ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRÉDÉRIC HAGLUND

Réseaux de Coxeter-Davis et commensurateurs

Annales de l'institut Fourier, tome 48, n° 3 (1998), p. 649-666

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_649_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 3 (1998), 649–666

RÉSEAUX DE COXETER-DAVIS ET COMMENSURATEURS

par Frédéric HAGLUND

Introduction.

Si Γ est un sous-groupe d'un groupe G, le *commensurateur* de Γ dans G est le sous-groupe de G formé des $g \in G$ tels que $\Gamma \cap g \cdot \Gamma \cdot g^{-1}$ est d'indice fini dans Γ et $g \cdot \Gamma \cdot g^{-1}$. Si G est un groupe de Lie réel semi-simple (connexe, de centre fini et sans facteur compact) et Γ un réseau de G (*i.e.* un sous-groupe de G discret et de covolume fini), Margulis a montré que Γ est arithmétique si et seulement si son commensurateur dans G est dense dans G (*cf.* [13], [17]). Bass et Kulkarni dans le cas des arbres bihomogènes, puis Liu dans le cas d'un arbre quelconque revêtant un graphe fini, ont montré que le commensurateur de tout réseau cocompact est dense (*cf.* [2] et [12]).

Le but de cet article est de construire de nombreux complexes simpliciaux de dimension 2, avec un groupe d'automorphismes localement compact non discret, et muni d'un sous-groupe discret cocompact (un groupe de Coxeter) dont le commensurateur a la même propriété de densité que dans les théories de Margulis, Bass-Kulkarni et Liu.

Notre méthode fournit par exemple des réseaux arithmétiques au sens de Margulis sur des immeubles de Tits hyperboliques. Elle pourrait se combiner avec le théorème de superrigidité des commensurateurs de Burger-Mozes dans les espaces CAT(−1) pour donner des résultats de rigidité des réseaux de Coxeter-Davis de ces espaces (*cf.* [5], et aussi [13], [8]).

Mots-clés : Complexes polygonaux – Espaces CAT(0) – Groupes de Coxeter – Commensurateurs.
Classification math. : 20Fxx – 20F55 – 51E24 – 51F15 – 51K10.

Dans tout l'article, k désigne un entier ≥ 4 et L un graphe fini (sans boucle ni arête double), tels que ou bien $k \geq 6$, ou bien L n'a pas de circuit de longueur 3. Nous appelons (k, L)-*complexe* un complexe polygonal X (*i.e.* un complexe cellulaire de dimension 2 dont les applications d'attachement sont localement injectives, *cf.* [1]), simplement connexe, dont chaque polygone a k côtés et chaque sommet un link isomorphe à L. Nous munissons $\mathrm{Aut}(X)$ de la topologie compacte ouverte, pour laquelle ce groupe est localement compact, totalement discontinu, éventuellement discret. Ces complexes et leurs symétries ont étés étudiés indépendamment par divers auteurs (*cf.* en particulier [1], [3], [4], [10], [11],...).

Si k est pair, soit $W(k, L)$ le groupe de Coxeter dont la matrice de Coxeter est la matrice d'adjacence du graphe L, où les 1 et les 0 ont étés remplacés par des $\frac{1}{2}k$ et des ∞ respectivement.

THÉORÈME. — *Il existe un (k, L)-complexe naturel $A(k, L)$, muni d'une action fidèle naturelle de $W(k, L)$, vérifiant les propriétés :*

1) *$A(k, L)$ possède une métrique naturelle* CAT(0), *et même, si $k \geq 8$ ou si L n'a pas de circuit de longueur* 3, *une métrique* CAT(-1).

2) *$W(k, L)$ est un réseau uniforme de $A(k, L)$, i.e. un sous-groupe discret cocompact de* $\mathrm{Aut}(A(k, L))$.

3) $\mathrm{Aut}(A(k, L))$ *est discret si et seulement si le seul automorphisme du graphe L fixant toute l'étoile d'un sommet est l'identité de L.*

4) *Si L n'a pas de circuit de longueur* 3 *et si k est divisible par* 4, *le commensurateur de $W(k, L)$ dans* $\mathrm{Aut}(A(k, L))$ *est dense dans* $\mathrm{Aut}(A(k, L))$.

Nous construisons $A(k, L)$ à la partie A, par les techniques de M. Davis : le complexe $A(k, L)$ est la réalisation géométrique «propre» du groupe de Coxeter $W(k, L)$, déjà introduite et étudiée par Davis et Moussong (*cf.* [6], [7], [14]). Nous montrons la densité du commensurateur à la partie B, en utilisant un résultat de convexité combinatoire établi à la partie C.

Pour $m \geq 2$, notons $W_{m,k}$ le groupe de Coxeter engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un k-gone régulier d'angle au sommet π/m (dans le plan euclidien si $m = 2$ et $k = 4$, hyperbolique sinon). Si L est un immeuble de dimension 1 dont les appartements sont des circuits de longueur $2m$, alors $A(k, L)$ est la réalisation géométrique au sens de Davis-Moussong d'un immeuble de type $W_{m,k}$, dont les chambres sont les

polygones de $A(k, L)$ et les appartements sont isomorphes au pavage plan fait de k-gones réguliers d'angle au sommet π/m. Si de plus L est classique et épais (par exemple le plan projectif sur un corps fini), il possède des automorphismes non triviaux fixant l'étoile d'un sommet, et nous pouvons appliquer le théorème :

COROLLAIRE. — *Pour tout m-gone généralisé fini, classique et épais L et tout entier $k \geq 4$ divisible par 4, il existe un immeuble de type $W_{m,k}$, tel que le link de chaque sommet est isomorphe à L, dont le groupe d'automorphismes est non discret et possède un réseau uniforme de commensurateur dense.*

Je remercie beaucoup Frédéric Paulin, qui m'a incité à étudier les commensurateurs des réseaux d'un complexe polygonal, et m'a grandement aidé à rédiger le présent article.

