ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HENRI SKODA

Solution à croissance du second problème de Cousin dans $\mathbb{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 1 (1971), p. 11-23

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_1_11_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21,1 (1971), 11-23

SOLUTION A CROISSANCE DU SECOND PROBLÈME DE COUSIN DANS $\mathbf{C}^n$

par Henri SKODA

Introduction

Dans une première partie, on utilise la cohomologie à croissance pour donner une solution générale à croissance de l'équation $id'd''V = \theta$ où θ désigne un courant de bidegré (1, 1), fermé et positif dans $\mathbf{C}^n$. On en déduit alors une solution générale à croissance du second problème de Cousin dans $\mathbf{C}^n$.

Enfin, dans une troisième partie, on démontre le théorème du quotient pour les fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^n$.

1. Solution à croissance de l'équation : $id'd''V = \theta$.

On choisit comme base des $2n$-formes sur $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ la forme :

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

ce qui permet d'identifier les 0-courants aux $2n$-courants et aux distributions sur $\mathbf{C}^n$.

Soit θ un courant de bidegré (1, 1) donné dans $\mathbf{C}^n$:

$$\theta = i \sum_{j,k} \theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k \qquad \theta_{jk} \in \mathscr{D}'(\mathbf{C}^n) \qquad \begin{matrix} 1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant n\,. \end{matrix}$$

On suppose θ fermé : $d\theta = 0$ ou encore $d'\theta = 0$ et $d''\theta = 0$. On suppose θ *positif*, c'est-à-dire que quels que soient les nombres complexes λ_j la distribution :

$$\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} \theta_{jk} \lambda_j \bar{\lambda}_k \quad \text{est positive.}$$

On en déduit aussitôt que :

1) θ_{jj} est une mesure positive $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$

2) $\theta_{jk} = \bar{\theta}_{kj} \qquad 1 \leqslant j,\ k \leqslant n$.

3) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n) \quad \varphi \geqslant 0$ on a :

$$| < \theta_{jk}, \varphi > | \leqslant < \theta_{jj}, \varphi > + < \theta_{kk}, \varphi >$$

θ_{jk} est donc une mesure et si on pose : $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \theta_{jj}$ on a :

$$| < \theta_{jk}, \varphi > | \leqslant < \sigma, \varphi > .$$

Si V est une fonction plurisousharmonique, le courant $\theta = id'd''V$ est de bidegré (1, 1) fermé et positif, inversement en vertu de théorèmes généraux d'existence (cf. Dolbeault [7] ou Aeppli [8]) tout courant de bidegré (1, 1) fermé et positif est de la forme $id'd''V$ où V est plurisousharmonique.

On va caractériser la croissance du courant θ à l'aide des fonctions ($\varepsilon > 0$ est fixé) :

$$\sigma_\varepsilon(z) = \int_{|x-z|<\varepsilon} d\sigma(x) . \qquad \sigma(r) = \int_{|x|<r} d\sigma(x) .$$

On a alors le théorème :

THEOREME 1. – *Soit θ un courant positif, fermé, de bidegré* (1, 1) *donné dans* $\mathbf{C}^n$. *On suppose que :* $\sigma_\varepsilon(z) \leqslant C \exp[\varphi(z)]$, *où* φ *désigne une fonction plurisousharmonique et* C *une constante. Alors pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction plurisousharmonique* V *solution de l'équation :* $id'd''V = \theta$ *et vérifiant les majorations :*

$$\int_{\mathbf{C}^n} [V^+(z)]^2 (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-2\Psi(z)]\, dz < +\infty \qquad (1)$$

$$V(z) \leqslant C(\varepsilon, \alpha) (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi(z)] \qquad (2)$$

avec

$$V^+(z) = \operatorname{Sup}[V(z), 0]$$

$$\Psi(z) = \operatorname{Log} \int_0^1 t \exp[\varphi(tz)]\, dt$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \int_{|x-z| \leqslant \varepsilon} \exp[2\Psi(x)]\, dx$$

$C(\varepsilon, \alpha)$ *désignant une constante dépendant de* ε *et de* α.

