ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES PEYRIÈRE

Étude de quelques propriétés des produits de Riesz

Annales de l'institut Fourier, tome 25, nº 2 (1975), p. 127-169

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1975__25_2_127_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
25, 2 (1975), 127-169

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES PRODUITS DE RIESZ

par Jacques PEYRIERE

La première partie de ce travail est la rédaction détaillée d'une note [9] avec quelques additions et simplifications. On y donne des conditions assurant que deux produits de Riesz sont mutuellement singuliers ou que l'un est absolument continu par rapport à l'autre.

Dans la seconde partie on étudie le problème suivant : étant donné un produit de Riesz définissant une mesure μ_a peut-on minorer la dimension de Hausdorff d'un borélien, E, tel que $\mu_a(\mathrm{E})$ soit non nul ?

Dans la troisième partie on s'occupe de la convergence de certaines séries presque partout par rapport à un produit de Riesz. On obtient, par exemple, le résultat suivant : étant donnés un nombre α dans $]\frac{1}{2}, 1[$, un nombre complexe non nul z, et une suite d'entiers strictement positifs, $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 0}$, telle que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3 l'ensemble, $\left\{ x \in [0\,,2\pi]\ ;\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum\limits_{j=1}^{n} e^{i\lambda_n x} = z \right\}$ a 1 pour dimension de Hausdorff.

Enfin dans la quatrième partie on a regroupé divers résultats. En premier lieu, la plupart des résultats précédents restent vrais pour les produits $\prod\limits_{j\geqslant 0} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i2^j x}))$. Ensuite on étend les résultats relatifs à la dimension de Hausdorff au cas de plusieurs variables puis au cas de R. Enfin on montre que la convergence en loi vers la loi de Gauss de certaines sommes normalisées de séries de Fourier lacunaires établie par R. Salem et A. Zygmund [10] subsiste dans le cadre des produits de Riesz.

1.

1.1. On considère une suite d'entiers strictement positifs, $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$, telle que, pour tout n, λ_{n+1}/λ_n soit supérieur à 3. On sait que dans ces conditions tout entier rationnel s'écrit d'une façon au plus sous la forme $\sum_{j\geqslant 0} \epsilon_j \lambda_j$ où les nombres ϵ_j valent -1, 0, ou 1, un nombre fini seulement d'entre eux étant non nuls.

Si $a = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 on pose

$$\mathrm{P}_{a,n}(e^{ix}) = \prod_{0\leqslant j\leqslant n} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})) .$$

Ces polynômes trigonométriques sont positifs, la moyenne de chacun d'eux est 1. Les mesures $\mathrm{P}_{a,n}(x)\dfrac{dx}{2\pi}$ convergent vaguement vers une mesure, μ_a, positive de masse 1. On a

$$\hat{\mu}_a\Big(\sum_{j\geqslant 0} \epsilon_j \lambda_j\Big) = \prod_{j\geqslant 0} a'_j(\epsilon)$$

où $a'_j(\epsilon)$ vaut $\dfrac{1}{2}\, a_j$, 1, $\dfrac{1}{2}\, \overline{a_j}$ selon que ϵ_j vaut 1, 0, -1.

1.2. Theoreme. – *Soient a et b deux suites de $\mathbf{C}$ telles que*

$$\|a\|_\infty \leqslant 1 \quad , \quad \|b\|_\infty \leqslant 1 \quad , \quad \sum_{j\geqslant 0} |b_j - a_j|^2 = \infty .$$

Alors les deux mesures μ_a et μ_b sont étrangères.

Démonstration. – Il résulte du calcul des coefficients de Fourier de μ_a que les fonctions $\left\{ e^{i\lambda_n x} - \dfrac{1}{2}\, \overline{a}_n \right\}_{n\geqslant 0}$ forment un système orthogonal dans $\mathrm{L}^2(\mu_a)$. Remarquons aussi que l'on a :

$$\int |e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\, \overline{a}_n|^2 \, d\mu_a(x) = 1 - \frac{1}{4}\, |a_n|^2 \leqslant 1 .$$

Puisque $\sum_{n\geqslant 0} |b_n - a_n|^2$ est infini il existe une suite de nombres complexes, $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$, de carré sommable et telle que :

i) pour tout $n \geqslant 0$, $\alpha_n(\overline{b}_n - \overline{a}_n)$ est positif,

ii) $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (\bar{b}_n - \bar{a}_n) = +\infty$,

(c'est une conséquence facile du théorème de Banach-Steinhaus).

Les séries $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \left(e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\bar{a}_n\right)$ et $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \left(e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\bar{b}_n\right)$ convergent l'une dans $L^2(\mu_a)$, l'autre dans $L^2(\mu_b)$. En extrayant des sous-suites presque partout convergentes on montre l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers positifs, $\{N_n\}_{n \geqslant 0}$, telle que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{0 \leqslant j \leqslant N_n} \alpha_j \left(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{a}_j\right)$ converge μ_a-presque partout et $\sum_{0 \leqslant j \leqslant N_n} \alpha_j \left(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{b}_j\right)$ converge μ_b-presque partout. Si les mesures μ_a et μ_b n'étaient pas étrangères il existerait un x tel que les deux suites précédentes convergent ce qui montrerait que la série $\sum_{j \geqslant 0} \alpha_j (\bar{b}_j - \bar{a}_j)$ converge contrairement aux hypothèses.

1.3. THEOREME. — *Soient a et b deux suites de nombres complexes telles que* $\|a\|_\infty$ *et* $\|b\|_\infty$ *soient inférieurs à* 1. *On suppose que :*
$\sup_{j \geqslant 0} \dfrac{|b_j - a_j|}{1 - |a_j|} < +\infty$.

1) *Soit p un nombre réel strictement supérieur à* 1. *On suppose que :*

i) *pour tout j,* $|pb_j + (1-p)a_j| < 1$,

ii) $\sum_{j \geqslant 0} |b_j - a_j|^2/[(1 - |a_j|)(1 - |pb_j + (1-p)a_j|)] < \infty$.

Alors μ_b *est absolument continue par rapport à* μ_a *et sa densité est dans* $L^p(\mu_a)$ *(dorénavant nous dirons simplement que* μ_b *appartient à* $L^p(\mu_a)$*).*

2) *Si l'on suppose que, pour tout* $j \geqslant 0$, λ_j *n'appartient pas au groupe engendré par* $\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots$, *si en outre*

$$\sum_{j \geqslant 0} |b_j - a_j|^2/(1 - |a_j|)$$

est fini alors μ_b *appartient à* $L^p(\mu_a)$ *pour tout p fini.*

Dans le cas où $1 < p \leqslant 2$ on n'a pas besoin de l'hypothèse :

$$\sup_{j \geqslant 0} \frac{|b_j - a_j|}{1 - |a_j|} < +\infty .$$

Démonstration. – Posons $f_n(e^{ix}) = \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} \dfrac{1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})}{1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})}$. Soit p un nombre strictement supérieur à 1. Nous montrerons que la suite $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ est bornée dans $\mathrm{L}^p(\mu_a)$. Supposant ceci établi considérons une valeur d'adhérence faible dans $\mathrm{L}^p(\mu_a)$, f, de cette suite ; un calcul de coefficients de Fourier montre que μ_b égale $f\mu_a$.

Soit $\mathrm{M} = \sup_{j \geqslant 0} \dfrac{|b_j - a_j|}{1 - |a_j|}$; il existe un nombre A tel que pour tout nombre t appartenant à $[-1, \mathrm{M}]$ on ait :

$$(1 + t)^p \leqslant 1 + pt + \mathrm{A}t^2 .$$

Alors

$$[1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p \leqslant [1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^p \left[1 + \frac{p\,\mathrm{Re}((b_j - a_j)\, e^{i\lambda_j x})}{1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} + \mathrm{A} \frac{|b_j - a_j|^2}{(1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))^2} \right]$$

d'où

1.4. $$\frac{[1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \leqslant 1 + \mathrm{Re}\,[(pb_j + (1-p)\,a_j)\, e^{i\lambda_j x}] + + \frac{\mathrm{A}\,|b_j - a_j|^2}{1 - |a_j|} .$$

Démontrons la première assertion. De l'inégalité précédente on tire :

$$\frac{(1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x}))^p}{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \leqslant \{1 + \mathrm{Re}\,[(pb_j + (1-p)\,a_j)\, e^{i\lambda_j x}]\}\,(1 + u_j)$$

où l'on a posé $u_j = \mathrm{A}\,|b_j - a_j|^2/[(1 - |a_j|)\,(1 - |pb_j + (1-p)\,a_j|)]$. On a donc, quels que soient les entiers m et n tels que $m \leqslant n$:

$$\int |f_m(e^{ix})|^p \, \mathrm{P}_{a,n}(e^{ix}) \frac{dx}{2\pi} \leqslant \prod_{j \geqslant 0} (1 + u_j) < +\infty$$

d'où
$$\sup_{n \geqslant 0} \| f_n \|_{\mathrm{L}^p(\mu_a)} < +\infty .$$

Démontrons la seconde assertion. On remarque que :

$$\int \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \frac{[1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \prod_{m < j \leqslant n} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})) \frac{dx}{2\pi}$$

$$\leqslant \int \left(1 + \mathrm{Re}[(pb_0 + (1-p)\, a_0)\, e^{i\lambda_0 x}] + \frac{\mathrm{A}\,|b_0 - a_0|^2}{1 - |a_0|}\right)$$

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{[1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \prod_{m < j \leqslant n} [1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})] \frac{dx}{2\pi}$$

$$= \left(1 + \mathrm{A} \frac{|b_0 - a_0|^2}{1 - |a_0|}\right) \int \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} \frac{[1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}}$$

$$\prod_{m < j \leqslant n} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})) \frac{dx}{2\pi} .$$

Itérant le procédé nous obtenons, lorsque $m \leqslant n$:

$$\int |f_m(e^{ix})|^p \, \mathrm{P}_{a,n}(e^{ix}) \frac{dx}{2\pi} \leqslant \prod_{j \geqslant 0} \left(1 + \frac{\mathrm{A}\,|b_j - a_j|^2}{1 - |a_j|}\right)$$

et l'on conclut comme précédemment.

Le théorème 1.2 et une version plus faible du théorème 1.3 se trouvent dans [9]. G. Brown et W. Moran [2] ont donné une autre démonstration du théorème 1.2 et des conditions assurant que μ_b appartient à $\mathrm{L}^1(\mu_a)$.

Le théorème 1.2 permet de retrouver le résultat suivant de O. Padé [8] : si, pour tout p de $]1, +\infty[$, a n'appartient pas à l^p les mesures $\{\mu_a^n\}_{n \geqslant 1}$ sont mutuellement singulières et même, toute translatée de l'une est étrangère aux autres. Cette propriété s'étend au semi-groupe continu à un paramètre engendré par la mesure μ_a.

1.4. THEOREME. – *Soit* $a = \{a_j\}_{j \geqslant 0}$ *une suite de nombres complexes telle que* $\sup_{j \geqslant 0} |a_j| \leqslant 1$ *et* $\sum_{j \geqslant 0} |a_j|^2 = \infty$. *Alors*

1) *presque toute (au sens de n'importe quelle mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers* 0 *à l'infini) translatée de* μ_a *est étrangère à* μ_a ,

2) *presque toute (par rapport à n'importe quel produit de Riesz* μ_b*) translatée de* μ_a *est étrangère à* μ_a .

En effet, la translatée de μ_a par $e^{i\varphi}$, $\tau_\varphi(\mu_a)$, est le produit de Riesz $\prod_{j \geqslant 0} [1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j \varphi} e^{i\lambda_j x})]$. Les mesures μ_a et $\tau_\varphi \mu_a$ seront donc étrangères si l'on a

$$\sum_{j \geqslant 0} |a_j|^2 \, |1 - e^{i\lambda_j \varphi}|^2 = +\infty \qquad \text{(théorème 1.2)}$$

c'est-à-dire

$$1.5. \qquad \sum_{j \geqslant 0} |a_j|^2 (1 - \cos \lambda_j \varphi) = +\infty \, .$$

L'ensemble des $e^{i\varphi}$ tels que 1.5 n'ait pas lieu est un ensemble d'unicité (cf. Kahane et Salem [5]), il est donc de mesure nulle par rapport à toute mesure pseudo-fonction.

