

GÉRARD CŒURÉ

**Fonctionnelles analytiques sur certains
espaces de Banach**

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 2 (1971), p. 15-21

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_2_15_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTIONNELLES ANALYTIQUES SUR CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Gérard CŒURÉ

Soit B un espace de Banach, on peut mettre sur l'espace $H(B)$ des fonctions analytiques sur B , deux topologies intéressantes : celle H_ω définie par les semi-normes portées par les compacts [1] et celle H_c [2] qui si B est séparable est la topologie bornologique associée à la topologie de la convergence compacte.

S. Dineen démontre [3] que ces deux topologies coïncident si B est un C_0 -module ce qui nécessite entre autre que B ait une base. On démontre ici que ce résultat est encore vrai si B est un sous-espace homogène au sens de Silow de $L^1(\pi)$ où π est le tore à une dimension. L'espace H^1 de Hardy, par exemple, est un tel espace dont on ne sait pas [4] s'il possède une base.

$H_c(B)$ et $H_\omega(B)$ ayant d'après [5] les mêmes bornés, le résultat annoncé est équivalent au théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit B un sous-espace homogène de $L^1(\pi)$, soit T une application linéaire continue de $H_c(B)$ dans un espace de Banach E , alors T est porté par un compact, c'est-à-dire est continue dans l'espace $H_\omega(B)$.*

La démonstration est décomposée en un certain nombre de propositions et de lemmes. Rappelons que B est un sous-espace homogène de $L^1(\pi)$ si

- a) l'opérateur de translation est une isométrie sur B ;
- b) si l'application : $t \rightarrow x_t$ à valeurs dans B est continue, où x_t désigne la translatée : $\theta \rightarrow x(\theta - t)$;
- c) la norme dans B majore celle dans L^1 .

Dans ces conditions [6], les sommes de Césaro σ_n sont des opérateurs bornés, de normes 1, sur B , qui convergent fortement vers l'identité.

Soit F un espace de Banach; on se donne une suite σ_n dans $L(F)$ formée d'opérateurs de rangs finis, de normes inférieures à 1, commutant 2 à 2. On désigne par $1 - \sigma_n/F_k$ la restriction de $1 - \sigma_n$ à $F_k = \sigma_k(F)$.

PROPOSITION 1. — *Si quel que soit k , $\|1 - \sigma_n/F_k\|$ est le terme général d'une série convergente alors l'opérateur*

$\Sigma_n = \prod_1^n [\lambda + (1 - \lambda)\sigma_i]$ *converge en norme vers un opérateur compact pour tout: $0 \leq \lambda < 1$.*

Démonstration. — a) On démontre d'abord cette proposition sur chaque sous-espace F_k .

Le spectre de $1 - \sigma_i/F_k$ est pour i assez grand contenu dans un cercle de rayon $\frac{1}{1 - \lambda}$, on a donc dans ces conditions :

$$\Pi[\lambda + (1 - \lambda)\sigma_i]/F_k = \exp \{ \Sigma \text{Log} [1 + (\lambda - 1)(1 - \sigma_i)]/F_k \},$$

or la norme de $\text{Log} [1 + (\lambda - 1)(1 - \sigma_i)/F_k]$ est majorée par $-\text{Log} [1 - (1 - \lambda)\|1 - \sigma_i/F_k\|]$, cette dernière quantité étant le terme général d'une série convergente, l'opérateur Σ_n/F_k converge en norme dans $L(F_k)$.

b) Σ_n peut s'écrire: $\Sigma_n = \sum_{p=0}^{p=n} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p \sum_{\tau \in \Lambda_p(n)} \pi_\tau(\sigma)$ où: $\Lambda_p(n)$ est l'ensemble des combinaisons p à p des n premiers entiers, $\pi_\tau(\sigma) = \sigma_{\tau(1)} \dots \sigma_{\tau(p)}$. Soit ${}_{\kappa}\Lambda_p(n)$ l'ensemble des éléments de $\Lambda_p(n)$ prenant une valeur $\leq K$, K étant choisi tel que $\lambda^K < \varepsilon$.

