

ROBERT CAUTY

**Une méthode de construction squelette par squelette  
dans les espaces paracompacts**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 23, n° 1 (1973), p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1973\\_\\_23\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1973__23_1_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# UNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION SQUELETTE PAR SQUELETTE DANS LES ESPACES PARACOMPACTS

par Robert CAUTY

## Introduction.

L'un des procédés de construction les plus efficaces dans la théorie des CW-complexes est la méthode de récurrence sur les squelettes. Dans ses applications, il est souvent essentiel que chaque cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules de dimensions inférieures, car ceci permet, à chaque étape de la récurrence, de n'avoir "qu'un nombre fini de conditions" sur les objets que l'on cherche à construire.

Nous nous proposons de développer une méthode analogue dans le cadre des espaces paracompacts. Elle peut se schématiser comme suit : Soit  $\mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$  une famille de fermés recouvrant un espace  $X$  ; supposons chaque  $\mathcal{F}_n$  discrète et, pour  $n \geq 0$ , notons  $X_n$  la réunion des éléments des familles  $\mathcal{F}_p$  telles que  $p \leq n$ . Les  $X_n$  joueront le rôle des squelettes d'un CW-complexe et les éléments de  $\mathcal{F}_{n+1}$  celui des cellules de dimension  $n + 1$ . Pour que cette interprétation soit utile, il faut que chaque élément de  $\mathcal{F}_{n+1}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \mathcal{F}_p$ . Notre théorème principal montre que l'on peut toujours remplir cette dernière condition si  $X$  est paracompact.

Nous appliquons cette méthode au paragraphe deux au problème du prolongement de certaines fonctions continues et, au paragraphe trois, à l'existence de fonctions canoniques dans les nerfs de recouvrement fermés.

### 1. Le théorème fondamental.

Si  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  est une famille de sous-ensembles d'un espace topologique  $X$ , nous noterons  $\overline{\mathcal{V}}$  la famille  $\{\overline{V_i}\}_{i \in I}$  et nous appellerons  $\mathcal{V}^*$  la réunion de la famille  $\mathcal{V}$ . Nous dirons que  $\mathcal{V}$  est discrète si chaque point de  $X$  a un voisinage rencontrant au plus un élément de  $\mathcal{V}$ ; nous dirons que  $\mathcal{V}$  est  $\sigma$ -discrète si elle est réunion dénombrable de familles discrètes. Un espace séparé  $X$  est dit collectivement normal si, pour toute famille discrète  $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$  de fermés de  $X$ , il existe une famille discrète  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  d'ouverts de  $X$  telle que  $V_i$  contienne  $F_i$  quel que soit  $i$ .

**THEOREME 1.** — *Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert d'un espace paracompact  $X$ , il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{V}$  de  $X$  tel que  $\overline{\mathcal{V}}$  soit plus fin que  $\mathcal{U}$  et que  $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$  où chaque  $\mathcal{V}_n$  est une famille discrète telle que, pour tout  $n > 1$ , chaque élément de  $\overline{\mathcal{V}}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \overline{\mathcal{V}}_p$ .*

*Démonstration.* — La paracompacité de  $X$  implique l'existence d'un recouvrement ouvert  $\sigma$ -discret  $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$  (chaque  $\mathcal{G}_n$  est une famille discrète d'ouverts) tel que  $\mathcal{G}$  soit plus fin que  $\mathcal{U}$  (voir par exemple [2]). Nous allons construire par récurrence une suite croissante  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$  d'entiers et des familles discrètes  $\mathcal{V}_n (n \geq 1)$  d'ouverts vérifiant :

$$1) \quad \bigcup_{k=1}^{\alpha_n} \mathcal{V}_k^* \supset \bigcup_{k=1}^n \mathcal{G}_k^*$$

2) Chaque  $\overline{\mathcal{V}}_n$  est plus fine que  $\mathcal{U}$ .

3) Chaque élément de  $\overline{\mathcal{V}}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \overline{\mathcal{V}}_p$  ( $n > 1$ ).

Il sera alors clair que  $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$  a les propriétés demandées. Prenons  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{G}_1$  et  $\alpha_1 = 1$ . Supposons  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  définis ainsi que  $\mathcal{V}_k$  ( $k \leq \alpha_n$ ) pour  $n \geq 1$ . Pour définir  $\alpha_{n+1}$  et  $\mathcal{V}_{\alpha_{n+1}}, \dots, \mathcal{V}_{\alpha_{n+1}}$  nous avons besoin d'un résultat auxiliaire.

LEMME. 1 – Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert d'un espace collectivement normal  $X$ . Soient

$$\mathcal{G} = (G_i)_{i \in I}, \mathcal{H} = (H_j)_{j \in J} \text{ et } \mathcal{U}_k \ (k = 1, \dots, n)$$

des familles discrètes d'ouverts de  $X$  telles que

$$\overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{H}} \text{ et } \overline{\mathcal{U}}_k \ (k = 1, \dots, n)$$

soient plus fines que  $\mathcal{U}$ . Alors il existe deux familles discrètes d'ouverts de  $X$ ,  $\mathcal{M} = (M_j)_{j \in J}$  et  $\mathcal{N} = (N_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  vérifiant

i)  $\overline{\mathcal{M}}$  et  $\overline{\mathcal{N}}$  sont plus fines que

ii)  $\mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^* \supset \mathcal{H}^*$

iii) Aucun élément de  $\overline{\mathcal{M}}$  ne rencontre un élément de  $\overline{\mathcal{G}}$

iv) Chaque élément de  $\overline{\mathcal{N}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{G}}$  et de  $\overline{\mathcal{M}}$ .

(v) Si  $U_k \in \mathcal{U}_k$  et  $M_j \in \mathcal{M}$ , alors  $\overline{U}_k \cap \overline{M}_j \neq \emptyset$  implique  $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$ .

