ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARC SCHLENKER

Réalisations de surfaces hyperboliques complètes dans H^3

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 3 (1998), p. 837-860

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_837_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 3 (1998), 837–860

RÉALISATIONS DE SURFACES HYPERBOLIQUES COMPLÈTES DANS H^3

par Jean-Marc SCHLENKER

1. Introduction.

Soit $K_0 \in]-1,0[$. On va s'intéresser aux métriques complètes à courbure K_0 sur une surface Σ difféomorphe à S^2 privée de N points ($N \geqslant 3$).

Rosenberg et Spruck [RS94] ont montré que, si $C \subset \partial_\infty H^3$ est la réunion disjointe de N courbes de Jordan, il existe une surface à courbure constante K_0 dans H^3 dont le bord à l'infini est C. Les surfaces qu'ils construisent sont des graphes sur des ouverts d'horosphères, et sont donc difféomorphes à S^2 privée de N points. Chacun des choix de C fournit ainsi au moins une métrique à courbure constante K_0 sur Σ. Comme l'espace de Teichmüller de ces métriques est de dimension finie, on en déduit que certains de ses éléments ont "beaucoup" de réalisations comme métriques induites sur des surfaces de H^3.

Une manière naturelle de réduire cette profusion est de demander que le bord à l'infini des surfaces considérées soit constitué de cercles de $S^2 = \partial_\infty H^3$ (i.e. d'ensembles équidistants d'un point pour la métrique canonique de S^2, ou, ce qui est équivalent, de bords à l'infini de plans totalement géodésiques de H^3). La notion de cercle de $\partial_\infty H^3$ est en effet "intrinsèque" dans la mesure où les isométries de H^3 agissent sur $\partial_\infty H^3$ par des transformations de Möbius qui préservent ces cercles.

On dira qu'une métrique sur Σ est "ouverte" si elle est complète et si l'aire de chacun de ses bouts est infinie. On va obtenir le

Mots-clés : Immersion – Isométrique – Hyperbolique – Convexe – Surface.
Classification math : 53C45 – 53C42 – 53C50.

THÉORÈME A. — *Pour chaque métrique ouverte σ à courbure constante K_0 sur Σ, il existe un plongement $\phi : \Sigma \to H^3$ qui induit σ et dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles de $\partial_\infty H^3$. De plus, ϕ est unique modulo les isométries de H^3.*

En fait, on a un résultat plus technique, mais aussi plus précis. Notons $\mathcal{M}$ l'espace de Teichmüller des métriques ouvertes à courbure constante K_0 sur Σ, et $\mathcal{M}_0$ l'espace des métriques ouvertes à courbure -1 sur Σ, qui ressemble beaucoup à $\mathcal{M}$. Pour comprendre la structure de $\mathcal{M}_0$, on peut utiliser le résultat suivant dû à Igor Rivin (voir [Sch] pour une preuve) concernant les surfaces à courbure -1 dans H^3 :

THÉORÈME (Igor Rivin). — *Pour chaque $m \in \mathcal{M}_0$, il existe une unique (modulo Isom(H^3)) surface polyèdrale convexe plongée dans H^3 dont la métrique induite est m et telle que, pour chaque bout de Σ, il existe un plan totalement géodésique de H^3 qui est orthogonal à toutes les faces au bout.*

Réciproquement, si $P_1, \cdots, P_N$ sont des plans hyperboliques disjoints et dont les bords à l'infini sont disjoints, il existe une surface polyèdrale convexe sans sommet qui est orthogonale aux P_i, et que chaque P_i coupe en deux parties, dont une homéomorphe à un anneau. Pour le voir, on considère, pour chaque paire $\{P_i, P_j\}$ (avec $i \neq j$), l'unique géodésique orthogonale à P_i et à P_j ; puis on prend comme surface le bord de l'enveloppe convexe de ces géodésiques. $\mathcal{M}_0$ est donc en bijection avec les configurations de N plans disjoints dont les bords à l'infini sont disjoints dans H^3 ; on en déduit sur $\mathcal{M}_0$ une structure de variété connexe de dimension $3N-6$ à bord.

Il est bien connu que l'espace des modules des métriques hyperboliques complètes sur S^2 privé de N points $x_1, \ldots, x_N$ (l'espace de ces métriques, quotienté par l'espace des difféomorphismes isotopes à l'identité) est simplement connexe. Ainsi, $\pi_1(\mathcal{M}) = \mathrm{Diff}^0(S^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_N\})/\mathrm{Diff}^0(S^2 \setminus \{x_1, \ldots, x_N\})$, où Diff^0 désigne l'espace des difféomorphismes isotopes à l'identité.

Notons aussi $\mathcal{I}$ l'ensemble des surfaces complètes à courbure K_0 dans H^3 dont le bord à l'infini est constitué de N cercles, quotienté par Isom(H^3) ; enfin, appelons $\mathcal{B}$ l'ensemble des réunions disjointes de N cercles de S^2 qui bordent des disques disjoints, quotienté par l'action de Isom(H^3) par les transformations conformes. $\mathcal{B}$ a une structure naturelle de variété à bord.

On peut décrire $\pi_1(\mathcal{B})$ comme pour $\mathcal{M}$ ci-dessus : si $D_1, \dots, D_N$ sont N disques disjoints de S^2 bordés par des cercles, alors $\pi_1(\mathcal{B})$ est le quotient $\mathrm{Diff}(S^2 \setminus D_1 \cup \dots \cup D_N))/\mathrm{Diff}^0(S^2 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_N))$ du groupe des difféomorphismes de S^2 privé des D_i par le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité.

On a une application naturelle $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{M}$ qui associe à un plongement la métrique induite, et une application $\Psi : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ qui associe à un plongement son bord à l'infini. Alors

LEMME A. — *$\mathcal{B}$ est une variété de dimension $3N-6$; Ψ est une bijection, et $\Pi := \Phi \circ \Psi^{-1}$ est un difféomorphisme.*

On en déduit (pour chaque valeur de K_0) une paramétrisation de l'espace "de Teichmüller" $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}_0$) par l'espace (plus simple) $\mathcal{B}$.

On peut se poser le même type de questions en remplaçant les métriques induites sur les surfaces par les troisièmes formes fondamentales. Grâce à une dualité bien connue (mais rappelée dans la section 3) entre H^3 et l'espace de Sitter de dimension 3, noté S^3_1, cela revient d'ailleurs à se poser les mêmes questions que dans le théorème A (concernant les métriques induites) mais pour les surfaces de type espace dans S^3_1. On choisit $\tilde{K}_0 \in]-\infty, 0[$ et on obtient le

THÉORÈME B. — *Soit $\tilde{\sigma}$ une métrique ouverte à courbure constante $\tilde{K}_0$ sur Σ. Supposons que les géodésiques fermées de $\tilde{\sigma}$ sont de longueur strictement supérieure à 2π. Alors il existe un plongement $\tilde{\phi} : \Sigma \to H^3$ dont $\tilde{\sigma}$ est la troisième forme fondamentale, et dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles de $\partial_\infty H^3$. De plus, $\tilde{\phi}$ est unique modulo les isométries de H^3.*

Si $\tilde{\sigma}$ admet une géodésique de longueur $L \leqslant 2\pi$, alors $(\Sigma, \tilde{\sigma})$ ne peut pas être la troisième forme fondamentale d'une surface de H^3 ; on rappellera pourquoi dans la section 3.

Là encore, on a en fait un résultat plus précis. On note $\tilde{\mathcal{M}}$ l'ensemble des couples $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})$, où $\tilde{\sigma}$ est une métrique ouverte à courbure constante $\tilde{K}_0 \in]-\infty, 0[$ sur Σ dont les géodésiques fermées sont de longueur $L > 2\pi$. On note aussi $\tilde{\mathcal{I}}$ l'ensemble des couples $(\tilde{K}_0, g)$, où g est un plongement complet de Σ dans H^3 dont la troisième forme fondamentale est à courbure constante $\tilde{K}_0 \in]-\infty, 0[$ et dont le bord à l'infini est réunion disjointe de N cercles, quotienté par $\mathrm{Isom}(H^3)$. Il existe une application naturelle $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{I}} \to \tilde{\mathcal{M}}$ qui associe à un plongement sa troisième forme fondamentale (l'application étant triviale sur les composantes $\tilde{K}_0$), et une application $\tilde{\Psi} : \tilde{\mathcal{I}} \to]-\infty, 0[\times \mathcal{B}$ qui associe à un plongement son bord à l'infini. Alors

LEMME B. — *$\tilde{\Psi}$ est une bijection, et $\tilde{\Pi} := \tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi}^{-1}$ est un difféomorphisme.*

Ceci fournit, pour chaque valeur de $\tilde{K}_0$, une paramétrisation d'un ouvert de $\mathcal{M}_0$ par $\mathcal{B}$. Enfin, on peut se demander ce que devient le théorème A quand on fait tendre $K_0 \to -1$. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME C. — *Pour chaque $B \in \mathcal{B}$, il existe une unique surface convexe de H^3 dont la métrique induite est à courbure constante -1 et dont le bord à l'infini est B. Pour chaque métrique ouverte σ_{-1} à courbure constante -1 sur Σ, il existe un plongement convexe $\phi_{-1} : \Sigma \to H^3$ qui induit σ_{-1}, et dont le bord à l'infini est dans $\mathcal{B}$.*

Les surfaces qui apparaissent sont convexes et à courbure extrinsèque nulle (c'est-à-dire que le déterminant de leur seconde forme fondamentale est nul), elles sont donc réglées.