Si $\bigcup_{n, \kappa} = \sum_{p=0}^{p=n} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p \sum_{\tau \in {}_{\kappa}\Lambda_p(n)} \pi_\tau(\sigma)$, on vérifie les relations suivantes :

$$\left\| \Sigma_n - \bigcup_{n, \kappa} \right\| \leq \sum_{p=0}^{p=n-K} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p C_{n-K}^p = \lambda^K < \varepsilon$$

$$\bigcup_{n, \kappa} = \sum_{i=1}^{i=K} W_{n, i}^{\kappa} \cdot \sigma_i \text{ avec } W_{n, i}^{\kappa} = (1 - \lambda)\lambda^i \prod_{n \geq j \geq i} (\lambda + (1 - \lambda)\sigma_j).$$

Les opérateurs $W_{n, i}^{\kappa}$ convergent en norme sur $\sigma_i(F)$

lorsque n tend vers l'infini d'après le a), il existe donc un entier N tel que $\left\| \bigcup_{n, k} - \bigcup_{m, k} \right\| < \varepsilon$ pour n et m supérieurs à N . Il en résulte que pour $n > N$: $\|\Sigma_n - \Sigma_m\| < 2\varepsilon$ et les opérateurs Σ_n forment une suite de Cauchy qui converge vers un opérateur compact Σ car Σ est aussi la limite en norme de la suite $\bigcup_{n^2, n}$ qui est formée d'opérateurs de rangs finis.

PROPOSITION 2. — Si B est un espace homogène de $L^1(\pi)$, alors l'opérateur $U_n = 2(1 + \sigma_{n^2})^{-1} \cdot \sigma_n$ a une norme qui tend vers 1 et l'opérateur $T_n = (1 + \sigma_{n^2})^{-1} \cdot (\sigma_n + \sigma_{n^2})$ converge fortement vers l'identité.

Démonstration. — Un calcul élémentaire fournit les relations suivantes :

$$(1) \quad (1 + \sigma_{n^2})^{-1} \cdot \sigma_n = 2n^2(1 - 2n) \sum_1^{n-3} \frac{p+1}{(2n^2-p)(2n^2-p-1)} \sigma_{p+1} - \frac{2n(n-1)}{(2n^2-n+2)(2n^2-n+1)} \sigma_{n-1} + \frac{n^2}{2n^2-n+1} \sigma_n$$

$$(2) \quad (1 + \sigma_{n^2})^{-1} \cdot \sigma_{n^2} = -2n^2 \sum_1^{n^2-3} \frac{p+1}{(2n^2-p)(2n^2-p-1)(2n^2-p-2)} \sigma_{p+1} - \frac{2(n^2-1)}{(n^2+2)(n^2+1)} \sigma_{n^2-1} + \frac{n^2}{n^2+1} \sigma_{n^2}.$$

Désignons par $a_{p, n}$ et b_{p, n^2} les coefficients des σ_p dans les développements (1) et (2) respectivement :

$$U_n(1) = 1 = 2 \sum_1^{n-1} a_{p, n} + \frac{2n^2}{2n^2-n+1}$$

Puisque les σ_p sont de norme 1, on a

$$\|U_n\| \leq \frac{2n^2}{2n^2-n+1} - 2 \sum_0^{n-1} a_{p, n} = \frac{2n^2}{2n^2-n+1} + \left(-1 + \frac{2n^2}{2n^2-n+1} \right) = 1 + 0 \left(\frac{1}{n} \right)$$

ce qui établit la propriété annoncée pour U_n .

De même puisque $T_n(1) = 1$ on a :

$$T_n(x) - x = \sum_1^n (a_{p,n} + b_{p,n^2})[\sigma_p(x) - x] + \sum_{n+1}^{n^2} (\sigma_p(x) - x),$$

sur tout x dans B .