Remarque. – Les inégalités (1) et (2) sont encore vérifiées en prenant pour Ψ et χ les fonctions plus simples :

$$\Psi(z) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \varphi(tz) \quad , \quad \chi(z) = \sup_{|x| \leqslant \varepsilon} \Psi(z + x)$$

COROLLAIRE 1. – *(Cas de la croissance radiale).*

On suppose que : $\sigma(r) \leqslant C \exp[\varphi(r)]$ *la fonction* $z \longrightarrow \varphi(|z|)$ *étant plurisousharmonique. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *il existe une solution* V *de l'équation :* $id'd''V = \theta$ *vérifiant :*

$$V(z) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\, (1 + r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)] \quad \textit{avec} \quad r = |z|\,.$$

On applique le théorème 1, en remarquant que :

$$\sigma_\varepsilon(z) \leqslant \sigma(r + \varepsilon) \leqslant C \exp[\varphi(r + \varepsilon)]$$

Démontrons maintenant le théorème 1 :

On procède par régularisation du courant θ. Soit ρ_ε une fonction positive de classe C^∞, ne dépendant que de $|z|$, à support dans la boule de centre 0 de rayon ε, d'intégrale égale à 1. Le courant $\theta * \rho_\varepsilon$ est alors positif et fermé. Soit W une fonction plurisousharmonique solution de l'équation $id'd''W = \theta * \rho_\varepsilon$ soit U une fonction plurisousharmonique telle que : $id'd''U = \theta$ soit V définie par :

$$V = U - U * \rho_\varepsilon + W$$

on a : $$id'd''V = \theta$$

et $$V \leqslant W$$

car U étant plurisousharmonique et ρ_ε ne dépendant que de $|z|$ on a :

$$U \leqslant U * \rho_\varepsilon$$

Il suffit donc de trouver W vérifiant : $id'd''W = \theta * \rho_\varepsilon$ et les majorations (1) et (2) du théorème.

Posons $\omega = \theta * \rho_\varepsilon \qquad \omega_{jk} = \theta_{jk} * \rho_\varepsilon$

utilisant la positivité de θ, on majore :

$$|\omega_{jk}(z)| = |<\theta_{jk}, \rho_\varepsilon(z-x)>| \leqslant <\sigma, \rho_\varepsilon(z-x)>$$

$$|\omega_{jk}(z)| \leqslant \|\rho_\varepsilon\|_\infty \sigma_\varepsilon(z) \leqslant C(\varepsilon) \exp[\varphi(z)] .$$

Comme $d\omega = 0$ il existe une forme v de degré 1, telle que :

$$idv = \omega$$

v se décompose sous la forme : $v = v_2 - v_1$

v_1 étant de bidegré (1, 0) et v_2 de bidegré (0, 1) d'où :

$$id'v_2 + id''v_2 - id'v_1 - id''v_1 = \omega$$

en comparant les bidegrés des différents termes à celui de ω on en déduit

$$\begin{cases} \omega = i(d'v_2 - d''v_1) \\ d''v_2 = 0 \quad \text{et} \quad d'v_1 = 0 \end{cases}$$

v_1 et v_2 sont donnés par la formule d'intégration de M.H. Cartan (cf. H. Cartan [6]) :

$$v_1 = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k \int_0^1 t\, \omega_{jk}(tz)\, dt \right] dz_j$$

$$v_2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} z_j \int_0^1 t\, \omega_{jk}(tz)\, dt \right] d\bar{z}_k$$

on a :

$$\left| \int_0^1 t\, \omega_{jk}(tz)\, dt \right| \leqslant C(\varepsilon) \int_0^1 t \exp[\varphi(tz)]\, dt = C(\varepsilon) \exp[\Psi(z)]$$

$$|v_j(z)|^2 \leqslant C(\varepsilon)|z|^2 \exp[2\Psi(z)]$$

$$\alpha > 0 \int_{\mathbb{C}^n} |v_j(z)|^2 (1 + |z|^2)^{-n-1-\alpha} \exp[-2\Psi(z)]\, dz < +\infty \qquad j = 1, 2 .$$

on vérifie que $\Psi(z)$ est plurisousharmonique (cf. P. Lelong [4]). D'après Hörmander ([5] Th. 4.4.2 p. 93) il existe u_1 et u_2 tels que :

$$v_1 = d'u_1 \qquad v_2 = d''u_2$$

$$\int_{C^n} |u_j(z)|^2 (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-2\Psi(z)]\, dz < +\infty \qquad j = 1, 2$$