(vi) Si  $U_k \in \mathcal{U}_k$  et  $N_{i,j} \in \mathcal{N}$ , alors  $\overline{U}_k \cap \overline{N}_{i,j} \neq \emptyset$  implique  $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$  et  $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* – Puisque  $\overline{\mathcal{G}}$  est discrète et plus fine que  $\mathcal{U}$ , la normalité collective de  $X$  permet de trouver une famille discrète d'ouverts  $\mathcal{W} = \{W_i\}_{i \in I}$  telle que  $\overline{G}_i$  soit contenu dans  $W_i$  pour tout  $i$  appartenant à  $I$  et que  $\overline{\mathcal{W}}$  soit plus fine que  $\mathcal{U}$ . Puisque  $\overline{\mathcal{U}}_k$  est une famille discrète ( $k = 1, \dots, n$ ), la réunion des ensembles de  $\overline{\mathcal{U}}_k$  qui ne rencontrent pas  $\overline{G}_i$  est un fermé disjoint de  $\overline{G}_i$  ce qui permet de supposer en outre, quitte à prendre des  $W_i$  plus petits, que, si  $U_k \in \mathcal{U}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) et si  $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$ , alors  $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$ . Soit  $\mathcal{M}$  la famille des ensembles

$$M_j = H_j - (\overline{\mathcal{W}})^* \quad (j \in J).$$

$\mathcal{W}$  étant discrète,  $(\overline{\mathcal{W}})^*$  est fermé, donc ces ensembles sont ouverts. Puisque  $M_j$  est contenu dans  $H_j$  et que  $\mathcal{H}$  est discrète,  $\mathcal{M}$  est discrète. L'inclusion  $\overline{M}_j \subset \overline{H}_j$  ( $j \in J$ ) implique que  $\overline{\mathcal{M}}$  est plus fine que  $\mathcal{U}$ . Puisque, pour tout  $i$ ,  $\overline{G}_i \subset W_i \subset (\overline{\mathcal{W}})^*$  et que  $W_i$  est un

ouvert disjoint de chaque  $M_j$ , donc de chaque  $\overline{M}_j$ , la condition iii) est vérifiée. La condition v) est trivialement vérifiée.

Considérons la famille

$$\mathfrak{F} = \{\overline{H}_j \cap \overline{W}_i / j \in J, i \in I\}$$

de fermés de  $X$ . Cette famille est discrète car chaque point  $x$  de  $X$  a un voisinage rencontrant au plus un élément de  $\overline{\mathfrak{H}}$  et un voisinage rencontrant au plus un élément de  $\overline{\mathfrak{W}}$ ; l'intersection de ces voisinages rencontre au plus un élément de  $\mathfrak{F}$ . En outre,  $\mathfrak{F}$  est plus fine que  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{F}^* \cup \mathfrak{N}^*$  contient  $\mathfrak{H}^*$ . La normalité collective de  $X$  permet de trouver une famille discrète  $0 = \{0_{i,j}\}_{i \in I, j \in J}$  d'ouverts de  $X$  telle que  $\overline{H}_j \cap \overline{W}_i \subset 0_{i,j}$  et que  $0$  soit plus fine que  $\mathfrak{U}$ . Comme ci-dessus, nous pouvons supposer que si  $U_k \in \mathfrak{U}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) et si  $\overline{U}_k \cap \overline{0}_{i,j} \neq \emptyset$ , alors  $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$  et  $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$ .

Pour  $i$  appartenant à  $I$ , soit  $\mathfrak{W}_i = \{W_{i'}/i' \in I \text{ et } i' \neq i\}$  et pour  $j$  appartenant à  $J$ , soient  $\mathfrak{H}_j = \{H_{j'}/j' \in J \text{ et } j' \neq j\}$  et  $\mathfrak{M}_j = \{M_{j'}/j' \in J \text{ et } j' \neq j\}$ . Puisque  $\mathfrak{W}$  et  $\mathfrak{H}$  sont des familles discrètes, on a

$$\overline{W}_i \cap (\overline{\mathfrak{W}}_i)^* = \emptyset \text{ et } \overline{H}_j \cap (\overline{\mathfrak{H}}_j)^* \subset \overline{H}_j \cap (\overline{\mathfrak{H}}_j)^* = \emptyset,$$

donc il existe un voisinage ouvert  $A_{i,j}$  de  $\overline{H}_j \cap \overline{W}_i$  tel que

$$\overline{A}_{i,j} \cap ((\overline{\mathfrak{H}}_j)^* \cup (\overline{\mathfrak{W}}_i)^*) = \emptyset.$$

Soit  $\mathfrak{N}$  la famille des ensembles.

$$N_{i,j} = 0_{i,j} \cap A_{i,j}.$$

Puisque  $N_{i,j}$  est contenu dans  $0_{i,j}$ ,  $\mathfrak{N}$  est une famille discrète et  $\overline{\mathfrak{N}}$  est plus fine que  $\mathfrak{U}$ . Il est clair que  $\mathfrak{N}^* \cup \mathfrak{H}^* \supset \mathfrak{M}^* \cup \mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{H}^*$ . Si  $i$  appartient à  $I$  et si  $i' \neq i$ , alors  $\overline{W}_{i'} \subset (\overline{\mathfrak{W}}_i)^*$  donc  $\overline{W}_{i'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$  et, à fortiori,  $\overline{G}_{i'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$ ; de même, si  $j'$  appartient à  $J$  et si  $j' \neq j$ , alors  $\overline{M}_{j'} \cap \overline{N}_{i,j} = \emptyset$ ; ceci vérifie la condition iv). Enfin, si  $U_k \in \mathfrak{U}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) et si  $\overline{U}_k \cap \overline{N}_{i,j} \neq \emptyset$ , alors  $\overline{U}_k \cap \overline{0}_{i,j} \neq \emptyset$ , donc  $\overline{U}_k \cap \overline{H}_j \neq \emptyset$  et  $\overline{U}_k \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$ , d'où  $\overline{U}_k \cap \overline{G}_i \neq \emptyset$ . Le lemme est démontré.

Notons que les conditions v) et vi) impliquent que si chaque  $\overline{H}_j \in \overline{\mathfrak{H}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments d'une  $\overline{\mathfrak{U}}_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), alors chaque  $\overline{M}_j \in \overline{\mathfrak{M}}$  et chaque  $\overline{N}_{i,j} \in \overline{\mathfrak{N}}$  ne rencontre qu'un nombre

fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{U}}_k$ . En outre, si chaque élément de  $\overline{\mathcal{U}}_k$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{G}}$  et un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{H}}$ , alors chaque élément de  $\overline{\mathcal{U}}_k$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{M}}$  et de  $\overline{\mathcal{N}}$ .

Suite de la démonstration du théorème : Le lemme implique l'existence de deux familles discrètes d'ouverts,  ${}^1_1\mathcal{V}$  et  ${}^1_2\mathcal{V}$  vérifiant :

- 1)<sub>1</sub>  ${}^1_1\mathcal{V}^* \cup {}^1_2\mathcal{V}^* \supset \mathcal{G}_{n+1}^*$
- 2)<sub>1</sub>  ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$  et  ${}^1_2\overline{\mathcal{V}}$  sont plus fines que  $\mathcal{U}$
- 3)<sub>1</sub> Aucun élément de  ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre un élément de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$
- 4)<sub>1</sub> Chaque élément de  ${}^1_2\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  ${}^1_1\overline{\mathcal{V}}$  et de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$ .