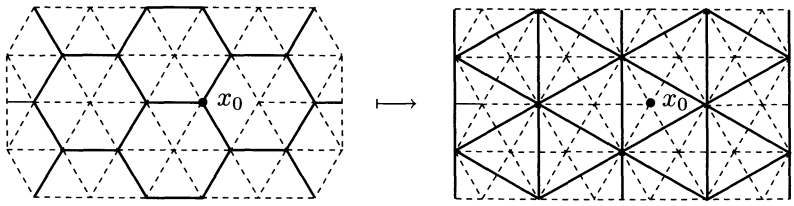
A. La construction de Davis (lorsque k est pair).

Commençons par munir tout (k, L)-complexe X d'une métrique CAT(0). Si on rend chaque arête de X isométrique au segment unité, et chaque polygone de X isométrique au polygone euclidien régulier ayant k côtés de longueur 1, alors le link métrique de chaque sommet de X a une systole supérieure à 2π (car ou $k \geq 6$, ou L est sans cycle de longueur 3). Donc la métrique de longueur associée à la métrique plate par morceaux sur X est localement CAT(0), donc également globalement, X étant simplement connexe (*cf.* [15] pour les généralités sur les polyèdres métriques à courbure négative ou nulle). Dans la suite, c'est toujours cette métrique localement plate et convexe que nous considérerons sur les (k, L)-complexes. Cependant, si $k \geq 7$ ou si $k \geq 5$ et L n'a pas de circuit de longueur 3, le plan hyperbolique contient des k-gones réguliers, et d'angle au sommet $2\pi/m$, où m représente la longueur d'un plus court circuit de L (si L ne contient aucun circuit, on pose $m = 4$) : la métrique de longueur associée sur X est alors CAT(-1).

Les données locales k et L étant fixées, un premier problème est la construction d'un (k, L)-complexe possédant un réseau uniforme, c'est-à-dire un groupe d'automorphismes discret et cocompact.

Au lieu de considérer un (k, L)-complexe comme réunion de k-gones, adoptons le point de vue dual. Autrement dit, prenons la première

subdivision barycentrique X', et regroupons tous les triangles de X' contenant un même sommet x_0 de X en un *bloc* (dit de centre x_0).



Nous pouvons alors considérer X' (ou X) comme réunion de ses blocs, avec plusieurs avantages sur le point de vue polygonal. D'abord, la régularité locale est conservée : de même que tous les polygones de X sont isométriques, de même tous les blocs de X' sont isomorphes (ce sont des copies du cône sur la première subdivision barycentrique de L). La combinatoire des blocs est aussi simple que celle des polygones : tandis que deux polygones distincts se touchent en un sommet ou une arête, deux blocs distincts se touchent au centre d'un polygone ou le long d'une *facette* (définie comme la réunion des segments géodésiques joignant le milieu d'une arête fixée de X au centre de chacun des polygones la contenant). En revanche, les blocs ont un meilleur comportement global du point de vue de la convexité, comme en témoignera la partie C. Enfin, si nous considérons l'exemple des pavages plans réguliers lorsque k est pair (*cf.* figure ci-dessus), nous voyons que le groupe W engendré par les réflexions (hyperboliques ou euclidiennes) par rapport aux droites prolongeant les facettes d'un bloc B fixé est un groupe de Coxeter préservant le pavage, et simplement transitif sur les blocs. Si deux facettes d'un même bloc sont distinctes mais adjacentes, elles font un angle égal à $2\pi/k$. On constate également qu'on obtient toutes les symétries du pavage si on rajoute à W les isométries du plan préservant B (ces dernières isométries normalisant W). Ces considérations suggèrent la construction suivante.

A.1. Le groupe de Coxeter $W(k, L)$.

Dans tout le reste de la partie A, l'entier k est supposé pair.

Prenons la première subdivision barycentrique de L, donnons aux sommets de L le poids 1 et aux milieux des arêtes de L le poids 2. Puis formons le cône B de base L et de sommet un point x_0, auquel nous donnons le poids 0. Nous appelons *bloc (abstrait)* le complexe 2-dimensionnel pondéré

ainsi obtenu. Notons que si X est un quelconque (k, L)-complexe, tous les blocs de X' sont isomorphes à B (par une application préservant les poids). Appelons *facette de* B l'étoile dans L' d'un sommet de L (*i.e.* un sommet de poids 1 de L') ; ainsi, L' (le « bord » de B) est réunion des facettes de B.

Pour chaque facette ϕ de B, considérons un symbole générateur s_ϕ. Imposons la relation $(s_\phi \cdot s_{\phi'})^{\frac{k}{2}} = 1$, si les deux facettes distinctes ϕ et ϕ' se touchent, ainsi que les relations $(s_\phi)^2 = 1$ pour chaque facette ϕ de B. Le groupe de Coxeter ainsi défini est $W(k, L)$. Suivant M. Davis, on peut maintenant construire « l'appartement de $W(k, L)$ sur B » (*cf* [6]).

A.2 Le (k, L)-complexe $A(k, L)$.

Munissons $W(k, L)$ de la topologie discrète, et formons le produit $W(k, L) \times B$. Sur cette réunion disjointe de copies de B, définissons les relations de ϕ-adjacence (pour ϕ une facette quelconque de B) :

> (w, x) et (w', x') sont ϕ-adjacents si et seulement si $x' = x \in \phi$ et $w' = w \cdot s_\phi$.

Dans toute la suite, nous noterons $A(k, L)$ le quotient de $W(k, L) \times B$ par la relation d'équivalence engendrée par les ϕ-adjacences, et $[w, x]$ l'image de (w, x) dans $A(k, L)$. Puisque $W(k, L)$ agit à gauche sur $W(k, L) \times B$, et que les ϕ-adjacences font intervenir des multiplications à droite, l'action passe à $A(k, L)$: nous l'appellerons l'action naturelle de $W(k, L)$ sur $A(k, L)$ (pour cette construction et ces notations, *cf.* [6]).

A.2.1. Proposition .

