



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Alexandru OANCEA

**Volume et courbure totale pour les hypersurfaces de l'espace euclidien**

Tome 54, n° 3 (2004), p. 733-772.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2004\\_\\_54\\_3\\_733\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_3_733_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# VOLUME ET COURBURE TOTALE POUR LES HYPERSURFACES DE L'ESPACE EUCLIDIEN

par Alexandru OANCEA

---

## 1. Introduction.

Une immersion isométrique d'hypersurface  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est localement rigide en dehors du lieu des points de courbure nulle et on s'attend à ce que les propriétés métriques de  $M$  déterminent de nombreuses propriétés de  $\varphi$ . Il y a pourtant peu de résultats quantitatifs qui estiment des caractéristiques extrinsèques en termes d'objets intrinsèques et qui soient valables en toute dimension (voir [BZ] pour plus de références).

Le résultat qui est à la source du présent travail est une inégalité de Burago (voir [BZ], § 6.2), en dimension  $n = 2$  : si  $T(M) = \int_M |K| dV$  désigne la courbure totale de l'immersion,  $R$  est le rayon d'une boule contenant  $\varphi(M)$  et  $A(M)$  désigne l'aire de  $M$ , alors on a

$$(1) \quad A(M) \leq R^2 T(M)$$

avec égalité uniquement pour le plongement isométrique standard de la sphère de rayon  $R$ . Nous nous sommes posés la question de savoir s'il y a un analogue de (1) en dimension supérieure. La réponse est *négative* pour ce qui est d'une inégalité globale du type

$$(2) \quad \text{vol}(M) \leq C_n R^n T(M),$$

avec  $C_n$  une constante dépendant uniquement de la dimension. Néanmoins, nous obtenons en dimension  $n = 3$  une condition suffisante sous laquelle (2) est vraie, ainsi que des inégalités à caractère isopérimétrique *semi-local*

faisant intervenir la courbure totale et qui sont valables pour des bouts d'hypersurface localement strictement convexes.

L'article est structuré comme suit. Nous présentons dans la section 2 un exemple explicite qui prouve qu'il ne peut pas y avoir d'inégalité générale de type (2) en dimension  $n \geq 3$ . La section 3 développe des formules intégrales concernant les polynômes symétriques des courbures principales et la fonction support de l'immersion. Elles généralisent celles déjà obtenues par Minkowski et Kubota dans le cas convexe [BF] et par Hsiung [H] dans le cas non-convexe. Elles sont utilisées d'une part pour donner des conditions intrinsèques suffisantes pour l'inégalité globale en dimension  $n = 3$  et d'autre part pour raffiner par la suite l'inégalité semi-locale. Nous obtenons notamment la

PROPOSITION 1. — *Soit  $\varphi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  une immersion isométrique de classe  $\mathcal{C}^2$  avec  $M$  une variété riemannienne lisse compacte sans bord. On suppose que  $\varphi(M) \subset B^4(0, R)$ . Si  $M$  vérifie  $\text{Ric} \geq -\alpha/R^2$  avec  $0 < \alpha < 6$  alors on a*

$$\text{vol}(M) < \frac{6}{6-\alpha} R^3 T(M).$$

Dans la section 4 nous obtenons des inégalités à caractère semi-local valables pour des bouts d'hypersurface localement strictement convexes. On utilise une méthode d'estimation *a priori* pour les équations de Monge-Ampère réelles développée par Rauch et Taylor [RT] et reprise par Aubin [Au]. L'opérateur de type Monge-Ampère qui apparaît naturellement dans notre contexte est  $f \mapsto \det(H_f + f \text{Id})$  agissant sur les fonctions définies sur  $S^n$ . La présence de l'expression  $H_f + f \text{Id}$  suggère une relation — qui nous reste cachée pour l'instant — avec la théorie spectrale du laplacien sur  $S^n$ . Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1. — *On suppose que  $M \subset B^{n+1}(0, R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante  $C_n$  qui dépend uniquement de la dimension telle que, si  $K \subset U$  est un compact, on ait*

$$(3) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(\bar{d}_{S^n}(K, \partial U))^n} T(U),$$

$$(4) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(\bar{d}_{S^n}(K, \partial U))^{n-1}} T(U) + \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K),$$

où  $T(U) = \int_U |K| \, dV$  désigne la courbure totale de  $U$  et  $\bar{d}_{S^n}(K, \partial U)$  est la distance sphérique locale entre  $K$  et  $\partial U$  (voir la définition 1).

Le terme  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  tend vers zéro lorsque  $U$  approche  $K$ . Cela fait que l'estimation (4) est d'autant meilleure que le compact  $K$  est situé à une grande distance du lieu des points de courbure nulle. L'obtention de (4) à partir de (3) à l'aide des formules intégrales globales de type Minkowski occupe la section 4.6. Nous y démontrons aussi l'inégalité isopérimétrique suivante.

PROPOSITION 4. — Soit  $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion isométrique de surface dont l'image est contenue dans la boule de rayon  $R$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert à bord lisse. Alors

$$\text{Aire}(U) \leq R^2 \left( T(U) + \frac{1}{2} \text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U}) + \frac{1}{2R} \text{Long}(\partial U) \right).$$

On a noté  $\text{Gauss}_{\partial U}$  l'image de  $\partial U$  par l'application de Gauss.

L'optimalité de l'inégalité (4) est discutée dans la section 5 et l'article clôt sur l'inégalité isopérimétrique inverse suivante traitée dans l'appendice.

PROPOSITION 7. — Soit  $D$  un ouvert borné de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  ou de la sphère  $\mathbb{S}^n$ . Si  $D$  vérifie la propriété que, pour tout  $x \in D$ , il existe une boule  $B(d) \subset D$  de rayon  $d$  qui contient  $x$ , alors

$$\frac{\text{vol}_n D}{\text{vol}_{n-1} \partial D} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}.$$

On a égalité si et seulement si  $D$  est une union disjointe de boules de rayon  $d$ .

Remerciements. — Ce travail a été préparé sous la direction bienveillante et inspirée de Claude Viterbo, qui saura trouver ici l'expression de ma gratitude. J'ai profité de remarques, suggestions ou patience d'écoute de la part de Jérôme Bertrand, Charles Boubel, Emmanuel Ferrand, Taoufik Hmidi, Nicolae Mihalache, Liviu Ornea, Ferit Oztürk, Pierre Pansu, Jean-Marc Schlenker et Costin Vălcu. Je leur suis reconnaissant.

Ce travail a été rendu possible grâce à une allocation de recherche de l'École doctorale de mathématiques de la région Paris-Sud, couplée avec un poste de moniteur offert par le Laboratoire de mathématiques de l'Université Paris-Sud.

## 2. Un contre-exemple en dimension $n \geq 3$ .

Nous construisons pour tout  $n \geq 3$  une suite  $(M_k^n)_{k \geq 1}$  d'hypersurfaces compactes plongées dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , difféomorphes à  $\mathbb{S}^n$  et de diamètre extérieur borné, telles que

$$\frac{\text{vol}(M_k^n)}{T(M_k^n)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty,$$

où  $T(M) = \int_M |K| dV$  désigne la courbure totale de  $M$  et  $K = k_1 k_2 \cdots k_n$  est la courbure de Gauss-Kronecker, égale au produit des courbures principales de  $M$ . La courbure totale mesure avec multiplicités le volume recouvert sur  $\mathbb{S}^n$  par l'application de Gauss définie sur  $M$ . L'exemple prouve que l'inégalité (2) ne peut être vérifiée telle quelle en dimension au moins 3 : tout ce que l'on peut espérer de mieux est d'exhiber des classes de variétés intéressantes d'un point de vue géométrique qui la satisfont. Ceci justifie en particulier la proposition 1. La construction que je présente m'a été suggérée par Jean-Marc Schlenker.

- Soit  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$  telle que  $\text{supp } \chi \subseteq [-4\pi, 4\pi]$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi \equiv 1$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$  et  $|\chi'| \leq 1$ .

- Soit aussi  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(x_1, \dots, x_n) = \chi(x_1) \cdots \chi(x_n)$ ; on a  $|\partial\psi/\partial x_i| \leq 1$ ,  $\text{supp } \psi \subseteq [-4\pi, 4\pi]^n$ ,  $\psi \equiv 1$  sur  $[-2\pi, 2\pi]^n$  et  $0 \leq \psi \leq 1$ .

- Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 < \alpha < 1$  et considérons la fonction

$$F_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \frac{\sin kx_1}{k^\alpha} \psi(x).$$

Nous définissons une hypersurface  $M_k$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  en tronquant le graphe de  $F_k$  au-delà de  $|x_i| = 4\pi$  et en le refermant de façon lisse par une demi-sphère. Pour tout  $k$ , l'hypersurface  $M_k$  est contenue dans la boule de rayon  $8\pi$ .

Prouvons que la famille  $M_k$  fournit un contre-exemple à la conjecture, c'est-à-dire  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(M_k)/T(M_k) = +\infty$ .

Tous les équivalents qui suivent sont considérés pour  $k \rightarrow \infty$ . Montrons d'abord que  $\text{vol}(M_k) \sim k^{1-\alpha}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial x_1} &= k^{1-\alpha} \cos kx_1 \cdot \psi(x) + k^{-\alpha} \sin kx_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_i} &= k^{-\alpha} \sin kx_1 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad 2 \leq i \leq n \end{aligned}$$

et ceci entraîne

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{graph}(F_k|_{[-4\pi, 4\pi]^n})) &= \int_{[-4\pi, 4\pi]^n} \sqrt{1 + |dF_k|^2} \, dV \\ &\sim k^{1-\alpha} \int_{-2\pi}^{2\pi} |\cos kx_1| \, dx_1. \end{aligned}$$

La dernière expression est équivalente à  $k^{1-\alpha}$  et, par conséquence, on a aussi  $\text{vol}(M_k) \sim k^{1-\alpha}$ . D'un autre côté, la normale unitaire au graphe de  $F_k$  est

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |dF_k|^2}} \left( \frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}, -1 \right)$$

et son image est contenue dans un tube autour du grand cercle déterminé sur  $\mathbb{S}^n$  par le plan  $x_{n+1} = 0$ . Le rayon de ce tube est équivalent à  $\max_{2 \leq i \leq n} |\partial F_k / \partial x_i| \sim k^{-\alpha}$ . Puisque chaque point en dehors du grand cercle est touché au plus  $k$  fois, on déduit

$$T(M_k) \leq Ck(k^{-\alpha})^{n-1} = Ck^{1-(n-1)\alpha},$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $n$ . Pour une autre constante  $C'$  on a

$$\frac{\text{vol}(M_k)}{T(M_k)} \geq C'k^{(n-2)\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

et ceci montre la validité de la construction.

Il est intéressant de remarquer l'apparition de l'exposant  $n - 2$ . Ceci est à relier au fait que l'inégalité (2) est valable en dimension  $1 \leq n \leq 2$ .

### 3. Formules intégrales globales.

Nous présentons des généralisations des formules intégrales de Minkowski (voir [BF], [H]) qui impliquent la fonction support d'une immersion et les polynômes symétriques en les courbures principales. On récupère la preuve [BZ] de (1), une preuve simple de (2) en dimension  $n = 1$  ou lorsque  $M$  est le bord d'un convexe (théorème d'Archimède), ainsi qu'une condition suffisante en dimension  $n = 3$ .

**3.1. Notations.**

Nous allons adopter un point de vue intrinsèque : l’hypersurface sera représentée par une immersion isométrique  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , où  $M^n$  est une variété riemannienne fermée orientée de dimension  $n$ . Soit  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  le champ normal unitaire sur  $(M, \varphi)$  et, suivant [BZ], mettons

$$p = \langle \varphi, \nu \rangle, \quad q = |\varphi - \langle \varphi, \nu \rangle \nu|.$$

La fonction  $p$  est appelée « fonction support » de  $(M, \varphi)$  et  $q$  est la longueur de la composante de  $\varphi$  tangente à  $\varphi(M)$ . Elles vérifient

$$p^2 + q^2 = |\varphi|^2.$$

Pour des vecteurs  $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on note  $(u_1, \dots, u_{n+1})$  le volume du parallépipède orienté qu’ils déterminent. Pour des fonctions sur  $M$  à valeurs vectorielles  $u_1, \dots, u_k \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{n+1})$  et des 1-formes sur  $M$  à coefficients vectoriels  $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{n+1} \in \Omega^1(M, \mathbb{R}^{n+1})$ , où  $\alpha^j = \sum_1^n \alpha^j_i dy^i$  et  $\{y^i\}$  est un système local de coordonnées sur  $M$ , on définit la  $(n - k + 1)$ -forme sur  $M$

$$\begin{aligned} & (u_1, \dots, u_k, \alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{n+1}) \\ &= \sum_{i_k, \dots, i_{n+1}} (u_1, \dots, u_k, \alpha^{k+1}_{i_{k+1}}, \dots, \alpha^{n+1}_{i_{n+1}}) dy^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dy^{i_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dans l’expression ci-dessus, l’interversion de deux vecteurs ou d’un vecteur et d’une 1-forme change le signe ; par contre, l’interversion de deux 1-formes ne change pas le signe.