Pour mieux comprendre le comportement de ces surfaces, en particulier quand $K \to 0$, on peut fixer un bord $B \in \mathcal{B}$. D'après le théorème A, pour chaque $K \in]-1,0[$, il existe une unique surface Σ_K dont le bord à l'infini est B, et il existe aussi une surface Σ_{-1} convexe développable dont le bord à l'infini est B. On note Ω_B le complémentaire du domaine fermé convexe borné par Σ_{-1}, et $\tilde{\Omega}_B$ l'ensemble des points de S^3_1 duaux (cf. la section 3) des plans orientés de H^3 qui ne rencontrent pas $H^3 \setminus \Omega_B$ et le laissent entièrement du coté opposé à leur normale orientée. Enfin, on appelle $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$ la surface duale de Σ_K, qui est (section 3) une surface convexe complète de type espace de S^3_1 à courbure constante $\tilde{K} = K/(K+1)$.

THÉORÈME D. — *Les $(\Sigma_K)_{K \in]-1,0[}$ forment un feuilletage de Ω_B, et les $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$ feuilletent $\tilde{\Omega}_B$.*

Notons que les résultats ci-dessus, présentés pour $N \geqslant 3$ pour éviter de traiter des cas particuliers dans les énoncés, sont en fait valables aussi pour $N = 2$; la seule différence est que les espaces qui interviennent sont alors de dimension 1 et pas $3N - 6 = 0$. Tous les énoncés se vérifient dans ce cas de manière à peu près immédiate. Le cas $N = 1$ est sans intérêt, toutes les surfaces qui interviennent sont totalement ombiliques.

On envisage de donner ultérieurement, en collaboration avec Olivier Biquard, une extension du théorème A à des surfaces à courbure $K > -1$ variable tendant vers une constante $K_0 \in]-1,0[$ à l'infini.

Ce travail doit beaucoup à des remarques d'Olivier Biquard, François Labourie et Igor Rivin ; je tiens à les remercier. Le texte final a aussi bénéficié des remarques d'un rapporteur anonyme.

2. Étude de surfaces.

Dans cette section, on étudie les K_0-surfaces complètes de H^3 dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles. On fixe $K_0 \in]-1,0[$. On a d'abord un résultat de compacité des K_0-surfaces :

LEMME 2.1. — *Soit (ϕ_n) une suite de plongements de Σ dans H^3 qui induisent des métriques complètes à courbure constante K_0, et soit $x_0 \in \Sigma$ tel que $(\phi(x_0))$ converge. Alors il existe une suite (ψ_n) extraite de (ϕ_n) telle que :*

- *soit (ψ_n) converge C^∞ sur les compacts de Σ vers un plongement qui induit une métrique à courbure constante K_0 ;*

- *soit les images par les ψ_n du bord à l'infini de Σ (pour les métriques induites) convergent vers deux points de $\partial_\infty H^3$.*

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème E (p. 414) de l'article de François Labourie [Lab89]. En effet, on peut passer au revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ, et on a une suite d'immersions isométriques ϵ-elliptiques (au sens de [Lab89]) d'une surface dans H^3. On se restreint à un compact $K \ni x_0$ de Σ, et il existe d'après le théorème d'Ascoli une sous-suite de (ϕ_n) qui converge C^0 sur K. D'après le théorème E de [Lab89], s'il n'y a pas convergence C^∞ sur K, alors il y a convergence vers une "surface de pli", c'est-à-dire dégénérescence le long d'une géodésique g_0 de H^3 ; on vérifie alors que les images par les ψ_n du bord à l'infini de Σ dégénèrent vers les deux extrémités de g_0 dans $\partial_\infty H^3$. □

On peut déduire du lemme 2.1 le

LEMME 2.2. — *Soit $\phi : \Sigma \to H^3$ un plongement induisant une métrique ouverte σ à courbure K_0, et B un bout de Σ. Supposons que ϕ envoie le bord à l'infini de B sur un cercle C_0 de $\partial_\infty H^3$. Alors $\phi(\Sigma)$ est asymptotique, à l'infini sur B, à un disque totalement ombilique S_0 à courbure constante K_0 dont le bord est C_0. De plus, la seconde forme fondamentale de ϕ est asymptotique à l'infini à $(\sqrt{K_0+1})\sigma$.*

Démonstration. — On note P_0 le plan totalement géodésique dont le bord est C_0 ; on considère une suite (x_n) de points de Σ qui s'éloigne à l'infini sur B, et une suite (ψ_n) d'isométries de H^3 fixant P_0 telles que la projection orthogonale de $\psi_n \circ \phi(x_n)$ sur P_0 soit toujours égale à un point $y_0 \in P_0$ fixé. Comme $x_n \to \infty$ sur B, $(\psi_n \circ \phi(\partial_\infty \Sigma))$ converge vers C_0 (pour l'action de $\psi_n \circ \phi$ sur $\partial_\infty H^3$).

On note encore Δ_0 la géodésique orthogonale à P_0 passant par y_0, P_+, P_- les deux plans orthogonaux à Δ_0 à distance 1 de P_0, et C_+, C_- les bords à l'infini de P_+, P_- (qui sont donc des cercles de $\partial_\infty H^3$). Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, $(\psi_n \circ \phi)(\partial_\infty \Sigma)$ est entre C_+ et C_-.

Notons encore P_+^d (resp. P_-^d) l'ensemble des points à distance d de P_+ (resp. de P_-) du coté opposé à P_0. Les $P_\pm^d$ sont convexes à courbure (intrinsèque) $-1 + \tanh^2(d)$, donc, pour $d_0 > \operatorname{argth}(\sqrt{1+K_0})$ et $n \geqslant n_0$, $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$ doit être entre $P_-^{d_0}$ et $P_+^{d_0}$. Sinon, au point de $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$ qui est extérieur au domaine borné par P_- et P_+ et qui maximise la distance à P_+ (ou a P_-), $\psi_n \circ \phi(\Sigma)$ devrait être tangente à l'intérieur à une surface P_+^d (ou P_-^d) à courbure strictement plus grande que K_0, et donc avoir une courbure strictement plus grande que K_0, ce qui est impossible.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, $\psi_n \circ \phi(x_n)$ reste à distance bornée de P_0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\psi_n \circ \phi(x_n))$ converge. D'après le lemme précédent, il existe donc une suite (ϕ_n) extraite de $(\psi_n \circ \phi)$ qui converge C^∞ sur les compacts de Σ vers une K_0-surface Σ_∞. Comme $\partial_\infty \Sigma_\infty = C_0$, Σ_∞ est un disque totalement ombilique à distance constante de P_0 (l'unicité des K_0-surfaces de bord donné est prouvée dans [RS94] quand le bord est une courbe de Jordan), qui est donc invariante par les ψ_n. On en déduit le résultat. □

Cette preuve m'a été essentiellement suggérée par François Labourie. On pourra trouver plus loin une preuve alternative.

Maintenant, on en déduit l'unicité des K_0-surfaces ayant un bord donné, quand ce bord est une réunion de cercles.

LEMME 2.3. — *Soit C une réunion disjointe finie de cercles de $\partial_\infty H^3$ bordant des disques disjoints. Il existe une unique K_0-surface plongée dont C est le bord.*

Démonstration. — L'existence vient de [RS94], il nous suffit de montrer l'unicité. On raisonne donc par l'absurde, et on suppose que Σ_0, Σ sont deux K_0-surfaces de bord C, telles qu'il existe un point de Σ hors du domaine convexe D_0 bordé par Σ_0.

On note Σ_t l'ensemble des points de $H^3 \setminus D_0$ qui sont à distance t de Σ_0. On peut utiliser l'équation de Ricatti pour vérifier que, si $\gamma : \mathbf{R}_+ \to H^3 \setminus D_0$ est une géodésique orthogonale à Σ_0 en 0, et si on note $H(t)$ et $K_e(t)$ la courbure moyenne et la courbure extrinsèque de Σ_t en $\gamma(t)$, alors

$$H'(t) = 1 + K_e(t) - 2H(t)^2, \; K_e'(t) = 2H(t)(1 - K_e(t)). \tag{1}$$

Or, d'après le lemme 2.2, $\lim_{\partial_\infty \Sigma_0} H = \sqrt{K_0+1}$, si bien que H est borné sur Σ_0. On montre alors assez facilement en utilisant (1) que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $H(t)$ reste dans un intervalle de la forme $]0, H_M]$, et $K_e(t) \in]0,1[$ est strictement croissante avec t.