Pour démontrer la seconde assertion, considérons un produit de Riesz μ_b . Montrons que 1.5 a lieu pour μ_b-presque tout φ. Voici le principe de la démonstration : on construit une suite, $\{\alpha_j\}_{j \geqslant 0}$, de nombres compris entre 0 et 1, tels que $\sum_{j \geqslant 0} \alpha_j |a_j|^2 = +\infty$ et tels que pour un ordre de sommation convenable la série

$$\sum_{j \geqslant 0} \alpha_j |a_j|^2 \left(\cos \lambda_j \varphi - \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, b_j\right)$$

converge pour μ_b-presque tout φ.

Observons d'abord que la suite $\left\{\cos \lambda_j \varphi - \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, b_j\right\}_{j \geqslant 0}$ est une suite orthogonale dans $L^2(\mu_b)$, elle est aussi bornée dans $L^2(\mu_b)$; on appliquera le théorème de convergence presque partout de Menchoff [11].

Le cas où la suite $\{a_j\}_{j \geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 est immédiat : on extrait une sous-suite $\{|a_{n_j}|\}_{j \geqslant 0}$ ayant une limite non nulle. La série

$\sum_{j\geq 0} \frac{1}{j+1} |a_{n_j}|^2$ est manifestement divergente alors que la série $\sum_{j\geq 0} \frac{|a_{n_j}|^2}{j+1} \left(\cos \lambda_{n_j} \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{Re} b_{n_j}\right)$ converge μ_b-presque partout car on a : $\sum_{j\geq 0} \left[\frac{1}{j+1} |a_{n_j}|^2\right]^2 [\operatorname{Log}(j+1)]^2 < \infty$.

Supposons que la suite $\{|a_j|\}_{j\geq 0}$ tend vers 0. Soit τ une permutation de $\mathbf{N}$ telle que la suite $\{|a_{\tau(j)}|\}_{j\geq 0}$ soit décroissante. Nous savons que la série $\sum_{j\geq 0} |a_{\tau(j)}|^2$ diverge, il en est de même de la série

$$\sum_{j\geq 0} \frac{|a_{\tau(j)}|^2}{|a_{\tau(0)}|^2 + |a_{\tau(1)}|^2 + \cdots + |a_{\tau(j)}|^2} .$$

D'autre part, nous avons :

$$(|a_{\tau(0)}|^2 + |a_{\tau(1)}|^2 + \cdots + |a_{\tau(j)}|^2)^{-1} \leq \frac{1}{(j+1)\,|a_{\tau(j)}|^2} .$$

Donc : $\sum_{j\geq 0} \left(\frac{|a_{\tau(j)}|^2}{|a_{\tau(0)}|^2 + \cdots + |a_{\tau(j)}|^2}\right)^2 (\log(j+1))^2 < \infty$ et l'on peut appliquer le théorème de Menchoff, ce qui achève la démonstration.

1.6. Ce qui précède s'applique aussi bien au cas où la suite $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ est une suite de caractères d'ordres différents de 2 d'un groupe compact satisfaisant en outre la propriété suivante : il n'y a pas de répétition dans les sommes $\sum_{j\geq 0} \epsilon_j \lambda_j$ où tous les ϵ_j sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, les autres valant ± 1 (il s'agit de la notion d'ensemble dissocié introduite dans [3]).

1.7. Revenons au cas où $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ est une suite d'entiers telle que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3. On considère pour tout j un polynôme trigonométrique positif, p_j, dont le degré est inférieur à $\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} - 1\right)$ et tel que $\hat{p}_j(0)$ égale 1. On voit facilement que les mesures $\prod_{j=0}^{n} p_j(e^{i\lambda_j x}) \frac{dx}{2\pi}$ convergent vaguement vers une mesure que nous noterons $\mu_{(p)}$. On considère une autre mesure $\mu_{(q)}$ construite de la même façon. On peut démontrer les résultats suivants.

1.8. PROPOSITION. – 1) *Si, pour tout j,*

$$\| p_j - 1 \|_\infty \quad \text{et} \quad \| 2q_j - p_j - 1 \|_\infty$$

sont strictement inférieurs à 1 *et si*

$$\sum_{j \geq 0} \| p_j - q_j \|_\infty^2 / [(1 - \| p_j - 1 \|_\infty)(1 - \| 2q_j - p_j - 1 \|_\infty)]$$

est fini alors $\mu_{(q)}$ *appartient à* $L^2(\mu_{(p)})$.

2) *S'il existe une suite d'entiers* $\{k_j\}_{j \geq 0}$ *telle que*

$$\sum_{j \geq 0} | \hat{p}_j(k_j) - \hat{q}_j(k_j) |^2$$

soit infini alors les deux mesures $\mu_{(p)}$ *et* $\mu_{(q)}$ *sont étrangères.*

2. PRODUITS DE RIESZ ET DIMENSION DE HAUSDORFF

Y. Meyer et B. Weiss [6] ont démontré en utilisant le théorème ergodique de Birkhoff que $\dfrac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \operatorname{Log}(1 + r \cos 3^j x)$ converge vers une constante presque partout par rapport au produit de Riesz $\prod_{j \geq 0} (1 + r \cos 3^j x)$.

Kac, Salem et Zygmund [4] ont montré en utilisant la notion de système presque orthogonal de fonctions que, si la fonction f est assez régulière et si sa moyenne est nulle, la série $\sum_{j \geq 0} \alpha_j f(\lambda_j x)$ converge presque partout quelle que soit la suite $\{\alpha_j\}_{j \geq 0}$ telle que

$$\sum_{j \geq 0} | \alpha_j \operatorname{Log}(j + 2) |^2$$

soit fini ($\{\lambda_j\}_{j \geq 0}$ est une suite lacunaire à la Hadamard).

Nous nous proposons d'étendre ces résultats à certains produits de Riesz.

Rappelons les notations. $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}$ est une suite d'entiers strictement positifs tels que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3 pour tout j. Dans ces conditions on a : $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n < \frac{3}{2}\lambda_n$,

$$\lambda_n - (\lambda_0 + \cdots + \lambda_{n-1}) > \frac{1}{2}\lambda_n .$$

Dans ce qui suit a désigne une suite de nombres complexes telle que $\|a\|_\infty < 1$.

$$P_{a,n}(e^{ix}) = \prod_{j=0}^{n} (1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))$$

μ_a est la limite vague des mesures $P_{a,n}(e^{ix})\,\frac{dx}{2\pi}$.

2.1. Lemme. – *Soit* I *un intervalle de* **T**, *on désigne par* $|\mathrm{I}|$ *sa mesure de Lebesgue normalisée, on a :*

$$|\mu_a(\mathrm{I}) - |\mathrm{I}|| \leqslant \frac{5\|a\|_\infty}{\pi\lambda_0} .$$

En effet, si 1_I désigne la fonction indicatrice de I on a :

$$\hat{1}_\mathrm{I}(0) = |\mathrm{I}|, \qquad |\hat{1}_\mathrm{I}(n)| \leqslant \frac{1}{\pi|n|} \quad \text{si } n \text{ est non nul.}$$

$$\mu_a(\mathrm{I}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{1}_\mathrm{I}(n)\,\hat{\mu}_a(-n) = |\mathrm{I}| + \sum_{n\neq 0} \hat{1}_\mathrm{I}(n)\,\hat{\mu}_a(-n)$$

d'où

$$\begin{aligned}
|\mu_a(\mathrm{I}) - |\mathrm{I}|| &\leqslant \frac{2}{\pi\lambda_0}|\hat{\mu}_a(\lambda_0)| + \\
&\quad + 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{\pi\lambda_n}\sum_{\epsilon_0,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{n-1}=-1,0,1}\left|\hat{\mu}_a\Big(\lambda_n + \sum_{j=0}^{n-1}\epsilon_j\lambda_j\Big)\right| \\
&\leqslant \frac{|a_0|}{\pi\lambda_0} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^{-1}\sum_{\epsilon_0,\ldots,\epsilon_{n-1}=-1,0,1}\left(\frac{\|a\|_\infty}{2}\right)^{1+\sum_{j=0}^{n-1}|\epsilon_j|} \\
&\leqslant \frac{\|a\|_\infty}{\pi}\left[\lambda_0^{-1} + 2\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^{-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\right] \\
&\leqslant \frac{\|a\|_\infty}{\pi}\Big(\lambda_0^{-1} + 2\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n^{-1}2^n\Big) \leqslant \frac{\|a\|_\infty}{\pi\lambda_0}\Big(1 + 2\sum_{n\geqslant 1}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n\Big) \\
&\leqslant \frac{5\|a\|_\infty}{\pi\lambda_0} .
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Soit $\mathfrak{A}_n$ la plus petite tribu sur $\mathbf{T}$ rendant mesurable la fonction $e^{i\lambda_n x}$. On munit $\mathbf{T}$ de la probabilité μ_a, on note E^n l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathfrak{A}_n$. Observons que la suite, $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\geq 0}$, est décroissante.

2.2. LEMME.

$$\mathrm{E}^{n+1}(e^{ij\lambda_n x}) = \begin{cases} e^{ij\lambda_n x} & \text{si } j \equiv 0 \bmod(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ \dfrac{1}{2}\,\bar{a}_n\, e^{i(j-1)\lambda_n x} & \text{si } j \equiv 1 \bmod(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ \dfrac{1}{2}\, a_n\, e^{i(j+1)\lambda_n x} & \text{si } j \equiv -1 \bmod(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il suffit de montrer ceci lorsque $-1 \leqslant j \leqslant \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 2$. Soit donc j ainsi et k quelconque. Si $j\lambda_n + k\lambda_{n+1}$ s'écrit sous la forme $\sum\limits_{l\geqslant 0} \epsilon_l \lambda_l$ les nombres $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}$ sont tous nuls (il suffit de considérer les restes modulo λ_n) ; alors $(j-\epsilon_n)\lambda_n$ est un multiple de λ_{n+1}, ce qui n'est possible que si j égale ϵ_n. Ceci montre que l'on a :

$$\hat{\mu}_a(-j\lambda_n - k\lambda_{n+1}) = \hat{\mu}_a(-j\lambda_n)\,\hat{\mu}_a(-k\lambda_{n+1})$$

ou, si l'on préfère

$$\int e^{ij\lambda_n x}\, e^{ik\lambda_{n+1} x}\, d\mu_a(x) = \hat{\mu}_a(-j\lambda_n) \int e^{ik\lambda_{n+1} x}\, d\mu_a(x)$$

pour tout k, ce qui démontre le lemme.