Si  $k_1, \dots, k_n$  sont les courbures principales de  $M$ , on note

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} k_{i_1} \dots k_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

le  $k$ -ième polynôme symétrique élémentaire en les courbures principales. On pose  $S_0 = 1$ . On a

$$S_k = \frac{\tilde{S}_k}{k!} \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_k = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ \text{distincts}}} k_{i_1} \dots k_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Posons aussi

$$S^i_k = k_i \left( \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{k-1} \\ i_j \neq i}} k_{i_1} \dots k_{i_{k-1}} \right) = k_i S_{k-1}(k_1, \dots, \widehat{k_i}, \dots, k_n).$$

On remarque  $S^i_2 = \text{Ric}(e_i, e_i)$ , avec  $e_i$  la direction de courbure correspondant à  $k_i$ .

**3.2. Formules de Minkowski généralisées.**

PROPOSITION 2. — Soient  $e_i$  les directions de courbure sur  $M$ . Pour  $1 \leq k \leq n$  et  $\ell \geq 1$ , l'identité intégrale suivante est vérifiée :

$$(5) \quad (n - k + 1) \int_M p^{\ell-1} S_{k-1} dV \\ = k \int_M p^\ell S_k dV - (\ell - 1) \int_M p^{\ell-2} \left( \sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV.$$

Démonstration. — Nous allons calculer pour  $1 \leq k \leq n$  et  $\ell \geq 1$  la différentielle extérieure

$$d(p^{\ell-1}(\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k})) \\ = (\ell - 1)p^{\ell-2} dp \wedge (\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ - p^{\ell-1}(\nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k+1}) + p^{\ell-1}(\varphi, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_k, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}).$$

Autour de tout point  $x \in M$ , on peut choisir un système de coordonnées  $\{y^i\}$  tel que les  $\{\partial/\partial y^i\}_{i=1\dots n}$  forment, au point  $x$ , une base orthonormée et orientée avec  $e_i = \varphi_* \partial/\partial y^i$  des directions de courbure au point  $\varphi(x)$ . Les égalités suivantes sont valables au point  $x$  :

$$(6) \quad d\nu = \sum k_i e_i dy^i, \quad d\varphi = \sum e_i dy^i, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad e_1 \times \dots \times e_n = \nu.$$

Dans un tel système de coordonnées on a

$$(7) \quad (\nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k+1}) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} (\nu, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k-1)} dy^{\sigma(1)} \dots dy^{\sigma(n)} \\ = \left( \sum_{\sigma \in S_n} k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k-1)} \right) (\nu, e_1, \dots, e_n) dy^1 \dots dy^n \\ = (-1)^n (n - k + 1)! (k - 1)! S_{k-1} dV,$$

$$(8) \quad (\varphi, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_k, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ = \sum_{\sigma \in S_n} (\varphi, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k)} dy^{\sigma(1)} \dots dy^{\sigma(n)} \\ = (n - k)! k! S_k(\varphi, e_1, \dots, e_n) dV \\ = (-1)^n (n - k)! k! p S_k dV.$$



On a utilisé les identités

$$\begin{aligned} (\nu, e_1, \dots, e_n) &= (-1)^n (e_1, \dots, e_n, \nu) = (-1)^n \langle e_1 \times \dots \times e_n, \nu \rangle = (-1)^n, \\ (\varphi, e_1, \dots, e_n) &= (-1)^n (e_1, \dots, e_n, \varphi) = (-1)^n \langle e_1 \times \dots \times e_n, \varphi \rangle = (-1)^n p. \end{aligned}$$

Pour ce qui est du premier terme, on a  $dp = d\langle \varphi, \nu \rangle = \sum k_i \langle \varphi, e_i \rangle dy^i$  et

$$\begin{aligned} &(\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=i}} (\varphi, \nu, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(n-1)} dy^{\sigma(1)} \cdots dy^{\sigma(n-1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=i}} k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(n-1)} \right) (\varphi, \nu, e_1, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_n) dy^1 \cdots d\widehat{y}^i \cdots dy^n \\ &= (n-k)! (k-1)! \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{k-1} \\ i_j \neq i}} k_{i_1} \cdots k_{i_{k-1}} \right) (-1)^{n+i} \langle \varphi, e_i \rangle dy^1 \cdots d\widehat{y}^i \cdots dy^n. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} (9) \quad dp \wedge (\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ &= (-1)^{n-1} (n-k)! (k-1)! \left( \sum_{i=1}^n k_i \left( \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{k-1} \\ i_j \neq i}} k_{i_1} \cdots k_{i_{k-1}} \right) \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV \\ &= (-1)^{n-1} (n-k)! (k-1)! \left( \sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV \end{aligned}$$

et, finalement,

$$\begin{aligned} &(\ell-1)(n-k)! (k-1)! p^{\ell-2} \left( \sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV \\ &\quad + (n-k+1)! (k-1)! p^{\ell-1} S_{k-1} dV - (n-k)! k! p^\ell S_k dV \\ &= \text{forme exacte.} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'intégrer cette dernière identité sur  $M$ . □

**3.3. Applications.**

a) Formules de Minkowski. Prendre  $\ell = 1$  pour obtenir

$$(10) \quad (n - k + 1) \int_M S_{k-1} dV = k \int_M p S_k dV, \quad 1 \leq k \leq n.$$

b) L'inégalité (2) pour  $n = 1$ . Prendre  $k = n = 1$  dans les formules de Minkowski pour obtenir, lorsque  $C$  est une courbe immergée dans le plan

$$\ell(C) = \int_C pK d\ell.$$

Ceci implique tout de suite  $\ell(C) \leq RT(C)$ , avec égalité si et seulement si  $C$  est le plongement standard du cercle de rayon  $R$ .

c) Expression du volume de  $M$  en termes de courbure moyenne. Prendre  $k = 1$  dans (10) pour obtenir

$$(11) \quad \text{vol}(M) = \frac{1}{n} \int_M pH dV.$$

d) Expression du volume de  $M$  en termes de courbure de Gauss. Prendre  $\ell = k$  dans (5) pour obtenir

$$(12) \quad (n - k + 1) \int_M p^{k-1} S_{k-1} dV \\ = k \int_M p^k S_k dV - (k - 1) \int_M p^{k-2} \left( \sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV.$$

En additionnant les identités (12) pour  $1 \leq k \leq n$  nous trouvons

$$(13) \quad \text{vol}(M) = \int_M \left( p^n - \frac{n-1}{n} p^{n-2} q^2 \right) K dV \\ - \sum_{k=2}^{n-1} C_{n,k} \int_M p^{k-2} \left( \sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV,$$

avec  $C_{n,k} = (k - 1)! / (n(n - 1) \cdots (n - k + 2)) \times (k - 1) / (n - k + 1)$ .

e) Preuve de (2) lorsque  $M$  est le bord d'un convexe (théorème d'Archimède). Toutes les courbures principales sont alors positives et on obtient

$$\text{vol}(M) \leq \int_M \left( p^n - \frac{n-1}{n} p^{n-2} q^2 \right) K dV \leq R^n T(M) = R^n \text{vol}(S^n),$$

avec égalité si et seulement si  $M$  est la sphère de rayon  $R$ .

f) Preuve de (1) selon [BZ]. Prendre  $n = 2$  dans (13) pour obtenir

$$A(M) = \int_M \left( p^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) K \, dS.$$

Lorsque  $\varphi(M) \subset B(0, R)$ , on a  $p^2 + q^2 \leq R^2$  et cela implique tout de suite  $A(M) \leq R^2 T(M)$ , avec égalité si et seulement si  $\varphi$  est le plongement standard de la sphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

g) Condition suffisante pour  $n = 3$ . D'après (13), on a

$$(14) \quad \text{vol}(M) = \int_M \left( p^3 - \frac{2}{3} pq^2 \right) K \, dV - \frac{1}{6} \int_M \sum_{i=1}^3 \text{Ric}(e_i, e_i) \langle \varphi, e_i \rangle^2 \, dV.$$

L'inégalité (2) sera vraie sous la forme  $\text{vol}(M) \leq R^3 T(M)$  si  $M$  vérifie  $\text{Ric} \geq 0$ . Mais, pour une hypersurface, ceci équivaut à demander que les courbures sectionnelles de  $M$  soient positives ou nulles (voir [Su]). Un théorème de Sacksteder [S] assure que toute immersion isométrique de classe  $\mathcal{C}^4$  d'une 3-variété à courbure sectionnelle non-négative est forcément convexe et le résultat se ramènerait au théorème d'Archimède. On a toutefois des résultats nouveaux en affaiblissant la condition sur la courbure de Ricci.

PROPOSITION 1 (cas  $n = 3$ ). — Soit  $\varphi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  une immersion isométrique de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une variété riemannienne lisse compacte sans bord. On suppose que  $\varphi(M) \subset B^4(0, R)$ . Si  $M$  vérifie  $\text{Ric} \geq -\alpha/R^2$  avec  $0 < \alpha < 6$ , alors on a

$$\text{vol}(M) < \frac{6}{6 - \alpha} R^3 T(M).$$

Démonstration. — On utilise  $\sum_i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \leq |\varphi|^2 \leq R^2$  dans (14) pour obtenir

$$\text{vol}(M) \leq \int_M \left( p^3 - \frac{2}{3} pq^2 \right) K \, dV + \frac{\alpha}{6} \text{vol}(M).$$

On tire de là  $\text{vol}(M) \leq 6/(6 - \alpha) \cdot R^3 T(M)$  puisque  $p^2 + q^2 = |\varphi|^2 \leq R^2$ . L'égalité n'est pas atteinte car cela forcerait  $q \equiv 0$  et  $p \equiv R$ . Dans ce cas, l'immersion devrait être le plongement standard de la sphère de rayon  $R$ , pour laquelle on a en fait

$$\text{vol}(\mathbb{S}^3(R)) = R^3 T(\mathbb{S}^3(R)) < \frac{6}{6 - \alpha} R^3 T(\mathbb{S}^3(R)). \quad \square$$

Il serait bien sûr intéressant de trouver des contre-exemples à l'inégalité (2) satisfaisant  $\text{Ric} \geq -6/R^2 - \epsilon$ , mais nous n'en connaissons pas pour l'instant.

#### 4. Inégalités à caractère local.

Comme le montre la section précédente, l'inégalité (2) est valable en petite dimension grâce à l'existence de formules intégrales globales, qui reviennent à la possibilité d'intégrer par parties : une méthode alternative pour obtenir les formules de Minkowski (10) est d'intégrer sur des ouverts constituant un découpage de  $M$  et de sommer. Les termes de bord s'annulent deux par deux à cause du choix opposé de l'orientation et, en dimension 2, les termes intérieurs sont contrôlables par la courbure totale. Dans ce qui suit, nous traitons *dans le cas strictement convexe* les termes parasites qui apparaissent en dimension  $n \geq 3$  en simulant une intégration par parties où la contribution des termes de bord est compensée par l'utilisation d'un épaissement de l'ouvert relativement compact dont on estime le volume.

Tout ouvert sur lequel l'application de Gauss  $G$  est non-dégénérée et injective peut être paramétré par  $G^{-1}$  qui, à son tour, s'exprime à l'aide de la fonction support sur  $\mathbb{S}^n$  et de sa hessienne. L'inégalité (3) s'exprimera comme une inégalité intégrale qu'on obtient par une technique d'estimation empruntée à la théorie des opérateurs de type Monge-Ampère (voir [Au], [RT]). Dans la section 4.5, nous renonçons à l'hypothèse d'injectivité sur l'application de Gauss par un argument de recollement. La section 4.6 utilise les formules intégrales développées précédemment pour obtenir (4). Nous obtenons aussi une inégalité à caractère isopérimétrique en dimension 2.