Puisque σ_n converge fortement dans B , choisissons N tel que pour $n > N$ on ait $\|\sigma_n(x) - x\| < \varepsilon$. Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - x\| &\leq \sum_{p=1}^N |a_{p,n} + b_{p,n^2}| \|x\| \\ &\quad + \varepsilon \left[\sum_{N+1}^n |a_{p,n} + b_{p,n^2}| + \sum_{n+1}^{n^2} |b_{p,n^2}| \right] \end{aligned}$$

or le coefficient de ε s'écrit :

$$- \sum_{N+1}^{n-1} a_{p,n} + a_{n,n} - \sum_{N+1}^{n^2-1} b_{p,n^2} + b_{n^2,n^2};$$

il est majoré par :

$$\begin{aligned} - \sum_1^{n-1} a_{p,n} + a_{n,n} - \sum_1^{n^2-1} b_{p,n^2} + b_{n^2,n^2} &= - [1 - 2a_{n,n} - 2b_{n^2,n^2}] \\ &= -1 + \frac{2n^2}{2n^2 - n + 1} + \frac{2n^2}{n^2 + 1} = \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Enfin chaque $a_{p,n}$ ou b_{p,n^2} pour $p \leq N$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en résulte que $T_n(x) - x$ tend vers 0.

Soit \mathcal{H} la famille des polynomes homogènes continus sur B . Si P est dans \mathcal{H} B_p est la forme n -linéaire symétrique associée à P .

PROPOSITION 3. — Soit T une application linéaire continue de $H_c(B)$ dans un espace de Banach E tel que :

$$(3) \quad \|T(P)\| \leq K\gamma^{\text{deg}P} \|P\|, \quad \forall P \in \mathcal{H},$$

K et γ étant des constantes données ($\gamma > 1$).

Alors pour tout entier N , pour tout $\gamma' > 1$, il existe une constante K' et un opérateur u_n de la forme $\frac{1 + \sigma_{n^2}}{2}$

d'indice supérieur à N tel que :

$$(4) \quad \|T(P)\| \leq K'(\gamma \cdot \gamma')^{d^o P} \|P \circ u_n\| \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

Démonstration par l'absurde. — Si (4) n'avait pas lieu, il existerait une suite P_n dans \mathcal{H} tel que :

$$(5) \quad \|T(P_n)\| \geq n(\gamma \cdot \gamma')^{d^o P_n} \|P_n \circ u_n\| \quad \text{pour tout } n.$$

Le degré de P_n , que l'on notera k_n , est supérieur à n car si (5) n'avait pas lieu pour tous les polynomes de $d^o \geq n$, alors (4) aurait lieu avec $K' = n$ pour ces polynomes, quant à ceux de $d^o < n$, l'hypothèse (3) fournit par homogénéité une constante convenable pour (4) puisque les opérateurs u_n sont inversibles.

En utilisant la décomposition $P_n(x + y) = \sum_{r=0}^{k_n} C_{k_n}^r B_{P_n}^r(x, y)$ où $B_{P_n}^r(x, y)$ vaut $B_{P_n}(x, \dots, x, y, r \text{ fois}, y)$, on s'aperçoit que (5) entraîne l'existence de r_n tel que :

$$(6) \quad \|T[C_{k_n}^{r_n} B_{P_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n)]\| \geq \frac{n}{k_n + 1} (\gamma \cdot \gamma')^{k_n} \|P \cdot u_n\|.$$

Montrons que r_n est un $0\left(\frac{1}{k_n}\right)$; dans le cas contraire après extraction d'une suite, on aurait $\frac{r_n}{k_n} \geq \alpha > 0$. Or :

$$(7) \quad \begin{aligned} C_{k_n}^{r_n} B_{P_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} P_n[\sigma_n + z(1 - \sigma_n)] \frac{dz}{z^{r_n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} P_n \circ u_n [2z(1 - T_n) + U_n] \frac{dz}{z^{r_n+1}} \end{aligned}$$

U_n et T_n sont les opérateurs de la proposition 2; pour chaque x dans B , $(1 - T_n)(x)$ a donc une norme inférieure à $\frac{1}{\rho}$ et $U_n(x)$ a une norme inférieure à $\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \|x\|$ pour n assez grand. Il en résulte la majoration suivante :

$$(8) \quad \left\| \frac{C_{k_n}^{r_n} B_{P_n}^{r_n}[\sigma_n, 1 - \sigma_n](x)}{\|P \cdot u_n\|} \right\|^{1/k_n} \leq \frac{1}{\rho^{r_n/k_n}} \left(2 + \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \|x\| \right) \leq \frac{1}{\rho^\alpha} \cdot (\text{cte})$$

ρ pouvant être choisi arbitrairement grand, le premier membre de (8) tend vers 0 pour n infini, ce qui entraîne :

$$\frac{C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n)}{\|P_n \cdot u_{n^2}\|}$$

est le terme général d'une série entière convergant uniformément sur tout compact de B , mais aussi convergente dans l'espace $H_c(B)$ car ces deux topologies coïncident pour les suites d'après (6).

