ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SAMI MUSTAPHA

Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 4 (1998), p. 957-966

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_957_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 4 (1998), 957–966

MULTIPLICATEURS DE MIKHLIN POUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE GROUPES NON-UNIMODULAIRES

par Sami MUSTAPHA

1. Introduction.

Soit G un groupe de Lie réel connexe et $\mathcal{X} = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ un système de champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander (cf. [21]). Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-laplacien associé au système $\mathcal{X}$. On note $dg = d^l g$ (resp. : $d^r g$) la mesure de Haar invariante à gauche (resp. : à droite) sur G et $\delta(g) = d^l g/d^r g$ la fonction module sur G normalisée par $\delta(e) = 1$, où e désigne l'élément identité de G. Le sous-laplacien Δ définit un opérateur positif formellement auto-adjoint sur $L^2(G, d^r g)$ et si m est une fonction borélienne bornée sur $[0, \infty[$, l'opérateur $m(\Delta)$ défini par

$$m(\Delta) = \int_0^\infty m(\lambda) dE_\lambda,$$

où

$$\Delta = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$$

est la décomposition spectrale de Δ (cf. [22]), est borné sur $L^2(G, d^r g)$.

On cherche des conditions sur m qui permettent d'assurer que l'opérateur $m(\Delta)$ soit aussi borné sur les espaces L^p pour $1 \leq p \leq \infty$.

Mots-clés : Groupes de Lie – Multiplicateurs – Sous-laplaciens.
Classification math. : 22E25 – 22E30.

Si le groupe G est à croissance polynomiale du volume (cf. [21]) on montre qu'il suffit de contrôler un nombre suffisant de dérivées de m pour assurer la bornitude de $m(\Delta)$ sur les espaces L^p (cf. [10], [11], [5], [1]). Les résultats obtenus sont du type Mikhlin-Hörmander (cf. [15]). Les problèmes ouverts dans cette direction concernent le nombre optimal de dérivées qu'il faut pour assurer la bornitude du multiplicateur m. Dans [1] Alexopoulos donne essentiellement comme nombre $D/2 + 1/2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, D désignant la croissance du volume du groupe. Le résultat [5] de Christ suggère $D/2 + \epsilon$, comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Les résultats plus récents de Müller-Stein et Hebisch montrent que dans certains cas ce nombre dépend de la dimension topologique du groupe et non de son indice de croissance du volume (cf. [17], [13]).

Pour un groupe de Lie G la non trivialité de la fonction module δ entraîne que G est à croissance exponentielle du volume et ne constitue par conséquent pas un espace de type homogène (cf. [8]). C'est ce qui explique la difficulté de l'analyse sur de tels groupes.

L'idée généralement admise, dans le contexte de la croissance exponentielle du volume, était qu'il fallait imposer sur m une condition d'holomorphie pour assurer la bornitude de $m(\Delta)$ sur les espaces L^p (cf. par exemple Taylor [19], pour le même problème dans le cas des variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée). Dans le cas des espaces symétriques cette condition d'holomorphie est même nécessaire (cf. Anker-Lohoué [3], Clerc-Stein [7]). Cependant Cowling et al ont obtenu, dans [9], pour un groupe d'Iwasawa NA associé à un groupe réel semi-simple et pour un laplacien distingué sur ce groupe, un théorème des multiplicateurs sans imposer de condition d'holomorphie sur m. Un résultat précédent dans ce sens a été obtenu par Hebisch dans [12]. L'analyse du laplacien considéré dans ces deux cas repose sur l'utilisation de l'espace symétrique associé à NA.

Le même type de résultat a été établi par l'auteur (cf. [18]) et F. Astengo (cf. [2]) dans le cas des extensions solubles des H-groupes. Il s'agit d'une classe de groupes de Lie non unimodulaires qui généralisent les groupes NA associés aux espaces symétriques de rang 1.

Plus récemment Hebisch (cf. [14]) et Christ et Müller (cf. [6]) ont donné deux exemples de groupes résolubles à croissance exponentielle du volume et unimodulaires avec des multiplicateurs différentiables pour le premier et analytiques pour le second. D'une manière plus précise, Hebisch montre que pour le groupe produit semi-direct $G = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ où l'action est définie par $(x,y) \to (e^t x, e^{-t} y)$, $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ et pour le laplacien invariant à gauche sur G, il suffit que m soit à support compact et appartienne à et appartienne 'erateur $m(\Delta)$ borné sur les espaces $L^p(G)$. Christ et Müller montrent que pour le produit semi-direct $G = \mathbf{H}_n \lambda \mathbb{R}$ où $\mathbf{H}_n$ est le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$ et où l'action est définie par $(x,y,z) \to (e^t x, e^{-t} y, z)$, $(x,y,z) \in \mathbf{H}_n$, $t \in \mathbb{R}$ et pour le laplacien (ou sous-laplacien) invariant à gauche sur G, le mutiplicateur m doit être analytique.