##### 4.1. Paramétrisation d'Euler.

Nous adoptons dans cette section le point de vue immergé, en regardant  $M$  comme hypersurface de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Soit  $U \subset M$  un domaine sur lequel l'application de Gauss  $G : U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{S}^n$  est injective. Son inverse

$$\phi : V \xrightarrow{\sim} U$$

est une paramétrisation de  $U$  et associe à un point  $\theta$  l'unique  $x$  tel que le vecteur  $\theta$  soit orthogonal à l'hyperplan  $T_x M$  tangent à  $M$  en  $x$ . Si  $f(\theta)$  désigne la distance orientée entre l'origine 0 et  $T_x M$ , alors l'application  $f$  est différentiable sur  $V$  et le gradient  $\nabla f(\theta) \in T_\theta \mathbb{S}^n$  est bien défini. De plus, on a

$$\phi(\theta) = x = f(\theta) \cdot \theta + \nabla f(\theta)$$

après des identifications naturelles avec des vecteurs de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En géométrie convexe, on appelle  $f$  la « fonction support » de  $U$  et  $\phi$  la « paramétrisation

d'Euler » de l'hypersurface  $U$ . Soient  $dV$  et  $d\theta$  les éléments de volume sur  $U \subset M$  et  $V \subset \mathbb{S}^n$  respectivement. Alors on a

$$dV = \pm \det(\phi_*(\theta)) d\theta.$$

On calcule maintenant  $\phi_* : T_\theta \mathbb{S}^n \rightarrow T_\theta \mathbb{S}^n \equiv T_{\phi(\theta)} M^n \subset T_{\phi(\theta)} \mathbb{R}^{n+1}$ . On peut écrire

$$\phi_* Y = Y(f)\theta + fY + D_Y(\nabla f).$$

Mais  $T_{\phi(\theta)} M^n // T_\theta \mathbb{S}^n$  et en prenant ci-dessus la partie tangente à  $\mathbb{S}^n$ , on a  $\phi_* Y = \phi_*^T Y = fY + D_Y^T(\nabla f)$ . Cela signifie précisément que

$$\phi_* = H_f + f \cdot \text{Id},$$

où  $H_f$  est la *hessienne* de  $f$  sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ . C'est l'endomorphisme du fibré tangent défini par

$$H_f(\xi) = \nabla_\xi \nabla f.$$

Ceci établit la formule (où le signe dépend des orientations)

$$(15) \quad \text{vol}(U) = \pm \int_V \det(H_f + f \cdot \text{Id}) d\theta.$$

Il est utile de voir l'application  $\phi$  comme inverse de l'application de Gauss. Là où cette dernière est un difféomorphisme, la dérivée  $\phi_*$  est l'inverse de l'application de Weingarten et ses valeurs propres sont les inverses des courbures principales de  $M$ . En particulier la signature de  $\phi_*$  est la même que la signature de l'application de Weingarten. Sur les domaines de signature impaire,  $\phi_*$  change l'orientation et la formule précédente s'écrit avec le signe '-'; sinon elle s'écrit avec le signe '+'.

## 4.2. Coordonnées stéréographiques.

On exprime dans cette section la formule intégrale précédente en coordonnées stéréographiques. Soit  $\mathbb{S}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = \rho\}$  la sphère de rayon  $\rho$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il est bien connu que la projection stéréographique du pôle nord induit sur  $\mathbb{R}^n$  une métrique  $g$  de composantes

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 + |x|^2/\rho^2)^2} \cdot \delta_{ij}.$$

Les coefficients du tenseur de Christoffel sont

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{2}{\rho^2 + |x|^2} \{\delta_{ik}x^j + \delta_{ij}x^k - \delta_{jk}x^i\}.$$

Pour faciliter l'écriture on note par  $\partial_i$  les champs  $\partial/\partial x^i$ . Ce sont des champs orthogonaux dans la métrique sphérique. Le gradient sphérique de  $f$  satisfait  $(\nabla f, \partial_i) = \partial f/\partial x^i$  et cela donne

$$\nabla f|_x = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \partial_i.$$

La hessienne sphérique de  $f$  vérifie

$$\begin{aligned} H_f(\partial_i) &= \nabla_{\partial_i} \nabla f = \nabla_{\partial_i} \frac{1}{4\rho^4} (\rho^2 + |x|^2)^2 \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \partial_j \\ &= \frac{1}{4\rho^4} \left\{ \partial_i (\rho^2 + |x|^2)^2 \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \partial_j + (\rho^2 + |x|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \partial_j \right. \\ &\quad \left. + (\rho^2 + |x|^2)^2 \partial_j f \cdot \Gamma_{ij}^\ell \partial_\ell \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) x^i \partial_j f \cdot \partial_j \\ &\quad - \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) \partial_j f \cdot \{ \delta_{\ell i} x^j + \delta_{\ell j} x^i - \delta_{ij} x^\ell \} \partial_\ell \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \partial_{ij} f \cdot \partial_j \\ &\quad + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) \left\{ 2x^i \partial_j f \cdot \partial_j - \partial_\ell f \{ \delta_{ji} x^\ell + \delta_{\ell j} x^i - \delta_{i\ell} x^j \} \partial_j \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) \left\{ 2x^i \partial_j f \cdot \partial_j \right. \\ &\quad \left. - \partial_\ell f \sum_{j \neq i} \{ \delta_{\ell j} x^i - \delta_{i\ell} x^j \} \cdot \partial_j - \partial_i f \cdot x^\ell \cdot \partial_i \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) \left\{ (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) \cdot \partial_j \right. \\ &\quad \left. - (\nabla^{\mathbb{R}^n} f|_x \cdot x) \cdot \partial_i \right\}. \end{aligned}$$

Dans les formules qui vont suivre, les gradients et hessiennes seront implicitement pris par rapport à la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas contraire, on l'indiquera explicitement (par exemple  $H_f^{\mathbb{S}^n}$  désignera la hessienne de  $f$  calculée dans la métrique sphérique). On peut simplifier l'expression obtenue en posant

$$(16) \quad g = \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} f.$$

Alors on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) + f \cdot \delta_{ij}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} H_f^{\mathbb{S}^n}(x)(\partial_i) &= \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) \left\{ \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} \partial_{ij} f \cdot \partial_j + (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) \partial_j \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) (\nabla f \cdot x) \cdot \partial_i \\ &= \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right) [H_g - (f + \nabla f \cdot x) \cdot \text{Id}](\partial_i). \end{aligned}$$

Soient maintenant  $U$  et  $V$  des domaines sur  $M$  et respectivement  $\mathbb{S}^n$  comme dans §4.1. On choisit un point  $N \in \mathbb{S}^n \setminus V$  et on note  $\Omega$  l'image de  $V$  par la projection stéréographique de  $N$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_V (H_f + f \cdot \text{Id}) d\theta &= \frac{1}{2^n \rho^{2n}} \int_{\Omega} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^n \cdot \frac{2^n}{(1 + |x|^2/\rho^2)^n} \\ &\quad \times \det \left( H_g + \left( -f - \nabla f \cdot x + \frac{2\rho^2}{1 + |x|^2/\rho^2} \cdot f \right) \right) dx, \end{aligned}$$

donc

$$\text{vol}(U) = \pm \frac{1}{\rho^{2n}} \int_{\Omega} \det(H_g + R_f \cdot \text{Id}) dx$$

où on a noté  $R_f = -f - \nabla f \cdot x + 2\rho^4/(\rho^2 + |x|^2) \cdot f$ . Il est utile de remarquer que

$$R_f = \frac{2}{\rho^2 + |x|^2} [(g - \nabla g \cdot x) + (\rho^4 - \rho^2) \cdot f].$$

En particulier, pour  $\rho = 1$  on obtient

$$(17) \quad R_f = \frac{2}{1 + |x|^2} (g - \nabla g \cdot x).$$

On note désormais cette dernière quantité par  $R_g$  et on pourra écrire

$$\text{vol}(U) = \pm \int_{\Omega} \det(H_g + R_g \cdot \text{Id}) dx.$$

**4.3. Formes différentielles.**

Considérons les 1-formes suivantes :

$$\omega_i = d(\partial_i g) + R_g dx^i.$$

On a  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \det(H_g + R_g \cdot \text{Id}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , donc

$$\text{vol}(U) = \pm \int_{\Omega} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n.$$

Rappelons que  $R_g = 2/(1 + |x|^2) \cdot (g - \nabla g \cdot x)$  et donc

$$\begin{aligned} dR_g &= -\frac{4}{(1 + |x|^2)^2} (g - \nabla g \cdot x) \cdot (x dx) - \frac{2}{1 + |x|^2} \sum_{i=1}^n x^i d(\partial_i g) \\ &= -\frac{2}{1 + |x|^2} \sum_{i=1}^n x^i \cdot \omega_i. \end{aligned}$$

Si on fait la notation  $u = 2/(1 + |x|^2)$ , on a  $dR_g = -u \sum_{i=1}^n x^i \omega_i$  et

$$(18) \quad d\omega_i = dR_g \wedge dx^i = -u \sum_{j=1}^n x^j \omega_j \wedge dx^i.$$

C'est l'identité (18) qui est la clé de notre résultat. On pourra la penser comme exprimant une sorte de stabilité des  $\omega_i$  par différentiation extérieure.

**4.4. Une inégalité locale.**

Établissons d'abord les notations. Pour des suites  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_{n-k})$  contenues dans  $\{1, \dots, n\}$ , on note

$$\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \quad \text{et} \quad dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}}.$$

PROPOSITION 3. — Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe borné et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que la matrice  $H_g + R_g \cdot \text{Id}$  soit définie positive sur  $\Omega$ , où  $g$  et  $R_g$  sont définies par (16) et (17) avec  $\rho$  égal à 1. Soient  $I, J$  deux suites d'indices avec  $|I| = k$  et  $|J| = n - k$ . Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe une constante  $C_k(K, \Omega)$  indépendante de  $f$  telle que, pour toute fonction  $\psi \in C^\infty(\Omega)$  avec  $\text{supp}(\psi) \subseteq K$ , on ait :

$$\left| \int_{\Omega} \psi \omega_I \wedge dx^J \right| \leq C_k(K, \Omega) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_K |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k.$$

De plus,  $C_k(K, \Omega)$  est proportionnelle par une constante indépendante de  $K$  et  $\Omega$  à  $((1 + r)^2/\delta)^k$ , où  $2\delta = \text{dist}(K, \partial\Omega)$  et  $\Omega \subset \{|x| \leq r\}$ .



*Démonstration.* — Donnons d'abord deux majorations pour  $|R_g|$  et  $|\nabla g|$ . Puisque  $\rho = 1$ , on a  $R_g = (1 - |x|^2)/(1 + |x|^2) \cdot f - \nabla f \cdot x$ . Si  $\Omega$  est inclus dans  $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ , alors on trouve

$$|R_g| \leq |f| + r|\nabla f| \leq (1 + r)(|f| + |\nabla f|).$$

De même, on a  $\nabla g = f \cdot x + \frac{1}{2}(1 + |x|^2) \cdot \nabla f$  et, si  $\Omega \subset B(0, r)$ , alors

$$|\nabla g| \leq r|f| + \frac{1 + r^2}{2} |\nabla f| \leq \frac{(1 + r)^2}{2} (|f| + |\nabla f|).$$

On procède par récurrence sur  $k$ . Le premier pas de récurrence est  $k = 1$ . On supposera  $J = (2, \dots, n)$  puisque les autres cas lui sont symétriques. Deux situations se présentent :  $I \cap J = \emptyset$  et  $I \cap J \neq \emptyset$ . Les calculs suivent une idée de Rauch et Taylor [RT] reprise dans Aubin [Au].