On a alors : $\omega = id'd''u_2 - id''d'u_1 = id'd''(u_1 + u_2)$ comme : $\omega = \overline{\omega}$ il suffit de prendre $W = Re(u_1 + u_2)$ d'où résulte la majoration (1). La majoration (2) s'en déduit, en majorant $W(z)$ par la moyenne de W sur la boule de rayon ε de centre z :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon) \int_{|x| \leqslant \varepsilon} W(z + x)\, dx$$

on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon) \left[\int_{|x| \leqslant \varepsilon} |W(z+x)|^2 (1 + |z+x|^2)^{-n-3-\alpha} \times \right.$$
$$\left. \times \exp[-2\Psi(z+x)]\, dx \right]^{1/2} .$$
$$\left[\int_{|x| \leqslant \varepsilon} (1 + |z + x|^2)^{n+3+\alpha} \exp[2\Psi(z + x)]\, dx \right]^{1/2} ,$$

on majore en étendant la première intégrale à C^n tout entier, d'où :

$$W(z) \leqslant C(\varepsilon, \alpha) (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi(z)] .$$

2. Solution à croissance du second problème de cousin dans C^n.

Soit $(U_k, F_k)\ k \in K$ une donnée de Cousin dans C^n, les U_k sont des ouverts recouvrant C^n, $F_k \in \mathcal{H}(U_k)$ et pour tout k et l,

$$\frac{F_k}{F_l} \quad \text{et} \quad \frac{F_l}{F_k} \in \mathcal{H}(U_k \cap U_l) .$$

Les courants $id'd''$ Log $|F_k|$ définissent par recollement un courant θ positif et fermé, dans U_k on a :

$$\begin{cases} \theta = id'd'' \text{ Log } |F_k| \\ \sigma = \dfrac{1}{4} \Delta \text{Log} |F_k| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_j} \text{ Log } |F_k| . \end{cases}$$

Le courant θ peut s'interpréter géométriquement comme courant d'intégration sur l'ensemble X des zéros des fonctions F_k (cf. P. Lelong [1], [2] et [4]), la mesure σ, associée à θ, s'interprète alors comme l'aire de X.

THEOREME 2. – *Soit* (U_k, F_k) $k \in K$ *une donnée de Cousin dans* $\mathbf{C}^n$, *on suppose que* : $\sigma_\varepsilon(z) \leqslant C \exp[\varphi(z)]$, *où* φ *est plurisousharmonique et* C *une constante. Alors, pour tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction entière* F *solution du second problème de Cousin telle que :*

$$\int_{\mathbf{C}^n} [\mathrm{Log}^+ |F(z)|]^2 (1 + |z|^2)^{-n-3-\alpha} \exp[-2\,\Psi(z)]\, dz < +\infty$$

$$\mathrm{Log}\,|F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi[z)]$$

Ψ et χ *s'obtenant à partir de* φ *comme dans le théorème 1.*

COROLLAIRE 2. – *Si* $\sigma(r) \leqslant \exp[\varphi(r)]$, $\varphi(|z|)$ *étant plurisousharmonique, alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\alpha > 0$, *il existe une fonction entière* F *solution du second problème de Cousin telle que :*

$$\mathrm{Log}\,|F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1 + r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)]$$

Remarque 1. – Si φ est à croissance rapide de sorte que : $(1 + r)^{n+3+\alpha} \exp[\varphi(r + \varepsilon)] \leqslant C(\varepsilon') \exp[\varphi(r + \varepsilon')]$ pour $\varepsilon' > \varepsilon$ on a simplement le résultat : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F solution du problème telle que :

$$\mathrm{Log}\,|F(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha) \exp[\varphi(r + \varepsilon)]\,.$$