Par récurrence, supposons définies, pour  $1 \leq k < \alpha_n$ , des familles discrètes d'ouverts

$${}^k_1\mathcal{V}, \dots, {}^k_{2^k}\mathcal{V}$$

vérifiant :

- 1)<sub>k</sub>  ${}^k_1\mathcal{V}^* \cup \dots \cup {}^k_{2^k}\mathcal{V}^* \supset \mathcal{G}_{n+1}^*$
- 2)<sub>k</sub> Chaque  ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$  est plus fine que  $\mathcal{U}$  ( $1 \leq i \leq 2^k$ ).
- 3)<sub>k</sub> Chaque élément de  ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k+1}, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$  ( $1 \leq i \leq 2^k$ )
- 4)<sub>k</sub> Chaque élément de  ${}^k_i\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  ${}^k_j\overline{\mathcal{V}}$  pour  $1 \leq j < i \leq 2^k$ .

Le lemme 1 et les remarques qui le suivent, appliqués en prenant  $\mathcal{G} = \mathcal{V}_{\alpha_n-k}$ ,  $\mathcal{H} = {}^k_{2^k}\mathcal{V}$  et pour  $\mathcal{U}_k$  les familles  ${}^k_\alpha\mathcal{V}$  ( $\alpha < 2^k$ ) et  $\mathcal{V}_p$  ( $\alpha_n - k + 1 \leq p \leq \alpha_n$ ), montrent l'existence de deux familles discrètes  ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\mathcal{V}$  et  ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\mathcal{V}$  vérifiant :

- i)<sub>2^k</sub>  ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\mathcal{V}^* \cup {}^{k+1}_{2^{k+1}}\mathcal{V}^* \supset {}^k_{2^k}\mathcal{V}^*$
- ii)<sub>2^k</sub>  ${}^{k+1}_{2^{k+1}-1}\overline{\mathcal{V}}$  et  ${}^{k+1}_{2^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}$  sont plus fines que  $\mathcal{U}$ .

iii)  ${}_{2^k}$  Aucun élément de  ${}_{2^{k+1-1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre un élément de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$

iv)  ${}_{2^k}$  Chaque élément de  ${}_{2^{k+1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$  et de  ${}_{2^{k+1-1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$

v)  ${}_{2^k}$  Chaque élément de  ${}_{2^{k+1-1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  et de  ${}_{2^{k+1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  ${}_{\alpha}^k\overline{\mathcal{V}}$  ( $\alpha < 2^k$ ) et de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k+1}, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$ .

Appliquons à nouveau le lemme 1 en prenant

$$\mathcal{G} = \mathcal{V}_{\alpha_n-k}, \mathcal{H} = {}_{2^{k-1}}^k\mathcal{V}$$

et pour  $\mathcal{U}_k$  les familles

$${}_i^k\mathcal{V} \ (i < 2^k - 1), \mathcal{V}_p \ (\alpha_n - k + 1 \leq p \leq \alpha_n), {}_{2^{k+1-1}}^{k+1}\mathcal{V} \ \text{et} \ {}_{2^{k+1}}^{k+1}\mathcal{V}.$$

On obtient deux familles discrètes d'ouverts,  ${}_{2^{k+1-3}}^{k+1}\mathcal{V}$  et  ${}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\mathcal{V}$  vérifiant :

$$i) {}_{2^{k-1}}^{k+1}\mathcal{V}^* \cup {}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\mathcal{V}^* \supset {}_{2^{k-1}}^k\mathcal{V}^*$$

$$ii) {}_{2^{k-1}}^{k+1}\mathcal{V} \ \text{et} \ {}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\mathcal{V} \ \text{sont plus fines que} \ \mathcal{U}.$$

iii)  ${}_{2^{k-1}}$  Aucun élément de  ${}_{2^{k+1-3}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre un élément de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$

iv)  ${}_{2^{k-1}}$  Chaque élément de  ${}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k}$  et de  ${}_{2^{k+1-3}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$

v)  ${}_{2^{k-1}}$  Chaque élément de  ${}_{2^{k+1-3}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  et de  ${}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de

$${}_{\alpha}^k\overline{\mathcal{V}} \ (\alpha < 2^k - 1) \ \text{et de} \ \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n-k+1}, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$$

vi)  ${}_{2^{k+1}}$  Chaque élément de  ${}_{2^{k+1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ou de  ${}_{2^{k+1-1}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  ${}_{2^{k+1-3}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$  et de  ${}_{2^{k+1-2}}^{k+1}\overline{\mathcal{V}}$ .

Continuons ainsi par récurrence descendante jusqu'à ce que l'on ait construit tous les  ${}^{k+1}\mathcal{V}_\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq 2^{k+1}$ ). Les conditions  $(1)_{k+1}$  à  $(4)_{k+1}$  se vérifient sans peine. Ceci achève de construire par récurrence les familles  ${}^k\mathcal{V}_i$  pour  $k \leq \alpha_n$  et  $i \leq 2^k$ . Posons alors

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2^{\alpha_n} \text{ et } \mathcal{V}_{\alpha_{n+1}} = {}^{\alpha_n}\mathcal{V}_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 2^{\alpha_n}$$

Alors les  $\mathcal{V}_{\alpha_{n+1}}$  sont des familles discrètes d'ouverts et chaque  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{n+1}}$  est plus fine que  $\mathcal{U}$  d'après  $(2)_{\alpha_n}$ . D'autre part,  $(1)_k$  ( $1 \leq k \leq 2^{\alpha_n}$ ) implique

$$\bigcup_{i=1}^{2^{\alpha_n}} \mathcal{V}_{\alpha_{n+1}}^* \supset \mathcal{G}_{n+1}^*$$

d'où

$$\bigcup_{p=1}^{\alpha_{n+1}} \mathcal{V}_p^* \supset \bigcup_{p=1}^{n+1} \mathcal{G}_p^*$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

D'après  $(3)_{\alpha_n}$  et  $(4)_{\alpha_n}$ , chaque élément de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{n+1}}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\overline{\mathcal{V}}_1, \dots, \overline{\mathcal{V}}_{\alpha_n}$  et de  $\overline{\mathcal{V}}_{\alpha_{n+j}}$  pour  $j < i$ . La construction par récurrence des  $\mathcal{V}_n$  est ainsi achevée c.q.d.f.

## 2. Application au prolongement de certaines fonctions continues.

Nous dirons qu'un espace topologique X a la propriété d'extension locale par rapport à un espace topologique Y si, pour tout fermé A de Y, toute fonction continue f de A dans X peut se prolonger à un voisinage de A dans Y (ce voisinage dépendant de f).