(a)  $I \cap J = \emptyset$ . On a successivement

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi (\partial_{11}g + R_g) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \cdot \int_K |(\partial_{11}g + R_g)| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sup_K |\psi| \cdot \int_K (\partial_{11}g + R_g) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

La dernière égalité fait usage de la positivité de la matrice  $H_g + R_g \cdot \text{Id}$ . Soit maintenant  $\gamma$  une fonction à support compact dans  $C^\infty(\Omega)$  telle que  $\gamma|_K \equiv 1$  et  $0 \leq \gamma \leq 1$ . On peut la choisir telle que  $|\nabla \gamma| \leq 1/\delta$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \int_K (\partial_{11}g + R_g) dx &\leq \int_{\Omega} \gamma (\partial_{11}g + R_g) dx, \\ \int_{\Omega} \gamma \partial_{11}g dx &= - \int_{\Omega} \partial_1 \gamma \cdot \partial_1 g dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\partial_1 \gamma| \cdot \sup_{\Omega} |\partial_1 g| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \frac{(1 + r)^2}{2} \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|), \\ \int_{\Omega} \gamma R_g dx &\leq \text{vol}(\Omega)(1 + r) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left| \int_{\Omega} \psi \omega_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \leq C \left( r, \frac{1}{\delta} \right) \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|).$$

(b)  $I \cap J \neq \emptyset$ . Soit  $i \in [2, n]$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_i \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi \partial_{1i} g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \cdot \int_K |\partial_{1i} g| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \cdot \int_K ((\partial_{11} g + R_g) + (\partial_{ii} g + R_g)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq C\left(r, \frac{1}{\delta}\right) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|). \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence immédiate du point a), tandis que le fait crucial

$$|\partial_{1i} g| \leq \frac{1}{2} ((\partial_{11} g + R_g) + (\partial_{ii} g + R_g))$$

découle de la positivité de la matrice  $H_g + R_g \cdot \text{Id}$ . Cette dernière inégalité reste valable pour des mineurs d'ordre quelconque d'une matrice définie positive. Considérons deux suites d'indices  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_{n-k}) \subset \{1, \dots, n\}$ . On note  $\tilde{J}$  la suite complémentaire de  $J$ . Pour une matrice  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on note  $M[I, \tilde{J}]$  la matrice carrée construite sur les lignes  $I$  et les colonnes  $\tilde{J}$  de  $M$  et  $M_{I, \tilde{J}}$  son déterminant (par exemple, on a  $M_{ij} = m_{ij}$  pour  $k = 1$ ). Si  $M$  est définie positive, alors

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad |M_{ij}| \leq \frac{1}{2} (M_{ii} + M_{jj})$$

puisque  $M_{\{i,j\}, \{i,j\}} \geq 0$ . De plus, une fois l'orientation fixée sur  $\mathbb{R}^n$  (représentée — par exemple — par la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ ),  $M$  détermine naturellement un endomorphisme *défini positif* sur  $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$  muni de la métrique induite par  $\mathbb{R}^n$ . Sa matrice dans la base  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  a comme entrées justement les  $M_{I, \tilde{J}}$ . On trouve donc l'inégalité

$$\forall I, J, |I| = k, |J| = n - k, \quad |M_{I, \tilde{J}}| \leq \frac{1}{2} (M_{I, I} + M_{\tilde{J}, \tilde{J}}).$$

On suppose maintenant l'inégalité vraie pour  $k - 1$  et on la prouve pour  $k$ . Les hypothèses sont  $\text{supp}(\psi) \subseteq K$ ,  $|I| = k$  et  $|J| = n - k$ . On note  $M = H_g + R_g \cdot \text{Id}$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_I \wedge dx^J \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi M_{I, \tilde{J}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \cdot \int_K |M_{I, \tilde{J}}| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \cdot \int_K (M_{I, I} + M_{\tilde{J}, \tilde{J}}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \cdot \left( \int_K \omega_I \wedge dx^{\tilde{I}} + \int_K \omega_{\tilde{J}} \wedge dx^J \right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver les estimations pour  $J = \tilde{I}$ . Comme avant, soit  $\gamma$  une fonction à support compact dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  telle que  $\gamma|_K \equiv 1$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$  et  $\text{dist}(\text{supp}(\gamma), \partial\Omega) \geq \frac{1}{2}\delta$ . On peut la choisir telle que  $|\nabla\gamma| \leq 1/\delta$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_K \omega_I \wedge dx^{\tilde{I}} &\leq \int_\Omega \gamma \omega_I \wedge dx^{\tilde{I}} \\ &= \int_\Omega \gamma d(\partial_{i_1} g) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}} + \int_\Omega \gamma R_g dx^{i_1} \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \gamma R_g dx^{i_1} \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ \leq C_{k-1} \left( r, \frac{4}{\delta} \right) \cdot \sup_\Omega |\gamma R_g| \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ \leq (1+r) \cdot 4^{k-1} C_{k-1} \left( r, \frac{1}{\delta} \right) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^k. \end{aligned}$$

Après une intégration par parties on obtient aussi

$$\begin{aligned} \int_\Omega \gamma d(\partial_{i_1} g) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ = - \int_\Omega \partial_{i_1} g d\gamma \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ \quad - \sum_{\ell=2}^k \int_\Omega \gamma \partial_{i_1} g \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge dR_g \wedge dx^{i_\ell} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ = - \int_\Omega \partial_{i_1} g (\partial_s \gamma dx^s) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ \quad + \sum_{\ell=2}^k \int_\Omega \gamma \partial_{i_1} g \frac{2}{1+|x|^2} \omega_{i_2} \cdots (x^s \omega_s) \wedge dx^{i_\ell} \cdots \omega_{i_k} \wedge dx^{\tilde{I}} \\ \leq n C_{k-1} \left( r, \frac{4}{\delta} \right) \frac{(1+r)^2}{2} \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|) \frac{1}{\delta} \text{vol}(\Omega) \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ \quad + (k-1) C_{k-1} \left( r, \frac{4}{\delta} \right) \frac{(1+r)^2}{2} \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|) \text{vol}(\Omega) \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ \leq (n+k-1) \frac{(1+r)^2}{2} \frac{1}{\delta} 4^{k-1} C_{k-1} \left( r, \frac{1}{\delta} \right) \text{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Omega) \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^k. \end{aligned}$$

Cela donne l'estimation finale

$$\begin{aligned} \int_K \omega_I \wedge dx^{\tilde{I}} &\leq \left( (n+k-1) \frac{(1+r)^2}{2} + 1+r \right) 4^{k-1} \\ &\quad \times \frac{1}{\delta} C_{k-1} \left( r, \frac{1}{\delta} \right) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_\Omega (|f| + |\nabla f|)^k, \end{aligned}$$

ou bien

$$\left| \int_K \psi \omega_I \wedge dx^j \right| \leq C_k \left( r, \frac{1}{\delta} \right) \cdot \sup_{\Omega} |\psi| \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k,$$

avec la constante équivalente à  $(1/\delta)^k$  et  $r^{2k}$

$$C_k \left( r, \frac{1}{\delta} \right) = \left( (n + k - 1) \frac{(1 + r)^2}{2} + 1 + r \right) 4^{k-1} \frac{1}{\delta} C_{k-1} \left( r, \frac{1}{\delta} \right).$$

Cela achève la démonstration. □

**COROLLAIRE 1.** — *Avec les notations de la proposition 3, si  $H_g + R_g \cdot \text{Id}$  est définie positive sur l'ouvert borné  $\Omega \subset \{|x| \leq r\}$ , alors pour tout compact  $K \subseteq \Omega$  il existe une constante  $C(K, \Omega)$  telle que*

$$\int_K \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \leq C(K, \Omega) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^n.$$

*Cette constante est proportionnelle à  $((1 + r)^2/\delta)^n$ , où  $\delta = \text{dist}(K, \partial\Omega)$ .*

Dans l'inégalité ci-dessus, le terme de gauche représente le volume d'un compact de  $M$  sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et injective, tandis que le membre de droite représente le volume d'un épaississement par  $\delta$  de son image dans  $\mathbb{R}^n$  par la composée de la projection stéréographique avec l'application de Gauss. Si  $r \leq 1$ , la distance euclidienne est comparable à la distance mesurée sur  $\mathbb{S}^n$  et on en déduit le

**COROLLAIRE 2.** — *Soit  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion isométrique d'hypersurface dont l'image est contenue dans la boule  $B^{n+1}(0, R)$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert strictement convexe sur lequel l'application de Gauss est injective et d'image contenue dans une demi-sphère. Il existe une constante  $C_n$  indépendante de  $U$  et de  $M$  telle que, si  $K \subset U$  est un compact, on a*

$$(19) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} T(U).$$

Ici  $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  représente la distance entre  $K$  et  $\partial U$  mesurée sur  $\mathbb{S}^n$  via l'application de Gauss, définie comme

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) &= \text{dist}_{\mathbb{S}^n} (\text{Gauss}(K), \text{Gauss}(\partial U)) \\ &= \min_{x \in K} \text{dist}_{\mathbb{S}^n} (\text{Gauss}(x), \text{Gauss}(\partial U)). \end{aligned}$$

Il faut souligner que la proposition 3 n'est pas un ingrédient indispensable pour le corollaire 2, alors qu'elle le sera pour le théorème 3. Le corollaire 2 peut être démontré directement comme suit lorsque  $U$  est un ouvert strictement convexe. L'inégalité d'Archimède (section 3.3) assure que  $\text{vol}(K)$  est borné supérieurement par  $R^n \text{vol}(\mathbb{S}^n)$ . D'un autre côté, si  $B(d)$  désigne une boule géodésique de rayon  $d$  dans  $\mathbb{S}^n$ , la fonction  $\text{vol} B(d)/d^n$  est décroissante pour  $0 < d \leq \frac{1}{2}\pi$  et en particulier, elle est bornée inférieurement par  $\frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^n)/(\frac{1}{2}\pi)^n$ . On en déduit que

$$\frac{T(U)}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \geq \frac{\text{vol} B(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n}$$

admet la même borne inférieure. L'inégalité (19) est alors valable avec  $C_n = \pi^n/2^{n-1}$ .

#### 4.5. Globalisation.

Dans ce qui suit nous expliquons comment on peut éliminer les deux dernières hypothèses sur l'application de Gauss dans le corollaire 2. L'application de Gauss sera notée  $G$  ou Gauss et la courbure totale  $T(U)$  d'un domaine  $U$  sera parfois notée  $\text{vol}(\text{Gauss}_U)$ . Donnons d'abord la

**DÉFINITION 1.** — Soient  $U \subset M$  un ouvert sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et  $K \subset U$  un compact. La distance sphérique locale entre  $K$  et  $\partial U$  est définie comme

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) &= \min_{x \in K} \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère} \\ \text{Gauss}|_{\mathcal{U}} \text{ injective}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}) \\ &= \min_{x \in K} \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Les deux quantités ci-dessus sont égales au vu de la non-dégénérescence de Gauss sur  $U$ . Pour montrer l'égalité, il suffit de voir que, pour  $x \in K$  fixé et  $\mathcal{U}$  satisfaisant  $x \in \mathcal{U} \subset U$  et  $\text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère}$ , il existe un  $x \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  sur lequel Gauss est injective et tel que  $d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}) = d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}')$ . Or, par définition de  $d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U})$ , l'application  $G|_{\mathcal{U}}$  est propre au-dessus de la boule ouverte  $B_{\mathbb{S}^n}(G(x), d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}))$ . Comme c'est aussi un difféomorphisme local, on déduit que c'est un revêtement. L'ouvert  $\mathcal{U}'$  cherché sera la feuille qui contient  $x$ .

THÉORÈME 2. — Soit  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  une immersion isométrique d'hypersurface dont l'image est contenue dans la boule  $B^{n+1}(0, R)$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante  $\bar{C}_n$  indépendante de  $U$  et de  $M$  telle que, si  $K \subset U$  est un compact, on a

$$(22) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n R^n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U).$$

Ici  $\text{vol}(\text{Gauss}_U)$  représente le volume recouvert sur  $\mathbb{S}^n$  par l'application de Gauss restreinte à  $U$  compté avec multiplicités.

Avant de prouver le théorème nous donnons quelques propriétés de la distance  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ .

(i) Si l'application de Gauss est non seulement non-dégénérée sur  $U$ , mais aussi injective et d'image contenue dans une demi-sphère (i.e. sous les hypothèses du corollaire 2), on a  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ .

(ii) On a toujours  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) > 0$  et

$$d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \leq \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Il se peut toutefois que  $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  soit nulle si on n'impose pas l'injectivité de  $G$  sur  $U$ , à savoir lorsque l'image de  $\partial U$  recoupe l'image de  $K$ .

(iii) On a  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(\partial K, \partial U)$ .

(iv) Définissons une semidistance sur  $M$  par

$$d_{\mathbb{S}^n}(x, y) = \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(\text{Gauss}(x), \text{Gauss}(y)).$$

Cette semi-distance est non-dégénérée sur un ouvert  $U$  si et seulement si l'application de Gauss est injective sur  $U$ . La notation  $d_{\mathbb{S}^n}$  est justifiée par l'identité

$$d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = \min_{x \in K, y \in \partial U} d_{\mathbb{S}^n}(x, y).$$

Pour une application de Gauss non-injective, les boules

$$B_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r) = \{y \in M : d_{\mathbb{S}^n}(x, y) < r\}, \quad r > 0,$$

sont en général disconnexes. Définissons la *boule connexe* de rayon  $r$  centrée en  $x$  comme

$\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r) =$  la composante connexe de  $x$  dans  $B_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r)$ ,  $r > 0$ , avec la convention  $\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, 0) = \{x\}$ . Définissons aussi le *rayon sphérique d'injectivité de l'application de Gauss* en  $x$  comme

$$R_x = \sup \{r : d_{\mathbb{S}^n} \text{ non-dégénérée sur } \tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r)\}.$$

Si l'application de Gauss est non-dégénérée en  $x$ , alors on a  $R_x > 0$  par injectivité locale. Le lemme qui suit sera fondamental dans la preuve du théorème 2.