Démonstration. – D'après le théorème 1, il suffit de démontrer que si V est solution de : $id'd''V = 0$ il existe une fonction entière F telle que : $\mathrm{Log}\,|F(z)| = V(z)$. Nous reproduisons ici un argument de P. Lelong (cf. [1]). Soit $a \notin X$, si $z \notin X$ on désigne par γ_z un chemin joignant a à z en évitant X. On pose :

$$F(z) = \exp\left[V(a) + 2 \int_{\gamma_z} d'V\right]$$

On montre d'abord que $F(z)$ ne dépend pas du chemin γ_z choisi. Pour cela il suffit de montrer que : $2 \int_\gamma d'V = 2i\pi N$ $N \in Z$ si γ est

un chemin fermé évitant X. Soit F_1 une solution du problème de Cousin, on a alors :

$$id'd'' \operatorname{Log} |F_1| = \theta$$

d'où :
$$d''d'(V - \operatorname{Log} |F_1|) = 0$$

$d'(V - \operatorname{Log} |F_1|)$ est une forme fermée de degré 1 dans C^n, on a donc :

$$\int_\gamma d'(V - \operatorname{Log} |F_1|) = 0$$

$$2 \int_\gamma d'V = 2 \int_\gamma d' \operatorname{Log} |F_1|$$

si $\operatorname{Log} F_1$ désigne une détermination locale du logarithme de F on a :

$$d \operatorname{Log} F_1 = 2\, d' \operatorname{Log} |F_1|$$

d'où :
$$2 \int_\gamma d'V = \int_\gamma d \operatorname{Log} F_1 = 2i\pi N .$$

On a :

$$\operatorname{Log} |F(z)| = V(a) + 2 \operatorname{Re} \int_{\gamma_z} d'V = V(a) + \int_{\gamma_z} d'V + \overline{d'V} =$$

$$= V(a) + \int_{\gamma_z} dV = V(z) .$$

D'après la définition de F, Log F est localement une primitive de la forme fermée $d'V$ on a donc :

$$d \operatorname{Log} F = d'V$$
$$d'' \operatorname{Log} F = 0$$

Log F et par suite F sont donc des fonctions holomorphes en dehors de X, comme F est bornée au voisinage de X, F se prolonge en une fonction entière.

Remarque 2. — Si la distance de z à X est supérieure à 2ε, on a l'inégalité : $\operatorname{Log} |F(z)| \geqslant - C(\varepsilon, \alpha)\, (1 + |z|)^{n+3+\alpha} \exp[\chi(z)]$ car on a alors : $V(z) = W(z)$ et W est pluriharmonique.

Remarque 3. — Dans le cas particulier de l'ordre fini

$$(\exp[\varphi(r)] = r^\rho)$$

on ne récupère pas le résultat classique (cf. Lelong [1], Stoll [12]).

Remarque 4. – Dans le cas $n = 1$, on a diverses théories qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients (cf. Blumenthal [9], M. Denjoy [10], et L.A. Rubel et B.A. Taylor [11]).

3. Application : Théorème du quotient pour les fonctions méromorphes dans $\mathbf{C}^n$.

Si f est une fonction définie sur $\mathbf{C}^n$, on désignera par $m(r, f)$ la moyenne de f sur la sphère de centre 0 et de rayon r. Soit maintenant f une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}^n$. On suppose pour simplifier que $f(0) = 1$, f peut alors s'écrire comme quotient de deux fonctions entières g et h :

$$f = \frac{g}{h} \quad \text{avec} \quad g(0) = h(0) = 1$$

les germes en chaque point g_z et h_z étant premiers entre eux dans l'anneau $\mathcal{O}_z$.

On caractérise alors la croissance de f par la moyenne sur la sphère de rayon r de la fonction $\mathrm{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}$ soit :

$$\mathrm{T}(r, f) = m[r, \mathrm{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}]$$

On vérifie aussitôt que $\mathrm{T}(r, f)$ est indépendant du choix particulier de g et de h, et qu'on a :

$$\mathrm{T}(r, f_1 f_2) \leqslant \mathrm{T}(r, f_1) + \mathrm{T}(r, f_2) \tag{1}$$

Si f est entière et si on pose : $\mathrm{M}(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ on a :

$$\mathrm{T}(r, f) \leqslant \mathrm{Log}^+ \mathrm{M}(r) + \frac{1}{2} \mathrm{Log}\, 2 \tag{2}$$

LEMME 1. – *Si f est entière, si $f(0) = 1$ et si $\mathrm{R} > r$ on a :*

$$\mathrm{Log}\, \mathrm{M}(r) \leqslant 2 \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} - r}\right)^{2n} \mathrm{T}(\mathrm{R}, f)$$

