpha \geqslant \dfrac{q}{k}$, $p - k \geqslant \alpha_1\,k + \alpha_3\,(k-1)$ et

$$p - \alpha_2\,k - \alpha_3 \geqslant \alpha_1\,k + \alpha_3\,(k-1),$$

ou encore

$$q \leqslant [k\alpha] \quad \text{et} \quad k \leqslant \left[\inf\left(\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \frac{p + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3 + 1}\right)\right] =$$

$$= \left[\frac{p}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}\right],$$

($[x]$ désigne la partie entière de x),

$\varphi^q(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

Il suffit alors d'appliquer le lemme d'Hestenes (cf. [5], p. 80), pour déduire le résultat.

COROLLAIRE 2.4. – *Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^+$, plate sur l'ensemble non vide de ses zéros $V_0(f)$, vérifiant une condition de Łojasiewicz faible $Ł(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe C^∞ sur Ω.*

COROLLAIRE 2.5. – *Soit f une application de classe C^p (resp. C^∞) d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$, p-plate (resp. plate) sur l'ensemble non vide de ses zéros, au voisinage desquels elle est monotone ; alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe $C^{[p\alpha]}$ (resp. C^∞).*

Preuve. – Il suffit de prendre $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ $\alpha_2 = 1$.

COROLLAIRE 2.6. – *Soit f une application de classe C^p d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^+$ p-plate sur l'ensemble non vide de ses zéros $V_0(f)$. On suppose qu'il existe deux constantes $A > 0$, $B > 0$ telles que pour tout $x \in \Omega \setminus V_0(f)$ et tout $x' \in B(x, \rho_x)$, où*

$$\rho_x \geqslant A\, d(x, V_0(f)),\ f(x) \geqslant B\, f(x').$$

Alors, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, f^α est de classe $C^{[p\alpha]}$.

PROPOSITION 2.7. – *Pour tout entier p, tout fermé X de $\mathbf{R}^n$ et tout ouvert Ω le contenant, il existe une application positive f de classe C^p sur Ω, vérifiant une condition de Łojasiewicz faible $Ł(0, 1, 0)$ et telle que $V_0(f) = V_p(f) = X$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 2.8. – *Pour tout compact X de $\mathbf{R}^n$, tout ouvert Ω contenant X et tout voisinage V de X inclu dans Ω, il existe une application* *de classe* C^p *f, strictement positive sur* $V - X$, *égale à 1 sur* $\Omega - V$ *telle que* :

$$0 \leqslant f \leqslant 1 \ , \ V_0(f) = V_p(f) = X,$$

f vérifie une condition $Ł(0, 1, 0)$.

Preuve. – Soit $U_q = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \ ; d(x, X) < \frac{1}{2^q} \right\}$. On peut se ramener au cas où $\Omega = \mathbf{R}^n$, $V \supset U_0$. Soit f_q une application de classe C^∞ égale à 1 sur $\mathbf{R}^n - U_q$, nulle sur $\overline{U}_{q+2}$, telle que

$$0 \leqslant f_q \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 0 \ , \ \|f_q^{(k)}\| \leqslant C_k \, 2^{qk}$$

où C_k est une constante indépendante de q. Il suffit de prendre :

$$f = \frac{1}{a} \sum_{q \geqslant 0} \frac{f_q}{2^{q(p+1)}} \quad \text{où} \quad a = \sum_{q \leqslant 0} \frac{1}{2^{q(p+1)}}.$$

On remarque de plus qu'il existe deux constantes $A > 0$, $B > 0$, indépendantes de X, telles que $f(x) \geqslant A \sup f(x')$ où

$$d(x', x) \leqslant B \, d(x, X).$$

Preuve de 2.7. – Soit φ_j une partition de l'unité C^∞ de Ω subordonnée à un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts relativement compacts V_j tel que tout x possède un voisinage rencontrant au plus $n + 1$ V_j. Soit $X_j = X \cap \operatorname{supp} \varphi_j$. D'après 2.8, il existe f_j de classe C^p, strictement positive sur $V_j - X_j$ égale à 1 sur $\Omega \setminus V_j$, telle que $0 \leqslant f_j \leqslant 1$, $V_0(f_j) = V_p(f_j) = X_j$ et f_j vérifie une condition $Ł(0, 1, 0)$: $f_j(x) \geqslant A \sup f_j(y)$ où $d(x, y) \leqslant B \, d(x, X_j)$ A et B étant deux constantes > 0, indépendantes de j.