LEMME 1. — Soit  $U$  un ouvert sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et  $K \subset U$  un compact. Pour tout  $x \in K$ , on a  $R_x \geq \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ .

Démonstration du lemme 1. — L'énoncé est en fait une reformulation géométrique des définitions. Soit  $x \in K$ . Il suffit de montrer que l'on a

$$R_x \geq \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}|_{\mathcal{U}} \text{ injective}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}).$$

Soit  $\mathcal{U}$  tel que  $\text{Gauss}|_{\mathcal{U}}$  est injective. Alors  $\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}))$  est inclus par définition dans  $\mathcal{U}$  et donc  $R_x \geq d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U})$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

De ce fait, on peut regarder la quantité  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  comme fournissant une borne inférieure uniforme sur  $K$  pour les rayons d'injectivité de l'application de Gauss.

Démonstration du théorème 2. — Il suffit de faire la démonstration pour  $R = 1$ . Nous allons fournir un argument de recollement. Il est possible de sous-diviser  $K$  en compacts  $K'$  et de choisir autour de chaque  $K'$  un ouvert  $U' \subset U$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- la restriction de l'application de Gauss à chaque  $U'$  est injective et d'image contenue dans une demi-sphère ;
- $d_{\mathbb{S}^n}(K', \partial U') \geq C^{-1} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ , avec  $C$  une constante universelle indépendante de la dimension ;
- une intersection non-vide d'ouverts  $U'$  compte au plus  $D_n$  éléments, avec  $D_n$  une constante dépendant uniquement de la dimension.

Une fois une telle sous-division de  $K$  construite, on applique le corollaire 2 pour chaque couple  $(K', U')$  et on trouve :

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \sum \text{vol}(K') \leq C_n \sum \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K', \partial U'))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_{U'}) \\ &\leq C_n \frac{C^n}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \sum \text{vol}(\text{Gauss}_{U'}) \\ &\leq D_n C_n \frac{C^n}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U) \\ &= \bar{C}_n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U), \end{aligned}$$

avec  $\bar{C}_n = C^n D_n C_n$ . Remarquons d'abord qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où Gauss est non-dégénérée sur  $\bar{U}$  : on pourra ensuite

considérer une exhaustion de  $U$  par des ouverts relativement compacts contenant  $K$ . Par continuité de la distance  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}$  l'inégalité pour  $U$  lui-même s'ensuivra. On travaillera par la suite sous cette hypothèse.

La construction de la sous-division  $\{(K', U')\}$  se fait en deux étapes.

*Étape 1 : réduction au cas où Gauss( $U$ ) est contenu dans une demi-sphère.* — Fixons une triangulation  $\{T_i\}$  de la sphère  $\mathbb{S}^n$  telle que chaque simplexe soit contenu dans une boule de rayon  $\frac{3}{8}\pi$ . Pour chaque  $T_i$  considérons le voisinage  $V_i = \{p \in \mathbb{S}^n : \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(p, T_i) < \frac{1}{8}\pi\}$ . Tout  $V_i$  est contenu dans une demi-sphère et chaque  $V_i$  intersecte au plus  $c_n$  autres  $V_j$ , avec  $c_n$  une constante qui dépend de la triangulation. La constante  $c_n$  sera désormais fixée, et il est facile d'obtenir des estimations sur  $c_n$  en fonction de  $n$  en construisant une triangulation explicite.

On construit maintenant une division de  $K$  et  $U$  en prenant des préimages par Gauss. Soient  $U_i^\ell$  les composantes connexes de  $G^{-1}(V_i) \cap U$ . Puisque  $G$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $\bar{U}$ , celles-ci coïncident avec les intérieurs des composantes connexes de  $G^{-1}(\bar{V}_i) \cap \bar{U}$ , et ces dernières sont en nombre fini par compacité de  $\bar{U}$ . Donc les  $U_i^\ell$  sont en nombre fini.

Soient  $K_i^\ell = G^{-1}(T_i) \cap K \cap U_i^\ell$ . Les  $K_i^\ell$  ne sont pas nécessairement connexes, mais ils sont d'intérieurs disjoints et on a

$$\bigcup_{\ell} K_i^\ell = G^{-1}(T_i) \cap K.$$

Ainsi  $\{(K_i^\ell, U_i^\ell)\}_{i,\ell}$  forme une sous-division de  $(K, U)$  et  $G(U_i^\ell)$  est inclus dans une demi-sphère par construction. De plus,

$$\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_i^\ell, \partial U_i^\ell) = \min \left\{ \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_i^\ell, \partial U), \frac{\pi}{8} \right\} \geq \frac{1}{4} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$$

et le nombre de  $U_i^\ell$  qui s'intersectent à la fois est borné par  $c_n$ . Il suffira ainsi de trouver pour chaque couple  $(K_i^\ell, U_i^\ell)$  une sous-division avec les propriétés désirées. Si les constantes qui apparaîtront sont notées  $C'$  et  $D'_n$ , alors la construction aura été faite dans le cas général avec  $C = 4C'$  et  $D_n = c_n \cdot D'_n$ .

*Remarque.* — Pour minimiser la constante finale, il faudra trouver un bon rapport entre le  $c_n$  et la largeur de l'épaissement  $V_i$  de chaque  $T_i$ . La constante finale sera meilleure avec un  $c_n$  petit et un épaisseur large. Or ces deux demandes sont antagoniques et le produit des deux quantités est minimisé par un certain choix de triangulation. Dans notre cas, on ne s'intéresse pas à la meilleure constante et on cherche juste une information qualitative.



Étape 2 : on suppose désormais que  $\text{Gauss}(U)$  est inclus dans une demi-sphère. — Soit  $\delta = \frac{1}{15} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ . Le lemme 1 assure que Gauss est injective sur  $\tilde{B}(x, 15\delta) = \tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, 15\delta)$  pour tout  $x \in K$ . Soit  $(\tilde{B}(x_i, 3\delta))_{i=1, N}$  un recouvrement fini minimal de  $K$  par des boules de rayon  $3\delta$  centrées en des points de  $K$ . On pose  $B_i = \tilde{B}(x_i, 3\delta)$ ,  $U_i = \tilde{B}(x_i, 4\delta)$ ,  $i \in \{1, N\}$ ,  $K_1 = \text{cl}(\tilde{B}(x_1, 3\delta) \cap K)$  et

$$K_i = \text{cl}\left(\tilde{B}(x_i, 3\delta) \cap \left(K \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j\right)\right), \quad i = 2, \dots, N,$$

où ‘cl’ désigne l’adhérence d’un ensemble. Alors  $\{(K_i, U_i)\}$  est un découpage de  $(K, U)$  et nous affirmons qu’il vérifie les conditions désirées. Par construction et hypothèse l’application de Gauss est injective et d’image contenue dans une demi-sphère sur chaque  $U_i$ . De plus,

$$d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i) \geq \delta = \frac{1}{15} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U).$$

Il ne reste plus qu’à estimer le nombre de  $U_i$  qui peuvent s’intersecter à la fois. On utilise le

LEMME 2. — Soient  $x \in \mathbb{S}^n$ ,  $r < \frac{1}{2}\pi$  et  $C \subset B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$  un fermé. Il existe un recouvrement de  $C$  par au plus  $2^n$  boules de rayon  $r$  centrées en des points de  $C$ .

Démonstration du lemme 2. — Soit  $b_n$  le cardinal d’une triangulation de  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_{\mathbb{S}^n}(x, \frac{1}{2}\pi)$  par des simplexes de diamètre plus petit que  $\frac{1}{2}\pi$ . Pour tout  $r < \frac{1}{2}\pi$ , il existe alors une triangulation de  $\partial B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$  avec  $b_n$  simplexes de diamètre plus petit que  $r$ . Les préimages des simplexes par projection radiale dans  $B_{\mathbb{S}^n}(x, r) \setminus \{x\}$  déterminent avec  $x$  une décomposition  $\{S\}$  de  $B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$  en  $b_n$  sous-ensembles de diamètre plus petit que  $r$ . Si  $C$  intersecte un  $S$ , alors la boule de rayon  $r$  centrée en un point quelconque de  $C \cap S$  contient  $S$  et en particulier  $C \cap S$ . On prend une telle boule pour chaque  $S$  qui intersecte  $C$  pour obtenir un recouvrement de  $C$  avec au plus  $b_n$  boules. À titre d’exemple, on peut prendre  $b_1 = 2$  et  $b_2 = 4$ . On prouve alors par récurrence que  $b_n = 2^n$  convient.  $\square$

Suite de la démonstration du théorème 2. — Deux boules  $U_i = \tilde{B}(x_i, 4\delta)$  et  $U_j = \tilde{B}(x_j, 4\delta)$  peuvent s’intersecter uniquement si  $x_j$  appartient à  $\text{cl}\tilde{B}(x_i, 8\delta)$ . Soit  $e(n, \delta, x_i)$  le nombre minimal de boules de rayon  $3\delta$  avec centres dans  $\tilde{B}(x_i, 11\delta)$  nécessaires pour recouvrir

$\text{cl}(\tilde{B}(x_i, 11\delta) \setminus \tilde{B}(x_i, 4\delta))$ . Alors  $U_i$  peut intersecter au plus  $2^n e(n, \delta, x_i)$  parmi les  $U_j$ . Dans le cas contraire, avec le lemme 2, on remplacerait les  $B_j$  correspondants par *au plus*  $2^n e(n, \delta, x_i)$  boules de rayon  $3\delta$  centrées en des points de  $K$ , sans toutefois diminuer la partie de  $K$  qu'elles recouvrent. Mais ceci contredirait la minimalité du recouvrement initial.

La quantité  $e(n, \delta, x_i)$  ne dépend pas de  $x_i$  car le raisonnement est fait en pratique sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ . On a de plus

$$e(n, \delta, x_i) = e(n, \delta) \leq e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta) = e(n),$$

où  $e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$  désigne la quantité analogue à  $e(n, \delta)$  dans l'espace euclidien. Un argument simple d'homotétie montre que  $e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$  ne dépend pas de  $\delta$ , et elle a été notée plus haut par  $e(n)$ . L'inégalité  $e(n, \delta) \leq e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$  est assurée par le fait que l'application exponentielle est contractante sur un espace à courbure positive : tout recouvrement sur  $\mathbb{R}^n$  déterminera par l'exponentielle un recouvrement du même cardinal sur la sphère.

L'existence du découpage est donc prouvée sous l'hypothèse que l'image de l'application de Gauss est contenue dans une demi-sphère avec les constantes  $C' = 15$  et  $D'_n = 2^n e(n)$ . Son existence dans le cas général est prouvée avec  $C = 60$  et  $D_n = c_n \cdot 2^n e(n)$ . □

**COROLLAIRE 3.** — *Soit  $Z \subset M$  le lieu des points de courbure de Gauss nulle. Il existe une constante  $C_n$  indépendante de  $M$  telle que, pour tout compact  $K \subset M$  localement strictement convexe, on a*

$$(23) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, Z))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_M).$$

*Remarques :*

1) Le compact  $K$  du corollaire 3 peut être disconnexe.

2) Il est intéressant de remarquer le cas  $Z = \emptyset$ . Ceci correspond à une courbure de Gauss partout positive, donc à une hypersurface convexe (respectivement à une courbe localement convexe dans le cas  $n = 1$ ). Dans cette situation, le terme de (23) impliquant  $\bar{d}$  est absorbé dans  $\bar{C}_n$  et nous retrouvons l'inégalité d'Archimède (section 3.3) avec une constante plus faible et sans ambition de caractériser le cas d'égalité.

3) L'inégalité (23) a un caractère asymptotique : plus on voudra attraper dans le compact  $K$  du volume, plus la distance  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, Z)$  devient

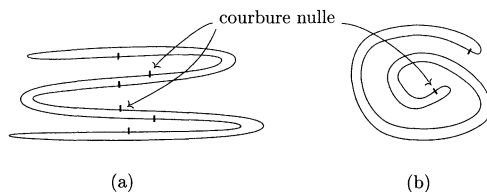


Figure 1. Hypersurfaces avec beaucoup/peu de points de faible courbure

petite et l'estimation grossière. L'inégalité est efficace sur des hypersurfaces enroulées sur elles mêmes (figure 1 b), mais elle demeure très grossière pour des hypersurfaces possédant de grandes régions plates ou ayant un lieu  $Z$  ou de non convexité trop riche (figure 1 a).