**THEOREME 2.** — Soient X un espace topologique et  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille de fermés de X ; soient Y un espace paracompact complètement normal, A un fermé de Y et  $f : A \rightarrow X$  continue. Supposons vérifiées les conditions suivantes :

1) Quels que soient  $i_1, \dots, i_n$  appartenant à I,  $\bigcap_{k=1}^n X_{i_k}$  a la propriété d'extension locale par rapport à Y.



2) Chaque point  $x$  de  $A$  a un voisinage  $U_x$  dans  $A$  tel que  $f(U_x)$  soit contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ .

Alors  $f$  peut se prolonger à un voisinage de  $A$  dans  $Y$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord que si  $i_1, \dots, i_n$  appartiennent à  $I$ , alors  $\bigcup_{k=1}^n X_{i_k}$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$ . Pour cela, il suffit de vérifier, par récurrence sur  $n$ , que si chacun des sous-ensembles  $Z_1, \dots, Z_n$  de  $X$  est l'intersection d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ , alors  $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$ . Cela est clair pour  $n = 1$ . Si cela est vrai pour  $n$ , alors  $\left(\bigcup_{i=1}^n Z_i\right) \cap Z_{n+1} = \bigcup_{i=1}^n Z_i \cap Z_{n+1}$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$  ainsi que  $\bigcup_{i=1}^n Z_i$  et  $Z_{n+1}$ ; d'après le lemme suivant,  $\bigcup_{i=1}^{n+1} Z_i$  a aussi cette propriété.

LEMME 2. — Soit  $X$  un espace topologique. Supposons que  $X$  soit réunion de deux fermés  $X_1$  et  $X_2$  et que  $X_1, X_2$  et  $X_0 = X_1 \cap X_2$  aient la propriété d'extension locale par rapport à un espace complètement normal  $Y$ . Alors  $X$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$ .

*Démonstration du lemme.* — Soient  $A$  un fermé de  $Y$  et  $f: A \rightarrow X$  continue; soit  $A_i = f^{-1}(X_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Alors  $A = A_1 \cup A_2$  et  $A_0 = A_1 \cap A_2$ . La complète normalité de  $Y$  permet de trouver des fermés  $Z_1, Z_2$  de  $Y$  tels-que

$$Y = Z_1 \cup Z_2$$

$$Z_i \cap A = A_i \quad i = 1, 2.$$

En effet,  $Y \setminus A_0$  étant normal, les fermés  $A_1 \setminus A_0$  et  $A_2 \setminus A_0$ , qui sont disjoints, sont contenus dans des ensembles  $O_2$  et  $O_1$  disjoints et ouverts dans  $Y \setminus A_0$ , donc dans  $Y$ . Il suffit de prendre

$$Z_i = Y \setminus O_i \quad (i = 1, 2).$$

Soit  $Z_0 = Z_1 \cap Z_2$ ; alors  $Z_0 \cap A = A_0$ . La fonction

$$f|_{A_0}: A_0 \rightarrow X$$

a un prolongement  $f_0 : \bar{W}_0 \rightarrow X_0 \subset X$ , où  $W_0$  est un voisinage ouvert de  $A_0$  dans  $Z_0$ . Pour  $i = 1, 2$ , la fonction  $f_i : A_i \cup \bar{W}_0 \rightarrow X_i$  définie par

$$\begin{cases} f_i|_{A_i} = f|_{A_i} \\ f_i|_{\bar{W}_0} = f_0 \end{cases}$$

est continue, donc a un prolongement  $g_i : V_i \rightarrow X_i$ , où  $V_i$  est un voisinage ouvert de  $A_i \cup \bar{W}_0$  dans  $Z_i$ . Soit

$$U_i = V_i \cap (Z_i \setminus (Z_0 \setminus W_0)) \quad i = 1, 2.$$

Puisque  $W_0$  est ouvert dans  $Z_0$ ,  $Z_0 \setminus W_0$  est fermé dans  $Z_0$ , donc dans  $Z_i$ ; par suite,  $U_i$  est ouvert dans  $Z_i$ . Puisque  $A_0$  est contenu dans  $W_0$ ,  $U_i$  contient  $A_i$ . Enfin, on vérifie que  $U_i \cap Z_0 = W_0$ . Posons

$$U = U_1 \cup U_2.$$

D'après ce qui précède,  $U$  contient  $A$  et  $U \cap Z_i = U_i$  qui est ouvert dans  $Z_i$ ; puisque  $Y$  est réunion des fermés  $Z_1$  et  $Z_2$ ,  $U$  est ouvert dans  $Z$ . Enfin, puisque  $U_1 \cap U_2 = W_0$  et que  $g_i|_{W_0} = f_0|_{W_0}$  ( $i = 1, 2$ ), on définit sans ambiguïté une fonction  $g : U \rightarrow X$  par

$$g|_{U_i} = g_i|_{U_i} \quad i = 1, 2,$$

qui prolonge évidemment  $f$ . Sa continuité résulte de la continuité de  $g_i|_{U_i}$  ( $i = 1, 2$ ) et du fait que  $U_i = U \cap Z_i$  est fermé dans  $U$ .  
c.q.f.d

*Suite de la démonstration du théorème 2.* — Pour tout  $x$  appartenant à  $A$ , soit  $U_x$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $A$  tel que  $f(U_x)$  soit contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ . Soit  $V_x$  un ouvert de  $Y$  tel que  $V_x \cap A = U_x$ . Soit  $\mathfrak{V}$  le recouvrement ouvert  $\{X \setminus A\} \cup \{V_x\}_{x \in A}$  de  $Y$ . D'après le théorème 1, il existe un recouvrement ouvert  $\mathfrak{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{W}_n$  de  $Y$ , où chaque  $\mathfrak{W}_n$  est une famille discrète, tel que  $\mathfrak{W}$  soit plus fin que  $\mathfrak{V}$  et que, quel que soit  $n$ , chaque élément de  $\mathfrak{W}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \mathfrak{W}_p$ . Soit  $\mathfrak{U} = \{W \in \mathfrak{W} / W \cap A \neq \emptyset\}$ . On peut écrire  $\mathfrak{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$ ,

où chaque  $\mathcal{U}_n$  est une famille discrète et chaque  $\bar{W}$  appartenant à  $\bar{\mathcal{U}}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \bar{\mathcal{U}}_p$ .