Il suffit alors de prendre $f = \prod_{j \geqslant 0} f_j$.

Exemple 2.9. – Soit φ l'application de classe C^∞ dans $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ définie par : $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et 0 pour $|x| \geqslant 1$. Posons $\varphi_n(x) = \frac{1}{2^n} \varphi(2n(n+1)x - (2n+1))$ nulle en dehors de $I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n \geqslant 1)$ et de classe C^∞ dans **R**. Posons $\psi(x) = \sum_{n \geqslant 1} \varphi_n(x)$, définie, positive sur **R**, plate en les points $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Sur I_n, $\psi^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n}(2n(n+1))^k \varphi^{(k)}(2n(n+1)x - (2n+1))$ et donc $\psi^{(k)}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Ainsi, ψ est de classe C^∞, plate en ses zéros et vérifie une condition de Łojasiewicz faible Ł$(0, 1, 0)$ tout en n'étant pas monotone à l'origine.

3. Racines d'une fonction C^∞ plate en aucun point.

Soit f une application de classe C^∞ d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans C, *plate en aucun point et vérifiant une inégalité de Łojasiewicz par rapport à l'ensemble non vide* V_0 *de ses zéros* : Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$\forall x \in K : |f(x)| \geqslant C\, d(x, V_0)^\alpha .$$

On suppose *que f possède en tout point $x \in V_0$ une racine $p^{\text{ième}}$ formelle* c'est-à-dire un jet $\varphi(x) = (\varphi_k(x))_{|k| \geqslant 0}$ tel que :

$$\left[\sum_{|k| \geqslant 0} \varphi_k(x) \frac{X^k}{k!}\right]^p = \sum_{|k| \geqslant 0} D^k f(x) \frac{X^k}{k!}.$$

Les fermés emboîtés $V_k = \{x \in \Omega \mid f$ et ses k premières dérivées s'annulent en $x\}$, vérifient alors : $\forall x \geqslant 1$, $V_{(r-1)p} = V_{rp-1}$ et $V_\infty = \phi$. Soit $W_r = V_{(r-1)p} - V_{rp}$.

On suppose en outre *que pour tout entier $r \geqslant 1$, il existe des constantes $\alpha_r > 0$, $C_r > 0$, telles que*

$$\forall x \in W_r \; \| f^{(rp)}(x) \| \geqslant C_r\, d(x, V_{rp})^{\alpha_r} .$$

(On convient que $d(x, \phi) = 0$).

THEOREME. — *Avec les hypothèses précédentes, f possède au voisinage de tout point de Ω une racine $p^{\text{ième}}$ de classe C^∞.*

Preuve. — Nous renvoyons le lecteur à [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. GLAESER, Racine carrée d'une fonction différentiable, *Ann. Inst. Fourier,* XIII, 2 (1963).

[2] J. DIEUDONNE, Sur un théorème de Glaeser, *Journal d'analyse Mathématique,* XXIII, (1970).

[3] L. HORMANDER, On the division of distributions by polynomials, *Ark. Mat. Stockholm,* (1958).

[4] H. CARTAN, Sur les classes de fonctions définies par des inégalités portant sur leurs dérivées successives, *Act. Sci. et ind.,* n° 867, (1940).

[5] J. Cl. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, *Erg der Math.,* band 71 – Springer Verlag (1972).

[6] P. LENGYEL, Racines de fonctions différentiables, *Publications des Séminaires de Mathématiques de l'Université de Rennes,* fascicule 1 : Séminaires d'Analyse (Année 1973).

Manuscrit reçu le 19 août 1974
accepté par B. Malgrange.

Pierre LENGYEL,
Université de Rennes
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue du Général Leclerc
B.P. 25 A
35031 - Rennes Cedex.