L'idée de départ de ce travail a été de considérer, en contraste avec l'exemple de Christ et Müller, le cas du produit semi-direct $G = \mathbf{H}_n \lambda \mathbb{R}$ où l'action est définie par $(x,y,z) \to (e^t x, e^t y, e^{2t} z)$, $(x,y,z) \in \mathbf{H}_n$, $t \in \mathbb{R}$ et d'examiner pour ce groupe non-unimodulaire le problème des multiplicateurs pour le sous-laplacien (pour le laplacien le résultat est déja contenu dans le théorème obtenu pour les extensions solubles des H-groupes). On montre que pour cette action le calcul fonctionnel est alors différentiable.

C'est cette situation que nous généralisons ci-dessous. Nous obtenons un théorème des multiplicateurs avec une hypothèse de différentiabilité pour tous les groupes produits semi-direct d'un groupe nilpotent stratifié et de $\mathbb{R}$ et pour les sous-laplaciens invariants à gauche naturels sur ces groupes.

2. Énoncé des résultats.

Soit $\mathcal{N}$ une algèbre de Lie réelle nilpotente stratifiée de rang r et soit N le groupe de Lie simplement connexe qui lui correspond. Rappelons qu'il existe $V_1, \ldots V_r$, r sous-espaces vectoriels de $\mathcal{N}$ tels que $\mathcal{N}$ se décompose comme somme directe

$$\mathcal{N} = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$$

avec $[V_1, V_j] \subset V_{1+j}$, $j = 1, \ldots, r-1$, $[V_1, V_r] = 0$ et V_1 engendrant l'algèbre $\mathcal{N}$. Pour $v = v_1 \oplus v_2 \oplus \ldots \oplus v_r \in \mathcal{N}$ et $z \in \mathbb{R}$ on définit

$$\Theta_z(v) = e^z v_1 \oplus e^{2z} v_2 \oplus \ldots \oplus e^{rz} v_r.$$

On note G le produit semi-direct $N \lambda \mathbb{R}$ associé à cette action. Étant une extension résoluble de N, le groupe G est lui-même résoluble. On identifie N à son algèbre de Lie par l'application exponentielle. Le produit de deux éléments de G est donné par

$$(u,z)(u',z') = (u.\Theta_z(u'), z+z'),$$

pour tout (u,z), $(u',z') \in G$. Soient $e_1,...,e_m \in \mathcal{N}$, une base de V_1. On note $\tilde{X}_j$, $j=1,...,m$ les champs de vecteurs invariants à gauche de $\mathcal{N}$ définis par les vecteurs e_j et on note X_j, $j=1,...,m$ les champs de vecteurs invariants à gauche dans G définis par ces vecteurs, i.e.

$$X_j f(g) = \lim_{t\to 0} \frac{f(ge^{te_j}) - f(g)}{t}, \ \ g \in G, \ \ f \in C_0^\infty(G).$$

Il est facile de voir que $X_j = e^z \tilde{X}_j$. Les champs X_1,...,X_m, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ engendrent l'algèbre de Lie du groupe G et vérifient par conséquent la condition de Hörmander. Notons

$$\Delta = -\left(X_1^2 + ... + X_m^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\left(e^{2z}\sum_{j=1}^{m} \tilde{X}_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

le sous-laplacien invariant à gauche sur G associé aux champs X_1,...,X_m, $\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Le groupe G est non unimodulaire et la mesure de Haar invariante à droite sur G est donnée par $d^r g = dndz$ $g=(n,z)$ où dn est la mesure de Haar sur N et dz la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

L'opérateur Δ possède une extension auto-adjointe positive sur $L^2(G, d^r g)$ et si m est une fonction borélienne bornée sur $[0,\infty[$, l'opérateur $m(\Delta)$ est borné sur $L^2(G,d^r g)$.