2.3. LEMME. – *On suppose que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Alors $\int \mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_0 e^{i\lambda_0 x}))\, d\mu_a(x)$ est positif.*

On peut supposer que λ_0 égale 1 et que a_0 est non nul. Posons : $a_0 = re^{i\varphi} (r > 0)$, $\rho = (\sqrt{1-r^2} - 1)/r$; on a :

$$\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_0 e^{ix})) = -\log(1+\rho^2) - \sum_{n\neq 0} \frac{\rho^{|n|}}{|n|}\, e^{in\varphi}\, e^{inx} .$$

Utilisons le lemme précédent pour calculer l'espérance conditionnelle, w, de la fonction $\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_0 e^{ix}))$ par rapport à la tribu $\mathcal{A}_1$:

$$w(e^{ix}) = -\mathrm{Log}(1+\rho^2) - \frac{1}{2}\rho(e^{i\varphi}\bar{a}_0 + e^{-i\varphi}a_0) -$$

$$-\sum_{j\neq 0} e^{ij\lambda_1 x}\left[\frac{\rho^{|j\lambda_1|}e^{ij\lambda_1\varphi}}{|j\lambda_1|} + \frac{\bar{a}_0\rho^{|j\lambda_1+1|}e^{i(j\lambda_1+1)\varphi}}{2|j\lambda_1+1|} + \frac{a_0\rho^{|j\lambda_1-1|}e^{i(j\lambda_1-1)\varphi}}{2|j\lambda_1-1|}\right]$$

ou

$$w(e^{ix}) + \log(1+\rho^2) - \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} =$$

$$= +2\sum_{j\geqslant 1}\frac{1 + j\lambda_1\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{j\lambda_1(j^2\lambda_1^2-1)}\rho^{j\lambda_1}\cos j\lambda_1(x+\varphi)$$

par suite :

$$\left|\int |w(e^{ix}) + \log(1+\rho^2) - \frac{2\rho^2}{1+\rho^2}|\,d\mu_a(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 1}\frac{1 + j\lambda_1\dfrac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{j\lambda_1(j^2\lambda_1^2-1)}|\rho|^{j\lambda_1} < |\rho|^3\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{3j(3j-1)}$$

d'où

$$\int \log(1+\mathrm{Re}(a_0e^{ix}))\,d\mu_a(x) \geqslant \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2)$$

$$-|\rho|^3\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{3j(3j-1)}$$

or

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{3j(3j-1)} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \int_2^{+\infty}\frac{dx}{3x(3x-1)} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\mathrm{Log}\frac{6}{5} < \frac{1}{5} + \frac{1}{15} < \frac{3}{10}$$

donc

$$\int \log(1 + \mathrm{Re}(a_0 e^{ix}))\, d\mu_a(x) \geqslant \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2) - \frac{3}{10}\,|\rho|^3 .$$

Appelons $v(\rho)$ la fonction $\dfrac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2) - \dfrac{3}{10}\,|\rho|^3$; il est facile de montrer que $v'(\rho)$ change une fois de signe sur l'intervalle $]0,1[$. Il s'ensuit que la fonction, v, croît puis décroît sur $[0,1]$, or $v(0)$ est nul, $v(1) = \dfrac{7}{10} - \log 2$ est positif, donc v est positif, ce qu'il fallait démontrer.

2.4. LEMME. – *Il existe un nombre* C *tel que quels que soient l'entier non nul n et la suite* $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$ *de carré sommable on ait :*

$$\left[\int \sup_{m\geqslant 0} \left| \sum_{j=0}^{m} \alpha_j (e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j)) \right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{C}\,\sqrt{1 + \mathrm{Log}\,|n|}\left(\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j|^2\right)^{1/2} .$$

Démonstration. – Le lemme 2.2 montre que :

$$\mathrm{E}^{j+1}(e^{in\lambda_j x}) = u_j e^{i\nu\lambda_{j+1} x}$$

où l'entier ν est tel que $|\nu| \leqslant \dfrac{|n|+1}{3}$. Par conséquent si k est un entier tel que $\dfrac{|n|}{3^k} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^k} < 1$ (ceci a lieu si k est strictement supérieur à $\mathrm{Log}(2\,|n| - 1)/\mathrm{Log}\,3$) alors $\mathrm{E}^{j+k}(e^{in\lambda_j x})$ est constant (donc égal à $\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$).

Soit donc k le plus petit entier strictement supérieur à $\mathrm{Log}(2\,|n| - 1)/\mathrm{Log}\,3$; pour tout j, entier compris entre 0 et $k-1$, les fonctions $\{\alpha_{j+kl}[\exp(in\lambda_{j+kl}x) - \hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+kl})]\}_{l\geqslant 0}$ sont des accroissements de martingale, une inégalité de Doob donne :

$$\left[\int \sup_{0\leqslant m\leqslant N}\left|\sum_{m\leqslant l\leqslant N}\alpha_{j+kl}(e^{in\lambda_{j+kl}x}-\hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+kl}))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\sum_{l=0}^{N}|\alpha_{j+kl}|^2\right)^{1/2}$$

d'où

$$\left[\int \sup_{0\leqslant m\leqslant N}\left|\sum_{0\leqslant l< m}\alpha_{j+kl}(e^{in\lambda_{j+kl}x}-\hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+kl}))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\sum_{l=0}^{N}\left|\alpha_{j+kl}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Par suite

$$\left[\int \sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{m=0}^{N}\alpha_m(e^{in\lambda_m x}-\hat{\mu}_a(-n\lambda_m))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{l\geqslant 0}|\alpha_{j+kl}|^2\right)^{1/2}\leqslant C_2\sqrt{k}\left(\sum_{l\geqslant 0}|\alpha_l|^2\right)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration.

2.5. PROPOSITION. – *On suppose que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Soit $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $A(T)$ telle qu'il existe deux nombres strictement positifs, ρ et C, tels que :*

$$0<\rho<1 \quad \text{et} \quad \sup_{j\in\mathbf{Z}}\rho^{-|j|}\sup_{n\geqslant 0}|\hat{f}_n(j)|\leqslant C .$$

Alors pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ de carré sommable la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\left[f_n(e^{i\lambda_n x})-\int f_n(e^{i\lambda_n t})\,d\mu_a(t)\right]$$

converge pour μ_a-presque tout x.

Démonstration. – Posons $\varphi_{n,j}(x)=e^{in\lambda_j x}-\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$, $\hat{f}_j(n)=c_{n,j}$. On a :

$$f_j(e^{i\lambda_j x})-\int f_j(e^{i\lambda_j t})\,d\mu_a(t)=\sum_{n\neq 0}c_{n,j}\,\varphi_{n,j}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\varphi_{n,j}(x)\right| \leqslant \sum_{n\neq 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j c_{n,j}\varphi_{n,j}(x)\right|$$

d'où

$$\sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\varphi_{n,j}(x)\right| \leqslant \sum_{n\neq 0}\sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j c_{n,j}\varphi_{n,j}(x)\right|$$

utilisons le lemme précédent :

$$\left\| \sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\varphi_{n,j}\right| \right\|_{L^2(\mu_a)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{n\neq 0} \sqrt{1+\operatorname{Log}|n|}\left(\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j c_{n,j}|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant CC_2\left(\sum_{n\neq 0} \rho^{|n|}\sqrt{1+\operatorname{Log}|n|}\right)\left(\sum_{j\geqslant 0}|\alpha_j|^2\right)^{1/2} .$$

On déduit facilement la proposition de cette inégalité.

2.6. LEMME. — *Supposons que* λ_{n+1}/λ_n *tend vers* $+\infty$ *et que* $\inf_{n\geqslant 0} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant 4$. *Posons* $\xi_n = \inf\left\{ j\geqslant 0 \ ;\ \forall k\geqslant j,\ n\leqslant \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \dfrac{3}{2}\right\}$, $(n\geqslant 0)$. *Alors, pour tout* n, *pour toute suite de carré sommable,* $\{x_j\}_{j\geqslant 0}$, *on a :*

$$\left|\sum_{j\geqslant 0,k\geqslant 0} \langle e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j),\ e^{in\lambda_k x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_k)\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j\overline{x}_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\xi_{|n|}\sqrt{2})\sum_{j\geqslant 0}|x_j|^2 .$$

Démonstration. — Posons $\varphi_{n,j}(e^{ix}) = e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$. Dans ce qui suit n est fixe ; j et k sont deux nombres entiers tels que $0\leqslant j<k$. On vérifie que :

$$\langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} = \hat{\mu}_a(n(\lambda_k-\lambda_j)) - \hat{\mu}_a(n\lambda_k)\,\hat{\mu}_a(-n\lambda_j) .$$

Si $|n|$ égale 0 ou 1 cette expression est nulle ; elle est nulle aussi lorsqu'aucun des deux nombres $n\lambda_k$ et $n(\lambda_k-\lambda_j)$ n'appartient au spectre de μ_a, ce qui est assuré si l'on a :

$$\frac{3}{2}\lambda_k \leqslant |n|(\lambda_k - \lambda_j) \leqslant |n|\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1} - \frac{3}{2}\lambda_k$$

ce qui est réalisé si $\dfrac{3}{2\left(1-\dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)} \leqslant |n| \leqslant \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \dfrac{3}{2}$ c'est-à-dire si $2 \leqslant |n| \leqslant \lambda_{k+1}/\lambda_k - \dfrac{3}{2}$.

Nous avons donc montré que si j et k sont distincts et si l'on a : $\sup(j, k) \geqslant \xi_{|n|}$, le produit scalaire $\langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)}$ est nul.

On a donc :

$$\sum_{0\leqslant j<k} \langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j \bar{x}_k =$$

$$= \sum_{0\leqslant k<\xi_{|n|}} \bar{x}_k \sum_{0\leqslant j<k} \langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j .$$

Puisque $\langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,j}\rangle_{L^2(\mu_a)} = 1 - |\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)|^2 \leqslant 1$, on a :

$$\Big|\sum_{0\leqslant j<k} \langle \varphi_{n,j}, \varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j \bar{x}_k\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{0\leqslant k<\xi_{|n|}} |x_k|\sqrt{k}\Big)\Big(\sum_{j\geqslant 0} |x_j|^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{\xi_{|n|}}{\sqrt{2}} \sum_{j\geqslant 0} |x_j|^2$$

d'où le lemme.

2.7. PROPOSITION. – *On suppose que* λ_{n+1}/λ_n *tend vers* $+\infty$. *Soit* $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions de* $A(T)$ *telle qu'existent deux nombres strictement positifs,* ρ *et* C, *tels que :*

$$0<\rho<1,\ \sup_{j\in\mathbf{Z}} \rho^{-|j|} \sup_{n\geqslant 0} |\hat{f}_n(j)| \leqslant C,\ \sum_{j>0} \rho^{+|j|}\sqrt{\xi_j} < +\infty .$$

Alors, quelle que soit la suite $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$ *telle que*

$$\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j|^2 (\mathrm{Log}(j+2))^2$$

soit fini, la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \left[f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\, d\mu_a(t) \right]$ *converge pour* μ_a*-presque tout* x.

Démonstration. – On peut supposer que, pour tout n, λ_{n+1}/λ_n est supérieur à 4.

Posons $\hat{f}_n(j) = c_{j,n}$; gardons les notations du lemme précédent. On a :

$$f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\, d\mu_a(t) = \sum_{j \neq 0} c_{j,n} \varphi_{j,n}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sum_{j \neq 0} c_{j,n} \varphi_{j,n} \right| \leqslant \sum_{j \neq 0} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n c_{j,n} \varphi_{j,n} \right|$$

d'où

$$\sup_{N \geqslant 0} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \sum_{j \neq 0} c_{j,n} \varphi_{j,n} \right| \leqslant \sum_{j \neq 0} \sup_{N \geqslant 0} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n c_{j,n} \varphi_{j,n} \right| .$$

Le lemme précédent et le théorème de Mensov-Rademacher ([11], t. II, p. 193, [4]), montrent que :

$$\left\| \sup_{N \geqslant 0} \left| \sum_{n=0}^{N} \alpha_n c_{j,n} \varphi_{j,n} \right| \right\|_{L^2(\mu_a)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{1 + \xi_{|j|}\sqrt{2}} \left(\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n c_{j,n} \operatorname{Log}(n+2)|^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2C \sqrt{1 + \xi_{|j|}}\, \rho^{+|j|} \left(\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n \operatorname{Log}(n+2)|^2 \right)^{1/2}$$

On a donc

$$\left[\int \sup_{m \geqslant 0} \left| \sum_{n=0}^{m} \alpha_n (f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\, d\mu_a(t) \right|^2 d\mu_a(x) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 4C \left(\sum_{j>0} \sqrt{1 + \xi_j}\, \rho^j \right) \left(\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n \operatorname{Log}(n+2)|^2 \right)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.8. THEOREME. – 1) *Si, pour tout* n, λ_n *divise* λ_{n+1} *la dimension de Hausdorff de tout borélien,* E, *tel que* $\mu_a(\mathrm{E})$ *soit non nul est supé-*

rieure à $1 - \limsup_{n \to +\infty} (\operatorname{Log} \lambda_n)^{-1} \int \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t)$. *Il existe un borélien portant* μ_a *dont la dimension de Hausdorff est inférieure à*

$$1 - \liminf_{n \to +\infty} (\operatorname{Log} \lambda_{n+1})^{-1} \int \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t) .$$

2) *Si* λ_{n+1}/λ_n *tend vers* $+\infty$, *si* α *est un nombre de* $[0,1[$ *tel que* $\sum_{n \geq 0} \alpha^n \sqrt{\xi_n}$ *soit fini et si à partir d'un certain rang* $|a_n|$ *est inférieur à* $2\alpha/(1+\alpha^2)$ *la dimension de Hausdorff de tout borélien,* E, *tel que* $\mu_a(\mathrm{E})$ *soit non nul est* 1.