1) *$A(k, L)$ est (la première subdivision barycentrique d') un (k, L)-complexe.*

2) *L'action naturelle de $W(k, L)$ sur $A(k, L)$ est simplement transitive sur les blocs.*

3) *Le groupe fini $G = \mathrm{Aut}(L)$ a une action naturelle sur $A(k, L)$, qui normalise celle de $W(k, L)$. Le normalisateur de $W(k, L)$ dans $\mathrm{Aut}(A(k, L))$ est le produit semi-direct de $W(k, L)$ et de G.*

Démonstration. — Notons $p : W(k, L) \times B \longrightarrow A(k, L)$ la projection canonique.

1) Par définition des ϕ-adjacences, deux couples (w, x) et (w', x') sont identifiés dans $A(k, L)$ si et seulement si $x = x'$ et il existe des facettes $\phi_1, \ldots, \phi_n$ de B telles que $x \in \phi_1 \cap \ldots \cap \phi_n$ et $w' = w \cdot s_{\phi_1} \cdots s_{\phi_n}$.

Donc la restriction de p à chaque bloc de $\{w\} \times B$ est injective : on peut parler des blocs de $A(k,L)$ (ce sont les $p(\{w\} \times B)$), ainsi que de ses facettes, de ses sommets (de poids 0,1 ou 2). Deux blocs distincts ont des intérieurs disjoints ; idem pour les facettes.

Une facette $p(\{w\} \times \phi)$ de $A(k,L)$ est contenue dans au plus deux blocs : $p(\{w\} \times B)$ et $p(\{w \cdot s_\phi\} \times B)$.

Mais, dans un système de Coxeter, les générateurs sont effectivement d'ordre 2 (autrement dit non triviaux) : donc toute facette de $A(k,L)$ est contenue dans exactement deux blocs. Il en résulte que $A(k,L)$ est la première subdivision barycentrique d'un complexe polygonal (dont tous les sommets ont un link isomorphe à L).

Si P est un polygone de $A(k,L)$ de centre $\xi_2 = [w, x_2]$, le nombre de blocs de $A(k,L)$ contenant ξ_2 (*i.e.* : le nombre de sommets de P) est l'ordre du sous-groupe diédral de $W(k,L)$ engendré par s_ϕ et $s_{\phi'}$, où ϕ et ϕ' sont les deux facettes de B se touchant en x_2. Or, dans un système de Coxeter, l'ordre du produit $s.t$ est effectivement le nombre $m_{s,t}$ prescrit dans la présentation (et non un diviseur strict). Donc P a k côtés.

Il reste à montrer que $A(k,L)$ est simplement connexe. D'après un résultat de Davis [6], th. 10.1, il suffit de montrer que si $s_{\phi_1}, \ldots, s_{\phi_n}$ engendrent un sous-groupe fini de $W(k,L)$, alors $\phi_1 \cup \ldots \cup \phi_n$ est connexe. Or, si $\phi_1 \cup \ldots \cup \phi_n$ n'est pas connexe, il faut que deux des facettes ϕ_i et ϕ_j soient disjointes : mais alors $s_{\phi_i} \cdot s_{\phi_j}$ est d'ordre infini.

Le (k,L)-complexe $A(k,L)$ est en fait la réalisation géométrique «propre» de $W(k,L)$ définie par Davis (et Moussong, pour la partie métrique CAT(0)), *cf.* [6], [7] (et [14]).

2) L'action de $W(k,L)$ est simplement transitive sur les blocs de $A(k,L)$, par définition de ceux-ci.

On peut remarquer que le stabilisateur de la facette $p(\{w\} \times \phi)$ est le groupe d'ordre deux engendré par la réflexion $w \cdot s_\phi \cdot w^{-1}$, et celui du polygone de centre $[w, x_2]$ est le groupe diédral d'ordre k engendré par $w \cdot s_\phi \cdot w^{-1}$ et $w \cdot s_{\phi'} \cdot w^{-1}$ (où ϕ et ϕ' sont les deux facettes de B se touchant en x_2).

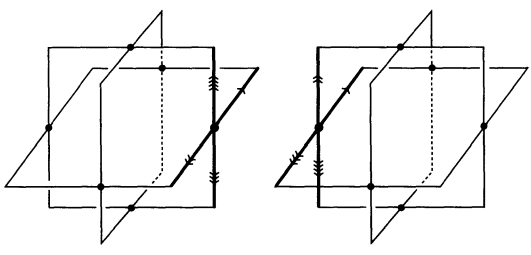
3) Tout élément f de $G = \mathrm{Aut}(L)$ a un unique prolongement conique à B (encore noté f), et induit un automorphisme de $(W(k,L), S)$ — toujours noté f — par la formule $f(s_\phi) = s_{f(\phi)}$. L'action $f((w,x)) = (f(w), f(x))$ passe à $A(k,L)$. En particulier $f([1,x]) = [1, f(x)]$, donc f fixe le bloc fondamental $p(\{1\} \times B)$, noté B dans la suite.

Un calcul immédiat montre que, si f et $w \in W(k,L)$ sont considérés comme des automorphismes de $A(k,L)$, on a $f \circ w \circ f^{-1} = f(w)$.

Réciproquement, soit φ un automorphisme de $A(k,L)$ normalisant $W(k,L)$. Le bloc $\varphi(B)$ est l'image de B par un unique $w \in W(k,L)$ (*cf.* 2). Notons φ_0 l'application $w^{-1} \circ \varphi$, qui fixe le bloc fondamental, et f l'automorphisme de B (et donc de L) induit par φ_0. L'automorphisme $\varepsilon = f^{-1} \circ \varphi_0$ normalise $W(k,L)$ en fixant B point par point. En utilisant 2) et le fait que toute facette est contenue dans exactement deux blocs, on en déduit facilement que $\varepsilon = 1$, donc que φ est dans le produit semi-direct de $W(k,L)$ et de G. □

A.2.2. *Remarques.* — Tous les (k,L)-complexes X ne sont pas nécessairement isomorphes à $A(k,L)$, même s'ils sont réguliers, car, pour certains links, on peut rencontrer des obstructions « locales ».