Définissons par récurrence une suite croissante  $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$  de fermés de  $Y$ , une suite  $\mathcal{U}'_n = \{W'/W \in \mathcal{U}_n\}$  de familles de fermés de  $Y$  ( $n \geq 1$ ) et des fonctions continues  $f_k : A_k \rightarrow Y$  vérifiant

i)  $A_0 = A$  et  $f_0 = f$

ii) Si  $W \in \mathcal{U}_n$ , alors  $W \cap A$  est contenu dans l'intérieur de  $A_n$ .

iii)  $A_n = A \cup \left( \bigcup_{p < n} \mathcal{U}'_p \right)^*$

iv) Pour tout  $W \in \mathcal{U}_n$ ,  $W' = \bar{W} \cap A_n$

v) Si  $W' \in \mathcal{U}'_n$ , alors  $f_n(W')$  est contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$

vi)  $f_{n+1}|_{A_n} = f_n$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

La condition i) définit  $A_0$  et  $f_0$ . Supposons  $A_0, \dots, A_n$  et  $f_0, \dots, f_n$  construits, ainsi que  $\mathcal{U}'_1, \dots, \mathcal{U}'_n$  (Pour  $n = 0$ , il n'y a pas de familles  $\mathcal{U}'_1, \dots, \mathcal{U}'_n$ , mais l'argument est analogue). Soit  $W$  un élément de  $\mathcal{U}_{n+1}$ . D'après la condition iii),

$$\bar{W} \cap A_n = (\bar{W} \cap A) \cup \left( \bigcup_{p < n} \bar{W} \cap (\bar{\mathcal{U}}'_p)^* \right).$$

Puisque  $\bar{W}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de chaque  $\bar{\mathcal{U}}_p$ , il ne rencontre, d'après la condition iv), qu'un nombre fini d'éléments de chaque  $\bar{\mathcal{U}}'_p$  ( $p \leq n$ ); la condition v) et le fait que la suite  $A_0, \dots, A_n$  est croissante impliquent que l'image par  $f_n$  d'un tel élément est contenue dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ ; comme en outre  $A \cap \bar{W}$  est contenu dans l'un des  $U_x$ , on voit que  $f_n(\bar{W} \cap A_n)$  est contenu dans la réunion  $Z$  d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ . Puisque  $Z$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$ , il y a un voisinage fermé  $W'$  de  $\bar{W} \cap A_n$  dans  $\bar{W}$  et un prolongement  $h_W : W' \rightarrow Z$  de

$$f_n|_{\bar{W} \cap A_n} \text{ à } W'. \text{ Soit } \mathcal{U}'_{n+1} = \{W'/W \in \mathcal{U}_{n+1}\}$$

et soit

$$A_{n+1} = A_n \cup \left( \bigcup_{W \in \mathcal{U}_{n+1}} W' \right).$$

Puisque  $\mathcal{U}_{n+1}$  est une famille discrète et que  $W'$  est contenu dans  $\overline{W}$ , la famille  $\mathcal{U}'_{n+1}$  est discrète, donc  $A_{n+1}$  est fermé. Il est clair que la condition iii) est vérifiée. Puisque  $W'$  est un voisinage de  $\overline{W} \cap A$  dans  $\overline{W}$ ,  $W' \cap W$  est un voisinage de  $W \cap A$  dans  $W$ ; comme  $W$  est ouvert, l'intérieur de  $W'$  contient  $W \cap A$ , donc la condition ii) est vérifiée. Puisque  $\mathcal{U}_{n+1}$  est discrète, la condition iv) se vérifie facilement.

Définissons  $f_{n+1} : A_{n+1} \rightarrow X$  par

$$f_{n+1}|A_n = f_n$$

$$f_{n+1}|W' = h_W \quad (W \in \mathcal{U}_{n+1})$$

Cette définition a un sens puisque

$$h_W|W' \cap A_n = h_W|\overline{W} \cap A_n = f_n|\overline{W} \cap A_n$$

et que, si  $W, W_1$  appartiennent à  $\mathcal{U}_{n+1}$  et si  $W \neq W_1$ ,

$$W' \cap W'_1 \subset \overline{W} \cap \overline{W}_1 = \emptyset.$$

La continuité de  $f_{n+1}|U'^*_{n+1}$  résulte de la continuité des  $h_W$  ( $W \in \mathcal{U}_{n+1}$ ) et du fait que la famille  $\mathcal{U}'_{n+1}$  est discrète. Puisque  $f_{n+1}|A_n$  est aussi continue et que  $A_{n+1}$  est réunion des deux fermés  $A_n$  et  $U'^*_{n+1}$ ,  $f_{n+1}$  est continue. Si  $W$  appartient à  $\mathcal{U}_{n+1}$ , alors  $f_{n+1}(W')$  est, par construction, contenu dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ , donc la condition v) est vérifiée et la récurrence est achevée.

Posons alors

$$0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Int } A_n.$$

D'après ii) et le fait que  $\mathcal{U}$  recouvre  $A$ ,  $0$  est un voisinage de  $A$ . D'après vi), on définit sans ambiguïté une fonction  $g : 0 \rightarrow X$  par

$$g| \text{Int } A_n = f_n| \text{Int } A_n \quad (n \geq 1).$$

Cette fonction est continue car chaque  $f_n$  est continue et  $(\text{Int } A_n)_{n=1}^{\infty}$  est un recouvrement ouvert de  $0$ ; en outre, elle prolonge  $f$  d'après i) et vi). c.q.d.f.

O. Hanner a construit [3] un exemple d'espace compact  $X$  qui est réunion de deux fermés  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $X_1, X_2$  et  $X_1 \cap X_2$

soient des rétractes absolus dans la catégorie des espaces compacts, mais que  $X$  ne soit pas un rétracte absolu de voisinage dans cette catégorie. Cet exemple montre que la complète normalité joue un rôle essentiel dans le lemme 2 et le théorème 2.

La condition de complète normalité sur  $Y$  sert seulement à garantir que la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$  a la propriété d'extension locale par rapport à  $Y$  ; on peut donc la remplacer par tout autre condition garantissant cette affirmation. Notons aussi que le prolongement  $g$  que nous avons construit dans la démonstration du théorème 2 est tel que tout point  $x$  de  $0$  a un voisinage dont l'image par  $g$  est contenue dans la réunion d'une sous-famille finie de  $\{X_i\}_{i \in I}$ . Ces remarques démontrent le

**COROLLAIRE.** — *Soient  $K$  un CW-complexe,  $Y$  un espace paracompact,  $A$  un fermé de  $Y$  et  $f : A \rightarrow K$  une fonction continue localement finie. Alors il y a un prolongement localement fini de  $f$  à un voisinage de  $A$  dans  $Y$ .*

(Nous disons qu'une fonction  $f$  d'un espace topologique  $X$  dans un CW-complexe  $K$  est localement finie si tout point de  $X$  a un voisinage dont l'image par  $f$  est contenue dans un sous-complexe fini de  $K$ ).