3) *Si* $\sum_{n \geq 1} |a_n| (\operatorname{Log} \lambda_n)^{-1}$ *est fini, on a la même conclusion qu'en* 2.

Démonstration. — Dans tous les cas la série

$$\sum_{n \geq 1} (\log \lambda_n)^{-1} \left[\log(1 + \operatorname{Re}(a_n e^{i\lambda_n x})) - \int \log(1 + \operatorname{Re}(a_n e^{i\lambda_n t}))\, d\mu_a(t) \right]$$

converge pour μ_a-presque tout x (cela résulte des propositions 2.5 ou 2.7, dans le troisième cas la série converge uniformément). Un lemme de Kronecker ([7], p. 139) montre que, pour μ_a-presque tout x, $(\operatorname{Log} \lambda_n)^{-1} \left[\operatorname{Log} P_{a,n}(e^{ix}) - \int \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t) \right]$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; désignons par E_a l'ensemble des tels x. Posons $b_n = \int \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t)$.

Soit x un point de E_a ; on a : $\operatorname{Log} P_{a,n}(e^{ix}) = b_n + \epsilon_n(x) \operatorname{Log} \lambda_n$ où $\lim_{n \to \infty} \epsilon_n(x) = 0$.

Soit I un intervalle de T contenant x tel que $\dfrac{3}{\lambda_{n+1}} \leq |\mathrm{I}| \leq \dfrac{1}{\lambda_n}$. Soit t un élément de I. On a :

$$|\operatorname{Log}(1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})) - \operatorname{Log}(1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j t}))| \leq \frac{|a_j|}{1 - |a_j|}\, 2\pi\lambda_j |\mathrm{I}| .$$

Donc

$$|\operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it}) - \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{ix})| \leqslant (1 - \|a\|_\infty)^{-1}\, 2\pi\, |I| \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \leqslant$$

$$\leqslant 3\pi(1 - \|a\|_\infty)^{-1}$$

et

$$b_n + \epsilon_n(x) \operatorname{Log} \lambda_n - 3\pi(1 - \|a\|_\infty)^{-1} \leqslant \inf_{t \in I} \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in I} \operatorname{Log} P_{a,n}(e^{it}) \leqslant b_n + \epsilon_n(x) \operatorname{Log} \lambda_n + 3\pi(1 - \|a\|_\infty)^{-1} .$$

Appelons $\mu_a^{(n)}$ la mesure $(P_{a,n}(e^{it}))^{-1}\, d\mu_a(t)$, le lemme 2.1 montre que:

$$|\mu_a^{(n)}(I) - |I|| \leqslant \frac{5}{\pi} \cdot \frac{1}{\lambda_{n+1}} \leqslant \frac{5}{3\pi} |I|$$

d'où $\quad \operatorname{Log}|I| - \operatorname{Log} 3 \leqslant \operatorname{Log} \mu_a^{(n)}(I) \leqslant \operatorname{Log}|I| + \operatorname{Log} 3.$

Puisque $\quad \mu_a(I) = \int_I P_{a,n}(t)\, d\mu_a^{(n)}(t), \quad$ on a :

$$\operatorname{Log}|I| + b_n + \epsilon_n(x)\operatorname{Log}\lambda_n - C \leqslant \operatorname{Log}\mu_a(I) \leqslant b_n + \operatorname{Log}|I| +$$

$$+ \epsilon_n(x) \operatorname{Log}\lambda_n + C$$

où $\qquad C = \operatorname{Log} 3 + 3\pi(1 - \|a\|_\infty)^{-1} .$

En définitive :

$$1 + \frac{b_n}{\operatorname{Log}|I|} + \frac{\epsilon_n(x)\operatorname{Log}\lambda_n + C}{\operatorname{Log}|I|} \leqslant \frac{\operatorname{Log}\mu_a(I)}{\operatorname{Log}|I|} \leqslant 1 + \frac{b_n}{\operatorname{Log}|I|} +$$

$$+ \frac{\epsilon_n(x)\operatorname{Log}\lambda_n - C}{\operatorname{Log}|I|} .$$

On a évidemment $|b_n| \leqslant |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ d'où

$$\left|\frac{b_n}{\operatorname{Log}|I|}\right| \leqslant \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|}{\operatorname{Log}\lambda_n}$$

ce qui montre que, dans les cas 2^0 et 3^0, $\dfrac{b_n}{\operatorname{Log}|I|}$ tend vers 0 lorsque $|I|$ tend vers 0, I étant un intervalle contenant x et appartenant à la famille $\mathfrak{I} = \{I\ ;\ \exists n\ ,\ 3\lambda_{n+1}^{-1} \leqslant |I| \leqslant \lambda_n^{-1}\}$.

Puisque $\frac{\text{Log}\,\lambda_n}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|}$ est borné, on a :

$$\lim_{\substack{|\mathrm{I}|\to 0\\ x\in \mathrm{I}\in \mathcal{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(\mathrm{I})}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} = 1 \ .$$

Dans le premier cas le lemme 2.3 montre que b_n est positif, alors :

$$-\frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} \leqslant \frac{b_n}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} \leqslant \frac{-b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1} - \text{Log}\,3}$$

d'où

$$1 - \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} + \frac{\epsilon_n(x)\,\text{Log}\,\lambda_n + \mathrm{C}}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} \leqslant \frac{\text{Log}\,\mu_a(\mathrm{I})}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} \leqslant 1 -$$

$$- \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1} - \text{Log}\,3} + \frac{\epsilon_n(x)\ \text{Log}\,\lambda_n - \mathrm{C}}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|}$$

ce qui montre que l'on a :

$$1 - \limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} \leqslant \liminf_{\substack{|\mathrm{I}|\to 0\\ x\in \mathrm{I}\in \mathcal{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(\mathrm{I})}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} \leqslant \limsup_{\substack{|\mathrm{I}|\to 0\\ x\in \mathrm{I}\in \mathcal{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(\mathrm{I})}{\text{Log}\,|\mathrm{I}|} \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1}}$$

Etant donné un intervalle I contenant x il existe deux intervalles J_1 et J_2 contenant x, appartenant à $\mathcal{J}$, tels que : $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I} \subset \mathrm{J}_2$, $|\mathrm{J}_1| \geqslant \frac{1}{3}|\mathrm{I}|$, $|\mathrm{J}_2| \leqslant 3\,|\mathrm{I}|$ ce qui montre que dans les limites précédentes la restriction $\mathrm{I}\in\mathcal{J}$ peut être levée.

On conclut au moyen d'un théorème démontré par Billingsley ([1], pp. 136-145).

2.9. *Remarque.* – La démonstration du lemme 2.3 montre le fait suivant : si λ_n divise λ_{n+1} et si α est le nombre compris entre 0 et 1 tel que $\|a\|_\infty = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ alors

$$\int \operatorname{Log}\left[1 + \operatorname{Re}(a_n e^{i\lambda_n t})\right] d\mu_a(t) \leqslant \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \operatorname{Log}(1+\alpha^2) + \frac{4}{15}\alpha^3$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log}\lambda_n} \int \operatorname{Log} \mathrm{P}_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \operatorname{Log}(1+\alpha^2) + \frac{4}{15}\alpha^3\right)/\operatorname{Log} 3$$

et, par conséquent la dimension de Hausdorff de tout borélien E tel que $\mu_a(\mathrm{E})$ soit non nul est supérieur à

$$1 - \left(\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \operatorname{Log}(1+\alpha^2) + \frac{4}{15}\alpha^3\right)/\operatorname{Log} 3.$$

On peut s'assurer que cette fonction est minimum pour α égale 1, ce minimum est strictement positif.

3.

3.1. LEMME. – *On désigne par* Ω *le produit* $\{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ *muni de la probabilité de pile ou face. On se donne* $3(n+1)$ *nombres réels* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_n, \gamma_0, \ldots, \gamma_n$ *tels que* $|\alpha_j|$ *soit strictement inférieur à* 1. *On a :*

$$\mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant m\leqslant n} \left|\prod_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{1+\omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j} - 1\right|^2 \prod_{0\leqslant j\leqslant n}(1+\omega_{2j}\alpha_j)\right] \leqslant$$

$$\leqslant 4\left[\prod_{0\leqslant j\leqslant n}\left(1+\frac{(\beta_j-\alpha_j)^2+\gamma_j^2}{1-\alpha_j^2}\right)-1\right].$$

Soit $\mathcal{B}_m$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurables les projections $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2m+1}$. Soit E^m l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}_m$ lorsqu'on munit Ω de la probabilité $\prod_{0\leqslant j\leqslant n}(1+\omega_{2j}\alpha_j)\,d\omega$. On a :

$$\mathrm{E}^{m-1}\left(\frac{1+\omega_{2m}\beta_m+\omega_{2m+1}\gamma_m}{1+\omega_{2m}\alpha_m}\right) = 1 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant m\leqslant n.$$

La suite $\left\{ \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \frac{1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} - 1 \right\}_{0 \leqslant m \leqslant n}$ est donc une martingale.

On a :

$$E\left[\prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right) \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} (1 + \omega_{2j}\alpha_j) \right] = 1$$

$$E\left[\prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right)^2 \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} (1 + \omega_{2j}\alpha_j) \right] =$$

$$= \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} E\left[\frac{(1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j)^2}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right]$$

$$E\left[\frac{(1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j)^2}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right] = E\left(\frac{(1 + \omega_{2j}\beta_j)^2 + \gamma_j^2}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right) =$$

$$= \frac{1 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 - 2\alpha_j\beta_j}{1 - \alpha_j^2} = 1 + \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2 + \gamma_j^2}{1 - \alpha_j^2} .$$

Donc

$$E\left(\left| \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{1 + \omega_{2j}\beta_j + \omega_{2j+1}\gamma_j}{1 + \omega_{2j}\alpha_j} \right) - 1 \right|^2 \right) =$$

$$= \prod_{0 \leqslant j \leqslant m} \left(1 + \frac{(\beta_j - \alpha_j)^2 + \gamma_j^2}{1 - \alpha_j^2} \right) - 1 .$$

Le lemme résulte alors d'une inégalité de Doob sur les martingales.

3.2. LEMME. – *Soient μ et ν deux mesures boréliennes positives sur* $\mathbf{T}$.

1) *Si f appartient à $L^1(\mu)$ la mesure $(f\mu) * \nu$ est absolument continue par rapport à la mesure $\mu * \nu$. Ceci permet de définir* Tf *ainsi :* $(Tf)(\mu * \nu) = (f\mu) * \nu$; Tf *appartient à* $L^1(\mu * \nu)$, Tf *est positive si f l'est.*

2) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour toute f appartenant à $L^p(\mathbf{T})$ on a :

$$\| T(f) \|_{L^p(\mu * \nu)} \leqslant \| \nu \|_{M(T)}^{1/p} \, \| f \|_{L^p(\mu)} .$$

3) Si $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions de $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ on a :

$$\| \sup_{n\geqslant 0} |T(f_n)| \|_{L^p(\mu*\nu)} \leqslant \|\nu\|_{M(T)}^{1/p} \| \sup_{n\geqslant 0} |f_n| \|_{L^p(\mu)} .$$

Preuve. – Soit E un borélien tel que $\mu * \nu(E)$ égale 0 ; c'est dire que la fonction $1_E(x+y)$ est nulle $\mu \times \nu$-presque partout, on a donc :

$$\int_E d[(f\mu) * \nu] = \int\int 1_E(x+y) f(x)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = 0$$

d'où la première partie du lemme.