Par exemple, les deux blocs de centres les extrémités d'une arête a de X ont en commun la facette transverse à a ; si $X = A(k,L)$, leur réunion est un complexe V isomorphe au double du bloc B le long d'une de ses facettes. Or, pour la plupart des links L, il existe un complexe V' fait de deux copies de B ayant exactement une facette ϕ_0 en commun, mais qui n'est pas un double de B le long de ϕ_0 : il suffit que L possède une facette ϕ_0 et un automorphisme f de ϕ_0 ne se prolongeant pas à L, le recollement de B avec lui-même par f est alors un tel V'. Si L est le 1-squelette de l'octaèdre à $2n$ sommets, $n \geq 3$, on peut prendre pour f un $(2n-3)$-cycle de l'ensemble des $2n-2$ arêtes adjacentes à un sommet :



Pour construire un (k,L)-complexe non isomorphe à $A(k,L)$, il suffit d'assembler convenablement des copies de V', ce qui est possible pour des raisons de convexité (*cf.* [1]). Si on veut un exemple admettant un réseau uniforme, on prend k divisible par 4, on forme un système de Coxeter $(W(k,V'),S)$ avec un générateur pour chaque facette du bord de V' (c'est-à-dire distincte de ϕ_0), et comme matrice de Coxeter :

- $m_{\phi,\phi} = 1$;
- $m_{\phi,\phi'} = \infty$ si ϕ et ϕ' sont des facettes disjointes de $\partial V'$;

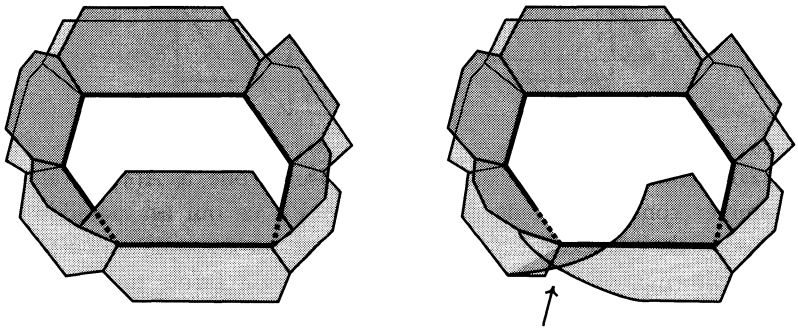
et, sinon :

- $m_{\phi,\phi'} = \frac{1}{2}k$ si ϕ et ϕ' sont dans un même bloc de V' ;
- $m_{\phi,\phi'} = \frac{1}{4}k$ si ϕ et ϕ' sont dans deux blocs distincts de V'.

La construction de Davis avec $W(k, V')$ et V' fournit $A(k, V') = W(k, V') \times V'/_{\sim}$, un (k, L)-complexe $W(k, V')$-homogène, non isomorphe à $A(k, L)$.

Même si les voisinages réguliers d'arêtes présentés ci-dessus sont tous isomorphes, il peut surgir des différences entre les voisinages réguliers de polygone, c'est-à-dire les réunions des blocs de X touchant un polygone P. C'est le cas lorsque L est un graphe complet ; les (k, L)-complexes sont alors parmi les premiers exemples d'espaces hyperboliques généralisés introduits par M. Gromov (*cf.* [9], p 389).

Par exemple, si L est le graphe complet à quatre sommets, il y a exactement deux classes d'isomorphisme de voisinages réguliers de polygone (voir figure ci-dessous). La première classe est celle apparaissant dans $A(k, L)$, et nous avons construit dans [11] l'unique complexe $M(k, L)$ dont tous les polygones ont leur voisinage dans la deuxième classe. Il se trouve que $M(k, L)$ est aussi homogène que $A(k, L)$. Pour $k = 6$, $A(k, L)$ est réunion de plans euclidiens (pavés par des hexagones réguliers), donc n'est pas hyperbolique au sens de Gromov, alors que $M(k, L)$ admet un réseau uniforme et ne contient pas un seul plat, donc est hyperbolique. Quoique tous deux hyperboliques, $A(k, L)$ et $M(k, L)$ continuent à n'être pas quasi-isométriques pour $k > 6$.



A.3. Rigidité de L et de $A(k, L)$.

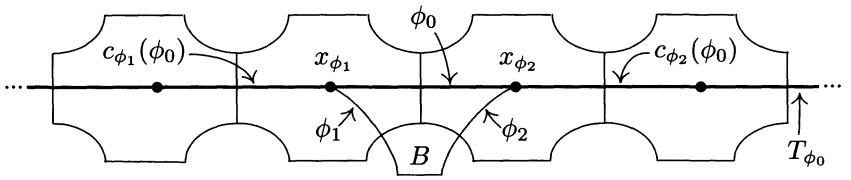
Si ϕ est une facette de L, notons $\mathrm{Aut}_\phi(L)$ le stabilisateur de ϕ dans $\mathrm{Aut}(L)$; et ρ_ϕ le morphisme de restriction de $\mathrm{Aut}_\phi(L)$ dans $\mathrm{Aut}(\phi)$. Nous disons que L est *rigide* si ρ_ϕ est injective quelle que soit la facette ϕ, et que $A(k, L)$ est *rigide* si $\mathrm{Aut}(A(k, L))$ est discret. Les rigidités locales et globales sont équivalentes :

A.3.1. PROPOSITION. — *Si L est rigide, alors tout isomorphisme entre (k, L)-complexes est complètement déterminé par sa restriction à un bloc. En particulier, $A(k, L)$ est rigide, son groupe d'automorphismes est le produit semi-direct de $W(k, L)$ et de $\mathrm{Aut}(L)$.*

Réciproquement, si L contient une facette ϕ_0 telle que ρ_{ϕ_0} n'est pas injective, alors $A(k, L)$ n'est pas discret.

Démonstration. — Seule la deuxième partie n'est pas immédiate. Supposons donc que ϕ_0 est une facette telle que ρ_{ϕ_0} n'est pas injective, et soit $f \in \mathrm{Aut}(L)$ tel que $f \neq \mathrm{id}_L$, mais $f_{|\phi_0} = \mathrm{id}_{\phi_0}$; nous noterons encore f l'automorphisme induit sur $W(k, L)$ et $A(k, L)$. Nous allons montrer que f vaut l'identité sur un arbre T, réunion de facettes de $A(k, L)$, séparant $A(k, L)$ en deux composantes connexes.