THÉORÈME 1. — *Soient G et Δ comme ci-dessus. Alors, pour toute fonction m à support compact dans $[0,\infty[$ et appartenant à l'espace de Sobolev $H^{2+\epsilon}(\mathbb{R})$, $\epsilon > 0$, l'opérateur $m(\Delta)$ est borné sur $L^p(G,d^r g)$, pour $1 \le p \le \infty$.*

Notons ϕ_t le noyau de la chaleur associé au semi-groupe $T_t = e^{-t\Delta}$, $t>0$, i.e. ϕ_t est donné par

$$T_t f(x) = \int_G \phi_t(y^{-1}x) f(y) dy = \int_G \phi_t(y) f(xy^{-1}) d^r y, \ \ f \in C_0^\infty(G).$$

Le théorème 1 est une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les notations étant comme plus haut, il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $t>0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$*

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G,d^r g)} \le C\left(1+\sqrt{t}\right)\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\left(1+\frac{|s|}{t}\right)^{3/2}.$$

COROLLAIRE 1. — *Il existe une constante $C>0$ telle que*

$$\|\phi_{1+is}\|_{L^1(G,d^r g)} \le C\left(1+|s|\right)^{3/2}, \ \ s \in \mathbb{R}.$$

Pour déduire le théorème 1 du corollaire 1, posons $f(\lambda) = m(\lambda)e^{\lambda}$; ce qui donne (par la formule d'inversion de Fourier) :

$$m(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int e^{-(1-i\xi)\lambda} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

D'où l'on déduit (par le théorème spectral)

$$m(\Delta) = (2\pi)^{-1} \int \hat{f}(\xi) e^{-(1-i\xi)\Delta} d\xi.$$

Si on désigne par k_m le noyau associé à $m(\Delta)$, i.e. le noyau défini par

$$m(\Delta)f(x) = \int_G k_m(y^{-1}x)f(y)dy = \int_G k_m(y^{-1}x)\delta(y)f(y)d^r y, \; f \in C_0^\infty(G),$$

on peut alors estimer

$$\|m(\Delta)\|_{L^1(G,d^r g) \longrightarrow L^1(G,d^r g)}$$

par

$$\begin{aligned}\|k_m\|_{L^1(G,d^r g)} &\leq C \int |\hat{f}(\xi)| \|\phi_{(1-i\xi)}\|_{L^1(G,d^r g)} d\xi \\ &\leq C \int |\hat{f}(\xi)|(1+|\xi|)^{3/2} d\xi < \infty\end{aligned}$$

dès que $m \in H^{2+\epsilon}$. Il suffit ensuite de procéder par interpolation et dualité pour déduire le théorème 1.

Pour voir que l'indice 3/2 est optimal dans le corollaire 1, observons que dans le cas où G est le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^2 \lambda \mathbb{R}$ le noyau ϕ_t est donné par (cf. [4]) :

$$\phi_t(g) = \frac{e^{-z}}{(4\pi t)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)$$

où $g = ((x,y);z)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$, $\cosh(r) = \cosh(z) + \frac{e^{-z}}{2}\left(x^2+y^2\right)$. D'où

$$\begin{aligned}|\phi_{1+is}(g)| &= \frac{e^{-z}}{(4\pi(1+is))^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim \frac{e^{-z}}{(1+|s|)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim e^{-z} \frac{(1+s^2)^{3/2}}{(1+|s|)^{3/2}} \frac{r}{\sinh(r)} \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4(1+s^2)}\right) \\ &\sim (1+|s|)^{3/2} \phi_{1+s^2}(g).\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\|\phi_{1+is}(g)\|_{L^1(G,d^r g)} \sim (1+|s|)^{3/2}.$$

3. Preuve du théorème 2.

Notons $Z(t) = (n(t), z(t))$, $t > 0$, $n(t) \in N$, $z(t) \in \mathbb{R}$, la diffusion associée au semi-groupe $(T_t)_{t>0}$. Observons que la projection de la diffusion de Δ sur $\mathbb{R}$ est la diffusion de générateur $-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ et que $z(t)$ est par conséquent le brownien unidimensionnel standard. Notons $H_t(n) = H(n,t)$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur sur N associée au sous-laplacien $\frac{1}{2}\Sigma\tilde{X}_j^2$. Pour calculer le noyau $\phi_t(g) = \phi_t(n,z)$, $g = (n,z) \in G$, il suffit de conditionner sur toutes les trajectoires $z(s)$ démarrant en 0 et aboutissant en z au temps t et d'effectuer le changement de temps. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_e[Z(t) \in dg] &= \phi_t(g)d^r g = \phi_t(n,z)dndz \\ &= \mathbf{P}_0[z(t) \in dz]\mathbf{E}\left[H\left(n, \int_0^t e^{2z(s)}ds\right) //z(t) = z\right] dn,\end{aligned}$$