Si f est réelle dans $L^1(\mu)$ on a, à cause de la monotonie de T : $|T(f)| \leqslant T(|f|)$. Supposons maintenant que $f = u + iv$ où u et v sont réelles dans $L^1(\mu)$, on a :

$$|Tf| = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi} ((Tu)\cos\alpha + (Tv)\sin\alpha) =$$

$$= \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi} T(u\cos\alpha + v\sin\alpha) \leqslant T(|f|) .$$

Ceci montre que lorsque f appartient à $L^\infty(\mu)$ on a :

$$\|Tf\|_{L^\infty(\mu*\nu)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mu)} .$$

D'autre part, lorsque f appartient à $L^1(\mu)$:

$$\|Tf\|_{L^1(\mu*\nu)} \leqslant \|T(|f|)\|_{L^1(\mu*\nu)} = \int\int |f(x)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) =$$

$$= \|\nu\|_{M(T)} \|f\|_{L^1(\mu)} .$$

La seconde partie du lemme s'obtient en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin [[11] t. II, p. 93].

Démontrons la troisième partie. On a : $|f_n| \leqslant \sup_{m\geqslant 0} |f_m|$,

d'où $$|T(f_n)| \leqslant T(|f_n|) \leqslant T\left(\sup_{m\geqslant 0} |f_m|\right)$$

enfin $$\sup_{m\geqslant 0} |T(f_m)| \leqslant T\left(\sup_{m\geqslant 0} |f_m|\right)$$

et l'on conclut en utilisant la seconde partie.

3.3. THEOREME. — 1) *Soient a et b deux suites de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1. Si $b - a$ appartient à l^2 et si* $\limsup_{j \to \infty} |a_j|$ *est strictement inférieur à* $\frac{1}{2}$ *le quotient* $P_{b,n}(x)/P_{a,n}(x)$ *converge* μ_a*-presque partout.*

2) *Soient a, b, c, trois suites bornées de nombres complexes. Supposons que l'on ait :*

$$\inf_{j \geqslant 0} \lambda_{j+1}/\lambda_j \geqslant 5 \ , \ \limsup_{j \to \infty} |a_j| < \frac{1}{2} \ , \ \sum_{j \geqslant 0} (|b_j - a_j|^2 + |c_j|^2) < +\infty .$$

Alors le produit $\prod_{j \geqslant 0} \{[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x} + c_j e^{2i\lambda_j x})]/(1 + \mathrm{Re} a_j e^{i\lambda_j x})\}$ *converge* μ_a*-presque partout.*

Dans chacun des deux cas le résultat est vrai si l'on change l'ordre des facteurs des produits.

Démonstration de 1. — On peut supposer que l'on a : $\sup_{j \geqslant 0} |a_j| < \frac{1}{2}$. On pose $k = 4/\left(1 - 4 \sup_{j \geqslant 0} |a_j|^2\right)$. Le lemme 3.1 montre que, lorsque n est inférieur à N, on a :

$$\mathrm{E}\left[\sup_{0 \leqslant m \leqslant n} \left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)} - 1\right|^2 P_{2\omega a,N}(x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant 4\left[\prod_{0 \leqslant j \leqslant n} \left(1 + \frac{4\,|\mathrm{Re}(b_j - a_j)\, e^{i\lambda_j x}|^2}{1 - 4(\mathrm{Re}\, a_j e^{i\lambda_j x})^2}\right) - 1\right]$$

$$\leqslant 4\left[\prod_{j \geqslant 0} (1 + k\,|b_j - a_j|^2) - 1\right] .$$

Intégrons par rapport à x, appliquons le théorème de Fubini et faisons tendre N vers $+\infty$:

$$\mathrm{E}\left[\int \sup_{0 \leqslant m \leqslant n} \left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)} - 1\right|^2 d\mu_{2\omega a}(x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant 4\left[\prod_{j \geqslant 0} (1 + k\,|b_j - a_j|^2) - 1\right] .$$

Considérons la mesure de probabilité, ν_ω, définie par le produit $\prod_{j\geq 0}(1+\omega_j\cos\lambda_j x)$; on a :

$$\mu_{2\omega a} * \nu_\omega = \mu_a$$

$$\left(\frac{P_{2\omega b,m}}{P_{2\omega a,m}}\mu_{2\omega a}\right) * \nu_\omega = \frac{P_{b,m}}{P_{a,m}}\mu_a .$$

Le lemme 3.2 montre que l'on a, pour tout n :

$$\int \sup_{0\leq m\leq n}\left|\frac{P_{b,m}(x)}{P_{a,m}(x)}-1\right|^2 d\mu_a(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int \sup_{0\leq m\leq n}\left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)}-1\right|^2 d\mu_{2\omega a}(x).$$

On prend l'espérance des deux membres, on utilise l'inégalité précédente, on fait tendre n vers $+\infty$ en utilisant le théorème de la convergence monotone :

$$\int \sup_{m\geq 0}\left|\frac{P_{b,m}(x)}{P_{a,m}(x)}-1\right|^2 d\mu_a(x) \leqslant 4\left\{\prod_{j\geq 0}(1+k\,|b_j-a_j|^2)-1\right\} .$$

On déduit facilement de cette inégalité la convergence μ_a-presque partout du quotient $P_{b,m}/P_{a,m}$.

Démonstration de 2. – Elle est analogue à la démonstration précédente. On peut supposer que l'on a : $\sup_{j\geq 0}|a_j| < \frac{1}{2}$; on choisit un nombre σ dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$ tel que l'on ait : $\sup_{j\geq 0}|a_j| < \frac{1}{2}\sigma$; on pose : $k = 4/\left[\left(1-\frac{4}{\sigma^2}\sup_{j\geq 0}|a_j|^2\right)(1-\sigma)^2\right]$. On considère les produits

$$\prod_{0\leq j\leq m}\frac{1+\frac{2}{\sigma}\omega_{2j}\,\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})+\frac{2}{1-\sigma}\omega_{2j+1}\,\mathrm{Re}(c_j e^{2i\lambda_j x})}{1+\frac{2}{\sigma}\omega_{2j}\,\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} .$$

Utilisant le lemme 3.1 nous obtenons une inégalité. Ensuite on convole avec la mesure, ν_ω, définie par le produit

$$\prod_{j\geqslant 0} (1 + \sigma\omega_{2j} \cos \lambda_j x + (1 - \sigma)\, \omega_{2j+1} \cos 2\lambda_j x) \ ;$$

on obtient l'inégalité :

$$\int \sup_{m\geqslant 0} \left| \prod_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{1 + \mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x} + c_j e^{2i\lambda_j x})}{1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} - 1 \right|^2 d\mu_a(x) \leqslant$$

$$\leqslant 4 \left[\prod_{j\geqslant 0} (1 + k(|b_j - a_j|^2 + |c_j|^2)) - 1 \right]$$

ce qui achève la démonstration.

Le fait que l'ordre des termes soit sans importance vient de ce que la propriété de la suite $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 0}$ que l'on a utilisée est la suivante : un entier se décompose d'une façon au plus sous la forme $\sum_{j\geqslant 0} \epsilon_j \lambda_j$ où $\epsilon_j = -1, 0, 1$ dans le cas 1), $\epsilon_j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dans le cas 2.

3.4. COROLLAIRE. — *Si l'on a :* $\inf_{j\geqslant 0} \lambda_{j+1}/\lambda_j \geqslant 5$ *et* $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < \frac{1}{2}$ *quelle que soit la suite de carré sommable,* α, *la série* $\sum_{j\geqslant 0} \alpha_j\left(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{a}_j\right)$ *converge* μ_a*-presque partout (ceci a lieu quel que soit l'ordre des termes).*

On a

$$\left(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{a}_j\right)\left(1 + \frac{1}{2} a_j e^{i\lambda_j x} + \frac{1}{2}\bar{a}_j e^{-i\lambda_j x}\right) = -\frac{1}{4}\bar{a}_j^2 e^{-i\lambda_j x} +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{4}|a_j|^2\right) e^{i\lambda_j x} + \frac{1}{2} a_j e^{2i\lambda_j x} .$$

Donc

$$\cos \lambda_j x - \frac{1}{2} \mathrm{Re}\, a_j = \frac{\mathrm{Re}\left[\left(1 - \frac{1}{4}|a_j|^2 - \frac{1}{4} a_j^2\right) e^{i\lambda_j x} + \frac{1}{2} a_j e^{2i\lambda_j x}\right]}{1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})}$$

$$\sin \lambda_j x + \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, a_j = \frac{-\mathrm{Re}\left[i\left(1 - \frac{1}{4}|a_j|^2 + \frac{1}{4} a_j^2\right) e^{i\lambda_j x} + \frac{1}{2} i a_j e^{2i\lambda_j x}\right]}{1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} \cdot$$

Si α est un élément réel de l^2 le théorème précédent montre que les produits

$$\prod_{j\geqslant 0}\left[1+\alpha_j\left(\cos\lambda_j x-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,a_j\right)\right]$$

et
$$\prod_{j\geqslant 0}\left[1+\alpha_j\left(\sin\lambda_j x+\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,a_j\right)\right]$$

convergent μ_a-presque partout, il en est donc de même des séries $\sum_{j\geqslant 0}\alpha_j\left(\cos\lambda_j x-\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,a_j\right)$ et $\sum_{j\geqslant 0}\alpha_j\left(\sin\lambda_j x+\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,a_j\right)$ ce qui achève la démonstration.

Remarques. – Quitte à utiliser d'autres mesures ν_ω on peut dans la première partie du théorème 2, remplacer l'hypothèse, $\limsup_{j\to\infty}|a_j|<\frac{1}{2}$, par l'hypothèse $\limsup|a_j|\leqslant\cos\dfrac{\pi}{2+\left[\frac{1}{2}\left(\inf_{j\geqslant 0}\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}-1\right)\right]}$ (ici $[x]$ désigne la partie entière de x).

Nous avons déjà remarqué que les fonctions $\left\{e^{i\lambda_j x}-\frac{\bar{a}_j}{2}\right\}_{j\geqslant 0}$ forment un système orthogonal dans $L^2(\mu_a)$ il résulte donc du théorème de Menchoff que les hypothèses,

$$\inf_{j\geqslant 0}\lambda_{j+1}/\lambda_j\geqslant 3 \quad \text{et} \quad \sum_{j\geqslant 1}|\alpha_j|^2(\log j)^2\ ,$$

entraînent la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 0}\alpha_j\left(e^{i\lambda_j x}-\frac{1}{2}\,\bar{a}_j\right)$ pour μ_a-presque tout x.

Dans le cas où λ_{j+1}/λ_j est entier quel que soit j, on peut démontrer le corollaire 3.3 d'une autre façon, on obtient d'ailleurs un résultat plus précis.

3.5. Proposition. – *On suppose que, pour tout j, λ_j divise λ_{j+1}. Quelle que soit la suite $\alpha=\{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$ de carré sommable la série $\sum_{j\geqslant 0}\alpha_j\left(e^{i\lambda_j x}-\frac{1}{2}\,\bar{a}_j\right)$ converge μ_a-presque partout.*

En effet il suffit de remarquer que les fonctions

$$\left\{\alpha_j\left(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\,\bar{a}_j\right)\right\}_{j\geqslant 0}$$

sont des accroissements de martingale (cf. lemme 2.1.1).