4) *Question ouverte.* Il est naturel de se demander si la proposition 3 est valide en supposant que la matrice  $H_g + R_g \cdot \text{Id}$  est juste non-dégénérée et pas nécessairement définie positive. Cela entraînerait la validité des corollaires 2 et 3, du théorème 2 et du théorème 3 ci-dessous en supposant juste la non-dégénérescence de l'application de Gauss, et pas la convexité stricte de l'ouvert en question. Je n'ai pas pu étendre l'argument de la proposition 3 dans ce sens.

#### 4.6. Techniques globales pour raffiner l'inégalité locale.

Revenons dans cette section au point de vue intrinsèque, en considérant  $M$  comme variété riemannienne abstraite munie d'une immersion  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Reprenons dans ce contexte les notations de la section 4.1 :  $U \subset M$  est un domaine sur lequel l'application de Gauss est injective et évite au moins un point de  $\mathbb{S}^n$ ,  $V = \text{Gauss}(U) \subset \mathbb{S}^n$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est l'image de  $V$  par la projection stéréographique, alors que  $\tilde{\phi} : V \rightarrow U$  est l'inverse de Gauss et  $\phi = \varphi \circ \tilde{\phi}$  est la paramétrisation d'Euler.

Écrivons la formule (11) sur un compact arbitraire à bord lisse  $K \subset M$  :

$$(24) \quad \text{vol}(K) = \frac{1}{n} \int_K p \mathcal{H} dV + \int_{\partial K} \beta_1,$$

avec  $\mathcal{H}$  = courbure moyenne sur  $M$  et

$$\beta_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (\varphi, \nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1}).$$

Nous allons estimer les termes intervenant dans (24) par les techniques déjà vues dans 4.4, sous l'hypothèse  $\varphi(M) \subset B^{n+1}(0, R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . De façon

évidente on a

$$\int_{\partial K} \beta_1 \leq \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K).$$

Ceci découle de  $|\beta_1| \leq n^{-1} d \text{vol}_{\partial K}$ . En effet, soit  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  un repère local orthonormé sur  $\partial K$ . On a

$$|\beta_1(f_1, \dots, f_{n-1})| = \frac{1}{n} |\det(\varphi, \nu, \varphi_*(f_1), \dots, \varphi_*(f_{n-1}))| \leq \frac{1}{n} |\varphi| \leq \frac{R}{n},$$

puisque  $\varphi$  est une isométrie et  $\varphi(M)$  est contenue dans la boule de rayon  $R$ .

Soit maintenant  $U \supset K$  un ouvert strictement convexe sur lequel l'application de Gauss est injective, avec  $\partial U$  lisse. Nous pouvons alors exprimer les intégrales sur  $U$  comme des intégrales sur  $V = \text{Gauss}(U)$  et en déduire des majorations sur  $\int_K p\mathcal{H} dV$  en utilisant les techniques de la section 4.4. Mettons

$$\alpha_1 \stackrel{\text{déf.}}{=} p\mathcal{H} dV = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (\varphi, d\nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1}).$$

Évaluons  $\tilde{\phi}^* \alpha_1$  sur un repère local orthonormé  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{S}^n$ , qu'on peut choisir comme étant constitué de directions de courbure de  $M$ , c'est-à-dire  $\phi_* e_i = \lambda_i e_i$ , avec  $\lambda_i = 1/k_i$  et  $k_i$  courbure principale de  $M$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^* \alpha_1(e_1, \dots, e_n)|_\theta &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (\varphi, d\nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1})(\tilde{\phi}_* e_1, \dots, \tilde{\phi}_* e_n) \\ &= (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \det(f(\theta)\theta + \nabla f(\theta), e_1, \dots, e_n) \times \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \\ &= (-1)^n f(\theta) \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}}. \end{aligned}$$

On a utilisé  $\nu \circ \tilde{\phi} \equiv \text{Id}$ ,  $\varphi \circ \tilde{\phi} \equiv \phi$ ; la fonction  $f$  est définie par  $p \circ \tilde{\phi} = f$ . Dans la somme ci-dessus apparaissent des mineurs de  $\phi_*$  (dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ) d'ordre exactement  $n - 1$ . Par la proposition 3, ils sont contrôlables par  $R^{n-1}/d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}$ . Comme  $|f| \leq R$ , on obtient

$$\left| \int_K p\mathcal{H} dV \right| \leq C_n \frac{R^n}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} T(U).$$

L'estimation précédente est valable sous des hypothèses d'injectivité sur l'application de Gauss qui sont superflues. La technique de globalisation de la section 4.5 fournit le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — Soit  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , une immersion isométrique d'image contenue dans la boule  $B^{n+1}(0, R)$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante  $\bar{C}_n$  indépendante de  $U$  et de  $M$  telle que, si  $K \subset U$  est un compact, on a

$$(25) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{R^n}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} T(U) + \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K).$$

COROLLAIRE 4. — Soit  $K \subset B^n(0, R) \subset \mathbb{R}^n$  un compact à bord lisse. On a

$$(26) \quad \text{vol}(K) \leq \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K).$$

Démonstration du corollaire. — Il suffit de faire la démonstration lorsque  $R = \text{Circumradius}(K)$ . Identifions  $\mathbb{R}^n$  avec  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Soit  $C_i$  une suite de calottes sphériques de dimension  $n$  dont le disque de section est  $B^n(0, R)$  et dont le rayon extérieur est égal à  $\lambda_i$ , avec  $\lambda_i \rightarrow \infty$  quand  $i$  tend vers l'infini. Soient  $K_i$  les projections verticales de  $K$  sur  $C_i$ . Alors  $\text{vol}(K_i) \rightarrow \text{vol}(K)$ ,  $\text{vol}(\partial K_i) \rightarrow \text{vol}(\partial K)$  et la courbure de Gauss-Kronecker est non-dégénérée sur chaque  $K_i$ .

Soit  $\epsilon > 0$  fixé et soit  $U_i$  la calotte sphérique contenant  $C_i$  telle que la distance entre  $\partial U_i$  et  $\partial C_i$  mesurée sur la sphère correspondante soit égale à  $\epsilon$ . Les paires  $(U_i, K_i)$  vérifient les hypothèses du théorème 3. Or il est facile de voir que  $T(U_i)/d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i)^{n-1}$  tend vers zéro. En effet, on a  $d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i) = \epsilon/\lambda_i$  et  $T(U_i) = \int_0^{\arcsin R/(\lambda_i + \epsilon/\lambda)} \sin^{n-1} t \, dt$ . En passant à la limite selon  $i \rightarrow \infty$ , on obtient la conclusion. □

Remarque. — L'intérêt du corollaire réside dans ce qu'on peut déduire une forme faible de l'inégalité isopérimétrique par les méthodes du présent article. En effet, l'inégalité (26) est une conséquence directe de l'inégalité isopérimétrique standard : si  $B'$  désigne la boule de même volume que  $K$  et  $R'$  est son rayon, on a  $\text{vol}(\partial K)/\text{vol}(K) \geq \text{vol}(\partial B')/\text{vol}(B') = n/R' \geq n/R$ .

La descente de l'exposant de  $n$  à  $n - 1$  dans (25) s'appuie sur la formule intégrale de Minkowski (11). On pourrait penser que la formule plus générale (13) permettrait une descente à  $n - 2$ . Pourtant ce n'est pas le cas, car des termes de bord supplémentaires apparaîtront et ils ne peuvent être contrôlés de manière raisonnable qu'en dimension 2. Dans ce dernier cas, (13) fournit

$$\text{vol}(K) = \int_K \left( p^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) \mathcal{K} \, dS + \int_{\partial K} \beta_1 + \int_{\partial K} \beta_2,$$

avec  $\beta_1 = -\frac{1}{2}(\varphi, \nu, d\varphi)$ ,  $\beta_2 = -\frac{1}{2}p(\varphi, \nu, d\nu)$  et  $\mathcal{K} =$  courbure de Gauss sur  $M$ . Les inégalités

$$\left| \int_{\partial K} \beta_1 \right| \leq \frac{R}{2} \text{Long}(\partial K) \quad \text{et} \quad \left| \int_K \left( p^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) \mathcal{K} \, dS \right| \leq R^2 T(K)$$

ont déjà été prouvées. Par un calcul similaire à celui exprimant l'image inverse de  $\beta_1$ , on obtient  $df \wedge \tilde{\phi}^*p(\varphi, \nu, d\nu) = f|df|^2 d\text{vol}_{\mathbb{S}^n}$ , c'est-à-dire

$$\tilde{\phi}^*\beta_2 = -\frac{1}{2}f * df.$$

Or  $|df| \leq R$  par la condition  $\varphi(M) \subset B(0, R)$ , ce qui assure  $|*df| \leq R$ . Comme  $f$  est elle-même bornée par  $R$ , on déduit

$$\left| \int_{\partial K} \beta_2 \right| \leq \frac{R^2}{2} \text{Long}(\text{Gauss}_{\partial K}).$$

Il faut remarquer que nous ne supposons pas Gauss comme étant définie positive sur  $K$ . Nous en déduisons la

PROPOSITION 4 (cas  $n = 2$ ). — Soit  $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une immersion isométrique de surface dont l'image est contenue dans la boule de rayon  $R$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert à bord lisse. Alors

$$(27) \quad \text{Aire}(U) \leq R^2 \left( T(U) + \frac{1}{2} \text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U}) + \frac{1}{2R} \text{Long}(\partial U) \right).$$

Remarque. — L'inégalité (27) est de type isopérimétrique : une correction impliquant la façon dont  $M$  est pliée est nécessaire afin de pouvoir borner l'aire d'un domaine par la longueur de son bord.

Le caractère isopérimétrique était aussi directement présent dans (25), cette fois-ci en sens inverse : une correction par le volume du bord est nécessaire afin de pouvoir borner de façon optimale le volume d'un domaine par le volume recouvert sur  $\mathbb{S}^n$  par son application de Gauss (l'optimalité est entendue au sens de la puissance à laquelle apparaît  $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  au dénominateur).

### 5. Optimalité des inégalités.

Nous discutons l'optimalité des différentes inégalités que nous avons obtenues. Pour alléger les notations, on supposera désormais que l'image de l'immersion est contenue dans la boule unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**5.1. Nécessité de considérer un épaissement dans (19).**

Rappelons l'inégalité (19) :

$$\text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U).$$

Le membre de droite est optimal au sens où on ne peut remplacer  $\text{Gauss}_U$  par  $\text{Gauss}_K$ . Sous les hypothèses du corollaire 2 une inégalité du type

$$(28) \quad \text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{d^n} \text{vol}(\text{Gauss}_K)$$

ne peut être vraie pour toute hypersurface  $M$  strictement convexe et toute paire  $(U, K)$  telle que  $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \geq d$  fixé, comme le montre l'exemple suivant.

Pour plus d'aisance dans l'écriture, on fait la construction en dimension 1. On considère la famille d'ellipses

$$E_\epsilon = \left\{ (x, y) : x^2 + \frac{y^2}{\epsilon^2} = 1 \right\} \subset B(0, 1).$$

On fixe  $\frac{1}{2}\pi > d > 0$ . On choisit  $U_\epsilon = \{(x, y) \in E_\epsilon : y > 0\}$  la demi-ellipse supérieure et  $K_\epsilon = \{(x, y) \in U_\epsilon : |x| \leq r\}$ , avec  $0 < r < 1$  fixé. Pour  $\epsilon$  suffisamment petit on a effectivement  $d_{\mathbb{S}^1}(K_\epsilon, U_\epsilon) \geq d$ , mais  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Long}(K_\epsilon) = 2r$ , tandis que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Long}(\text{Gauss}_{K_\epsilon}) = 0$ . Ceci montre qu'une inégalité du type (28) ne peut être vérifiée. La même construction fonctionne en dimension supérieure en considérant la famille d'ellipsoïdes

$$E_\epsilon = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{\epsilon^2} = 1 \right\} \subset B(0, 1),$$

ainsi que

$$U_\epsilon = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in E_\epsilon : x_{n+1} > 0 \right\},$$

$$K_\epsilon = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in U_\epsilon : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2 \right\}.$$

**5.2. Optimalité de l'inégalité (27).**

Les trois termes  $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$ ,  $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$  et  $\text{Long}(\partial U)$  constituant la partie droite de l'inégalité sont indépendants, dans le sens qu'aucun d'entre eux ne peut être borné par les deux autres.

Dans la figure 2, nous donnons trois exemples de bouts de surfaces à bord dans lesquels deux des trois termes sont négligeables par rapport au troisième. Les termes négligeables sont respectivement :  $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$  et  $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$  pour (1);  $\text{Long}(\partial U)$  et  $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$  pour (2);  $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$  et  $\text{Long}(\partial U)$  pour (3).

