ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LOUIS CATHELINEAU

Remarques sur les différentielles des polylogarithmes uniformes

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 5 (1996), p. 1327-1347

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_5_1327_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 5 (1996), 1327-1347

REMARQUES SUR LES DIFFÉRENTIELLES DES POLYLOGARITHMES UNIFORMES

par Jean-Louis CATHELINEAU

1. INTRODUCTION

Une variante de la différentielle du dilogarithme est la fonction

$$f(z) = z \log |z| + (1 - z) \log |1 - z|.$$

Il a été observé par plusieurs auteurs (voir [1], [4]) que cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle à quatre termes

$$f(x) + (1 - x) f\left(\frac{y}{1 - x}\right) = f(y) + (1 - y) f\left(\frac{x}{1 - y}\right).$$

Dans [4], cette équation apparaît en liaison avec l'homologie de SL_2, et dans [1], J. Aczél remarque qu'elle est classique en théorie de l'information.

Dans les pages qui suivent, on se propose d'étudier plus généralement, de telles équations fonctionnelles pour les différentielles des polylogarithmes uniformes, introduits par Bloch-Wigner et Zagier [2], [3], [16] (voir aussi [15]). On obtient en particulier une équation fonctionnelle à 22 termes pour la différentielle du trilogarithme.

Les résultats peuvent être vus, entre autres, comme des analogues infinitésimaux de questions apparaissant dans le travail de Goncharov sur la conjecture de Zagier [9], [10]. D'autre part, une suite exacte intervenant dans les calculs est très liée à un travail précédent de l'auteur sur les λ-opérations en K-théorie algébrique [5]. Il serait intéressant de voir le rapport des équations fonctionnelles obtenues ici avec celles que l'on peut trouver

Mots-clés : Polylogarithmes uniformes – Identités fonctionnelles – Complexes de Goncharov.
Classification math. : 33 – 26 – 18 –19.

en différentiant l'équation fonctionnelle du trilogarithme due à Goncharov [9], [10].

Je remercie le referee dont les remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer la première version de cet article et de corriger quelques erreurs.

2. RAPPELS SUR LES POLYLOGARITHMES

Pour $n \geqslant 1$, soit $\mathcal{D}_n : \mathbf{C} \to \mathbf{R}(n-1)$ la fonction de Bloch-Wigner généralisée [12], [10], [16], où $\mathbf{R}(n) = \mathbf{R}$ ou $i\mathbf{R}$, suivant que n est pair ou impair; on a

$$\mathcal{D}_n(z) = \triangleright_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k 2^k}{k!} \log^k |z| Li_{n-k}(z) \right),$$

où $\triangleright_n$ désigne Re ou iIm, suivant que n est impair ou pair; les B_k sont les nombres de Bernouilli et les Li_k sont les n-logarithmes classiques [12]. On a en particulier

$$\mathcal{D}_1(z) = -\log|1-z|,$$

$$\mathcal{D}_2(z) = i\mathrm{Im}(Li_2(z) + \log(1-z)\log|z|),$$

$$\mathcal{D}_3(z) = \mathrm{Re}(Li_3(z) - \log|z| Li_2(z) - \frac{1}{3}\log^2|z| \log(1-z)).$$

Goncharov prend pour $\mathcal{D}_1$ la fonction $\log|z|$.

Les dérivées partielles de $\mathcal{D}_n$ s'écrivent (voir par exemple [12])

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_n(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k-1}B_k}{k!} \frac{\log^{k-1}|z|}{z} \mathcal{D}_{n-k}(z) + \frac{2^{n-2}B_{n-1}}{(n-1)!} \frac{\log^{n-1}|z|}{1-z},$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathcal{D}_n(z) = (-1)^{n-1} \overline{\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_n(z)}.$$

On en déduit, pour $n \geqslant 1$, l'expression suivante de la différentielle $d\mathcal{D}_n(z)$:

(1)

$$d\mathcal{D}_n(z) = \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_n(z)dz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\mathcal{D}_n(z)d\bar{z}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2^k B_k}{k!} \log^{k-1}|z| \mathcal{D}_{n-k}(z) \Upsilon_k(z) \right) - \frac{2^{n-1}B_{n-1}}{(n-1)!} \log^{n-1}|z| \Upsilon_{n-1}(1-z),$$

où[1] pour k pair : $\Upsilon_k(z) = d\log|z|$, et pour k impair : $\Upsilon_k(z) = di\arg(z)$.