3.6. THEOREME. – *Soient* $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite d'entiers strictement positifs tels que* λ_{n+1}/λ_n *soit supérieur à* 3 *et* $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite croissante de nombres réels strictement positifs tels que* $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\tau_n^{-1}\log n)^2$ *soit fini. Pour tout nombre complexe non nul, z, tel que*

$$|z|\limsup_{n\to\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)$$

soit inférieur à $\frac{1}{2}$ *l'ensemble des x tels que* $\tau_n^{-1}\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} e^{i\lambda_j x}$ *converge vers z est non dénombrable. De plus, si* $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\tau_{n+1}-\tau_n)/\log\lambda_n$ *est fini cet ensemble est de dimension de Hausdorff 1.*

En effet, posons $\tau_{-1}=0, a_n = 2\bar{z}(\tau_n-\tau_{n-1})$. Alors $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|$ est strictement inférieur à 1, la remarque suivant 3.4 montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\tau_n^{-1}(e^{i\lambda_n x}-(\tau_n-\tau_{n-1})z)$ converge μ_a-presque partout ; un lemme de Kronecker ([7] p. 139) montre que

$$\tau_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}(e^{i\lambda_j x}-(\tau_j-\tau_{j-1})z)$$

tend vers 0 μ_a-presque partout. La seconde assertion résulte de la proposition 2.3.4.

3.7. *Remarque.* – On peut utiliser les propositions 3.3 ou 3.5 pour obtenir la convergence presque partout de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\tau_n^{-1}(e^{i\lambda_n x}-(\tau_n-\tau_{n-1})z)\ .$$

On peut alors obtenir la même conclusion que celle du théorème 3.6 en faisant sur la suite $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ une hypothèse convenable et sur la suite τ_n l'hypothèse : $\sum\limits_{n\geqslant 0}\tau_n^{-2}<\infty$.

3.8. PROPOSITION. – *On suppose que* λ_{n+1}/λ_n *est supérieur à 3. Soit* $a = \{a_n\}_{n \geqslant 0}$ *une suite de nombres réels positifs n'appartenant à* l^p *pour aucun p fini et telle que* $\limsup_{n \to \infty} a_n < 1$. *Pour chaque réel strictement positif,* α, *on note* ν_α *la mesure que définit le produit* $\prod_{j \geqslant 0} (1 + a_j^\alpha \cos \lambda_j x)$. *Il existe une famille de boréliens,* $\{E_\alpha\}_{\alpha > 0}$, *telle que :*

1) *si* α *est différent de* α' *on a :* $E_\alpha \cap E_{\alpha'} = \phi$ et $\nu_\alpha(E_{\alpha'}) = 0$,

2) $\nu_\alpha(E_\alpha) = 1$,

3) $\bigcup_{\alpha > 0} E_\alpha$ *est négligeable pour la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. –

1er cas. – a_n ne tend pas vers 0.

Il existe alors une suite $\{k_n\}_{n \geqslant 1}$ telle que a_{k_n} tende vers un nombre l de $]0,1[$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \left(e^{i\lambda_{k_n} x} - \frac{1}{2} a_{k_n}^\alpha\right)$ converge ν_α-presque partout ; soit E_α l'ensemble des x tels que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_{k_j} x}$ tende vers $\frac{1}{2} l^\alpha$. Ces ensembles vérifient 1) et 2), d'autre part ils sont disjoints de l'ensemble des x tels que $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_{k_j} x}$ tende vers 0, ensemble qui a une mesure de Lebesgue égale à 1.

2ème cas. – a_n tend vers 0.

Soit σ une permutation de $\mathbf{N}$ telle que la suite $\{a_{\sigma(n)}\}_{n \geqslant 0}$ soit décroissante. S'il existait un nombre strictement positif, α, tel que la série $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} a_{\sigma(n)}^\alpha$ converge la suite $(n+1)^{\frac{1}{4}} a_{\sigma(n)}^\alpha$ serait bornée et a appartiendrait à un l^p.

Soit E_α l'ensemble des x tels que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} \left[e^{i\lambda_{\sigma(n)} x} - \frac{1}{2} a_{\sigma(n)}^\alpha \right]$$

converge.

Ces ensembles vérifient 1) et 2) et sont disjoints de l'ensemble des x tels que $\sum\limits_{n\geq 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} e^{i\lambda_{\sigma(n)}x}$ converge, ensemble dont la mesure de Lebesgue est 1.

4. AUTRES RESULTATS

4.1. Produits de Riesz construits sur la suite $\{2^n\}_{n\geq 0}$.

4.1.1. Une somme $\sum\limits_{j=0}^{N} \epsilon_j 2^j$ (ϵ_j vaut -1, 0 ou 1) est nulle si et seulement si tous les ϵ_j sont nuls. Si $a=\{a_j\}_{j\geq 0}$ est une suite de nombres complexes de modules inférieurs à 1 les polynômes trigonométriques $P_{a,n}(e^{ix}) = \prod\limits_{0\leq j\leq N} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i2^j x}))$, sont positifs et de moyenne égale à 1. Nous allons montrer que la suite de mesures, $\left\{P_{a,n}(x)\dfrac{dx}{2\pi}\right\}_{n\geq 0}$, a une seule valeur d'adhérence vague, μ_a.

4.1.2. Lemme. – *Soit m un entier strictement positif, soit n l'entier défini par les inégalités : $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Soit N un entier supérieur à $n+2$. Si l'on a*

$$m = \sum_{0\leq j\leq N} \epsilon_j 2^j \quad (\epsilon_j \in \{-1,0,1\},\ j=0,1,2,\ldots,N\ ;\ \epsilon_N \neq 0)$$

alors ϵ_N égale 1 et ϵ_{N-1} égale -1.

En effet, la somme $\sum\limits_{0\leq j\leq N} \epsilon_j 2^j$ a le signe de ϵ_N. Donc ϵ_N égale 1. D'autre part :

$$2^N - 2^{n+1} + 1 \leq 2^N - m = -\sum_{0\leq j<N} \epsilon_j 2^j \leq -\epsilon_{N-1} 2^{N-1} + 2^{N-1} - 1$$

par suite $\qquad 2 \leq 2^{N-1} - 2^{n+1} + 2 \leq -2^{N-1}\epsilon_{N-1}$

ce qui montre que ϵ_{N-1} est strictement négatif donc égal à -1.

4.1.3. Une application répétée du lemme précédent montre que, sous les mêmes hypothèses, ϵ_j égale -1 lorsque l'on a : $n+1 \leqslant j \leqslant N-1$.

4.1.4. Soient m et n comme dans le lemme 4.1.2. Posons :

$$E_m = \{(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^{n+1} \ ; \ \sum_{j=0}^{n} \epsilon_j 2^j = m\}$$

$$F_m = \{(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 0, 1\}^{n+1} \ ; \ 2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \epsilon_j 2^j = m\}.$$

Si ϵ appartient à $\{-1, 0, 1\}^{N}$ on notera $a'_j(\epsilon)$ le nombre valant $\frac{1}{2} a_j$, 1, $\frac{1}{2} \overline{a_j}$ selon que ϵ_j vaut $+1$, 0 ou -1.

Alors si N est supérieur à $n+2$ la remarque 4.1.3 montre que l'on a :

$$\hat{P}_{a,N}(m) = \sum_{\epsilon \in E_m} \left(\prod_{j=0}^{n} a'_j(\epsilon) \right) + \left[\sum_{\epsilon \in F_m} \prod_{j=0}^{n} a'_j(\epsilon) \right] \left[\frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{N} \frac{a_k}{2} \prod_{j=n+1}^{k-1} \frac{\overline{a_j}}{2} \right].$$

Ceci montre que $\hat{P}_{a,N}(m)$ a une limite lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de μ_a.

4.1.5. LEMME. — *Soit $\mathfrak{A}_n$ la plus petite tribu rendant mesurable la fonction $e^{i2^n x}$. On a :*

$$E(e^{-i2^n x} \mid \mathfrak{A}_{n+1}) = \frac{1}{2} (a_n + \overline{a}_n e^{-i2^{n+1} x}) .$$

En effet, si $2^n + k2^{n+1} = \sum_{j \geqslant 0} \epsilon_j 2^j$ avec les conditions habituelles sur les ϵ_j nous avons $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{n-1} = 0$, $\epsilon_n = \pm 1$. Donc

$$\int e^{-i2^n x} e^{-ik2^{n+1} x} \, d\mu_a(x) = \frac{a_n}{2} \int e^{-ik2^{n+1} x} \, d\mu_a(x) + \\ + \frac{\overline{a}_n}{2} \int e^{-i(k+1) 2^{n+1} x} \, d\mu_a(x)$$

ce qui démontre le lemme.

4.1.6. Corollaire. – *Il existe un nombre* C *tel que pour toute suite de carré sommable,* $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$, *on ait :*

$$\left[\int \sup_{n\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(e^{i2^jx}-\hat{\mu}_a(-2^j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{j\geqslant 0}|\alpha_j|^2\Big)^{1/2}.$$

Démonstration. – Le lemme précédent permet de définir des nombres $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$ ($j\geqslant 0$, $k\geqslant 0$) ainsi :

i) pour tout $j\geqslant 0, u_{j,0}=0$ et $v_{j,0}=1$

ii) pour tous j et k,

$$E(v_{j,k}e^{i2^{j+k}x}\mid \mathcal{A}_{j+k+1})=u_{j,k+1}+v_{j,k+1}e^{i2^{j+k+1}x}\mid .$$

On a : $\quad |u_{j,k+1}|\leqslant \frac{1}{2}|v_{j,k}|,\quad |v_{j,k+1}|\leqslant\frac{1}{2}|v_{j,k}|$

d'où $\quad |u_{j,k+1}|\leqslant 2^{-k},\quad |v_{j,k}|\leqslant 2^{-k}$

et $\left[\int |v_{j,k}e^{i2^{j+k}x}-u_{j,k+1}-v_{j,k+1}e^{i2^{j+k+1}x}|^2\, d\mu_a(x)\right]^{1/2}\leqslant 2^{-k}$.

On a aussi :

$$\sum_{k\geqslant 0}(v_{j,k}e^{i2^{j+k}x}-u_{j,k+1}-v_{j,k+1}e^{i2^{j+k+1}x})=e^{i2^jx}-$$

$$-\sum_{k\geqslant 0}u_{j,k+1}=e^{i2^jx}-\hat{\mu}_a(-2^j).$$

Par suite

$$\sup_{n\geqslant 0}|\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(e^{i2^jx}-\hat{\mu}_a(-2^j))|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\sup_{n\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(v_{j,k}e^{i2^{j+k}x}-u_{j,k+1}-v_{j,k+1}e^{i2^{j+k+1}x})\right|$$

utilisant une inégalité sur les martingales de carrés sommables nous obtenons :

$$\left[\int \sup_{n\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\,(e^{i2^jx}-\hat{\mu}_a(-2^j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k\geqslant 0} 2^{-k}\Big(\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j|^2\Big)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration.

Ceci prouve que lorsque $\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j|^2$ est fini, la série

$$\sum_{j\geqslant 0} |\alpha_j\,(e^{i2^jx}-\hat{\mu}_a(-2^j))$$

converge μ_a-presque partout.

4.1.7. On en déduit facilement que lorsque deux suites, a et b, de nombres complexes sont telles que : $\|a\|_\infty \leqslant 1$, $\|b\|_\infty \leqslant 1$, $\sum_{n\geqslant 0} |\hat{\mu}_a(2^n)-\hat{\mu}_b(2^n)|^2 = +\infty$, alors les mesures μ_a et μ_b sont étrangères. La proposition suivante explicite cette condition.