Maintenant, si on note y_0 le point de $\Sigma \cap (H^3 \setminus D_0)$ qui maximise la distance à Σ_0 (y_0 existe car Σ_0 et Σ sont asymptotiques à l'infini d'après le lemme 2.2), Σ doit être tangente "à l'intérieur" à une surface Σ_t en y, si bien que sa courbure doit être supérieure à celle de Σ_t, qui est strictement plus grande que K_0. C'est impossible. $\square$

On a donc montré que l'application Ψ de l'introduction est une bijection.

Remarquons que l'approche utilisée pour la preuve du lemme 2.3 permet aussi de donner une autre démonstration du lemme 2.2. Pour cela, on considère encore la surface totalement ombilique S_0 qui est à courbure K_0 et dont le bord est C_0, et une autre surface S_1 qui est aussi à courbure K_0, mais dont le bord est composé de C_0 et d'un autre cercle C_1 qui sépare C_0 de $\partial_\infty \Sigma \setminus C_0$; on choisit ces surfaces de manière que le domaine convexe borné par S_1 contient celui borné par Σ, qui contient celui borné par S_0. On note que Σ ne peut traverser ni S_0 (sans quoi elle serait tangente à une équidistante de S_0 à l' "intérieur" de S_0) ni S_1 (d'après le même raisonnement que celui qu'on à fait pour montrer le lemme 2.3). Or on vérifie sans mal que S_0 et S_1 sont asymptotiques au voisinage de C_0, et on en déduit le résultat. En fait, on va voir que la distance entre S_0 et S_1 décroit en $O(e^{-2k_0 r})$, et on obtient ainsi le résultat suivant, plus précis que le lemme 2.2 :

LEMME 2.4. — *Avec les hypothèses du lemme 2.2, la distance à S_0 est une fonction sur Σ qui décroît comme $O(e^{-2k_0 r})$ à l'infini en B, où r est la distance (sur Σ) à un point fixe de Σ.*

Démontration. — D'après le raisonnement précédent, le seul point qui reste à montrer est que la distance à S_0 décroît comme $e^{-2k_0 r}$ sur S_1. Pour cela, on appelle P_0 l'unique plan totalement géodésique qui a le même bord à l'infini que S_0, et on note f le sinus hyperbolique de la distance u à P_0 (ainsi que sa restriction à S_1).

On vérifie sans difficulté que le hessien de f est :

$$Ddf = f\mu$$

où μ est la métrique de H^3. Ainsi, si x, y sont des champs de vecteurs sur S_1, alors

$$(Ddf)(x,y) = x.y.f - (D_x y).f = f\mu(x,y)$$

et si σ est la métrique de S_1 et $\overline{D}$ sa connexion de Levi-Civita :

$$\begin{aligned}(\overline{D}df)(x,y) = x.y.f - (\overline{D}_x y).f = (Ddf)(x,y) \\ +(D_x y - \overline{D}_x y).f = f\sigma(x,y) + I\!I(x,y)df(n)\end{aligned}$$

où n est la normale orientée extérieure à S_1.

Ainsi, d'après la formule de Gauss :

$$\det(\overline{D}df - fI) = \|Df(n)\|^2 \det(I\!I) = \|Df(n)\|^2 (K_0 + 1)$$

et $\|Df\|^2 = \cosh^2(u) = 1 + f^2$; comme $\|Df\|^2 = |Df(n)|^2 + \|\overline{D}f\|^2$, on trouve que f vérifie sur S_1 l'équation :

$$\det(\overline{D}df - fI) = (1 + f^2 - \|\overline{D}f\|^2)(K_0 + 1).$$

Comme S_1 a une courbure constante K_0, on peut se restreindre à un ouvert Ω_1 de S_1 isométrique au complémentaire Ω_1 d'une boule du plan $H^2_{K_0}$ à courbure constante K_0. Ω_1 est donc feuilleté par des courbes c_r à courbure géodésique $k_0 \coth(k_0 r)$ (avec $-k_0^2 = K_0$). De plus, f est radiale. On calcule alors que

$$\det(\overline{D}df - fI) = (f'' - f)(f' k_0 \coth(k_0 r) - f)$$

et donc

$$(f'' - f)(f' k_0 \coth(k_0 r) - f) = (1 + f^2 - \|\overline{D}f\|^2)(K_0 + 1) \tag{2}$$

S_0 correspond à la solution constante

$$f \equiv f_0 := \sqrt{-\frac{K_0 + 1}{K_0}}.$$

On sait que $f \to f_0$ à l'infini (S_1 est asymptotique à S_0), on linéarise donc l'équation (2) en posant $f = f_0 + y$, et on obtient à l'infini :

$$-f_0(y'' + k_0 y - 2y) = 2f_0 y(K_0 + 1)$$

soit

$$y'' + k_0 y' - k_0^2 y = 0$$

dont les seules solutions bornées sont de la forme $y(r) = C_0 e^{-2k_0 r}$. □

3. Rappels de géométrie hyperbolique.

Nous rappelons ici deux outils classiques : d'une part, la dualité entre H^3 et l'espace de Sitter de dimension 3, noté S^3_1 ; d'autre part l'application de Pogorelov, qui permet de "transporter" des problèmes de rigidité de H^3 dans $\mathbf{R}^3$. Ces deux éléments admettent des extensions à d'autres cas, voir [Sch].

H^3 est isométrique à

$$H^3 \simeq \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid \langle x, x\rangle = -1 \text{ et } x_0 > 0\}$$

avec la métrique induite, où $\mathbf{R}^4_1$ est l'espace de Minkowski de dimension 4 avec le produit scalaire

$$\langle x, x'\rangle = -x_0x'_0 + x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3.$$

De même, on identifie l'espace de Sitter à

$$S^3_1 \simeq \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid \langle x, x\rangle = 1\}.$$

On définit alors une dualité entre points de H^3 et plans totalement géodésiques de type espace de S^3_1, et entre points de S^3_1 et plans totalement géodésiques orientés de H^3, de la manière suivante. Pour $m \in H^3$, il existe une unique droite D de $\mathbf{R}^4_1$ passant par m et par 0; on note D^* son orthogonal, qui est un 3-plan de $\mathbf{R}^4_1$ passant par 0 sur lequel la restriction de la métrique de $\mathbf{R}^4_1$ est définie positive. $D^* \cap S^3_1$ est alors un 2-plan totalement géodésique de S^3_1 de type espace, qu'on note m^*. De manière analogue, à chaque point $m' \in S^3_1$, on associe la droite orientée D' passant par m' et par 0, puis son orthogonal D'^*, qui est un 3-plan orienté de $\mathbf{R}^4_1$ sur lequel la restriction de la métrique est de signature $(2,1)$. Enfin, on note $m'^* = D'^* \cap H^3$, qui est un 2-plan totalement géodésique orienté de H^3. On a alors le

LEMME 3.1. — *Soit S une surface, et ϕ une immersion localement strictement convexe de S dans H^3. Alors l'application $\tilde{\phi}$ qui à $x \in S$ associe le point dual du plan tangent à $\phi(S)$ en $\phi(x)$ est une immersion localement strictement convexe de type espace de S dans S^3_1. De plus, $\phi(x)$ est le point dual du plan tangent à $\tilde{\phi}(S)$ en $\tilde{\phi}(x)$. Enfin, la troisième forme fondamentale de $\tilde{\phi}$ coïncide avec la métrique induite par ϕ, et réciproquement.*

On pourra consulter [Sch] pour la preuve de ce lemme classique, ou [RH93] pour son analogue polyédral.

Enfin, on rappelle que, si S est une surface immergée dans H^3, dont la métrique induite a pour courbure $K \neq -1$ en un point x, alors la troisième forme fondamentale de S en x à pour courbure $\tilde{K} = K/(K+1)$.

En ajoutant à ces rappels les résultats de la section précédente, on obtient le

Corollaire 3.2. — *Soit Σ une surface plongée dans H^3, avec une métrique induite ouverte à courbure $K_0 \in]-1,0[$ et un bord à l'infini constitué d'une réunion disjointe de cercles. Alors sa troisième forme fondamentale est une métrique ouverte à courbure $\tilde{K}_0 = K_0/(K_0+1)$ dont les géodésiques fermées sont de longueur $L > 2\pi$.*

Démonstration. — La troisième forme fondamentale est complète parce que Σ est ombilique à l'infini d'après le lemme 2.2.

Soit γ une géodésique fermée de Σ de longueur $L \leqslant 2\pi$. L'image de γ dans S^3_1 par l'application duale du plongement donné serait une courbe "convexe" au sens où elle pourrait être paramétrée à vitesse 1 avec une accélération toujours non nulle et de type temps; or on sait (voir [Sch96], ou [RH93], [CD95] pour l'analogue polyédral) que de telles courbes sont nécessairement de longueur $L > 2\pi$. Les géodésiques fermées de la troisième forme fondamentale de Σ sont donc de longueur $L > 2\pi$. □

On en déduit que l'application $\tilde{\Psi}$ de l'introduction est bien définie à valeurs dans $\tilde{\mathcal{M}}$; c'est une bijection d'après le lemme 2.3 et la dualité du lemme 3.1.