Démonstration. – On utilise les propriétés de moyenne de la fonction plurisousharmonique $\operatorname{Log}|f|$. On a d'abord :

$$T(r, f) \geqslant m(r, \operatorname{Log}^+ |f|)$$

puis :

$$0 = \operatorname{Log}|f(0)| \leqslant m(r, \operatorname{Log}|f|) = m(r, \operatorname{Log}^+ |f|) - m(r, \operatorname{Log}^- |f|)$$

soit : $$m(r, \operatorname{Log}^+ |f|) \geqslant m(r, \operatorname{Log}^- |f|)$$

$$m(r, |\operatorname{Log}|f||) \leqslant 2\, m(r, \operatorname{Log}^+ |f|) \leqslant 2\, T(r, f)\,. \qquad (3)$$

Si $|z| = r$ on majore $\operatorname{Log}|f(z)|$ par la moyenne de $\operatorname{Log}|f|$ sur la boule de centre z et de rayon $R - r$:

$$\operatorname{Log}|f(z)| \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R-r} \operatorname{Log}|f(z+\zeta)|\, d\zeta$$

$V(R - r)$ désignant le volume de la boule de rayon $R - r$.

$$\operatorname{Log}|f(z)| \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R-r} |\operatorname{Log}|f(z+\zeta)||\, d\zeta$$

$$\leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_{|\zeta| \leqslant R} |\operatorname{Log}|f(\zeta)||\, d\zeta$$

Soit encore, compte tenu de (3) :

$$\operatorname{Log} M(r) \leqslant \frac{1}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, d\rho \int_S |\operatorname{Log}|f(\rho\zeta)||\, d\zeta$$

S désignant la sphère de rayon 1, et s_n l'aire de S :

$$\operatorname{Log} M(r) \leqslant \frac{s_n}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, m(\rho, |\operatorname{Log}|f||)\, d\rho$$

$$\leqslant \frac{2\, s_n}{V(R-r)} \int_0^R \rho^{2n-1}\, m(\rho, \operatorname{Log}^+ |f|)\, d\rho$$

comme $\operatorname{Log}^+ |f|$ est plurisousharmonique, $m(\rho, \operatorname{Log}^+ |f|)$ est fonction croissante de ρ, on a donc :

$$\operatorname{Log} M(r) \leqslant \frac{2\, m(R, \operatorname{Log}^+ |f|)}{V(R-r)}\, s_n \int_0^R \rho^{2n-1}\, d\rho$$

$$\operatorname{Log} M(r) \leqslant \frac{2\,V(R)}{V(R-r)}\, m(R, \operatorname{Log}^+ |f|) \leqslant 2\left(\frac{R}{R-r}\right)^{2n} T(R, f)$$

en faisant : $R = r + \varepsilon$ dans la formule du lemme 1, on obtient le lemme 2 :

LEMME 2. — *Si f est entière et si $f(0) = 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que :*

$$\operatorname{Log} M(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1+r)^{2n}\, T(r+\varepsilon, f)$$

Remarque. — On a aussi $\operatorname{Log} M(r) \leqslant C(\varepsilon)\, T[(1+\varepsilon)\,r, f]$ formule plus intéressante lorsque f est à croissance lente, mais on s'intéresse ici surtout à la croissance rapide.

THEOREME 3. — *Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}^n$ telle que $T(r, f) \leqslant C \exp[\varphi(r)]$ $\varphi(|z|)$ étant plurisousharmonique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha > 0$, il existe des fonctions entières g et h telles que :*

$$f = \frac{g}{h}$$

pour tout z les germes g_z et h_z sont premiers entre eux dans $\mathcal{O}_z$.

$$\operatorname{Log} |g(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+\varepsilon)]$$

$$\operatorname{Log} |h(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+\varepsilon)]$$

avec $r = |z|$.