Il en résulte que :

$$\left\| T \left[\frac{C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n)}{P \cdot u_{n^2}} \right] \right\|^{1/k_n}$$

tend vers 0 ce qui est contradictoire avec (5).

On a bien $r_n = 0 \left(\frac{1}{k_n} \right)$. Enfin (4) (6) (7) entraînent les inégalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^{r_n}} [2\rho \sup \|T_n\| + \|U_n\| + 2\rho]^{k_n} \|P \circ u_{n^2}\| &\geq \|C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n)\| \\ &\geq \frac{1}{K \gamma^{k_n}} \|T[C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1 - \sigma_n)]\| \geq \frac{n}{k_n + 1} \cdot \frac{1}{K} \cdot \gamma'^{k_n} \|P \circ u_{n^2}\|. \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 2, $\|U_n\|$ tend vers 1 et T_n est majoré en norme puisque tendant fortement vers l'identité. On obtient donc par passage à la limite :

$$1 + \mathcal{O}(\rho) \geq \gamma'', \quad \text{ce qui est impossible pour } \rho \text{ assez petit.}$$

Fin de la démonstration du Théorème 1. — Soit γ_k une suite de nombres > 1 tel que le produit infini $\prod_0^\infty \gamma_k$ converge vers γ , alors il existe une suite C_k de constantes positives et une suite u_{n_k} d'opérateurs définis dans la proposition 3 d'indices $n_k \geq k$, tels que :

$$(9) \quad \|T(P)\| \leq C_k (\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k)^{d \circ P} \|P \circ u_{n_1^2} \circ u_{n_2^2} \dots u_{n_k^2}\|, \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

En effet les opérateurs u_n étant inversibles,

$$\tilde{T}(f) = T(f \circ u_{n_1^2}^{-1} \dots \circ u_{n_k^2}^{-1})$$

définit une application linéaire continue sur $H_c(B)$ qui, si (9) est vrai à l'ordre k , vérifie la relation (3) de la proposition 3. La relation (4) fournit alors la relation 9 à l'ordre $(k + 1)$. La relation (9) est vérifiée à l'ordre 0 pour un γ_0 convenable car T est continue.

Après avoir remarqué que les opérateurs u_n vérifient les hypothèses de la proposition 1, appelons K le compact image de la boule unité ω par l'opérateur $\prod_1^\infty u_n$. La relation (9) signifie qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que

$$\|T(P)\| \leq C_\varepsilon \cdot \|P\|_{(\gamma+\varepsilon)(K+\varepsilon\omega)} \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

Enfin si f est analytique sur B , f est la somme de sa série de Taylor $f = \sum_0^\infty P_n$ convergente dans $H_c(B)$ et l'on a, λ étant donné > 1 ,

$$\begin{aligned} \|T(f)\| &\leq \sum_0^\infty \|T(P_n)\| \leq C_\varepsilon \sum_0^\infty \|P_n\|_{(\gamma+\varepsilon)(K+\varepsilon\omega)} \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot C_\varepsilon \|f\|_{\lambda(\gamma+\varepsilon)(K+\varepsilon\omega)}. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. NACHBIN, *Topology on spaces of hol. mappings*, Springer Verlag, Berlin, (1968).
- [2] G. CŒURÉ, *Fonct. plurisoush. sur les e.v.t. et applications à l'étude des fonct. analyt.*, *Ann. de l'Inst. Fourier* T. 20, (1970).
- [3] S. DINEEN, *Holomorphic funct. on (C_0, X_b) -modules* (à paraître).
- [4] I. SINGER, *Bases in Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, (1970).
- [5] A. HIRSCHOWITZ, *Bornologie des espaces de fonct. analyt. en dim. infinie*, Sem. Lelong (Paris), (1969).
- [6] Y. KATZNELSON, *An Introduction to harm. Analysis* (1968), John Wiley and Sons Inc.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1970.

Gérard CŒURÉ,
 Institut de Mathématiques,
 2, rue de la Graffe,
 54-Nancy.