Définissons maintenant l'application de Pogorelov. On utilise encore le modèle de H^3 ci-dessus. Rappelons qu'on peut en déduire un modèle projectif de H^3, donné par l'application

$$\begin{aligned} \rho : H^3 &\to \mathbf{R}^3 = \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid x_0 = 1\} \\ x &\mapsto \frac{x}{x_0} \end{aligned}$$

ρ envoie H^3 sur l'intérieur de la boule unité B^3 de $\mathbf{R}^3$, et préserve les géodésiques. On notera aussi ρ son extension de $\overline{H^3}$ dans B^3. Pogorelov [Pog73] a montré que ρ n'est qu'une "composante" d'une application plus intéressante :

Définition 3.3. — *On note P_0 la projection orthogonale de $\mathbf{R}^4_1$ sur l'hyperplan $\{x_0 = 1\}$, puis $P_1 := P_0 \times P_0$. On pose*

$$\begin{aligned}\mathcal{P} : H^3 \times H^3 &\to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3\\ (x, x') &\mapsto P_1\left(\frac{2x}{x_0 + x'_0}, \frac{2x'}{x_0 + x'_0}\right).\end{aligned}$$

La restriction de $\mathcal{P}$ à la diagonale Δ de $H^3 \times H^3$ n'est autre que ρ. $\mathcal{P}$ a de remarquables propriétés. Pour les exprimer, on note p_1, p_2 les projections canoniques de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ sur les deux facteurs. Alors

Lemme 3.4. — 1. *Si $u, u' : S \to H^3$ sont deux immersions qui induisent la même métrique, $p_1 \circ \mathcal{P} \circ (u, u')$ et $p_2 \circ \mathcal{P} \circ (u, u')$ sont aussi des immersions qui induisent la même métrique.*

2. *Si $\alpha : H^3 \to H^3$ est un difféomorphisme, alors α est une isométrie si et seulement si il existe une isométrie $\beta : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que, pour $x \in H^3$, $p_1 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x)) = \beta \circ p_2 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$.*

Démonstration. — On note X_0 le point de coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ dans $\mathbf{R}^4_1$. Alors pour $x, x' \in H^3$ and $X \in T_x H^3, X' \in T_{x'} H^3$:

$$\begin{aligned}&\langle x + x', X_0\rangle^2 (p_1 \circ \Phi)_*(X, X')\\ &\qquad = 2(X - \langle X, X_0\rangle X_0)\langle x + x', X_0\rangle - \langle X + X', X_0\rangle(x - \langle x, X_0\rangle X_0)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\langle x + x', X_0\rangle^4 \|(p_1 \circ \Phi)_*(X, X')\|^2 = 4[\langle x + x', X_0\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, X_0\rangle^2)\\ &\quad + \langle X + X', X_0\rangle^2(\|x\|^2 - \langle x, X_0\rangle^2) - 2\langle x + x', X_0\rangle\langle X + X', X_0\rangle(\langle X, x\rangle\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \langle X, X_0\rangle\langle x, X_0\rangle)].\end{aligned}$$

Mais $\|x\|^2 = -1$, donc $\langle x, X\rangle = 0$, et on trouve que

$$\begin{aligned}&\langle x + x', X_0\rangle^4 \|(p_1 \circ \Phi)_*(X, X')\|^2 = 4[\langle x + x', X_0\rangle^2(\|X\|^2 - \langle X, X_0\rangle^2)\\ &- \langle X + X', X_0\rangle^2(1 + \langle x, X_0\rangle^2) + 2\langle x + x', X_0\rangle\langle X + X', X_0\rangle\langle X, X_0\rangle\langle x, X_0\rangle]\\ &= 4[\langle x + x', X_0\rangle^2\|X\|^2 - \langle X + X', X_0\rangle^2\\ &\qquad\qquad - (\langle x + x', X_0\rangle\langle X, X_0\rangle - \langle X + X', X_0\rangle\langle x, X_0\rangle)^2]\\ &= 4[\langle x+x', X_0\rangle^2\|X\|^2 - \langle X+X', X_0\rangle^2 - (\langle x', X_0\rangle\langle X, X_0\rangle - \langle x, X_0\rangle\langle X', X_0\rangle)^2].\end{aligned}$$

En soustrayant l'équation obtenue en échangeant x et x', on obtient le point (1).

Le point (2) est une conséquence de (1) ; par exemple, si α est une isométrie, alors $x \mapsto p_1 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$ et $x \mapsto p_2 \circ \mathcal{P}(x, \alpha(x))$ doivent induire la même métrique d'après (1), et ils diffèrent donc par une isométrie de $\mathbf{R}^3$.

□

On pourra trouver dans [Sch] une analyse plus géométrique de ce lemme, ainsi que diverses extensions.

On peut linéariser $\mathcal{P}$ au voisinage de Δ : on note

$$\begin{aligned} i : TH^3 &\to TH^3 \times TH^3 \\ (x, v) &\mapsto ((x, 0), (x, v)) \end{aligned}$$

puis on pose

$$\mathcal{P}' := (p_1 \circ \mathcal{P})_* \circ i - (p_2 \circ \mathcal{P})_* \circ i$$

$\mathcal{P}'$ a encore de belles propriétés :

LEMME 3.5. — *Soit ϕ une immersion d'une surface S dans H^3, et u un champ de vecteurs sur $\phi(S)$ qui induit une déformation infinitésimale isométrique de $\phi(S)$. Alors $\mathcal{P}'(u)$ est une déformation infinitésimale isométrique de $\rho \circ \phi(S)$. De plus, si v est un champ de vecteurs sur H^3, v est un champ de Killing si et seulement si $\mathcal{P}'(v)$ est un champ de Killing sur B^3.*

La première partie du lemme est une conséquence du premier point du lemme 3.4, et le second point est une conséquence directe du second point de 3.4.

On note aussi que $\mathcal{P}'$ est continu pour la norme hyperbolique sur TH^3 et la norme euclidienne sur TB^3 ; en effet, on vérifie à partir de la définition explicite de $\mathcal{P}$ ci-dessus que $\mathcal{P}' = \rho_* + \delta$, où $\delta(v)$ est un terme radial (dirigé comme la géodésique passant par le centre de B^3) égal à la norme de la composante radiale de v multipliée par $\tanh(r)$, où r est la distance hyperbolique au "centre" X_0. Plus simplement, $\mathcal{P}'$ agit comme ρ_* sur les vecteurs orthogonaux à la direction de X_0, et préserve la norme pour les vecteurs parallèles à la direction de X_0. Dans le modèle projectif de H^3 où H^3 correspond à l'intérieur de la boule de rayon 1, $\mathcal{P}'$ agit sur les champs de vecteurs en multipliant leur composant radiale par $\mathrm{ch}^2(r) = 1/(1 - R^2)$, où $R = \tanh(r)$ est la distance à l'origine dans $\mathbf{R}^3$.

De la même manière, on définit une application de Pogorelov pour S^3_1. On appelle pour cela $S^3_{1,+}$ l'hémisphère de S^3_1 :

$$S^3_{1,+} := \{x \in \mathbf{R}^4_1 \mid \langle x, x \rangle = 1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

DÉFINITION 3.6. — *On note*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}} : S^3_{1,+} \times S^3_{1,+} &\to \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \\ (x, x') &\mapsto P_1\left(\frac{2x}{x_0 + x'_0}, \frac{2x'}{x_0 + x'_0}\right).\end{aligned}$$

La restriction de $\tilde{\mathcal{P}}$ à la diagonale $\tilde{\Delta}$ de $S^3_{1,+} \times S^3_{1,+}$ est une application projective $\tilde{\rho}$ de $S^3_{1,+}$ sur $\mathbf{R}^3 \setminus B^3$. De plus

LEMME 3.7. — 1. *Si $u, u' : S \to S^3_{1,+}$ sont deux immersions de type espace d'une surface qui induisent la même métrique, $p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}} \circ (u, u')$ et $p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}} \circ (u, u')$ sont aussi des immersions qui induisent la même métrique.*

2. *Si $\alpha : S^3_{1,+} \to S^3_{1,+}$ est un difféomorphisme, alors α est une isométrie si et seulement si il existe une isométrie $\beta : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ telle que, pour $x \in S^3_{1,+}$, $p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}}(x, \alpha(x)) = \beta \circ p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}}(x, \alpha(x))$.*

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 3.4.