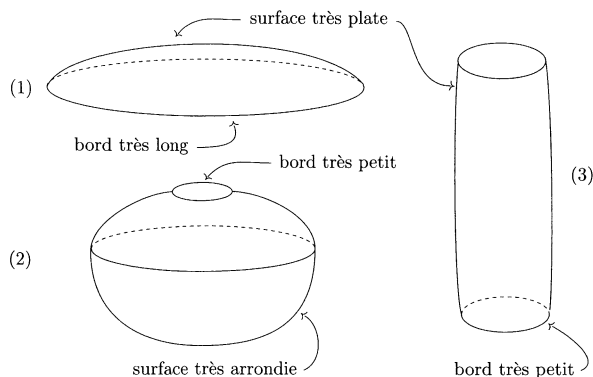


Figure 2. Les quantités  $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$ ,  $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$  et  $\text{Long}(\partial U)$  sont indépendantes

Les exemples (1) et (2) dans la figure 2 prouvent aussi que les quantités  $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$  et  $\text{Long}(\partial U)$  sont essentielles dans le fonctionnement de l'inégalité (27). On n'a pas encore d'exemple pour montrer que la quantité  $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$  est aussi essentielle. Il est fort possible qu'une inégalité du type suivant soit vérifiée :

$$\text{Aire}(U) \leq C \text{Aire}(\text{Gauss}_U) + C' \text{Long}(\partial U).$$

### 5.3. Meilleure estimation pour le volume d'un compact

$K \subset M$  fixé.

Plaçons-nous dans le contexte du corollaire 2 :  $K$  est un compact admettant un voisinage  $U$  sur lequel Gauss est non-dégénérée, injective et d'image contenue dans une demi-sphère. L'inégalité (19) est alors valable :

$$\text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U).$$

Le but initial de cette étude était de majorer le volume de  $K$  par un certain volume recouvert sur  $\mathbb{S}^n$  par Gauss. Il est évident que, pour une distance  $d = d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$  fixée, la meilleure estimation par (19) est obtenue en choisissant  $U$  tel que  $\text{Gauss}(U) = \text{Gauss}(K)_d$ , où  $\text{Gauss}(K)_d$  est l'épaissement par  $d$  de  $\text{Gauss}(K)$  :

$$\text{Gauss}(K)_d = \{x \in \mathbb{S}^n : \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(x, \text{Gauss}(K)) < d\}.$$

On écrira  $K_d$  pour l'épaissement par  $d$  de  $K$  par rapport à la distance sphérique sur  $U$  :

$$K_d = \{x \in U : d_{\mathbb{S}^n}(x, K) < d\}.$$



Alors on a  $\text{Gauss}(K_d) = \text{Gauss}(K)_d$ .

Ainsi  $K_d$  est le plus petit ouvert  $U$  satisfaisant  $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = d$  et, sous l'hypothèse d'existence d'un  $U$  comme ci-dessus, on a

$$(29) \quad \text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{d^n} \text{vol}(\text{Gauss}(K)_d).$$

Cette écriture de l'inégalité ne fait intervenir de voisinage du compact qu'implicitement. Le  $d$  peut varier entre 0 et  $d_{\max}$ , où

$$d_{\max} = \max \left\{ d : \exists U \text{ ouvert } \supset K_d \text{ tel que } \text{Gauss}|_U \text{ est non-dégénérée,} \right. \\ \left. \text{injective et d'image contenue dans une demi-sphère} \right\}.$$

Nous cherchons alors à comprendre quel est le minimum du membre de droite dans (29). Le problème plus général à traiter est de trouver

$$\min_{0 < d < d_{\max}} \frac{\text{vol}(A_d)}{d^n}$$

pour  $A \subset \mathbb{S}^n$  un compact quelconque inclus dans une demi-sphère  $\mathcal{D}$ ,  $A_d$  un épaissement par  $d$  de  $A$  et  $d_{\max} \leq \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(A, \partial \mathcal{D})$ . La réponse complète à cette question est fournie par la proposition suivante, démontrée dans un cadre plus général dans l'appendice.

PROPOSITION 5. — *Pour tout compact  $K \subset \mathbb{S}^n$  inclus dans une demi-sphère, la fonction*

$$f(d) = \frac{\text{vol}(\text{Gauss}(K)_d)}{d^n}$$

*est décroissante sur l'intervalle  $]0, d_{\max}[$ .*

En particulier, la meilleure estimation dans l'inégalité (29) est obtenue pour  $d = d_{\max}$ .

#### 5.4. Optimalité de l'inégalité (25).

Nous rapellons que Gauss est supposée non-dégénérée sur l'ouvert  $U$  et  $K \subset U$  est un compact. De plus, l'inégalité

$$(30) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{1}{\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} \text{vol}(\text{Gauss}_U) + \frac{1}{n} \text{vol}(\partial K).$$

fonctionne pour une *immersion* isométrique de  $U$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nous allons montrer que les deux termes de droite dans (30) sont essentiels dans le fonctionnement de l'inégalité et que l'exposant  $n - 1$  est optimal.

a) Le terme  $\text{vol}(\partial K)$  est essentiel. Considérons une suite  $U_k$  de bouts de surface définis par

$$(31) \quad U_k = B^{n+1}(0, 1) \cap S^n \left( (0, \dots, 0, -k), k + \frac{1}{k} \right).$$

Les  $U_k$  sont des héli-sphères de courbure de plus en plus faible, qui tendent

avec  $k$  vers le disque ouvert

$$D^n(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1 \text{ et } x_{n+1} = 0\}.$$

L'image par Gauss de  $U_k$  est une boule géodésique sur  $\mathbb{S}^n$  centrée au pôle nord, de rayon  $\rho_k \rightarrow 0$ . Soit  $K_k$  la préimage de la boule géodésique fermée de même centre et rayon  $\frac{1}{2}\rho_k$ . Alors  $K_k \rightarrow \bar{D}^n(0, \frac{1}{2})$  (figure 4, (1)). Par construction  $d_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k) = \frac{1}{2}\rho_k$ , tandis que  $\text{vol}(\text{Gauss}_{U_k}) \sim \rho_k^n$ . Ainsi

$$\frac{\text{vol}(\text{Gauss}_{U_k})}{(d_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k))^{n-1}} \sim \rho_k \rightarrow 0$$

devient négligeable devant  $\text{vol}(K_k)$ . Ceci prouve que le terme  $\text{vol}(\partial K)$  est essentiel pour le fonctionnement de l'inégalité (25). Le même exemple prouve que l'inégalité (22) est optimale au sens où l'exposant  $n$  ne peut être diminué sans ajout de termes supplémentaires.

b) Le terme  $1/\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1} \cdot \text{vol}(\text{Gauss}_U)$  est essentiel. Une inégalité du type  $\text{vol}(K) \leq C \text{vol}(\partial K)$  ne peut être vraie telle quelle, comme on peut le voir facilement en prenant pour  $K$  une sphère dont on a enlevé une boule géodésique arbitrairement petite.

c) L'exposant  $n - 1$  dans (22) est optimal pour le coefficient  $1/n$  devant  $\text{vol}(\partial K)$ . À l'intérieur du disque plan

$$D^2(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1 \text{ et } x_3 = \dots = x_{n+1} = 0\}$$

considérons une courbe fermée immergée, appelée  $\gamma$ .

La construction que nous présentons généralise celle des surfaces de rotation dans  $\mathbb{R}^3$ . La courbe  $\gamma$  admet en chaque point un plan normal géométrique de dimension  $n$  et tous ces plans normaux sont canoniquement identifiés par des translations et rotations dans  $\mathbb{R}^2 \equiv \{x_3 = \dots = x_{n+1} = 0\}$ . Fixons une hypersurface  $H$  de dimension  $n - 1$  passant par l'origine dans un de ces plan normaux. Son image via les identifications canoniques décrit le long de  $\gamma$  une hypersurface  $\mathcal{H}$  de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  qu'on appelle *hypersurface de rotation* définie par  $H$  le long de  $\gamma$ .

Nous donnons des exemples de telles hypersurfaces de rotation  $\mathcal{H}$  pour lesquelles la différence  $\text{vol}(K) - (1/n) \text{vol}(\partial K)$  est arbitrairement grande et dominée par  $C_n/\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1} \cdot \text{vol}(\text{Gauss}_U)$ , mais pour lesquelles  $C/\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-2} \cdot \text{vol}(\text{Gauss}_U)$  est arbitrairement petit quelle que soit la constante  $C$ .

Faisons d'abord une remarque concernant la lissité des hypersurfaces  $\mathcal{H}$  construites comme ci-dessus. Comme le montre l'exemple des sphères (pour lesquelles on prend pour  $\gamma$  un cercle et pour  $H$  une demi-sphère),  $\mathcal{H}$  peut avoir des singularités, issues de l'intersection de « méridiens »  $H$  voisins. L'absence de singularités sur un méridien  $H_p$  au point  $p \in \gamma$  dépend de la courbure de  $\gamma$  en  $p$  et de la courbure de  $H$ . En termes précis, il faut que la projection de  $H$  sur la normale à  $\gamma$  au point  $p$  s'éloigne de celui-ci d'une distance au plus égale au rayon focal en  $p$ . Comme cela, on est sûr que les  $H$  « voisines » ne s'intersectent pas. En particulier, si la courbure de  $\gamma$  est bornée supérieurement, on peut prendre pour  $H$  une hémisphère centrée sur  $\gamma$ , de courbure suffisamment faible. Ceci est le point de départ de notre construction.

Prenons donc pour  $\gamma$  une courbe fermée immergée localement convexe. Pour tout  $\delta < 1$  il existe une telle courbe de longueur *arbitrairement grande* contenue dans  $D^2(0, \delta)$  et de courbure bornée supérieurement par  $2/\delta$ ; en particulier, le rayon focal est minoré par  $\frac{1}{2}\delta$ . Soit  $\mathcal{H}_k$  une suite d'hypersurfaces de rotation construites sur  $\gamma$  à partir d'hémisphères de rayon géodésique égal à  $r < 1$  et courbure tendant vers 0 avec  $k$ . Le  $r$  est choisi pour que  $\mathcal{H}_k \subset B^{n+1}(0, 1)$ ; en prenant  $\delta$  suffisamment petit,  $r$  peut être choisi *arbitrairement proche de 1*.

Prenons  $U_k = \mathcal{H}_k$ . L'image par Gauss de  $U_k$  est un tube de rayon  $\rho_k \rightarrow 0$  autour du grand cercle  $\bar{D}^2(0, 1) \cap \mathbb{S}^n$ ; on définit  $K_k$  comme la préimage par Gauss du tube de rayon  $\rho_k/\lambda$  autour du même grand cercle, avec  $\lambda > 1$  (figure 4, (2)). Alors

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_k) &\longrightarrow \text{vol } B^{n-1}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma) = \frac{r}{\lambda} \frac{1}{n-1} \text{vol } \mathbb{S}^{n-2}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma), \\ \text{vol}(\partial K_k) &\longrightarrow \text{vol } \mathbb{S}^{n-2}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma). \end{aligned}$$

Si  $r/\lambda > (n-1)/n$  (ce qui est réalisable pour  $r$  et  $\lambda$  proches de 1), alors  $\text{vol}(K_k) - (1/n) \text{vol}(\partial K_k)$  est positif et peut être rendu arbitrairement grand en augmentant  $\text{Long}(\gamma)$ . Ceci démontre déjà qu'une correction de  $\text{vol}(K_k)$  par un terme supplémentaire est nécessaire. D'un autre côté, nous avons

$$\text{vol}(\text{Gauss}_{U_k}) \sim \rho_k^{n-1} \cdot \text{Long}(\gamma) \quad \text{et} \quad \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k) = \rho_k \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Ceci montre qu'un exposant  $\eta$  strictement plus petit que  $n-1$  rendrait la quantité  $(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k))^{-\eta} \cdot \text{vol}(\text{Gauss}_{U_k})$  équivalente à  $\rho_k^{n-1-\eta} \rightarrow 0$ , ne pouvant donc pas dominer  $\text{vol}(K_k) - (1/n) \text{vol}(\partial K_k)$ . L'exposant  $n-1$  est donc optimal pour le coefficient  $1/n$  dans (22).  $\square$

*Remarque.* — Le corollaire 4 montre que le coefficient  $1/n$  devant le terme  $\text{vol}(\partial K)$  est optimal et notre preuve du fait que l'exposant  $n-1$  est lui aussi optimal a utilisé fortement la valeur exacte de celui-ci. Notre exemple ne fonctionne pas si on permet un coefficient plus grand devant  $\text{vol}(\partial K)$ , mais ceci ne serait pas naturel si on adopte le point de vue isopérimétrique.