Démonstration. — Soit $f = g/h$ une décomposition particulière de f, les germes g_z et h_z étant premiers entre eux pour tout $z \in \mathbf{C}^n$. On a :

$$T(r, f) = m[r, \operatorname{Log}(|g|^2 + |h|^2)^{1/2}] \geqslant m(r, \operatorname{Log} |h|)$$

Posons : $\sigma = \frac{1}{4}\,\Delta \operatorname{Log} |h|$, le théorème de Gauss donne :

$$C_n \frac{\sigma(r)}{r^{2n-1}} = \frac{d}{dr}\, m(r, \operatorname{Log} |h|)$$

C_n désignant une constante ne dépendant que de n.

$$C_n \int_0^r \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt = m(r, \operatorname{Log}|h|) \leqslant T(r, f)$$

d'où :

$$T(r+\varepsilon, f) \geqslant C_n \int_0^{r+\varepsilon} \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt \geqslant C_n \int_r^{r+\varepsilon} \frac{\sigma(t)}{t^{2n-1}}\, dt \geqslant$$

$$\geqslant C_n\, \sigma(r) \int_r^{r+\varepsilon} \frac{dt}{t^{2n-1}}$$

$$T(r+\varepsilon, f) \geqslant C_n\, \sigma(r)\, \frac{(r+\varepsilon)^{2n-2} - r^{2n-2}}{r^{2n-2}(r+\varepsilon)^{2n-2}}$$

ou encore :

$$\sigma(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1+r)^{2n-1}\, T(r+\varepsilon, f)$$

$$\sigma(r) \leqslant C(\varepsilon)\,(1+r)^{2n-1} \exp[\varphi(r+\varepsilon)]$$

D'après le théorème 2, il existe h_1 telle que :

$$\frac{h_1}{h} \quad \text{et} \quad \frac{h}{h_1} \quad \text{soient entières}$$

et : $\operatorname{Log}|h_1(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$

en augmentant un peu la constante $C(\varepsilon, \alpha)$ on a d'après (2) :

$$T(r, h_1) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$$

Posons : $g_1 = h_1 f$ g_1 est entière et on a d'après (1) :

$$T(r, g_1) \leqslant T(r, h_1) + T(r, f) \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{3n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+2\varepsilon)]$$

D'après le lemme 2 on a donc :

$$\operatorname{Log}|g_1(z)| \leqslant C(\varepsilon, \alpha)\,(1+r)^{5n+2+\alpha} \exp[\varphi(r+3\varepsilon)]$$

Comme : $g_1 = \frac{h_1}{h} g$ $(g_1)_z$ et $(h_1)_z$ sont premiers entre eux.

Remarque. – Le théorème 3 est intéressant dans le cas de fonctions f à croissance rapide. Lorsque f est d'ordre fini, voir P. Lelong [1] et Stoll [12].

Lorsque f est à croissance lente, voir B.A. Taylor [13] et Kujala [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. LELONG, *J. Anal. Math.* Jerusalem, 12, 1964, 365-407.

[2] P. LELONG, *Bull. Soc. Math.* France, 85, 1957, 239-262.

[3] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Cours fait au C.I.M.E., Varenna, 1963.

[4] P. LELONG, Fonctions entières de type exponentiel. Séminaire d'Eté, Montréal, 1967.

[5] L. HÖRMANDER, Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, New Jersey, 1966.

[6] H. CARTAN, Formes différentielles, Hermann, Paris, 1967.

[7] P. DOLBEAULT, Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe I. *Ann. of Math.* 64, 1956, 83-130.

[8] A. AEPPLI, On the cohomology structure of Stein manifolds, Proc. of the Conference on Complex Analysis, Minneapolis, 1964. Springer-Verlag, New York, 1965, 58-70.

[9] O. BLUMENTHAL, Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

[10] A. DENJOY, Articles et Mémoires, Gauthier-Villars, Paris, 1955, 7-136.

[11] L.A. RUBEL et B.A. TAYLOR, *Bull. Soc. Math.* France 96, 1968, 53-96.

[12] W. STOLL, About entire and meromorphic functions of exponential type. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* Vol. XI. Providence, Rhode Island, 1968, 392-430.

[13] B.A. TAYLOR, The fields of quotients of some rings of entire functions. *Proc. Symp. in Pure Math.* Vol. XI. Providence, Rhode Island, 1968, 468-474.

[14] R.O. KUJALA, Functions of finite λ-type in several complex variables. *Bull. Amer. Math. Soc.* Vol. 75, Tome 1, 1969, 104-107.

[15] H. SKODA, *C.R. Acad. Sci.* Paris Sér. A-B 270 (1970), A512-A515.

Manuscrit reçu le 29 juin 1970

Henri SKODA
Département de Mathématiques
Parc Valrose – 06 – Nice