On peut encore linéariser $\tilde{\mathcal{P}}$ au voisinage de $\tilde{\Delta}$: on note

$$\begin{aligned}\tilde{i} : TS^3_{1,+} &\to TS^3_{1,+} \times TS^3_{1,+} \\ (x, v) &\mapsto ((x, 0), (x, v))\end{aligned}$$

puis on pose : $\tilde{\mathcal{P}}' := (p_1 \circ \tilde{\mathcal{P}})_* \circ \tilde{i} - (p_2 \circ \tilde{\mathcal{P}})_* \circ \tilde{i}$. Alors :

LEMME 3.8. — *Soit ϕ une immersion d'une surface S dans $S^3_{1,+}$, et u un champ de vecteurs sur $\phi(S)$ qui induit une déformation infinitésimale isométrique de $\phi(S)$. Alors $\tilde{\mathcal{P}}'(u)$ est une déformation infinitésimale isométrique de $\tilde{\rho} \circ \phi(S)$. De plus, un champ de vecteurs sur $S^3_{1,+}$ est un champ de Killing si et seulement si son image par $\tilde{\mathcal{P}}'$ en est un.*

4. Rigidité.

Dans cette section, on utilise les applications de Pogorelov de la section précédente pour donner des résultats de rigidité pour les K_0-surfaces dont les bords à l'infini sont des cercles.

LEMME 4.1. — *Soit $g \in \mathcal{I}$ un plongement de Σ avec $\Psi(g) = C \in \mathcal{B}$ et $\Phi(g) = \sigma \in \mathcal{M}$. Alors $\Pi_* : T_C\mathcal{B} \mapsto T_\sigma\mathcal{M}$ est injective.*

En d'autres termes, si C' est une variation infinitésimale de C, C' induit un champ de vecteurs sur $g(\Sigma)$ (une déformation infinitésimale) et donc une variation infinitésimale σ' de la métrique induite; cette variation n'est pas nulle si $C' \neq 0$.

La preuve utilise la transformation de Pogorelov, qui permet de se ramener à la proposition suivante :

LEMME 4.2. — *Soit Σ une surface (localement strictement) convexe dans $\mathbf{R}^3$ dont le bord $\partial\Sigma$ est une réunion de cercles $C_1, \cdots, C_N$ de S^2 bordant des disques convexes disjoints de S^2. Supposons Σ tangente à S^2 sur les C_i. Soit V un champ de vecteurs sur Σ induisant une déformation infinitésimale isométrique. Supposons que, au voisinage de C_i, $V = V_i + v_i$, où V_i est la restriction à Σ d'un champ de Killing de $\mathbf{R}^3$ parallèle en 0 à l'axe de C_i, et v_i est, sur C_i, dans le plan tangent à C_i contenant 0. Alors V est trivial, i.e. c'est la restriction à Σ d'un champ de Killing de $\mathbf{R}^3$.*

Démonstration. — Posons $f = r^2$, où r est la distance à l'origine dans $\mathbf{R}^3$. Appelons f' la variation de f induite par V sur Σ, et $I', I\!I', B'$ les variations de $I, I\!I$ et B. Par hypothèse, $I' = 0$.

On définit une 1-forme ω sur Σ comme

$$\omega(x) = df'(J_0 B' x)$$

où J_0 est la structure complexe sur Σ associée à I. On calcule la différentielle de ω comme par exemple dans [LS96]. D'abord, le hessien de f dans $\mathbf{R}^3$ est

$$Ddf = 2\mu_0$$

où μ_0 est la métrique de $\mathbf{R}^3$. Appelons n le vecteur normal unitaire intérieur à Σ, et posons $h := df(n)$. Ainsi, $h \leqslant 0$. Alors, si x, y sont deux champs de vecteurs sur Σ :

$$\begin{aligned}(\overline{D}df)(x,y) &= x.(y.f) - (\overline{D}_x y).f \\ &= x.(y.f) - ((D_x y) - I\!I(x,y)n).f \\ &= (Ddf)(x,y) + I\!I(x,y)h\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\overline{D}df = I + hI\!I.$$

Comme V laisse I et donc $\overline{D}$ invariants :

$$\overline{D}df' = hI\!I' + h'I\!I. \tag{3}$$

Ainsi

$$d\omega(x,y) = df'(J_0(\overline{D}_x(B'y) - \overline{D}_y(B'x) - B'[x,y])) \\ +(\overline{D}df')(x, J_0B'y) - (\overline{D}df')(y, J_0B'x)$$

et donc

$$d\omega(x,y) = df'(J_0(d^{\overline{D}}B')(x,y)) + h'(I\!I(x, J_0B'y) - I\!I(y, J_0B'x)) \\ +h(I\!I'(x, J_0B'y) - I\!I(y, J_0B'y)).$$

Mais :

- $d^{\overline{D}}B' = 0$ par l'équation de Codazzi ;
- $I\!I(x, J_0B'y) - I\!I(y, J_0B'x) = 0$ car $\mathrm{tr}(B^{-1}B') = 0$, parce que $\det(B)$ ne varie pas avec V (d'après l'équation de Gauss) ;
- $I\!I'(x, J_0B'y) - I\!I'(y, J_0B'x) = -2\det(B')dv(x,y)$.

Maintenant

$$d\omega = -2h\det(B')dv. \tag{4}$$

Or $\mathrm{tr}(B^{-1}B') = 0$, donc $\det(B^{-1}B') \leqslant 0$, et $\det(B') \leqslant 0$, ce qui conduit à :

$$\int_\Sigma d\omega \leqslant 0. \tag{5}$$

Pour montrer que ω doit s'annuler, il faut calculer l'intégrale de ω sur le bord, i.e. sur chacun des C_i. Notons que V_i ne joue ici aucun rôle, parce qu'il induit une variation nulle B et une variation constante (au premier ordre sur C_i) de f, on peut donc l'oublier.

On appelle (e_1, e_2) le repère mobile au voisinage de C_i des directions principales de Σ, qui sont bien définies près de C_i parce que les courbures principales sont distinctes ; on choisit e_1 parallèle à C_i (la courbure principale associée est 1 sur C_i parce que Σ est tangente à S^2 sur C_i) et e_2 la normale extérieure (avec courbure principale associée k_2). κ_i est la courbure géodésique de C_i, $\kappa_i = \langle \overline{D}_{e_1}e_1, e_2\rangle$, u_i est la projection de v_i sur Σ, $l := \langle u_i, e_1\rangle$, et λ est la projection de v_i sur $-n$. Comme Σ est tangente à S^2 sur C_i, les 1-jets de f' et de 2λ coïncident sur C_i.

Un calcul élémentaire montre que :

$$I' = \lambda I\!I + 2\delta^* u_i$$

et $I' = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= e_2.(\lambda I\!I(e_1,e_1)) + 2e_2.\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_1\rangle \\ &= d\lambda(e_2) + \lambda(\overline{D}_{e_2}I\!I)(e_1,e_1) + 2\lambda I\!I(\overline{D}_{e_2}e_1, e_1) \\ &\qquad + 2\langle \overline{D}_{e_2}\overline{D}_{e_1}u_i, e_1\rangle + 2\langle \overline{D}_{e_1}u_i, \overline{D}_{e_2}e_1\rangle. \end{aligned}$$

Comme l'équation de Codazzi nous dit aussi que $(\overline{D}_{e_1}I\!I)(e_2,e_2) = (\overline{D}_{e_2}I\!I)(e_1,e_2)$, on a

$$\begin{aligned} 0 = e_2.\lambda + \lambda(\overline{D}_{e_1}I\!I)(e_2,e_1) + 2\langle \overline{R}_{e_1,e_2}u_i, e_1\rangle \\ +2\langle \overline{D}_{e_1}\overline{D}_{e_2}u_i, e_1\rangle + 2\langle \overline{D}_{[e_2,e_1]}u_i, e_1\rangle + 2\langle \overline{D}_{e_1}u_i, \overline{D}_{e_2}e_1\rangle. \end{aligned}$$

Or $I\!I(e_1,e_2) = 0$ sur C_i, et $\langle \overline{R}_{e_1,e_2}u_i, e_1\rangle = 0$ car u_i est parallèle à e_1 sur C_i. Donc

$$\begin{aligned} 0 = d\lambda(e_2) - \lambda I\!I(\overline{D}_{e_1}e_2, e_1) - \lambda I\!I(e_2, \overline{D}_{e_1}e_1) + 2e_1.\langle \overline{D}_{e_2}u_i, e_1\rangle \\ -2\langle \overline{D}_{e_2}u_i, \overline{D}_{e_1}e_1\rangle - 2\langle \overline{D}_{\overline{D}_{e_1}e_2}u_i, e_1\rangle + 2(\langle \overline{D}_{\overline{D}_{e_2}e_1}u_i, e_1\rangle + \langle \overline{D}_{e_1}u_i, \overline{D}_{e_2}e_1\rangle). \end{aligned}$$