En particulier, il résulte de ce corollaire que si un sous-ensemble fermé  $A$  d'un espace paracompact  $Y$  est localement compact ou vérifie le premier axiome de dénombrabilité, alors toute fonction continue de  $A$  dans un CW-complexe peut se prolonger à un voisinage de  $A$  dans  $Y$ .

Nous dirons qu'un espace topologique  $X$  est un R.A.V. (compact) s'il est compact et s'il a la propriété d'extension locale par rapport à tous les espaces compacts.

**THEOREME 3.** — *Soit  $X$  un espace séparé tel que tout sous-ensemble compact de  $X$  soit contenu dans un sous-ensemble de  $X$  qui est un R.A.V. (compact). Alors, si  $A$  est un sous-ensemble fermé localement compact d'un espace paracompact  $Y$ , toute fonction continue de  $A$  dans  $X$  peut se prolonger à un voisinage de  $A$  dans  $Y$ .*

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2. Les seules modifications à faire sont les suivantes :

a) Prendre pour  $U_x (x \in A)$  un voisinage tel que  $f(U_x)$  soit relativement compact dans  $X$  (donc contenu dans un R.A.V. (compact), lequel a, comme il est connu, la propriété d'extension locale par rapport à tout espace normal, donc par rapport à  $Y$ ),

b) Remplacer la condition v) par v') : Si  $W' \in \mathcal{U}'_n$ , alors  $f_n(W')$  est relativement compact dans  $X$ .

Le théorème 3 a diverses variantes, parmi lesquelles le théorème suivant que l'on peut démontrer en modifiant de façon évidente la démonstration du théorème 3 :

**THEOREME 4.** — *Soit  $(E, p, B)$  un fibré localement trivial dont la base  $B$  est paracompacte et la fibre  $F$  a les propriétés imposées à  $X$  au théorème 3. Alors, si  $A$  est un sous-ensemble fermé localement compact de  $B$ , toute section de  $p$  au-dessus de  $A$  peut se prolonger à un voisinage de  $A$  dans  $B$ .*

### 3. Applications canoniques dans les nerfs de recouvrements fermés.

Si  $K$  est un complexe simplicial et  $\sigma$  un simplexe de  $K$ , nous noterons  $[\sigma]$  le barycentre de  $\sigma$ . Nous appellerons  $Lk_K(\sigma)$ , ou  $Lk(\sigma)$ , le sous-complexe de la subdivision barycentrique  $K'$  de  $K$  formé des simplexes  $([\sigma_1], \dots, [\sigma_s])$  tels que  $\sigma < \sigma_1 < \dots < \sigma_s$  ( $\sigma < \tau$  signifie que  $\sigma$  est une face propre de  $\tau$ ) et nous noterons  $Tr_K(\sigma)$ , ou  $Tr(\sigma)$ , le joint de  $[\sigma]$  et de  $Lk(\sigma)$  ;  $Tr(\sigma)$  est donc formé des simplexes de  $K'$  de la forme  $([\sigma], [\sigma_1], \dots, [\sigma_s])$  où  $\sigma < \sigma_1 < \dots < \sigma_s$  et de toutes leurs faces. Il est clair que si  $L$  est un sous-complexe de  $K$  et  $\sigma$  un simplexe de  $L$ , alors  $Lk_L(\sigma)$  et  $Tr_L(\sigma)$  sont des sous-complexes de  $Lk_K(\sigma)$  et  $Tr_K(\sigma)$  resp.

Si  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est une famille de sous-ensembles d'un espace topologique et si  $\sigma = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est un simplexe du nerf  $N(\mathcal{U})$  de  $\mathcal{U}$ , nous noterons  $Car(\sigma)$  l'ensemble  $\bigcap_{i=0}^n U_{\alpha_i}$ . Si  $Y$  est un sous-espace de  $X$ , nous noterons  $\mathcal{U}|Y$  la famille  $\{U_\alpha \cap Y\}_{\alpha \in A}$  de sous-ensembles de  $Y$  ; alors  $N(\mathcal{U}|Y)$  est un sous-complexe de  $N(\mathcal{U})$ .

Le théorème suivant a été prouvé par J. Dugundji [1] dans le cas où  $X$  est un espace métrique et où le nerf de  $\mathfrak{F}$  est localement de dimension finie.

**THEOREME 5.** — Soit  $X$  un espace paracompact et soit  $\mathfrak{F}$  un recouvrement fermé localement fini de  $X$  dont les éléments sont du type  $G_\delta$  dans  $X$ . Alors il y a une fonction continue  $\lambda : X \rightarrow N(\mathfrak{F})$  telle que  $\lambda^{-1}(\text{Tr } \sigma) = \text{Car}(\sigma)$  pour tout simplexe  $\sigma$  de  $N(\mathfrak{F})$ .

*Démonstration.* — Puisque  $\mathfrak{F}$  est localement fini, on peut, à l'aide du théorème 1, trouver un recouvrement ouvert  $\mathfrak{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{V}_n$  de  $X$  tel que chaque  $\mathfrak{V}_n$  soit une famille discrète, que, quel que soit  $n > 1$ , chaque élément de  $\mathfrak{V}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \mathfrak{V}_p$  et que chaque élément de  $\mathfrak{V}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\mathfrak{F}$ . On sait que si  $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est un recouvrement ouvert d'un espace paracompact, alors il existe un recouvrement fermé  $\mathfrak{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , dont les éléments sont du type  $G_\delta$ , tel que  $U'_\alpha$  soit contenu dans  $U_\alpha$  quel que soit  $\alpha$  et que les intérieurs des  $U'_\alpha$  ( $\alpha \in A$ ) recouvrent  $X$ . En appliquant ceci au recouvrement ouvert  $\mathfrak{V}$ , on voit que l'on peut trouver une famille  $\mathfrak{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{G}_n$  de  $G_\delta$  fermés de  $X$  vérifiant :

- 1) Chaque  $\mathfrak{G}_n$  est une famille discrète.
- 2) Chaque élément de  $\mathfrak{G}_n$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\bigcup_{p < n} \mathfrak{G}_p$ .
- 3) Les intérieurs des éléments de  $\mathfrak{G}$  recouvrent  $X$ .
- 4) Chaque élément de  $\mathfrak{G}$  ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de  $\mathfrak{F}$ .

Pour  $n \geq 1$ , posons  $G_n = \mathfrak{G}_1^* \cup \dots \cup \mathfrak{G}_n^*$  ; par commodité, posons aussi  $G_0 = \emptyset$ . Les familles  $\mathfrak{G}_n$  étant discrètes, les  $G_n$  sont des fermés du type  $G_\delta$ . Nous allons construire, pour tout entier  $n \geq 0$ , une fonction continue  $\lambda_n : G_n \rightarrow N(\mathfrak{F})$  de façon que

$$5) \lambda_n^{-1}(\text{Tr } \sigma) = \text{Car}(\sigma) \cap G_n.$$

6) Pour tout élément  $G$  de  $\mathfrak{G}_n$ ,  $\lambda_n(G)$  est contenu dans un sous-complexe fini de  $N(\mathfrak{F})$ .