Pour simplifier, nous supposons k divisible par 4. Pour chaque facette ϕ touchant ϕ_0, $\phi \neq \phi_0$, soient x_ϕ l'unique point de $\phi \cap \phi_0$, et c_ϕ l'élément $(s_\phi \cdot s_{\phi_0})^{\frac{k}{2}}$ (qui induit une symétrie centrale sur le polygone de $A(k, L)$ de centre x_ϕ). Notons F_{ϕ_0} le sous-groupe de $W(k, L)$ engendré par les c_ϕ, et considérons la réunion T_{ϕ_0} des facettes de $A(k, L)$ de la forme $w \cdot \phi_0$, avec $w \in F_{\phi_0}$. Comme f vaut l'identité sur ϕ_0, on a $f(s_\phi) = s_\phi$ pour toute facette ϕ touchant ϕ_0 ; donc chaque c_ϕ est invariant par f, et f vaut l'identité sur T_{ϕ_0}.



Nous pouvons considérer :

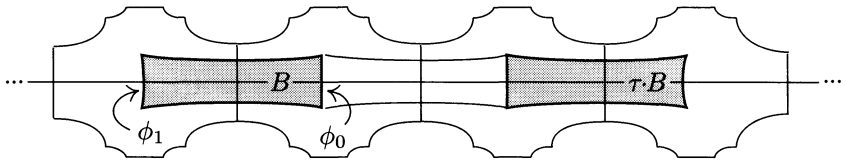
- le produit libre F^{ϕ_0} des groupes d'ordre 2 engendrés par chaque c_ϕ ;

• l'arbre de Cayley-Davis $T^{\phi_0} = (F^{\phi_0} \times \phi_0)/_{\mathcal{R}}$ (où $\mathcal{R}$ est la relation identifiant (w, x_ϕ) et $(w \cdot c_\phi, x_\phi)$) ;

• et le morphisme naturel $\pi : F^{\phi_0} \longrightarrow F_{\phi_0}$, qui vaut l'identité sur chaque c_ϕ.

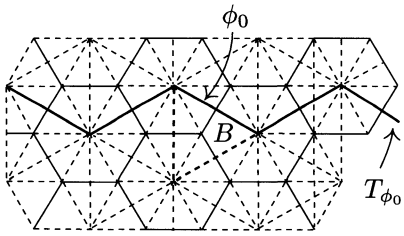
Comme $c_\phi(x_\phi) = x_\phi$, il existe une (unique) application p de T^{ϕ_0} sur T_{ϕ_0}, π-équivariante, valant l'identité sur ϕ_0. En fait, la réunion des deux facettes $c_\phi(\phi_0)$ et ϕ_0 est géodésique dans $A(k, L)$, au voisinage de leur intersection (c'est ici que sert l'hypothèse k divisible par 4) : donc p est une isométrie locale. La métrique de $A(k, L)$ étant CAT(0), ses géodésiques locales sont des géodésiques globales, donc p est un plongement isométrique. Finalement, p et π sont des isomorphismes, et $T = T_{\phi_0}$ est un arbre géodésique, fixe par f.

L'automorphisme f agit non trivialement des deux côtés de T (car c'est le cas sur les deux blocs contenant ϕ_0). Nous construisons alors un nouvel automorphisme g de $A(k, L)$, en imposant $g = \mathrm{id}$ du côté de T contenant l'intérieur de B et sur T, et $g = f$ du côté de T contenant l'intérieur de $s_{\phi_0}.B$. Nous obtenons ainsi un automorphisme non trivial de $A(k, L)$ qui vaut l'identité sur B. Ensuite, on remarque que B contient nécessairement une facette ϕ_1 dont le centre est déplacé par f, donc disjointe de ϕ_0. Alors les conjugués de g par τ^n, avec $\tau = s_{\phi_0} \cdot s_{\phi_1}$, sont distincts pour tous $n \geq 0$, et triviaux sur B.



Donc $\mathrm{Aut}(A(k, L))$ n'est pas discret.

Le cas où k est seulement divisible par 2 n'est que techniquement plus pénible ; l'arbre à considérer est celui évoqué par le dessin suivant :



A.3.2. *Exemples.*

Si L est un graphe complet, le 1-squelette d'un n-cube, d'un n-octaèdre ou d'un dodécaèdre, alors L et $A(k, L)$ sont rigides.

Considérons maintenant le cas où L est un m-gone généralisé fini. Un appartement de L est un circuit de longueur $2m$; un demi-appartement est un segment de longueur m. Pour tout demi-appartement σ, on peut considérer le sous-groupe $F(\sigma)$ de $\mathrm{Aut}(L)$ formé des éléments fixant chaque facette dont le centre est à l'intérieur de σ. On dit que L a la propriété de Moufang si le groupe $F(\sigma)$ est transitif sur l'ensemble des appartements contenant σ (ce, quel que soit σ). En particulier, si le graphe L a la propriété de Moufang et est épais, alors il n'est pas rigide.

D'autre part, ces hypothèses sur L sont équivalentes au fait d'être un immeuble de Tits de rang 2 épais classique (pour toute cette discussion, voir [16]).

B. Densité du commensurateur de $W(k, L)$.

On fixe k et L vérifiant toujours la condition de convexité (C), avec k pair. Notons :

- B le bloc fondamental de $A(k, L)$ (c'est-à-dire l'ensemble des points de la forme $[1, x]$, avec $x \in B$) ;
- $\mathcal{G}$ le groupe topologique des automorphismes de $A(k, L)$ et $\mathcal{G}_0$ le stabilisateur de B dans $\mathcal{G}$;
- $\mathcal{C}$ le commensurateur de $W(k, L)$ dans $\mathcal{G}$, et $\mathcal{C}_0$ l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{G}_0$;
- B_n la suite de sous-complexes de $A(k, L)$ défini par $B_0 = B$, et B_{n+1} est la réunion des blocs de $A(k, L)$ touchant B_n.