Mais $\lambda I\!I + 2\delta^* u_i = 0$, et le dernier terme est donc $-\lambda I\!I(e_1, \overline{D}_{e_2}e_1) = 0$; de plus, $2(\delta^* u_i)(e_1,e_2) = 0$, si bien que $\langle \overline{D}_{e_2}u_i, e_1\rangle = -\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_2\rangle = -l\kappa_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i - \lambda k_2\kappa_i - 2e_1.(l\kappa_i) - 2\langle \overline{D}_{e_2}u_i, \kappa_i e_2\rangle + 2\kappa_i\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_1\rangle \\ &= d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i - \lambda k_2\kappa_i - 2\kappa_i(e_1.l) + \kappa_i\lambda k_2 + 2\kappa_i(e_1.l) \end{aligned}$$

et finalement

$$d\lambda(e_2) + \lambda\kappa_i = 0. \tag{6}$$

Il est facile de montrer (et classique) que

$$I\!I' = \lambda I\!I\!I + 2\delta^*_{I\!I}u_i - \overline{D}d\lambda$$

car $I\!I$ est défini avec la normale à Σ dirigée vers la partie convexe; donc

$$\begin{aligned} I\!I'(e_1,e_2) &= 2(\delta^*_{I\!I}u_i)(e_1,e_2) - \overline{D}d\lambda(e_1,e_2) \\ &= u_i.I\!I(e_1,e_2) + I\!I([e_1,u_i],e_2) \\ &\qquad + I\!I([e_2,u_i],e_1) - e_1.d\lambda(e_2) + d\lambda(\overline{D}_{e_1}e_2) \\ &= I\!I(\overline{D}_{e_1}u_i - \overline{D}_{u_i}e_1, e_2) \\ &\qquad + I\!I(\overline{D}_{e_2}u_i - \overline{D}_{u_i}e_2, e_1) + e_1.(\lambda\kappa_i) - d\lambda(\kappa_i e_1). \end{aligned}$$

Mais $I\!I(\overline{D}_{e_1}u_i - \overline{D}_{u_i}e_1, e_2) = 0$ car u_i est parallèle à e_1 sur C_i ; par ailleurs,

$$\begin{aligned} I\!I(\overline{D}_{e_2}u_i, e_1) &= \langle \overline{D}_{e_2}u_i, e_1\rangle = -\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_2\rangle \\ &= -l\kappa_i = \langle D_{u_i}e_2, e_1\rangle = I\!I(\overline{D}_{u_i}e_2, e_1) \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$I\!I'(e_1, e_2) = 0. \tag{7}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} I\!I'(e_1, e_1) &= \lambda + u_i.I\!I(e_1, e_1) + 2I\!I([e_1, u_i], e_1) - e_1.e_1.\lambda + (\overline{D}_{e_1}e_1).\lambda \\ &= \lambda + 2I\!I(\overline{D}_{e_1}u_i - \overline{D}_{u_i}e_1, e_1) - e_1.e_1.\lambda + \kappa_i d\lambda(e_2) \\ &= \lambda + 2\langle \overline{D}_{e_1}u_i, e_1\rangle - e_1.e_1.\lambda - \kappa_i^2\lambda \\ &= \lambda I\!I(e_1, e_1) + 2(\delta^* u_i)(e_1, e_1) - e_1.e_1.\lambda - \kappa_i^2\lambda \end{aligned}$$

si bien que, si on appelle θ la coordonnée sur C_i,

$$I\!I'(e_1, e_1) = -\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} - \kappa_i^2\lambda. \tag{8}$$

Mais $2\lambda = f'$ sur C_i, (7) et (8) montrent donc que

$$2B'e_1 = -\left(\kappa_i^2 f' + \frac{d^2 f'}{d\theta^2}\right) e_1$$

et donc, avec (6),

$$2\omega(e_1) = df'(J_0 B' e_1) = \kappa_i \left(\kappa_i^2 f'^2 + f'\frac{d^2 f'}{d\theta^2}\right).$$

En intégrant sur C_i, on trouve que

$$\int_{C_i} \omega = \kappa_i \int_{C_i} \kappa_i^2 - \left(\frac{df'}{d\theta}\right)^2 d\theta$$

C_i est de longueur $2\pi L_i$, avec $L_i \leqslant 1/\kappa_i$. Posons $\theta = L_i t$ (t varie donc dans $(0, 2\pi)$) :

$$\int_{C_i} \omega = \kappa_i \int_0^{2\pi} \kappa_i^2 f'^2 - \left(\frac{1}{L_i}\right)^2 \left(\frac{df'}{dt}\right)^2 dt$$

et $\kappa_i \leqslant 1/L_i$. Comme la longueur de C_i est laissée invariante par V_i,

$$\int_{C_i} f'(t)dt = 0$$

et la décomposition de la restriction $f'_{|C_i}$ en ses composantes de Fourier montre que

$$\int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt \leqslant \int_0^{2\pi} \left(\frac{df'}{dt}\right)^2 dt.$$

On trouve donc que

$$\int_{C_i} \omega \leqslant 0.$$

En combinant ceci avec (5), on voit que $\omega \equiv 0$ sur Σ, donc $d\omega = 0$, donc $\det(B') = 0$ par (4), et, comme $\mathrm{tr}(B^{-1}B') = 0$, $B' = 0$. La déformation V est donc triviale. $\square$

On peut maintenant en déduire la

Démonstration du lemme 4.1. — On se donne une déformation (C_t) de C qui engendre C' en 0. On déduit de (C_t) une déformation (g_t) de g parmi les plongements induisant une métrique à courbure K_0. Soit $v := (dg_t/dt)_{|t=0}$ le champ de vecteurs sur $g(\Sigma)$ associé à la variation infinitésimale C'. Soit B_i un bout de Σ ; en faisant agir une isométrie infinitésimale de H^3, on peut se ramener au cas où (C_t) ne change pas le bord à l'infini de B_i, qui est un cercle. En d'autres termes, au voisinage de B_i, on décompose v en $V_i + v_i$, où V_i est un champ de Killing qui, en X_0, est parallèle à l'axe de C_i.

$\rho_* v_i$ est alors un champ de vecteurs sur $(\rho_* \circ g)(\Sigma)$ qui s'annule sur le cercle de S^2 correspondant à B_i. De plus, $\rho_* v_i$ laisse $(\rho_* \circ g)(\Sigma)$ asymptote à l'image par ρ du plan ombilique à courbure K_0 s'appuyant sur l'image de $\partial_\infty B_i$, qui est une surface tangente à S^2. La composante radiale de $\rho_* v_i$ décroît donc comme le carré de la distance à $\rho(\partial_\infty B_i)$ sur $(\rho \circ g)(\Sigma)$, et donc comme la distance à S^2 dans B^3. De plus, la composante de $\rho_* v_i$ normale à la direction radiale est tangente à $\rho(\partial_\infty B_i)$ au bord. La transformation de Pogorelov agit sur $\rho_* v_i$ en multipliant la composante radiale par $1/(1-R^2)$; donc $\mathcal{P}'(v_i)$ est un champ de vecteurs dont la composante radiale et la composante tangente à $\rho(C_i)$ sont en $O(1)$, et dont la composante tangente à S^2 mais normale à $\rho(C_i)$ tend vers 0.

Par ailleurs, V_i est un champ de Killing, donc son image par $\mathcal{P}'$ aussi. En faisant la même analyse pour chacun des bouts de Σ, on voit que l'image de v par la transformation de Pogorelov du lemme 3.4 vérifie les hypothèses du lemme 4.2. On peut donc appliquer le lemme 4.2 à l'image $\mathcal{P}'(v)$ de v par $\mathcal{P}'$, et on trouve que $\mathcal{P}'(v)$ est triviale, donc v aussi. $\square$

De même, on a dans $S^3_{1,+}$:

LEMME 4.3. — *Soit* $(\tilde{K}_0, \tilde{g}) \in \tilde{\mathcal{I}}$ *avec* $\tilde{\Psi}((\tilde{K}_0, \tilde{g})) = (\tilde{K}_0, \tilde{C}) \in \mathbf{R}^*_- \times \mathcal{B}$ *et* $\tilde{\Phi}(\tilde{g}) = (\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})$. *Alors* $\tilde{\Pi}_* : T_{(\tilde{K}_0, \tilde{C})}\mathbf{R}^*_- \times \mathcal{B} \mapsto T_{(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma})}\mathcal{M}$ *est injective.*

La preuve est la même que pour le lemme précédent, car on peut se restreindre à une variation $\tilde{C}'$ qui est nulle sur la composante $\mathbf{R}^*_-$ de $\mathbf{R}^*_- \times \mathcal{B}$. Mais on se place maintenant — en utilisant la dualité de la section 3 — dans $S^3_{1,+}$, et on utilise le lemme 3.8 au lieu du lemme 3.5. La surface $\tilde{\rho}(\tilde{\Sigma})$ est dans l'extérieur de B^3.

5. Surfaces développables.

On donne dans cette section une description des surfaces convexes à courbure extrinsèque nulle (c'est-à-dire développables) dans H^3, dont le bord à l'infini est une réunion disjointe de cercles.

LEMME 5.1. — *Soit* Σ *une surface convexe développable complète* C^2 *plongée dans* H^3. *Alors* Σ *est incluse dans le bord de l'enveloppe convexe de son bord à l'infini* $C := \partial_\infty \Sigma \subset \partial_\infty H^3$.