Remarque. — Conformément à la notation $df(z)$ pour la différentielle de f en z, $d\log|1-z|$ désigne la différentielle de $z \mapsto \log|1-z|$ en z.

On a en particulier, compte tenu du fait que $B_k = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$, pour $k = 0, 1, 2$

$$d\mathcal{D}_1(z) = -d\log|1-z|,$$

$$d\mathcal{D}_2(z) = -\log|1-z|di\arg(z) + \log|z|di\arg(1-z),$$

$$d\mathcal{D}_3(z) = \mathcal{D}_2(z)di\arg(z) + \frac{1}{3}\log|z|(\log|1-z|d\log|z| - \log|z|d\log|1-z|).$$

3. RAPPELS SUR LES GROUPES POLYLOGARITHMIQUES

Dans toute la suite[2] F est *un corps infini.* Si X est un ensemble, $\mathbf{Z}[X]$ désigne «le» groupe abélien libre engendré par X et $F[X]$ le F-espace vectoriel $F \otimes \mathbf{Z}[X]$, dont X est naturellement une base. Pour $x \in X$, on note $[x]$ le générateur associé à x.

3.1. Les groupes $\mathcal{B}_n(F)$.

On rappelle la définition des groupes $\mathcal{B}_n(F)$, d'après Goncharov ([10]).

Soit $\mathbf{P}^1(F)$ la droite projective. La définition de $\mathcal{B}_n(F)$ $(n \geqslant 1)$ se fait par récurrence, simultanément avec celle de sous-groupes $\mathcal{A}_n(F)$ $(n \geqslant 2)$ et $\mathcal{R}_n(F)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)]$.

Si $\mathcal{R}_n(F)$ est défini, on pose

$$\mathcal{B}_n(F) = \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)]/\mathcal{R}_n(F).$$

---

(1) Noter que, dans l'expression de la différentielle donnée dans [9], [10], certains termes $d\log|z|$ doivent être remplacés par $di\arg(z)$, mais cela n'influe pas sur les résultats.

(2) Ce paragraphe rectifie quelques coquilles ou imprécisions, en particulier concernant la torsion, dans [6], [9], [10].

On considère les morphismes

$$\delta_2 : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)] \to \frac{\bigwedge^2 F^\times}{(2-torsion)},$$

$$[x] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, 1, \infty \\ (1-x) \wedge x & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour $n \geqslant 3$

$$\delta_n : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)] \to (\mathcal{B}_{n-1}(F) \bigotimes F^\times),$$

$$[x] \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, 1, \infty \\ \{x\}_{n-1} \otimes x & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\{x\}_n$ est la classe de x dans $\mathcal{B}_n(F)$.

Par définition, $\mathcal{R}_1(F)$ est engendré par $[\infty]$ et les $[x+y-xy]-[x]-[y]$, où $x, y \in F\backslash\{1\}$; il en résulte facilement que $\mathcal{B}_1(F) \cong F^\times$. Pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{A}_n(F) := \operatorname{Ker} \delta_n$. On définit $\mathcal{R}_n(F)$ comme le sous-groupe de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)]$ engendré par $[0]$, $[\infty]$ et les éléments de la forme $\sum n_i([f_i(0)] - [f_i(1)])$, où les f_i sont des fractions rationnelles en l'indéterminée X, telles que $\sum n_i[f_i] \in \mathcal{A}_n(F(X))$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{R}_n(F)$ est contenu dans le noyau de δ_n.*

On pose

$$s_a^{(1)} : \quad F(X)^\times \to F^\times$$
$$f \mapsto \bar{f}(a),$$

avec $f(X) = (X-a)^{v_a(f)} \bar{f}(X)$, où v_a est la valuation de f en a. On introduit de plus

$$s_a : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X))] \to \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)]$$
$$[f] \mapsto [f(a)].$$