4.1.8. Proposition. — *Soient a et b deux suites de* **C** *telles que $\|a\|_\infty$ et $\|b\|_\infty$ soient strictement inférieurs à* 1. *Si $\sum_{n\geqslant 0} |b_n-a_n|^2$ est infini les deux mesures μ_a et μ_b sont étrangères.*

En effet, le lemme 4.1.5 montre que

$$\hat{\mu}_a(2^n) = \frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{2}\,\bar{a}_n\,\hat{\mu}_a(2^{n+1})\ .$$

Résolvant par rapport à a_n nous obtenons :

$$\bar{a}_n = 2\,\frac{\overline{\hat{\mu}_a(2^n)} - \hat{\mu}_a(2^n)\,\overline{\hat{\mu}_a(2^{n+1})}}{1-|\hat{\mu}_a(2^{n+1})|^2}\ .$$

Il est facile de montrer que : $|\hat{\mu}_a(2^n)| \leqslant \|a\|_\infty$. On a donc :

$$|b_n-a_n| \leqslant k(|\hat{\mu}_a(2^n)-\hat{\mu}_b(2^n)| + |\hat{\mu}_a(2^{n+1})-\hat{\mu}_b(2^{n+1})|)$$

où k est un nombre ne dépendant pas de n. Alors :

$$\sum_{n\geqslant 0} |b_n-a_n|^2 \leqslant 2k^2\,|\hat{\mu}_b(1)-\hat{\mu}_a(1)|^2 + 4k^2 \sum_{n\geqslant 1} |\hat{\mu}_b(2^n)-\hat{\mu}_a(2^n)|^2$$

ce qui achève la démonstration.

Il est d'autre part clair que les conditions d'absolue continuité de μ_b par rapport à μ_a données dans le théorème 1.3 sont encore valables dans ce cadre.

4.1.9. LEMME. – *Il existe un nombre* C *tel que quels que soient l'entier non nul, n, et la suite* $\{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$ *de carré sommable on ait :*

$$\left[\int \sup_m \left|\sum_{j=0}^m \alpha_j(e^{i2^jnx} - \hat{\mu}_a(-2^jn))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C(1+\sqrt{\operatorname{Log}|n|})\left(\sum_{j\geqslant 0}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}.$$

En effet, le lemme 4.1.5 montre que $E(e^{in2^jx}\mid \mathcal{C}_{j+1})$ est égal à e^{in2^jx} ou à $\frac{1}{2}\bar{a}_j e^{i\frac{n-1}{2}2^{j+1}x} + \frac{1}{2}a_j e^{i\frac{n+1}{2}2^{j+1}x}$ selon que n est pair ou impair.

Soit n un entier supérieur à 2, notons k le plus petit entier strictement supérieur à $\operatorname{Log}(n-1)/\operatorname{Log}2$. On vérifie que

$$E(e^{in2^jx}\mid \mathcal{C}_{j+k}) = u_j + v_j e^{i2^{j+k+1}x}$$

avec $|u_j| + |v_j| \leqslant 1$.

Comme dans la démonstration du lemme 2.4 nous avons

$$\left[\int \sup_{m\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^m \alpha_j(e^{in2^jx} - E(e^{in2^jx}\mid \mathcal{C}_{j+k}))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{k}\left(\sum_{j\geqslant 0}|\alpha_j|^2\right)^{1/2}.$$

Par ailleurs nous avons :

$$E(e^{in2^jx}\mid \mathcal{C}_{j+k}) - \hat{\mu}_a(-n2^j) = v_j\,[e^{i2^{j+k+1}x} - \hat{\mu}_a(-2^{j+k+1})]$$

et le lemme 4.1.6 montre que :

$$\left[\int \sup_{m\geqslant 0}\left|\sum_{j=0}^m \alpha_j(E(e^{in2^jx}\mid \mathcal{C}_{j+k}) - \hat{\mu}_a(-n2^j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{j\geqslant 0}|a_j|^2\right)^{1/2}$$

d'où le lemme.

Ensuite les estimations de dimension de Hausdorff se déroulent de la même façon que précédemment à cela près que l'on peut se contenter d'étudier les intervalles $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$.

4.2. Produits de Riesz à plusieurs variables.

Indiquons brièvement comment les résultats du second chapitre peuvent se généraliser à $\mathbf{T}^2$.

4.2.1. On désigne par $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ et $\{\lambda'_n\}_{n\geqslant 0}$ deux suites de nombres entiers supérieurs à 1 telles que λ_{n+1}/λ_n et $\lambda'_{n+1}/\lambda'_n$ soient supérieurs à 3 pour tout n. Soit $a=\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 ; on pose :

$$P_{a,n}(e^{ix}, e^{iy}) = \prod_{j=0}^{n} [1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i(\lambda_j x + \lambda'_j y)})]$$

et l'on note μ_a la limite vague des mesures $P_{a,n}(e^{ix}, e^{iy}) \dfrac{dx\,dy}{4\pi^2}$.

On peut démontrer les résultats suivants.

4.2.2. Proposition. – *Soit* $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de nombres complexes. Chacune des conditions suivantes :*

1) *Pour tout* n, λ_{n+1}/λ_n et $\lambda'_{n+1}/\lambda'_n$ *sont entiers,* $\|a\|_\infty$ *est strictement inférieur à 1,* $\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2$ *est fini.*

2) $\max(\lambda_{n+1}/\lambda_n, \lambda'_{n+1}/\lambda'_n)$ *tend vers* $+\infty$, $\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n \operatorname{Log}(n+2)|^2$ *est fini et, si* α *étant le nombre compris entre* 0 *et* 1 *tel que* $\|a\|_\infty = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, *on a* $\sum_{n\geqslant 1} \alpha^n \sqrt{\xi_n} < \infty$ *où*

$$\xi_n = \inf\left\{ j \geqslant 0,\ \forall k \geqslant j,\ n \leqslant \max(\lambda_{k+1}/\lambda_k, \lambda'_{k+1}/\lambda'_k) - \frac{3}{2} \right\},$$

3) $\sum_{n\geqslant 0} |a_n \alpha_n|$ *est fini,*

implique la convergence μ_a-presque partout de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n [\mathrm{Log}[1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n x + \lambda'_n y)})] - \\ - \int \mathrm{Log}[1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n t + \lambda'_n u)})] \, d\mu_a(t, u)] .$$

On en déduit le résultat suivant.

4.2.3. THEOREME. – *On suppose qu'existent deux nombres* A *et* B *tels que :* $0 < A \leqslant \dfrac{\lambda'_n}{\lambda_n} \leqslant B$ *pour tout n.*

1) *Si les hypothèses 2) ou 3) de la proposition précédente sont satisfaites en prenant* $\alpha_n = (\log(\lambda_n \lambda'_n))^{-1}$, *tout borélien* E *tel que* $\mu_a(E)$ *soit non nul à 2 pour dimension de Hausdorff.*

2) *Si les hypothèses 1) de la proposition précédente sont satisfaites, tout borélien* E *tel que* $\mu_a(E)$ *soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à*

$$2\left(1 - \limsup_{n \to \infty} [\mathrm{Log}(\lambda_n \lambda'_n)]^{-1} \int \log P_{a,n}(e^{it}, e^{iu}) \, d\mu_a(t, u)\right) .$$

En outre, il existe un borélien portant μ_a *dont la dimension de Hausdorff est inférieure à*

$$2\left(1 - \liminf_{n \to \infty} (\log(\lambda_{n+1} \lambda'_{n+1}))^{-1} \int \mathrm{Log}\, P_{a,n}(e^{it}, e^{iu}) \, d\mu_a(t, u)\right) .$$

4.2.4. On peut aussi obtenir des résultats lorsque la suite $\{(\lambda_j, \lambda'_j)\}_{j \geqslant 0}$ est la suite des images successives d'un couple d'entiers par une application linéaire.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients entiers rationnels dont les valeurs propres ne sont pas réelles ; on suppose aussi que $\alpha\delta - \beta\gamma$ est différent de 1. L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma = 0,$$

par hypothèse $(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)$ est strictement négatif. Le module des valeurs propres est $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$.

A définit un automorphisme u de $\mathbf{R}^2$ et, par passage au quotient, un homomorphisme T de $\mathbf{T}^2$ sur lui-même :

$$\mathrm{T}(e^{ix}, e^{iy}) = (e^{i(\alpha x+\beta y)}, e^{i(\gamma x+\delta y)}) .$$

On notera v le transposé de u, $\Gamma_n = v^n(\mathbf{Z}^2)$, $\widetilde{\mathrm{G}}_n = u^{-n}(2\pi\mathbf{Z}^2)$; G_n désigne le sous-groupe discret de $\mathbf{T}^2$, image de $\widetilde{\mathrm{G}}_n$ par la surjection canonique de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2$.

Soit (m_0, n_0) un point de $\mathbf{Z}^2$ telle que la suite $\{v^j(m_0, n_0)\}_{j\geqslant 0}$ soit dissociée (c'est évidemment le cas quels que soient m_0 et n_0 si $\sqrt{det\,\mathrm{A}}$ est supérieur à 3). Soit $a = \{a_j\}_{j\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que $\|a\|_\infty < 1$. Posons :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{a,k}(e^{ix}, e^{iy}) &= \prod_{j=0}^{k} (1 + \mathrm{Re}\,a_j \langle (m_0, n_0), \mathrm{T}^j(e^{ix}, e^{iy})\rangle) \\ &= \prod_{j=0}^{k} [1 + \mathrm{Re}\,a_j \langle v^j(m_0, n_0), (e^{ix}, e^{iy})\rangle] .\end{aligned}$$

La suite de mesures $\left\{\mathrm{P}_{a,k}(e^{ix}, e^{iy}) \dfrac{dx\,dy}{4\pi^2}\right\}_{k\geqslant 0}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité μ_a.

Posons $\mu_a^{(k)} = (\mathrm{P}_{a,k})^{-1}\mu_a$.

Observons que Γ_1 est strictement contenu dans Γ_0 et que l'on a : $\bigcap_{j\geqslant 0} \Gamma_j = \{(0, 0)\}$. Par conséquent on peut toujours se ramener au cas où (m_0, n_0) n'appartient pas à Γ_1, condition qui sera supposée satisfaite dans les démonstrations qui suivent.

Désignons par $\mathcal{A}_j$ la plus petite tribu sur $\mathbf{T}^2$ rendant mesurables les fonctions continues à spectre dans Γ_j et par E^j l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{A}_j$ lorsque l'on munit $\mathbf{T}^2$ de la probabilité μ_a.

4.2.5. LEMME. – *On suppose que* $2(m_0, n_0)$ *n'appartient pas à* Γ_1. *Si* (m, n) *appartient à* Γ_j *on a :*

1) $\mathrm{E}^{j+1}((m, n)) = 0$ *si* (m, n) *n'est congru modulo* Γ_{j+1} *ni à* 0 *ni à* $\pm v^j(m_0, n_0)$.

2) $\mathrm{E}^{j+1}(v^j(m_0, n_0)) = \dfrac{1}{2}\,\overline{a_j} \qquad \mathrm{E}^{j+1}(-v^j(m_0, n_0)) = \dfrac{1}{2}\,a_j$.

Démonstration. – On remarque d'abord que

$$\sum_{k=0}^{j-1} \epsilon_k v^k(m_0 , n_0), \quad (\epsilon_k \in \{-1 , 0 , 1\})$$

n'appartient à Γ_j que lorsque tous les ϵ_k sont nuls.

Soit (m' , n') dans Γ_{j+1}, si l'on a :

$$(m , n) + (m' , n') = \sum_{k \geqslant 0} \epsilon_k v^k(m_0 , n_0) ,$$

$(\epsilon_k \in \{-1 , 0 , 1\})$ la remarque précédente montre que

$$\epsilon_0 = \epsilon_1 = \cdots = \epsilon_{j-1} = 0 ,$$

par suite $(m , n) - \epsilon_j v^j(m_0 , n_0)$ appartient à Γ_{j+1}.

Ceci prouve la première assertion. Quant à la seconde elle résulte de ce qui précède et du fait que $v^j(m_0 , n_0)$ et $-v^j(m_0 , n_0)$ ne sont pas congrus modulo Γ_{j+1}.

La proposition suivante se déduit de ce lemme comme la proposition 2.5 se déduit de 2.2.