Le bord de l'enveloppe convexe de C contient aussi d'autres composantes connexes, qui seront dans notre cas les plans s'appuyant sur chacun des cercles du bord à l'infini C.

Démonstration du lemme 5.1. — On sait (voir [Pog73]) que Σ se décompose en des régions totalement géodésiques, et en un fermé feuilleté par des géodésiques de H^3 sur lesquelles la seconde forme fondamentale de Σ s'annule. Ces géodésiques ont nécessairement leurs “extrémités” sur $\partial_\infty H^3$. On en déduit que Σ est dans l'enveloppe convexe de C.

Mais Σ est convexe, ce qui implique (comme on le voit en considérant les enveloppes convexes de domaines de Σ de plus en plus grands) que le domaine convexe qu'elle délimite contient l'enveloppe convexe de son bord à l'infini. □

Réciproquement, pour $C \in \mathcal{B}$ donné, le bord de son enveloppe convexe (privé des plans s'appuyant sur chacun des cercles) est une surface convexe réglée (sur le complémentaire d'un ouvert totalement géodésique), donc développable. On a donc une bijection $\Psi_{-1} : \mathcal{I}_{-1} \to \mathcal{B}$ entre les surfaces ouvertes convexes développables et $\mathcal{B}$. Comme on a aussi une application naturelle $\Phi_{-1} : \mathcal{I}_{-1} \to \mathcal{M}_0$ qui à un plongement associe sa métrique induite, on peut poser $\Pi_{-1} := \Phi_{-1} \circ (\Psi_{-1})^{-1}$.

6. Propreté.

On va étudier maintenant la propreté des opérateurs $\Pi, \tilde{\Pi}, \Pi_{-1}$.

LEMME 6.1. — *$\Pi : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ est propre.*

Démonstration. — Soit (b_n) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $(\sigma_n) := (\Pi(b_n))$ converge vers $\sigma \in \mathcal{M}$. On doit montrer que (b_n) admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est définie avec un quotient par $\mathrm{Isom}(H^3)$, on peut choisir une suite de plongements $\phi_n : \Sigma \to H^3$ telle que la métrique induite par ϕ_n soit σ_n et que le bord à l'infini de ϕ_n soit b_n, et on peut supposer qu'il existe $x \in \Sigma$ tel que $y = \phi_n(x)$ est indépendant de n. On peut alors mettre sur $\partial_\infty H^3$ la métrique obtenue en poussant celle de la sphère unité de $T_y H^3$ par l'application exponentielle. Chaque b_n est alors identifié à une famille de N cercles de S^2 bordant des disques disjoints.

Or l'espace E des cercles (de rayon éventuellement nul) de S^2 est compact, donc il existe une sous-suite (b'_n) de (b_n) qui converge (pour la structure naturelle sur $\mathcal{B}$ comme ouvert du produit de N copies de E) vers une limite b_∞. Il faut montrer que $b_\infty \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que b_∞ ne peut pas contenir de cercle de rayon nul ou de paire de cercles tangents.

On vérifie facilement que si l'un des cercles de b_∞ est réduit à un point, alors la limite σ des métriques induites a un cusp, et ne peut donc pas être ouverte. b_∞ ne peut pas non plus contenir deux cercles tangents, sans quoi, par convexité des ϕ_n, aucune boule de centre y et de rayon R sur (Σ, σ_n) ne pourrait séparer les bouts correspondants de Σ pour n assez grand, ce qui contredit encore l'existence de la limite σ. □

Notons que cette démonstration fonctionne exactement de la même manière pour Π_{-1}. On obtient ainsi le

LEMME 6.2. — *$\Pi_{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{M}_0$ est propre.*

Finalement, la preuve de la propreté de $\tilde{\Pi}$ est un peu plus délicate.

LEMME 6.3. — *$\tilde{\Pi} : \mathbf{R}^*_- \times \mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{M}}$ est propre.*

Démonstration. — On considère encore une suite $(\tilde{K}_n, b_n)$ d'éléments de $\mathbf{R}^*_- \times \mathcal{B}$, et on suppose que la suite $(\tilde{K}_n, \tilde{\sigma}_n) = (\tilde{\Pi}(\tilde{K}_n, b_n))$ converge vers une limite $(\tilde{K}, \tilde{\sigma})$. On note $(\tilde{\phi}_n)$ une suite de plongements de Σ dans S^3_1 qui induisent $\tilde{\sigma}_n$ — c'est-à-dire duaux de plongements dans H^3 dont la troisième forme fondamentale est $\tilde{\sigma}_n$ — et dont le bord à l'infini est b_n. On suppose enfin qu'il existe un point $x \in \Sigma$ tel que le 1-jet $(j^1\phi_n)(x)$ est constant.

On peut alors se restreindre à un disque D (pour $\tilde{\sigma}_n$) centré en x du revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ, et appliquer le théorème 5.6 (p. 287) de [Sch96], qui affirme que, si $(\tilde{\phi}_n)$ ne converge pas C^∞ vers un plongement isométrique d'une surface à courbure constante, alors il existe une sous-suite $(\tilde{\phi}'_n)$ de $(\tilde{\phi}_n)$, une géodésique maximale γ de D, et une géodésique Γ de S^3_1 telle que $(\tilde{\phi}_{n|\gamma})$ converge vers une isométrie sur Γ.

En prenant une suite de disques de plus en plus grands et en extrayant des sous-suites, on voit que, toujours si $(\tilde{\phi}_n)$ ne converge pas C^∞ vers un plongement isométrique, alors il existe une géodésique γ maximale de $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma})$ et une géodésique Γ de S^3_1 telles que (quitte à extraire une sous-suite) $(\tilde{\phi}_{n|\gamma})$ converge vers une isométrie sur Γ. En revenant de $\tilde{\Sigma}$ à Σ, on trouve qu'une géodésique de $(\Sigma, \tilde{\sigma})$ devrait être de longueur 2π — car c'est la longueur de toutes les géodésiques de type espace de S^3_1 — ce qui est exclu.

Donc une sous-suite de $(\tilde{\phi}_n)$ doit converger C^∞ sur les compacts vers un plongement de Σ dans S^3_1 ayant un bord à l'infini b_∞ ; il existe donc une sous-suite de (b_n) qui converge vers b_∞, ce qu'on voulait montrer. $\square$

7. Conclusions.

Donnons la preuve du lemme A. On note que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{M}$ sont deux variétés de même dimension $3N-6$, et que $\Pi : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ est un opérateur localement injectif (lemme 4.1). De plus, il est propre d'après le lemme 6.1. Π est donc un homéomorphisme local de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}$.

D'après la description de $\pi_1(\mathcal{M})$ et de $\pi_1(\mathcal{B})$ qui se trouve dans l'introduction, on voit facilement que chaque élément de $\pi_1(\mathcal{M})$ se relève en un élément de $\pi_1(\mathcal{B})$; ainsi, $\Pi_* : \pi_1(\mathcal{B}) \to \pi_1(\mathcal{M})$ est surjectif, et Π est donc un homéomorphisme global de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}$.

La démonstration du lemme B se fait de la même manière, à ceci près que les espaces en jeu ont une dimension de plus à cause de la présence de $\tilde{K}_0$: l'injectivité locale de $\tilde{\Pi}$ vient du lemme 4.3, sa propreté du lemme 6.3. $\tilde{\mathcal{M}}$ est encore connexe, car si $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma}_0), (\tilde{K}_1, \tilde{\sigma}_1) \in \tilde{\mathcal{M}}$, on peut leur associer $\sigma_0 := \tilde{K}_0.\tilde{\sigma}_0$, $\sigma_1 := \tilde{K}_1.\tilde{\sigma}_1 \in \mathcal{M}_0$, et, comme $\mathcal{M}_0$ est connexe, il existe un chemin σ_t joignant σ_0 à σ_1 dans $\mathcal{M}_0$. Puis on note L_0 la longueur de la plus courte géodésique des σ_t pour

$t \in [0,1]$, et on définit un chemin qui transforme d'abord $(\tilde{K}_0, \tilde{\sigma}_0)$ en $((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2\tilde{K}_0\tilde{\sigma}_0) = ((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2.\sigma_0)$ par homothétie, puis en $((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2.\sigma_1) = ((L_0/4\pi)^2, (4\pi/L_0)^2\tilde{K}_1\tilde{\sigma}_1)$ en suivant le chemin homothétique de (σ_t), enfin en $(\tilde{K}_1, \tilde{\sigma}_1)$ par homothétie à nouveau. Le choix du coefficient d'homothétie nous assure qu'on reste ainsi dans $\tilde{\mathcal{M}}$.

Ainsi, $\tilde{\Pi}$ est un revêtement de $\tilde{\mathcal{M}}$ par $\mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B}$. Comme pour Π, chaque élément de $\pi_1(\tilde{\mathcal{M}})$ se relève en un élément de $\pi_1(\mathbf{R}_-^* \times \mathcal{B})$, si bien que $\tilde{\Pi}_*$ est surjectif, et $\tilde{\Pi}$ est un homéomorphisme global.