où $\mathbf{E}[\,.\,//z(t) = z]$ est l'espérance conditionnelle avec $z(t) = z$. L'idée de conditionner par les trajectoires $z(s)$ pour exprimer à l'aide d'une espérance le noyau $\phi_t(.)$ est issue de [20] où on peut voir le rôle que jouent les fonctionnelles browniennes $\int_0^t e^{z(s)}ds$ dans les estimations centrales de ϕ_t. Il s'avère que ces fonctionnelles browniennes jouent un rôle important en mathématiques financières (cf. [23]). Notons

$$a_t(z,u)du = \mathbf{P}_0\left[\int_0^t e^{2z(s)}ds \in du//z(t) = z\right].$$

On peut alors écrire

$$\phi_t(n,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) \int_0^\infty H_u(n)a_t(z,u)du.$$

Nous allons maintenant utiliser l'expression de $a_t(z,u)$ donnée dans [23]. D'après [23], on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)a_t(z,u) \\ &\qquad = \frac{e^z}{(4\pi^3 t)^{1/2}}\,\frac{1}{u^2} \exp\left(-\frac{1}{2u}\left(1+e^{2z}\right)\right) \exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\psi_{e^z/u}(t)\end{aligned}$$

où $\psi_r(t)$, $r > 0$, $t > 0$ est définie par

$$\psi_r(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \exp\left(-r\cosh(y)\right)\sinh(y)\sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right) dy.$$

D'où

$$\phi_t(n,z)=\frac{e^z}{\sqrt{4\pi^3 t}}\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\int_0^\infty H_u(n)\frac{1}{u^2}\exp\left(-\frac{1}{2u}\left(1+e^{2z}\right)\right)\psi_{e^z/u}(t)du.$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = ve^z$. On obtient alors

$$\phi_t(n,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}}\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\int_0^\infty H_{ve^z}(n)\frac{1}{v^2}\exp\left(-\frac{1}{v}\cosh(z)\right)\psi_{1/v}(t)dv$$

et donc

$$\phi_t(n,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}}\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\int_0^\infty H_{ve^z}(n)\frac{1}{v^2}\exp\left(-\frac{1}{v}\cosh(z)\right)$$
$$\times\left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)\exp\left(-\frac{1}{v}\cosh(y)\right)\sinh(y)\sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right)dy\right)dv.$$

On peut ainsi écrire

$$\phi_t(n,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 t}}\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty H_{ve^z}(n)\frac{1}{v^2}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{v}\left(\cosh(z)+\cosh(y)\right)\right)\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)\sinh(y)\sin\left(\frac{\pi y}{2t}\right)dydv.$$

On peut, dans cette formule, complexifier le temps et déduire pour tout $t > 0$, $s \in \mathbb{R}$, l'estimation :

$$|\phi_{t+is}(n,z)| \leq C\frac{1}{\sqrt{t+|s|}}\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)\int_0^\infty\int_0^\infty H_{ve^z}(n)$$
$$\frac{1}{v^2}\exp\left(-\frac{1}{v}\left(\cosh(z)+\cosh(y)\right)\right)\exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right)$$
$$\exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right)e^y dydv.$$

Estimons maintenant la norme $L^1(G, d^r g)$ de ϕ_{t+is}. On a

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G,d^r g)} = \int\int |\phi_{t+is}(n,z)|dndz,$$

d'où, d'après l'estimation précédente :

$$\int\int |\phi_{t+is}(n,z)|dndz \leq C\frac{1}{\sqrt{t+|s|}}\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)$$
$$\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\int H_{ve^z}(n)dn\right)\frac{1}{v^2}\exp\left(-\frac{1}{v}\left(\cosh(z)+\cosh(y)\right)\right)$$
$$\exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right)\exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right)e^y dydvdz.$$