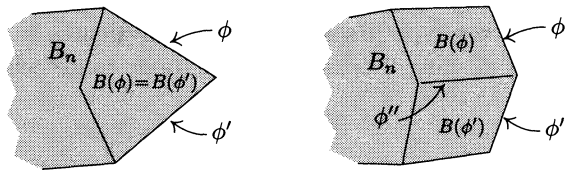
B.1. Théorème. — *On suppose k divisible par 4, et la maille de L supérieure ou égale à 4. Alors $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{C}$ contient $W(k, L)$, il est transitif sur les blocs de $A(k, L)$: il suffit donc de prouver que $\mathcal{C}_0$ est dense dans $\mathcal{G}_0$.

Soit alors g un élément de $\mathcal{G}_0$, et montrons qu'on peut l'approcher autant qu'on veut par un élément de $\mathcal{C}_0$. Autrement dit, que pour tout $n \geq 0$, il existe un $\bar{g}_n \in \mathcal{C}_0$ qui coïncide avec g sur B_n.

Fixons donc $n \geq 0$ et notons g_n la restriction de g à B_n : c'est un automorphisme de B_n, puisque $g(B) = B$. Nous allons montrer que $A(k, L)$ est pavé par des copies de B_n et étendre g_n à ce pavage comme à la partie A.

Pour simplifier, nous supposons $k > 4$. Soit alors Σ_n l'ensemble des facettes du bord de B_n ; notons $B(\phi)$ l'unique bloc de B_n contenant $\phi \in \Sigma_n$. Alors le lemme combinatoire C.1 de la section suivante décrit l'allure locale du bord de B_n : si ϕ et ϕ' sont deux facettes distinctes et adjacentes de ce bord, ou bien $B(\phi) = B(\phi')$ et c'est le seul bloc de B_n contenant $\phi \cap \phi'$, ou bien les seuls blocs de B_n contenant $\phi \cap \phi'$ sont $B(\phi)$ et $B(\phi')$, d'intersection une troisième facette ϕ''.

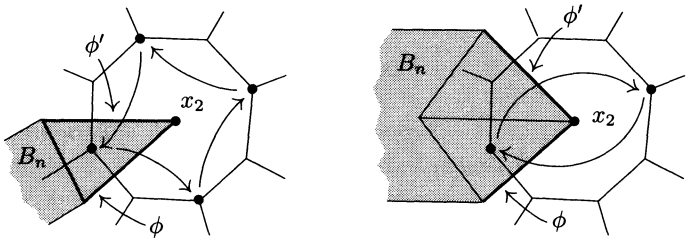


On pose, dans le premier cas, $m_{\phi,\phi'} = \frac{1}{2}k$, et $m_{\phi,\phi'} = \frac{1}{4}k$ dans le second. On complète la matrice de Coxeter sur Σ_n par $m_{\phi,\phi} = 1$ et $m_{\phi,\phi'} = \infty$ lorsque ϕ et ϕ' sont disjointes. On obtient ainsi un système de Coxeter $(W(k, B_n), S^n)$ avec un générateur s^ϕ pour chaque facette ϕ de Σ_n, et les relations $(s^\phi \cdot s^{\phi'})^{m_{\phi,\phi'}} = 1$.

Munissons le produit $W(k, B_n) \times B_n$ de la relation d'équivalence $\mathcal{R}'$ engendrée par les identifications $(w, x) = (w.s^\phi, x)$ dès que $x \in \phi$. Alors l'analogue de la proposition A.2.1 est vraie pour A', le quotient de $W(k, B_n) \times B_n$ par $\mathcal{R}'$. L'espace A' est un (k, L)-complexe dont $W(k, B_n)$ est naturellement un réseau. De plus, tout automorphisme de B_n agit sur Σ_n en préservant les nombres $m_{\phi,\phi'}$, donc induit un automorphisme du groupe $W(k, B_n)$, et agit sur A' d'une unique façon $W(k, B_n)$-équivariante. Notons $\hat{g}_n$ ce prolongement $W(k, B_n)$-équivariant de g_n à A' : il ne nous reste plus qu'à relier A' et $A(k, L)$, en représentant $W(k, B_n)$ dans $W(k, L)$.

Si ϕ est une facette du bord de B_n, elle est l'image par un $w \in W(k, L)$ d'une unique facette ϕ_0 de ∂B ; w est bien défini à multiplication à droite près par s_{ϕ_0}, donc $s_\phi = w \cdot s_{\phi_0} \cdot w^{-1}$ est bien définie (c'est en fait l'unique réflexion de $W(k, L)$ dont l'ensemble des points fixes dans $A(k, L)$ contient ϕ). Supposons que ϕ et ϕ' soient deux facettes du bord de B_n dont l'intersection est le centre x_2 d'un polygone de $A(k, L)$. Alors, en considérant l'action du produit $s_\phi \cdot s_{\phi'}$ sur l'ensemble des blocs contenant x_2,

et en utilisant la simple transitivité de $W(k,L)$ sur les blocs de $A(k,L)$, on voit que l'ordre du produit est exactement $m_{\phi,\phi'}$.



Donc $s^\phi \mapsto s_\phi$ définit un morphisme φ de $W(k,B_n)$ dans $W(k,L)$. L'application $(w,x) \mapsto \varphi(w).x$ de $W(k,B_n) \times B_n$ dans $A(k,L)$ est compatible avec $\mathcal{R}'$, donc définit une application $\psi : A' \longrightarrow A(k,L)$, simpliciale, équivariante sous $W(k,B_n)$ et valant l'identité sur B_n. Mais comme ψ n'identifie pas deux blocs distincts contenant une même facette, et compte tenu du fait que les polygones de A' et $A(k,L)$ ont le même nombre k de sommets, le morphisme ψ est en fait un revêtement, donc un isomorphisme. Ceci entraîne que φ est injectif, d'image le sous-groupe W_n de $W(k,L)$ engendré par les s_ϕ, $\phi \in \Sigma_n$. Alors la conjuguée $\bar{g}_n = \psi \circ \hat{g}_n \circ \psi^{-1}$ est un prolongement de g_n qui normalise W_n, donc appartient à $\mathcal{C}$, puisque W_n est d'indice fini dans $W(k,L)$. □

B.2. Remarques.