La preuve du théorème C est directe : d'après le lemme 5.1, chaque réunion de N cercles de S^2 bordant des disques disjoints est le bord à l'infini d'une unique surface convexe développable (qui est une composante connexe du bord de l'enveloppe convexe des N cercles). Ceci définit (cf la section 5) une application $\Pi_{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{M}_0$ qui est propre d'après le lemme 6.2.

Identifions tous les espaces $\mathcal{M}$ pour les différentes valeurs de $K_0 \in]-1,0[$, et $\mathcal{M}_0$, qui ne diffèrent que par une homothétie. Π_{-1} peut se voir comme la limite (quand $K_0 \to -1$) de la famille des homéomorphismes $\Pi_{K_0} : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$. On en déduit que $\partial(\Pi_{-1}(\mathcal{B}))$ est, dans $\mathcal{M}$, l'ensemble des limites de suites $\Pi_{-1}(b_n)$, où (b_n) ne converge pas dans $\mathcal{B}$. Comme Π_{-1} est propre, $\partial\Pi_{-1}(\mathcal{B}) = \varnothing$, ce qui implique que Π_{-1} est surjectif.

Donnons enfin la preuve du théorème D. Soit $K < K'$. D'après le lemme 2.2, $\Sigma_{K'}$ est à l'extérieur (i.e. reste du coté concave) de Σ_K en dehors d'un compact. Pour montrer que $\Sigma_K \cap \Sigma_{K'} = \varnothing$, on raisonne comme dans la preuve du lemme 2.3 : on considère les surfaces Σ_t à distance t de $\Sigma_{K'}$ à l'extérieur de $\Sigma_{K'}$, et on note qu'elles ont une courbure $K_t > K'$. Si $\Sigma_K \cap \Sigma_{K'} \neq \varnothing$, il existerait un plus grand t tel que $\Sigma_t \cap \Sigma_K \neq \varnothing$. Alors, au point de contact de Σ_t et de Σ_K, Σ_K serait à l'intérieur de Σ_t alors que $K < K_t$, c'est impossible.

Par ailleurs, quand $K \to -1$, $\Sigma_K \to \Sigma_{-1}$; et, si on fixe $K_0 \in]-1,0[$ et qu'on note encore Σ_t les surfaces à distance t de Σ_{K_0} du côté extérieur, on voit encore (comme dans la preuve du lemme 2.3) que, pour K assez proche de 0, $\Sigma_K \cap \Sigma_t = \varnothing$, si bien que $\lim_{K \to 0^-} d(\Sigma_K, \Sigma_{K_0}) = \infty$. Les $(\Sigma_K)_{K \in]-1,0[}$ feuilletent donc Ω_B.

Soit $m \in \tilde{\Omega}_B$. Par définition, m est dual d'un plan orienté p de H^3 qui laisse $H^3 \setminus \Omega_B$ sur son côté opposé à sa normale (orientée). Comme les $(\Sigma_K)_{K \in]-1,0[}$ feuilletent Ω_B et sont convexes, p est nécessairement tangent à une unique Σ_K ; m est donc dans une unique $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$ (pour $\tilde{K} = K/(K+1)$).

Réciproquement, si p est un plan orienté de H^2 tangent à une surface Σ_K, alors, par convexité de Σ_K, p ne rencontre pas l'intérieur de Σ_K, et donc pas non plus l'intérieur de Σ_{-1}, et donc le point dual de p est dans $\tilde{\Omega}_B$. Ainsi, les $(\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}})_{\tilde{K}\in]-\infty,0[}$ feuilletent $\tilde{\Omega}_B$.

Notons que $\tilde{\Omega}_B$ a une structure géométrique simple. Plaçons-nous pour la comprendre dans le modèle projectif de $S^3_{1,+}$ (section 3). $S^3_{1,+}$ correspond à l'extérieur de la boule $B(0,1)$ de rayon 1 de $\mathbf{R}^3$, et B à la réunion de N cercles $(C_i)_{i\in\mathbf{N}_N}$ de $\partial B(0,1)$ bordant des disques disjoints. Pour $i \in \mathbf{N}_N$, notons T_i le cône (ou le cylindre) convexe bordé par la réunion des droites de $\mathbf{R}^3$ orthogonales à C_i et tangentes à $\partial B(0,1)$. $T_i \cap (\mathbf{R}^3 \setminus B(0,1))$ a deux composantes connexes dont une, soit T'_i, contient les $C_j, j \neq i$ dans son adhérence. On peut alors vérifier facilement que $\tilde{\Omega}_B$ correspond, dans le modèle projectif, à l'intersection des $T'_i, i \in \mathbf{N}_N$.

Dans $\partial\tilde{\Omega}_B$, les intersections deux à deux des $\partial T'_i$ sont des arcs de cercles dont la réunion forme un graphe qui est dual de Σ_{-1} (Σ_{-1} n'est pas strictement convexe mais au contraire réglée, c'est pourquoi son dual est de dimension 1 seulement).

Le théorème D montre que, pour un bord fixé, les (Σ_K) et les $(\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}})$ "divergent" en partant à l'infini quand $K \to 0$ (donc quand $\tilde{K} \to 0$). Ceci correspond au fait qu'il existe seulement deux catégories de surfaces complètes plates dans H^3, les horosphères et les tubes à distance constante d'une géodésique. Comme une surface convexe de S^3_1 est plate si et seulement si sa surface duale l'est (car $\tilde{K} = K/(K+1)$), ce résultat se transpose dans S^3_1.

Si on prend une famille $(\sigma_K)_{K\in]-1,0[}$ de métriques complètes à courbure constante K sur une surface Σ difféomorphe à S^2 privée de N points, et si on suppose que (σ_K) converge sur les compacts vers une métrique σ_0 complète plate quand $K \to 0$, alors nécessairement $N = 1$ (et (Σ, σ_0) est le plan euclidien) ou bien $N = 2$ (et (Σ, σ_0) est un cylindre euclidien).

D'après le théorème A, il existe une famille $(\Sigma_K)_{K\in]-1,0[}$ de surfaces de H^3 dont les bords à l'infini (B_K) sont composés de cercles. Si $N = 1$, la situation est transparente. Si $N = 2$, les (B_K) ne peuvent pas être fixes, mais peuvent (si on les normalise par l'action de $\mathrm{Isom}(H^3)$) converger vers deux points p_+, p_-. On vérifie alors assez facilement que les (Σ_K) convergent sur les compacts vers une surface Σ_0 isométrique à (Σ, σ_0) et dont le bord à l'infini est constitué de p_- et p_+ (Σ_0 est un tube à distance constante de la géodésique d'extrémités p_- et p_+).

Par dualité, la même situation se produit aussi dans S^3_1 ; en d'autre termes, si on note $I\!I\!I_K$ la troisième forme fondamentale de Σ_K, alors $(I\!I\!I_K)$ converge quand $K \to 0$ vers une métrique $I\!I\!I_0$ plate, et les surfaces $\tilde{\Sigma}_{\tilde{K}}$ duales des Σ_K convergent sur les compacts vers la surface $\tilde{\Sigma}_0$ duale de Σ_0. La plus courte géodésique fermée de $(\Sigma, I\!I\!I_0)$ est de longueur strictement supérieure à 2π.

BIBLIOGRAPHIE

[CD95] R. CHARNEY and M. DAVIS, The polar dual of a convex polyhedral set in hyperbolic space, Michigan Math. J., 42 (1995), 479–510.

[Lab89] F. LABOURIE, Immersions isométriques elliptiques et courbes pseudo-holomorphes, Journal of Differential Geometry, 30 (1989), 395–424.

[LS96] F. LABOURIE and J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante, Prépublication 96-05, Université de Paris-Sud, 1996.

[Pog73] A. V. POGORELOV, Extrinsic Geometry of Convex Surfaces. American Mathematical Society, 1973, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 35.

[RH93] I. RIVIN and C. D. HODGSON A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, Invent. Math., 111 (1993), 77–111.

[RS94] H. ROSENBERG and J. SPRUCK, On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space, Journal of Differential Geometry, 40 (1994), 379–409.

[Sch] J.-M. SCHLENKER, Métriques sur les polyèdres hyperboliques convexes, Prépublication no 97-18, Université de Paris-Sud, à paraître, Journal of Differential Geometry.

[Sch96] J.-M. SCHLENKER, Surfaces convexes dans des espaces lorentziens à courbure constante, Comm. in Analysis and Geometry, 4 (1996), 285–331.

[Spi75] M. SPIVAK, A comprehensive introduction to geometry, Vol. I-V, publish or perish, 1970-1975.

Manuscrit reçu le 7 avril 1997,
accepté le 23 septembre 1997.

Jean-Marc SCHLENKER,
Université Paris-Sud
Mathématiques
Topologie et Dynamique (URA 1165 CNRS)
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).