7)  $\lambda_{n+1}|G_n = \lambda_n$  quel que soit  $n$ .

Cela étant, la condition 7) permettra de définir une fonction  $\lambda$  de  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  dans  $N(\mathcal{F})$  par  $\lambda|G_n = \lambda_n$  quel que soit  $n$ . La continuité de  $\lambda$  résultera de la continuité des  $\lambda_n$  et de 3). Enfin, 5) garantira que  $\lambda$  satisfait à la condition du théorème.

Reste à construire les  $\lambda_n$ . Puisque  $G_0$  est vide, il n'y a pas de problème pour construire  $\lambda_0$ . Nous allons donc construire  $\lambda_{n+1}$  en supposant  $\lambda_n$  déjà construite. Soit  $G$  un élément de  $\mathcal{G}_{n+1}$ . D'après 2) et 6), l'ensemble  $\lambda_n(G \cap G_n)$  est contenu dans un sous-complexe fini de  $N(\mathcal{F})$ . Soit  $L_G = N(\mathcal{F}|G)$  ; d'après 4), c'est un sous-complexe fini de  $N(\mathcal{F})$ . Si  $\sigma$  est un simplexe de  $L_G$ , soit  $d_G(\sigma) = \dim L_G - \dim \sigma$ . Posons

8)  $A_k = \cup \{ \text{Car}(\sigma) \cap G / \sigma \in L_G \text{ et } d_G(\sigma) \leq k \} \quad 0 \leq k \leq \dim L_G$ .

Convenons que  $A_{-1}$  est vide ; alors les  $A_k$  sont des fermés de  $G$  et l'on a

9)  $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{\dim L_G} = G$

Nous allons définir des fonctions continues

$\lambda_{G,k} : (G \cap G_n) \cup A_k \rightarrow N(\mathcal{F}) \quad (-1 \leq k \leq \dim L_G)$

de façon que

10)  $\lambda_{G,k}|G \cap G_n = \lambda_n|G \cap G_n$

11)  $\lambda_{G,k}^{-1}(\text{Tr } \sigma) = \text{Car}(\sigma) \cap G$  pour tout  $\sigma \in L_G$  avec  $d_G(\sigma) \leq k$

12)  $\lambda_{G,k}|A_{k-1} = \lambda_{G,k-1}|A_{k-1}$

13)  $\lambda_{G,k}((G \cap G_n) \cup A_k)$  est contenu dans un sous-complexe fini de  $N(\mathcal{F})$ .

Pour  $k = -1$ , prenons  $\lambda_{G,k} = \lambda_n|G \cap G_n$ . Soit  $k < \dim L_G$  et supposons  $\lambda_{G,k}$  construite. Notons que si  $\sigma, \sigma'$  sont deux simplexes distincts de  $L_G$  avec  $d_G(\sigma) = k + 1 = d_G(\sigma')$ , alors  $\text{Car}(\sigma) \cap \text{Car}(\sigma') \cap G$  est contenu dans  $A_k$ . Ceci résulte du fait que si

$$\text{Car}(\sigma) \cap \text{Car}(\sigma') \cap G \neq \emptyset,$$



alors  $\text{Car}(\sigma) \cap \text{Car}(\sigma') = \text{Car}(\tau)$  où  $\tau$  est le plus petit simplexe de  $N(\mathfrak{F})$  contenant à la fois  $\sigma$  et  $\sigma'$  ; mais alors  $\tau$  appartient à  $L_G$  et, puisque  $\sigma$  est une face propre de  $\tau$ , on a  $d_G(\tau) < d_G(\sigma)$ . Il suffit donc, pour construire  $\lambda_{G,k+1}$ , de prolonger séparément  $\lambda_{G,k}$  à chacun des  $\text{Car}(\sigma) \cap G$  tels que  $\sigma \in L_G$  et  $d_G(\sigma) = k + 1$ .

Pour cela, remarquons que, pour un tel  $\sigma$ ,  $\lambda_{G,k}(\text{Car}(\sigma) \cap A_k)$  est contenu dans  $\text{Lk}(\sigma)$ . En effet, si  $y$  appartient à  $\text{Car}(\sigma) \cap A_k$ , alors  $y$  appartient à  $\text{Car}(\sigma) \cap \text{Car}(\tau) \cap G$  pour quelque  $\tau \in L_G$  avec  $d_G(\tau) \leq k$ . Alors, il y a un simplexe  $\rho$  de  $L_G$  contenant à la fois  $\sigma$  et  $\tau$  ; on a  $d_G(\rho) \leq d_G(\tau) \leq k$ , donc  $\lambda_{G,k}(y) \in \text{Tr}(\rho) \subset \text{Lk}(\sigma)$  (Car lorsque  $\sigma < \rho$ , on a  $\text{Tr}(\rho) \subset \text{Lk}(\sigma)$ ). Alors  $\lambda_{G,k}(((G \cap G_n) \cup A_k) \cap \text{Car}(\sigma))$  est, d'après 13), contenu dans un sous-complexe fini de  $\text{Lk}(\sigma)$ . Soit  $K_\sigma$  le joint de  $[\sigma]$  et de ce sous-complexe. Puisque  $K_\sigma$  est un complexe fini contractile, il a la propriété d'extension par rapport aux espaces normaux, donc il existe une fonction continue  $\Psi_\sigma : \text{Car}(\sigma) \cap G \rightarrow K_\sigma$  prolongeant  $\lambda_{G,k}|((G \cap G_n) \cup A_k) \cap \text{Car}(\sigma)$ . Il résulte facilement du fait que chaque élément de  $\mathfrak{F}$  ou  $\mathfrak{G}$  est un  $G_\delta$  que l'ensemble  $(G \cap G_n) \cup A_k$  est un  $G_\delta$  dans  $X$ . Par suite, il existe une fonction continue  $c_\sigma : \text{Car}(\sigma) \rightarrow I$  telle que  $c_\sigma^{-1}(0) = ((G \cap G_n) \cup A_k) \cap \text{Car}(\sigma)$ . Soit  $\varphi_\sigma : \text{Car}(\sigma) \cap G \rightarrow N(\mathfrak{F})$  la fonction définie par

$$14) \quad \varphi_\sigma(y) = c_\sigma(y) \cdot [\sigma] + (1 - c_\sigma(y)) \Psi_\sigma(y).$$