Si $k = 4$, on a $s_\phi = s_{\phi'}$, pour ϕ et ϕ' deux facettes distinctes adjacentes de ∂B_n non contenues dans un même bloc. Nous définissons alors une autre structure d'espace à faces sur B_n. Au lieu de prendre Σ^n comme ensemble de faces, nous prenons pour faces les intersections avec ∂B_n des ensembles de points fixes d'une réflexion s_ϕ, pour ϕ une facette de ∂B_n. La démonstration précédente fonctionne à nouveau.

Si on remplace l'hypothèse du théorème précédent par : k divisible par 12 (et L quelconque), la conclusion subsiste, avec presque le même argument. En effet, la remarque C.2 permet de décrire le bord de B_n : il y a une nouvelle allure locale possible, qui amène à poser $m_{\phi,\phi'} = \frac{1}{6}k$, d'où l'hypothèse de divisibilité sur k.

C. Combinatoire des blocs au bord d'une n-boule.

Dans cette partie, l'entier k n'est plus supposé pair ; X désigne un

(k, L)-complexe quelconque. Si B est un bloc de X, soient $B_0 = B$ et B_{n+1} la réunion de tous les blocs touchant B_n. Les $(B_n)_{n\geq 0}$ forment la suite (croissante) des *n-boules de centre* B. Le bord de B_n est la réunion des facettes contenues dans un seul bloc de B_n.

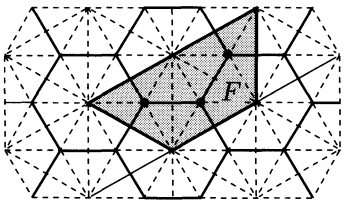
L'allure locale de B_n au voisinage de son bord est très simple :

C.1. PROPOSITION. — *Supposons la maille de L supérieure ou égale à 4. Soient X un (k, L)-complexe et B_n une n-boule de X. Alors B_n est convexe dans X. Plus précisément, si P est un polygone de X centré sur le bord de B_n, alors les sommets de P contenus dans B_n sont consécutifs sur ∂P ; il y en a au plus deux.*

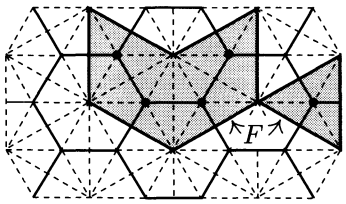
Démonstration. — On munit X de sa métrique CAT(0) (*cf.* partie A : tous les triangles de la première subdivision barycentrique de X ont pour angles $\pi/2$, π/k (au centre des faces de X) et $\pi/2 - \pi/k$ (aux sommets de X)).

Nous allons utiliser une condition combinatoire locale de convexité :

Pour qu'une réunion connexe F de blocs de X soit convexe dans X, il suffit que, pour tout polygone P de X dont le centre est sur le bord de F, les sommets de P contenus dans F soient consécutifs sur ∂P, en nombre inférieur ou égal à $\frac{1}{2}k$.



F convexe



F non convexe

Nous laissons au lecteur la démonstration (par des arguments classiques de géométrie des complexes polygonaux CAT(0), l'inclusion de F dans X préserve la géodésie locale, donc est une isométrie globale). La condition est d'ailleurs évidemment nécessaire.

Les blocs de X sont donc convexes. Ainsi, l'intersection d'un bloc B' avec une réunion convexe de blocs - en particulier, avec un autre bloc - doit être un sous-complexe convexe de B' : ce ne peut être que B', une facette de B', le centre d'un polygone touchant B' (un 2-sommet de B'), ou le vide.

Soient P_0 un polygone de X et $V(P_0)$ la réunion des blocs de X touchant P_0. Les blocs de $V(P_0)$ sont les blocs de X contenant le centre de P_0 (en particulier $V(P_0)$ est connexe). Un polygone P de X dont le centre est sur le bord de $V(P_0)$ est simplement un polygone touchant P_0, avec $P \neq P_0$: mais comme les polygones de X sont convexes, $P \cap P_0$ est soit un sommet, soit une arête de ∂P_0. Comme $2 \leq \frac{1}{2}k$, ceci entraîne que $V(P_0)$ est convexe dans X.

Pour établir la proposition, nous allons montrer un lemme plus général :

C.2. LEMME. — *Si une réunion F de blocs est connexe et vérifie la conclusion de la proposition C.1, alors il en va de même pour la réunion $V(F)$ des blocs de X touchant F.*

(C.1 s'obtient alors en itérant le fait précédent à partir de $F = B_0$.)

Soit donc F une réunion connexe de blocs de X telle que pour tout polygone P centré sur ∂F, les sommets de $P \cap F$ sont consécutifs sur ∂P et en nombre inférieur ou égal à 2.

Comme $2 \leq \frac{1}{2}k$, F est convexe dans X.

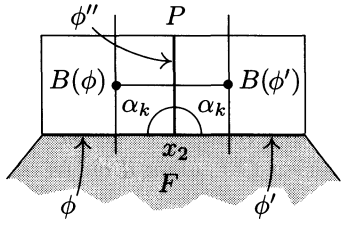
Notons $\mathcal{P}(F)$ (resp : $\mathcal{P}(V(F))$) l'ensemble des polygones de X centrés sur ∂F (resp : $\partial V(F)$). Alors $V(F) = F \cup \big(\bigcup_{P \in \mathcal{P}(F)} V(P) \big)$. Donc, déjà, $V(F)$ est connexe, et $V(F)$ contient F dans son intérieur.

Soit $P \in \mathcal{P}(V(F))$: alors les sommets de P contenus dans $V(F)$ sont les centres des blocs de $V(P)$ touchant F. Comme le centre de P est dans un bloc touchant F, $V(P) \cap F$ est non vide ; *mais cette intersection ne contient aucun bloc* (sinon le centre de P serait contenu dans l'intérieur de $V(F)$). Or $V(P)$ et F sont convexes dans X. Donc $V(P) \cap F$ est une réunion convexe de 2-sommets et de facettes, contenue dans le bord de $V(P)$. Peu de configurations sont possibles :

1) $V(P) \cap F$ contient au moins deux facettes. Par connexité, $V(P) \cap F$ contient deux facettes ϕ et ϕ' se touchant au centre x_2 d'un polygone de $\mathcal{P}(F)$. Notons $B(\phi)$ et $B(\phi')$ les seuls blocs de $V(P)$ contenant respectivement ϕ et ϕ' (on ne peut pas avoir $B(\phi) = B(\phi') = B$, sinon par convexiré $B \subset V(P) \cap F$), et ϕ'' la facette $B(\phi) \cap B(\phi')$ (figure page suivante).