4.2.6. PROPOSITION. – *Les hypothèses du lemme précédent étant vérifiées, soit* $\{f_j\}_{j \geqslant 0}$ *une suite de fonctions de* A(T) *comme dans la proposition 2.5. Alors pour toute suite de carré sommable* $\{\alpha_j\}_{j \geqslant 0}$ *la série*

$$\sum_{j \geqslant 0} \alpha_j \left[f_j(\langle (m_0 , n_0) , \mathrm{T}^j(e^{ix} , e^{iy}) \rangle) - \right.$$

$$\left. - \int f_j(\langle (m_0 , n_0) , \mathrm{T}^j(e^{is} , e^{it}) \rangle) \, d\mu_a(s , t) \right]$$

converge pour μ_a*-presque tout* (x , y).

4.2.7. THEOREME. – *Sous les hypothèses précédentes*

1) *Tout borélien* E *tel que* $\mu_a(\mathrm{E})$ *soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à*

$$2 \left[1 - \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n \log(det\ \mathrm{A})} \int \log \mathrm{P}_{a,n} \, d\mu_a \right] .$$

2) *Il existe un borélien portant μ_a dont la dimension de Hausdorff est inférieure à*

$$2\left[1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n \log(\det \mathrm{A})} \int \log \mathrm{P}_{a,n}\, d\mu_a\right] .$$

Démonstration. – La proposition précédente montre que

$$\frac{1}{n}\left(\log \mathrm{P}_{a,n} - \int \log \mathrm{P}_{a,n}\, d\mu_a\right)$$

converge vers 0 μ_a-presque partout.

Soit (x_0, y_0) un élément de longueur minimum dans $\widetilde{\mathrm{G}}_1 \backslash \{(0,0)\}$. Soit (x_1, y_1) un élément de longueur minimum dans $\widetilde{\mathrm{G}}_1 \backslash \mathbf{Z}(x_0, y_0)$. Ces deux éléments forment une base du réseau $\widetilde{\mathrm{G}}_1$. Soit J_1 l'ensemble $\{t_0(x_0, y_0) + t_1(x_1, y_1) \ ; \ 0 \leqslant t_0 < 1,\ 0 \leqslant t_1 < 1\}$. L'intersection de $\widetilde{\mathrm{G}}_1$ et de J_1 est $\{(0,0)\}$; $u(x_0, y_0)$ et $u(x_1, y_1)$ forment une base de $2\pi\mathbf{Z}^2$. On en déduit que la restriction de T à la projection I_1 de J_1 sur $\mathbf{T}^2$ est une bijection de I_1 sur $\mathbf{T}^2$. Les ensembles $\{g + \mathrm{I}_1 \ ; g \in \mathrm{G}_1\}$ forment une partition de $\mathbf{T}^2$ en $\det$ A ensembles de mesures $(\det \mathrm{A})^{-1}$.

Posons $\mathrm{J}_n = u^{1-n}(\mathrm{J}_1)$, on a $|\mathrm{J}_n| = 4\pi^2 (\det \mathrm{A})^{-n}$; de plus comme u est conjugué d'une similitude de rapport $\sqrt{\det \mathrm{A}}$ il existe deux nombres c_1 et c_2 tels que

$$0 < c_1 \leqslant |\mathrm{J}_n| / [\text{diamètre}\,(\mathrm{J}_n)]^2 \leqslant c_2 .$$

Soit I_n la projection de J_n sur $\mathbf{T}^2$. Il est facile de vérifier que pour calculer la dimension de Hausdorff d'une partie de $\mathbf{T}^2$ il suffit de considérer des recouvrements au moyen d'ensembles de la famille $\{g + \mathrm{I}_n \ ; n \geqslant 1,\ g \in \mathrm{G}_n\}$.

T^n est une bijection de I_n sur $\mathbf{T}^2$, un changement de variables montre que si g appartient à G_n on a

$$\mu_a^{(n)}(g + \mathrm{I}_n) = (\det \mathrm{A})^{-n} .$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème 2.8.

4.3. Produits de Riesz sur R.

4.3.1. Soit $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $a=\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 et telle que $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geqslant 3$. On sait que le produit $\prod_{j\geqslant 0}(1+\mathrm{Re}(a_j\langle\lambda_j\,,x\rangle))$ définit une mesure μ_a sur le compactifié de Bohr de R. Cette mesure ne permet pas d'étudier le comportement de certaines séries sur R aussi est-on conduit aux considérations qui suivent.

4.3.2. Soit K une fonction positive intégrable sur **R** dont la transformée de Fourier, $\hat{\mathrm{K}}$, est positive, à support dans $\left[-\frac{1}{2}\lambda_0\,,\frac{1}{2}\lambda_0\right]$ et telle que $\hat{\mathrm{K}}(0)$ égale 1. On pose :

$$\mathrm{P}_{a,n}(x)=\prod_{j=0}^{n}(1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))$$

$$\mathrm{Q}_{a,n}(x)=\mathrm{K}(x)\,\mathrm{P}_{a,n}(x)\ .$$

Il est facile de voir que les mesures $\mathrm{Q}_{a,n}(x)\dfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ convergent vaguement vers une mesure que nous noterons $\nu_{a,\mathrm{K}}$ ou ν_a lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Plus précisément si ξ appartient à R et si $\left|\xi-\sum_{j\geqslant 0}\epsilon_j\lambda_j\right|\leqslant\frac{1}{2}\lambda_0$ (avec les conditions habituelles sur les ϵ_j). On a :

$$\hat{\nu}_{a,\mathrm{K}}(\xi)=\hat{\mathrm{K}}\Big(\xi-\sum_{j\geqslant 0}\epsilon_j\lambda_j\Big)\,\hat{\mu}_a\Big(\sum_{j\geqslant 0}\epsilon_j\lambda_j\Big)$$

et, si ξ n'a pas la propriété ci-dessus, $\hat{\nu}_{a,\mathrm{K}}(\xi)$ est nul.

4.3.3. La suite $\{e^{i\lambda_j x}-\hat{\nu}_a(-\lambda_j)\}_{j\geqslant 0}$ est orthogonale dans $\mathrm{L}^2(\nu_a)$. Il est facile de s'assurer que les résultats du chapitre I sont valables pour les mesures $\nu_{a,\mathrm{K}}$ (K fixe).

Passons maintenant à l'étude des dimensions de Hausdorff des boréliens portant $\nu_{a,\mathrm{K}}$.

On définit de même que précédemment, lorsque λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$:

$$\xi_n = \inf\left\{j \geqslant 0,\ \forall k \geqslant j,\ n \leqslant \lambda_{k+1}/\lambda_k - \frac{3}{2}\right\}.$$

4.3.4. PROPOSITION. – *On suppose que* λ_{n+1}/λ_n *tend vers* $+\infty$. *Soit* α *un nombre compris entre* 0 *et* 1 *tel que* $\|a\|_\infty \leqslant \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, *si* $\sum_{n\geqslant 1} \alpha^n \xi_n$ *est fini alors pour toute suite* $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *telle que*

$$\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n \log(n+2)|^2$$

soit fini la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \left[\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n x})) - \int \mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n t}))\, d\nu_{a,\mathrm{K}}(t)\right]$$

converge pour $\nu_{a,\mathrm{K}}$*-presque tout* x.

On en déduit le résultat suivant :

4.3.5. THEOREME. – 1) *Les hypothèses sur* $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 0}$ *et* a *étant celles de la proposition précédente, tout borélien borné,* E, *tel que* $\nu_{a,\mathrm{K}}(\mathrm{E})$ *soit non nul à* 1 *pour dimension de Hausdorff.*

2) *On a la même conclusion sous l'hypothèse :*

$$\sum_{n\geqslant p} |a_n|/\mathrm{Log}\,\lambda_n < \infty$$

(où p *est assez grand).*

4.4. Convergence vers la loi de Gauss.

On étend au cadre des produits de Riesz un résultat de R. Salem et A. Zygmund sur les séries trigonométriques lacunaires [10].

Soit $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 0}$ une suite d'entiers supérieurs à 1 et tels que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 5. Soit $a = \{a_j\}_{j\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1.

4.4.1. THEOREME. – *Soit* $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de nombres réels telle que* $A_n = \sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2)}$ et $A_n/|\alpha_n|$ *tendent vers* $+\infty$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$. *L'image de* μ_a *par la fonction* $\frac{1}{A_n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\left(\cos\lambda_j x - \frac{1}{2}\operatorname{Re} a_j\right)$ *converge étroitement vers la mesure* $e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

Preuve. – Il suffit de montrer que

$$F_n(t) = \int \exp\left[it \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\left(\cos\lambda_j x - \frac{1}{2}\operatorname{Re} a_j\right)/A_n\right] d\mu_a(x)$$

tend vers $e^{-\frac{t^2}{2}}$ uniformément sur tout compact.

Puisque $\exp z = (1+z)\exp\left(\frac{z^2}{2} + 0(|z|^2)\right)$ il suffit d'étudier la limite de

$$G_n(t) = \int \prod_{j=0}^{n}\left[\left(1 + \frac{it}{A_n}\alpha_j\cos\lambda_j x\right)\exp\left(-\frac{it\operatorname{Re} a_j}{2A_n}\right)\right]$$
$$\exp\left(\frac{-t^2}{2A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos^2\lambda_j x\right) d\mu_a(x)$$

or

$$\frac{1}{A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos^2\lambda_j x = 1 + \frac{1}{2A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos 2\lambda_j x\ .$$

Comme les fonctions $\{\cos 2\lambda_j x\}_{j\geqslant 0}$ sont orthogonales dans $L^2(\mu_a)$, (en effet λ_{j+1}/λ_j est supérieur à 5), le même argument que dans [10] montre que $G_n(t)$ a même limite que

$$e^{-\frac{t^2}{2}}\int \prod_{j=0}^{n}\left[\left(1 + \frac{it}{A_n}\alpha_j\cos\lambda_j x\right)\exp\left(-\frac{it\operatorname{Re} a_j}{2A_n}\right)\right] d\mu_a(x)\ .$$

Il suffit d'observer que

$$P_{a,n}(x) \prod_{j=0}^{n} \left(1 + \frac{it}{A_n} \alpha_j \cos \lambda_j x\right) =$$

$$= \prod_{j=0}^{n} \left[1 + \frac{it \operatorname{Re} a_j}{2A_n} + \beta_j \cos(\lambda_j x - \varphi_j) + \gamma_j \cos(2\lambda_j x - \psi_j)\right]$$

où β_j, γ_j, φ_j, ψ_j sont des nombres convenables, pour voir que

$$\prod_{j=0}^{n} \left(1 + \frac{it}{A_n} \alpha_j \cos \lambda_j x\right) d\mu_a(x) = \prod_{j=0}^{n} \left(1 + \frac{it \operatorname{Re} a_j}{2A_n}\right)$$

et l'on conclut facilement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BILLINGSLEY, Ergodic theory and information, Wiley (1965).

[2] G. BROWN, W. MORAN, On orthogonality of Riesz product. (à paraître).

[3] E. HEWITT and H.S. ZUCKERMAN, Singular measures with absolutely continuous squares, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 62 (1966), 399-420. Corringendum ibid. 63 (1967), 367-368.

[4] M. KAC, R. SALEM, A. ZYGMUND, A gap theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 235-243.

[5] J.-P. KAHANE et R. SALEM, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris (1963).

[6] Y. MEYER et B. WEISS, Les produits de Riesz sont des schémas de Bernoulli, *Journées ergodiques,* Rennes (1973).

[7] J. NEVEU, Calcul des probabilités, Masson (1964).

[8] O. PADE, Sur le spectre d'une classe de produits de Riesz, *C.R. Acad. Sc. Paris,* 276 (1973), 1453-1455.

[9] J. PEYRIERE, Sur les produits de Riesz, *C.R. Acad. Sc.* Paris, 276 (1973), 1417-1419.

[10] R. SALEM and A. ZYGMUND, On lacunary trigonometric series I, *Proc. Nat. Acad., Sc.,* 33 (1947), 333-338.

[11] A. ZYGMUND, Trigonometric series. I and II, Cambridge (1959).

Manuscrit reçu le 2 juillet 1974
accepté par J.P. Kahane.

Jacques PEYRIERE,
Université de Paris-Sud
Centre Scientifique d'Orsay
Mathématiques – 425
91405 – Orsay.