Puisque  $\varphi_\sigma$  prend ses valeurs dans le complexe fini  $K_\sigma$ , elle est continue. Définissons alors  $\lambda_{G,k+1}$  par

$$15) \quad \begin{aligned} \lambda_{G,k+1}|((G \cap G_n) \cup A_k) &= \lambda_{G,k} \\ \lambda_{G,k+1}|\text{Car}(\sigma) \cap G &= \varphi_\sigma \text{ pour } \sigma \in L_G \text{ avec } d_G(\sigma) = k + 1 \end{aligned}$$

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de simplexes  $\sigma$ ,  $\lambda_{G,k+1}$  est continue et son image est contenue dans un sous-complexe fini de  $N(\mathfrak{F})$ . Montrons que, pour tout simplexe  $\tau$  de  $L_G$  tel que  $d_G(\tau) \leq k + 1$ , on a  $\lambda_{G,k+1}^{-1}(\text{Tr}(\tau)) = \text{Car}(\tau) \cap G$ . Si  $d_G(\tau) \leq k$  et si  $\sigma \in L_G$  vérifie  $d_G(\sigma) = k + 1$ , alors  $\text{Tr}(\tau) \cap \text{Tr}(\sigma)$  ne contient pas  $[\sigma]$  (car sinon  $\tau$  serait une face de  $\sigma$  et l'on aurait  $d_G(\sigma) \leq d_G(\tau)$ ) donc  $\text{Tr}(\tau) \cap \text{Tr}(\sigma)$  est un sous-complexe de  $\text{Lk}(\sigma)$ . Puisque  $\lambda_{G,k+1}$  n'envoie aucun point de  $\text{Car}(\sigma) \cap G \setminus ((G \cap G_n) \cup A_k)$  dans  $\text{Lk}(\sigma)$ , on a

$$\lambda_{G,k+1}^{-1}(\text{Tr}(\tau)) = \lambda_{G,k}^{-1}(\text{Tr}(\tau)) = \text{Car}(\tau) \cap G.$$

Si  $d_G(\tau) = k + 1$ , il est clair, d'après la construction, que  $\lambda_{G,k+1}^{-1}(\text{Tr}(\tau))$  contient  $\text{Car}(\tau) \cap G$ . Inversement, soit  $y$  un point de  $(G \cap G_n) \cup A_k$  tel que  $\lambda_{G,k+1}(y)$  appartienne à  $\text{Tr}(\sigma)$ . Si  $y$  appartient à  $G_n$  ou à  $A_{k+1} \setminus A_k$ , il est clair que  $y$  appartient à  $\text{Car}(\tau)$ . Si  $y$  appartient à  $A_k \setminus G_n$ , alors, d'après la construction des  $\lambda_{G,k}$ , il existe un  $l \leq k$  et un simplexe  $\sigma$  de  $L_G$  tels que  $\lambda_{G,k+1}(y) = \lambda_{G,l}(y)$  appartienne à  $\text{Tr}(\sigma) \setminus \text{Lk}(\sigma)$ . Alors  $[\sigma]$  est un sommet de  $\text{Tr}(\tau)$ , i.e.  $\tau < \sigma$ , donc, d'après l'hypothèse de récurrence,  $y \in \text{Car}(\sigma) \subset \text{Car}(\tau)$ .

La construction par récurrence des  $\lambda_{G,k}$  étant ainsi achevée, définissons une fonction  $\lambda_{n+1} : G_{n+1} \rightarrow N(\mathfrak{F})$  par

$$16) \quad \begin{aligned} \lambda_{n+1}|_{G_n} &= \lambda_n \\ \lambda_{n+1}|_G &= \lambda_{G, \dim L_G} \text{ pour } G \in \mathfrak{G}_{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathfrak{G}_{n+1}$  est discrète, il est clair que  $\lambda_{n+1}|_{\mathfrak{G}_{n+1}^*}$  est continue ; comme  $G_n$  et  $\mathfrak{G}_{n+1}^*$  sont fermés,  $\lambda_{n+1}$  est continue sur

$$G_{n+1} = G_n \cup \mathfrak{G}_{n+1}^*.$$

La condition 13), appliquée à  $h = \dim L_G$ , montre que  $\lambda_{n+1}$  vérifie la condition 6). Soit  $\sigma$  un simplexe de  $N(\mathfrak{F})$  ; alors

$$\lambda_{n+1}^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) \cap G_n = \lambda_n^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) = \text{Car}(\sigma) \cap G_n,$$

donc, pour montrer que  $\lambda_{n+1}^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) = \text{Car}(\sigma) \cap G_{n+1}$ , il suffit de montrer que  $\lambda_{n+1}^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) \cap G = \text{Car}(\sigma) \cap G$  quel que soit  $G$  appartenant à  $\mathfrak{G}_{n+1}$ . Si  $\sigma$  appartient à  $L_G$ , ceci résulte de 11) et 16). Sinon,  $\text{Car}(\sigma) \cap G$  est vide donc, puisque  $\lambda_n$  vérifie 5),  $\lambda_{n+1}^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) \cap G$  est contenu dans  $G \setminus G_n$ . D'après 16) et la construction des  $\lambda_{G,k}$ , si  $y$  est un point de  $G \setminus G_n$ , il existe un simplexe  $\tau$  de  $L_G$  tel que

$$\lambda_{n+1}(y) = \lambda_{G,k}(y)$$

appartienne à  $\text{Tr}(\tau) \setminus \text{Lk}(\tau)$ . Si  $\lambda_{n+1}(y)$  appartenait à  $\text{Tr}(\sigma)$ ,  $[\tau]$  serait un sommet de  $\text{Tr}(\sigma)$ , donc  $\sigma$  serait une face de  $\tau$  et, d'après 11),  $y$  appartiendrait à  $\text{Car}(\tau) \subset \text{Car}(\sigma)$  contrairement au fait que  $\text{Car}(\sigma) \cap G$  est vide, ce qui montre que  $\lambda_{n+1}^{-1}(\text{Tr}(\sigma)) \cap G$  est vide, donc égal à  $\text{Car}(\sigma) \cap G$ . Par conséquent,  $\lambda_{n+1}$  vérifie 5). La construction des  $\lambda_n$ , donc aussi la démonstration, est achevée.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DUGUNDJI, Maps Into nerves of closed coverings, Annali della Scuola Normale Superiore di Pise (3) 21 (1967) p. 121-136.
- [2] R. ENGELKING, Outline of general topology, North Holland 1968.
- [3] O. HANNER, Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces, Ark. för Mat. 2 (1952) p. 315-360.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1972  
article accepté par J.L. Koszul

Robert CAUTY  
88, rue de Clichy  
Paris 9<sup>ème</sup>  
et Université Paris VI