## 6. Appendice. Une inégalité isopérimétrique inverse.

Les résultats que nous présentons dans cet appendice ont été motivés par la recherche d'une preuve pour la proposition 5, à son tour motivée par l'étude de la meilleure façon d'estimer le volume d'un compact 5.3.

Dans la suite on désignera par  $\mathcal{R}^n$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , la sphère  $\mathbb{S}^n$  ou l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ . Si  $K$  est un compact de  $\mathcal{R}^n$  et  $d > 0$  un réel positif, on note

$$K_d = \{x \in \mathcal{R}^n : d(x, K) < d\}.$$

On note par  $B(d)$  une boule ouverte de rayon  $d$  dans  $\mathcal{R}^n$ . On pose

$$d_{\max}(K) = \begin{cases} \pi - \text{Circumradius}(K) & \text{si } \mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n, \\ +\infty & \text{si } \mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{H}^n. \end{cases}$$

Nous allons montrer la

**PROPOSITION 6.** — *Pour tout compact  $K \subset \mathcal{R}^n$  et pour tout réel  $0 < d < d_{\max}(K)$ , on a l'inégalité*

$$(32) \quad \frac{\text{vol}_n K_d}{\text{vol}_{n-1} \partial K_d} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

*avec égalité si et seulement si  $K$  est un ensemble fini de points situés à distance au moins  $d$  l'un de l'autre (ou, en d'autres mots, si  $K_d$  est une union disjointe de boules de rayon  $d$ ).*

Avant d'en donner la preuve, indiquons un corollaire et une formulation équivalente de la proposition 6.

**COROLLAIRE 5.** — *Sous les hypothèses précédentes et pour  $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n$ , on a*

$$\frac{\text{vol}_n K_d}{\text{vol}_{n-1} \partial K_d} \geq \frac{d}{n}.$$

*En particulier, la fonction*

$$(33) \quad f(d) = \frac{\text{vol}_n K_d}{d^n}$$

*est décroissante pour  $0 < d < d_{\max}(K)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha_{n-1}$  le volume de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Il est facile de voir que :

- Pour  $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n$ , on a  $\text{vol}_{n-1} \partial B(d) = d^{n-1} \alpha_{n-1}$  et

$$\text{vol}_n B(d) = \int_0^d t^{n-1} \alpha_{n-1} dt = \frac{d^n}{n} \alpha_{n-1}.$$

Ceci entraîne  $\text{vol}_n B(d) / \text{vol}_{n-1} \partial B(d) = d/n$ .

- Pour  $\mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n$ , on a  $\text{vol}_{n-1} \partial B(d) = (\sin d)^{n-1} \alpha_{n-1}$  et

$$\text{vol}_n B(d) = \int_0^d (\sin t)^{n-1} \alpha_{n-1} dt.$$

On montre alors que

$$\frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)} = \frac{\int_0^d (\sin t)^{n-1} dt}{(\sin d)^{n-1}} \geq \frac{d}{n}.$$

Pour cela il suffit de voir que  $g(d) = n \int_0^d (\sin t)^{n-1} dt - d(\sin d)^{n-1}$  est croissante et nulle en  $d = 0$ , ce qui assure sa positivité.  $\square$

*Remarque.* — Le même résultat n'est pas valable dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , où la fonction  $\text{vol}(B(d))/d^n$  est croissante.

*Remarque.* — C'est l'étude de la fonction  $f(d)$  dans (33) qui a engendré l'étude de (32). Dans le cas d'un convexe  $K \subset \mathbb{R}^n$  une formule due à Steiner (voir [BZ], §4.19) assure que  $\text{vol}_n K_d$  est un polynôme de degré  $n$  en  $d > 0$  ayant les coefficients positifs, d'où la décroissance de  $f$ . Dans le cas non-convexe on peut encore écrire  $\text{vol}_n K_d$  comme polynôme de degré  $n$  en  $d$  (voir [Fe]), mais uniquement pour des valeurs de  $d$  plus petites que le rayon focal de  $\partial K$  lorsque celui-ci est lisse, ou plus petites qu'un analogue du rayon focal pour des compacts à bord «raisonnablement» singulier [Fe].

C'est la décroissance de  $f$  pour de très petites et de très grandes valeurs de  $d$  (dans ce dernier cas,  $K_d$  est proche d'une boule de rayon  $d$ ) qui nous a menés vers l'étude de sa décroissance globale.

Il convient d'observer que la variation de  $\text{vol}_n K_d$  peut être très compliquée dans le domaine intermédiaire, notamment à cause de la présence de trous dans  $K$  qui peuvent être absorbés dans  $K_d$  pour  $d$  suffisamment grand.

La classe d'ouverts de  $\mathcal{R}^n$  pour lesquels l'inégalité (32) est valable est

$$\mathcal{C}_d = \{D \text{ ouvert borné} \subset \mathcal{R}^n : \forall x \in D, \exists \text{ boule } x \in B(d) \subset D\}$$

De façon évidente, si  $K$  est un compact alors on a

$$(34) \quad K_d \in \mathcal{C}_d$$

La proposition 6 découlera alors de la

PROPOSITION 7. — *Pour tout ouvert  $D \in \mathcal{C}_d$  on a*

$$(35) \quad \frac{\text{vol}_n D}{\text{vol}_{n-1} \partial D} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

On a égalité si et seulement si  $D$  est une union disjointe de boules de rayon  $d$ .

C'est cette dernière inégalité qui peut être regardée comme une inégalité isopérimétrique «inverse». Remarquons d'ailleurs que  $\mathcal{C}_d$  coïncide avec

$$\mathcal{C}'_d = \{D \text{ ouvert } \subset \mathcal{R}^n : \exists K \text{ compact, } D = K_d\}$$

En effet, l'inclusion  $\mathcal{C}'_d \subseteq \mathcal{C}_d$  découle de (34). D'un autre côté tout ouvert  $D \in \mathcal{C}_d$  peut s'écrire  $D = (D_{-d})_d$  avec

$$D_{-d} = \{x \in D : d(x, \partial D) \geq d\}.$$

L'inclusion  $(D_{-d})_d \subseteq D$  est valable pour un ouvert arbitraire, n'appartenant pas nécessairement à  $\mathcal{C}_d$ . Pour voir l'inclusion inverse, prenons un point  $x \in D$  quelconque. Puisque  $D \in \mathcal{C}_d$  il existe une boule  $x \in B(y, d) \subset D$ , ce qui assure que  $y \in D_{-d}$ . Ceci entraîne  $B(y, d) \in (D_{-d})_d$  et donc  $x \in (D_{-d})_d$ .

On conclut que les propositions 6 et 7 sont équivalentes.

Démonstration<sup>(1)</sup> de la proposition 7. — Un ouvert  $D \in \mathcal{C}_d$  peut s'écrire comme

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i(d)$$

avec

$$\lim_N \text{vol}_n \bigcup_{i=1}^N B_i(d) = \text{vol}_n D \quad \text{et} \quad \lim_N \text{vol}_{n-1} \partial \bigcup_{i=1}^N B_i(d) = \text{vol}_{n-1} \partial D.$$

Il suffit donc de prouver (35) lorsque  $D$  est une union finie de boules de rayon  $d$ . On raisonne par récurrence sur  $N$ . Lorsque  $N = 1$  on a même l'égalité. Pour alléger les notations dans le passage de  $N$  à  $N + 1$ , on note

$$V_N = \text{vol}_n \bigcup_{i=1}^N B_i(d), \quad \partial_N = \text{vol}_{n-1} \partial \bigcup_{i=1}^N B_i(d).$$

---

<sup>(1)</sup> Une première preuve, en dimension 2 et pour la métrique euclidienne, m'a été suggérée par Nicolae Mihalache. Je lui en suis vivement reconnaissant.

Soit  $U_{N+1} = B_{N+1}(d) \cap (\bigcup_{i=1}^N B_i(d))$ . Alors (voir aussi la figure 3)

$$\begin{aligned} V_{N+1} + \text{vol}_n U_{N+1} &= V_N + \text{vol}_n B_{N+1}(d), \\ \partial_{N+1} + \text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1} &= \partial_N + \text{vol}_{n-1} \partial B_{N+1}(d). \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence on déduit

$$\frac{V_{N+1} + \text{vol}_n U_{N+1}}{\partial_{N+1} + \text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}.$$

Pour conclure il suffit alors de montrer que

$$(36) \quad \frac{\text{vol}_n U_{N+1}}{\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \leq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}.$$

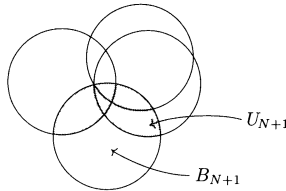


Figure 3. Preuve de la proposition 7

On utilise maintenant l'inégalité isopérimétrique dans  $\mathcal{R}^n$  (voir [BZ], §10.2.1) : si  $B(h)$  désigne la boule de volume égal à  $\text{vol}_n U_{N+1}$ , on a l'inégalité  $\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1} \geq \text{vol}_{n-1} \partial B(h)$ . On en déduit

$$\frac{\text{vol}_n U_{N+1}}{\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \leq \frac{\text{vol}_n B(h)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(h)}.$$

D'un autre côté, puisque  $U_{N+1} \subseteq B_{N+1}(d)$  on a forcément  $h \leq d$  et l'inégalité (36) s'ensuit une fois qu'on aura remarqué que la fonction  $G(d) = \text{vol}_n B(d) / \text{vol}_{n-1} \partial B(d)$  est strictement croissante en  $d > 0$ .

- Si  $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n$  alors  $G(d) = d/n$ .
- Si  $\mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n$  alors  $G(d) = \int_0^d (\sin t)^{n-1} dt / (\sin d)^{n-1}$ . Sa croissance équivaut à la positivité de  $G_1(d) = (\sin d)^n - (n-1) \int_0^d (\sin t)^{n-1} dt \cos d$ , or  $G_1(0) = 0$  et  $G'_1 \geq 0$ .
- Si  $\mathcal{R}^n = \mathbb{H}^n$  alors  $G(d) = \int_0^d (\sinh t)^{n-1} dt / (\sinh d)^{n-1}$ . Sa croissance équivaut à la positivité de  $G_1(d) = (\sinh d)^n - (n-1) \int_0^d (\sinh t)^{n-1} dt \cosh d$ , or  $G_1(0) = G'_1(0) = 0$  et  $G''_1 \geq 0$ .  $\square$

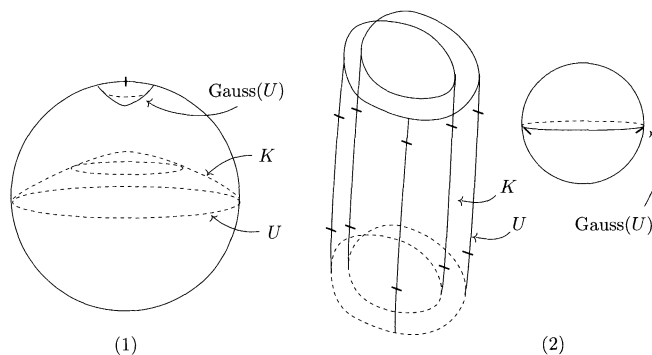


Figure 4. Optimalité de l'inégalité (22)

### BIBLIOGRAPHIE

- [Au] T. AUBIN, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, Springer, Berlin, 1982.
- [BF] T. BONNESEN, W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin, 1934.
- [BZ] Yu.D. BURAGO, V.A. ZALGALLER, *Geometric Inequalities*, Springer, Berlin, 1988.
- [Fe] H. FEDERER, *Curvature measures*, *Trans. AMS*, 93 (1959), 418–491.
- [H] C.C. HSIUNG, *Some integral formulas for closed hypersurfaces*, *Math. Scand.*, 2 (1954), 286–294.
- [RT] J. RAUCH, B.A. TAYLOR, *The Dirichlet Problem for the multidimensional Monge-Ampère Equation*, *Rocky Mountain J. of Math.*, 7 (1977), 345–363.
- [S] R. SACKSTEDER, *On hypersurfaces with no negative sectional curvatures*, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 609–630.
- [Su] K. SUGAHARA, *Gap theorems for hypersurfaces in  $\mathbb{R}^N$* , *Hokkaido Math. J.*, 14 (1985), 137–142.

Manuscrit reçu le 14 février 2003,  
 accepté le 5 septembre 2003.

Alexandru OANCEA,  
 CMAT, École Polytechnique,  
 91128 Palaiseau Cedex (France)  
 &  
 UMPA, ENS Lyon  
 46 Allée d'Italie  
 69364 Lyon (France).  
 oancea@math.polytechnique.fr