L'angle de ϕ et ϕ' avec ϕ'' en x_2 est $\alpha_k = 2\pi/k$. Si $k > 4$, alors $2\alpha_k < \pi$ et, par convexité au voisinage de x_2, le complexe $V(P) \cap F$ doit contenir

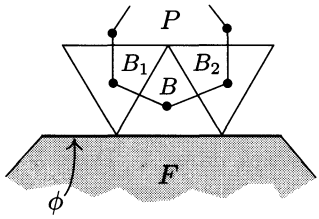
$B(\phi)$ et $B(\phi')$, ce qui est exclus. Donc $k = 4$, et les circuits de L sont de longueur au moins 4. Ceci entraîne qu'une facette de $V(P)$ touchant ϕ (resp. ϕ') distincte de ϕ' (resp. de ϕ) est contenue dans $B(\phi)$ (resp. $B(\phi')$), donc fait un angle de $2\pi/k < \pi$ avec ϕ (resp. ϕ'), et ne peut être dans $V(P) \cap F$ (même argument que ci-dessus).



Finalement, $V(P) \cap F = \phi \cup \phi'$, et les blocs de $V(F)$ contenant le centre de P sont $B(\phi)$ et $B(\phi')$.

2) $V(P) \cap F$ contient une seule facette ϕ. Alors, par connexité, $V(P) \cap F = \phi$. Soit B le bloc de $V(P)$ contenant ϕ; le centre de B a deux voisins sur ∂P, centres de deux blocs B_1 et B_2.

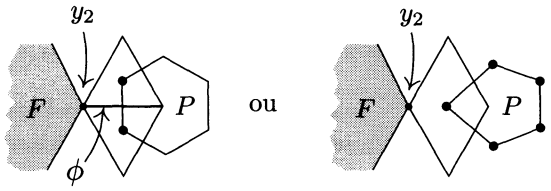
Les autres blocs de $V(P)$ rencontrent B au centre de P (non contenu dans ϕ), donc ne touchent pas F :



On a l'allure désirée, mais peut-être trois blocs dans $V(P) \cap V(F)$. En fait, si B_1 et B_2 touchent $V(P) \cap F = \phi$, la réunion des trois facettes ϕ, $B_1 \cap B$ et $B_2 \cap B$ contient un cycle de longueur trois du bord de B - en contradiction avec l'hypothèse sur la maille de L.

3) $V(P) \cap F$ ne contient aucune facette. Alors, par connexité, $V(P) \cap F$ est réduit au centre y_2 d'un polygone de $\mathcal{P}(F)$. S'il existe une facette ϕ contenant y_2 et le centre de P, alors les blocs de $V(P)$ contenant y_2 sont les deux blocs de X situés de part et d'autre de ϕ. Sinon, y_2 est contenu

dans un unique bloc de $V(P)$, et l'allure locale est bien celle annoncée :



C.2. *Remarques.*

Si la maille de L est 3 et si $k \geq 6$, on a presque les mêmes conclusions que ci-dessus : la borne 2 devient 3, comme il résulte de la démonstration précédente (configuration n° 2).

La proposition C.1 exprime que toutes les n-boules de X sont convexes, ce qui constitue l'avantage technique majeur du point de vue dual, les boules combinatoires définies à partir de polygones n'étant pas convexes pour $k > 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BALLMAN, M. BRIN, Polygonal complexes and combinatorial group theory, Geom. Dedicata, 50, sér. I (1994), 165–191.

[2] H. BASS, R. KULKARNI, Uniform tree lattices, J. Amer. Math. Soc., 3 (1990), 843–902.

[3] N. BENAKLI, Polyèdres à géométrie locale donnée, C. R. Acad. Sci., Paris, sér. I 313, n° 9, 561–564.

[4] M. BURGER, S. MOZES, CAT(–1) spaces, divergence groups and their commensurators, J. Amer. Math. Soc, 9 (1996), 57–94.

[5] M. DAVIS, Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space, Ann. of Math., 117 (1983), 293–324.

[6] M. DAVIS, Buildings are CAT(0), prépublication, Ohio Sate University, 1994.

[7] Y. GAO, Superrigidity for homomorphisms into isometry groups of non proper CAT(–1) spaces, prépublication, Yale University, 1995.

[8] M. GROMOV, Infinite groups as geometric objects, dans Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Varsovia, 1983.

[9] A. HAEFLIGER, Complexes of groups and orbihedra, dans Group theory from a geometrical viewpoint, E. Ghys et A. Haefliger éd., World Scientific, 1991.

[10] F. HAGLUND, Les polyèdres de Gromov, C. R. Acad. Sci., Paris, 313, sér. I, 603–606.

[11] Y. LIU, Density of the commensurability group of uniform tree lattices, J. Alg., 165 (1994), 346–359.

[12] G. MARGULIS, Discrete subgroups of semi–simple groups, Ergeb. Math. Grenz., 17, Springer Verlag, 1991.

[13] G. MOUSSONG, Hyperbolic Coxeter groups, Thèse, Ohio State University, 1988.

[14] F. PAULIN, Construction of hyperbolic groups via hyperbolization of polyhedra, dans Group theory from a geometrical viewpoint, E. Ghys et A. Haefliger éd., World Scientific, 1991.

[15] M.A. RONAN, Lectures on buildings, Persp. Math., 7, Academic Press, 1989.

[16] R. ZIMMER, Ergodic theory and semi–simple groups, Birkhauser, 1984.

Manuscrit reçu le 21 janvier 1998,
accepté le 24 février 1998.

Fréderic HAGLUND,
Université Paris-Sud
URA 1169 du C.N.R.S.
Topologie et Dynamique
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).
frederic.haglund@math.u–psud.fr