En utilisant le fait que $\int H_{ve^z}(n)dn = 1$ et en intégrant en v on peut alors estimer le premier membre de l'inégalité ci-dessus par

$$\frac{\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\cosh(z)+\cosh(y)} \exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right) \times \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right) e^y dydz.$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{1}{\cosh(z)+\cosh(y)} dz \leq 2\int_0^\infty \frac{1}{\exp(z)+\exp(y)}$$

et en effectuant le changement de variable $e^z = u$, on voit que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\exp(z)+\exp(y)} = \int_1^\infty \frac{du}{u(u+e^y)} \leq \frac{C}{e^y}(1+y).$$

On a par conséquent

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G,d^rg)} \leq C\frac{\exp\left(\frac{\pi^2 t}{4(t^2+s^2)}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty (1+y)\exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right) \times \exp\left(\frac{|s|\pi y}{2(t^2+s^2)}\right) dy\ ,$$

et donc

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G,d^rg)} \leq C\frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)}{\sqrt{t+|s|}} \int_0^\infty (1+|y|+\frac{|s|}{t})\exp\left(-\frac{ty^2}{4(t^2+s^2)}\right)dy.$$

D'où

$$\|\phi_{t+is}\|_{L^1(G,d^rg)} \leq C\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{3/2}}\right)\exp\left(\frac{\pi^2}{4t}\right)(t+|s|)^{3/2}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth, Proc. Amer. Math. Soc., 120 (1994), 973–979.

[2] F. Astengo, Multipliers for a distinguished Laplacean on solvable extensions of H-type groups, Monatshefete f. Math., 120 (1995), 179–188.

[3] J. Ph. Anker et N. Lohoué, Multiplicateurs sur certains espaces symétriques, Amer. J. Math., 108 (1986), 1303–1354.

[4] Ph. Bougerol, Exemples de théorèmes locaux sur certains groupes résolubles, Ann. I.H.P., XIX (1983), 369–391.

[5] M. CHRIST, L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc., 328 (1991), 73–81.

[6] M. CHRIST et D. MÜLLER, On L^p spectral multipliers for a solvable Lie group, Geom. and Func. Analysis, Vol 6, No. 5 (1996), 860–876.

[7] J.-L. CLERC et E. M. STEIN, L^p multipliers for non compact symmetric spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 71 (1974), 3911–3912.

[8] R. R. COIFMAN et G. WEISS, Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes, Lectures Notes in Math., 242, Springer-Verlag, 1971.

[9] M. G. COWLING, S. GIULINI, A. HULANICKI et G. MAUCERI, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certains groups of exponential growth, Studia Math., 111 (1994), 103–121.

[10] L. De. MICHELE et G. MAUCERI, L^p multipliers on the Heisenberg group, Michigan J. Math., 26 (1979), 361–371.

[11] G. B. FOLLAND et E. M. STEIN, Hardy Spaces on Homogenous Groups, Math. Notes, 28, Princeton Univ. Press, 1982.

[12] W. HEBISCH, The subalgebra of L^1 associated with Laplacian on a Lie group, Proc. Amer. Math. Soc, 117 (1993) 547–549.

[13] W. HEBISCH, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, Colloq. Math., 65 (1993) 231–239.

[14] W. HEBISCH, Boundeness of L^1 spectral multipliers for an exponential solvable Lie group, Colloq. Math., 73 (1997), 155–164.

[15] L. HÖRMANDER, Estimates for translation invariant operators on L^p spaces, Acta Math., 104 (1960) 93–140.

[16] G. MAUCERI et S. MEDA, Vector-valued multipliers on stratified groups, Revista Math. Iberoamericana, 6 (1990), 141–154.

[17] D. MÜLLER et E. STEIN, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, J. Math. Pures et Appliquées, 73 (1994), 413–440.

[18] S. MUSTAPHA, Multiplicateurs spectraux sur certains groupes non-unimodulaires, Harmonic Analysis and Number Theory, CMS Conf. Proceedings, Vol 21, 1997.

[19] M. E. TAYLOR, L^p estimates on functions of Laplace operator, Duke Math. J., 58 (1989), 773–793.

[20] N. Th. VAROPOULOS, Analysis on Lie groups, Revista Math. Iberoamericana, 12 (1996) 791–917.

[21] N. Th. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE et Th. COULHON, Analysis and Geometry on Groups, Cambridge Tracts in Math., 100, 1993.

[22] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1978.

[23] M. YOR, On some exponential functionals of Brownian motion, Adv. Appl. Prob., 24 (1992), 509–531.

Manuscrit reçu le 8 janvier 1998,
accepté le 20 mars 1998.

Sami MUSTAPHA,
Université Pierre et Marie Curie
Institut de Mathématiques
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).