Démontrons par récurrence que l'on a $\delta_n(\mathcal{R}) = 0$ et $s_a(\mathcal{R}_n(F(X)) \subset \mathcal{R}_n(F)$ pour $n \geqslant 2$. Supposons ces relations démontrées pour les entiers r tels que $2 \leqslant r < n$ et considérons, suivant que $n = 2$ ou $n \geqslant 3$, l'un des diagrammes commutatifs suivants, où la commutativité du premier est assurée par le fait que l'on quotiente par la 2-torsion

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X))] & \xrightarrow{\delta_2} & \dfrac{\bigwedge^2 F(X)^\times}{(2-torsion)} \\ s_a \downarrow & & \downarrow \wedge^2 s_a^{(1)} \\ \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)] & \xrightarrow{\delta_2} & \dfrac{\bigwedge^2 F^\times}{(2-torsion)} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X))] & \xrightarrow{\delta_n} & \mathcal{B}_{n-1}(F(X)) \bigotimes F(X)^\times \\ s_a \downarrow & & \downarrow s_a^{(n-1)} \otimes s_a^{(1)} \\ \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F)] & \xrightarrow{\delta_n} & \mathcal{B}_{n-1}(F) \bigotimes F^\times \end{array}$$

où, si $n \geqslant 3$, l'application $s_a^{(n-1)}$ est déduite de s_a par passage au quotient, ce qui est légitime vu l'hypothèse de récurrence. La commutativité de ces diagrammes montre que $(s_1 - s_0)(\mathcal{A}_n(F(X))$ est contenu dans le noyau de δ_n. Mais par définition, $(s_1 - s_0)(\mathcal{A}_n(F(X)) = \mathcal{R}_n(F)$. Il reste donc à prouver que $s_a(\mathcal{R}_n(F(X)) \subset \mathcal{R}_n(F)$.

Pour $a \in \mathbf{P}^1(F)$, on considère les morphismes de spécialisations

$$\begin{aligned} s_a^X : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X)(Y))] &\to \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(Y)] \\ [f(X,Y)] &\mapsto [f(a,Y)], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} s_a^Y : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X)(Y))] &\to \mathbf{Z}[\mathbf{P}^1(F(X)] \\ [f(X,Y)] &\mapsto [f(X,a)]. \end{aligned}$$

L'exemple suivant (signalé par le referee) montre que l'on doit prendre des précautions avec les spécialisations. Si en effet $f(X,Y) = X/(X+Y)$, alors on voit que $s_0(s_0^Y([f_i]))$ et $s_0(s_0^X([f_i]))$ sont respectivement égaux à [1] et [0] donc distincts. On a cependant le lemme de commutation de spécialisations suivant :

LEMME 1. — *Soit $(f_i)_i$ une famille finie d'éléments non nuls de $F(X,Y)$ et $c \in F$. Pour presque tout élément $b \in F$ (on rappelle que le corps F est supposé infini), on a quel que soit i*

$$s_b(s_c^Y([f_i])) = s_c(s_b^X([f_i])).$$

Preuve. — Pour tout i, on peut écrire

$$f_i(X,Y) = (Y-c)^{m_i} \frac{u_i(X,Y)}{v_i(X,Y)} \ (m_i \in \mathbf{Z}),$$

où les u_i et les v_i sont des polynômes de $F[X,Y]$, tels que $u_i(X,c)$ et $v_i(X,c)$ soient non nuls dans $F[X]$. Alors pour presque tout élément $b \in F$, on a quel que soit i, $u_i(b,c) \neq 0$ et $v_i(b,c) \neq 0$. On vérifie qu'un tel élément b satisfait aux conditions du lemme. □

Un élément de $\mathcal{R}_n(F(X))$ s'écrit sous la forme $\sum n_i([f_i(X,0)] - [f_i(X,1)])$, avec $\sum n_i[f_i] \in \mathcal{A}_n(F(X,Y))$. De plus, par la commutativité des diagrammes ci-dessus appliqués au corps $F(X)$, on a $\sum n_i[f_i(X,0)] \in \mathcal{A}_n(F(X))$ et $\sum n_i[f_i(X,1)] \in \mathcal{A}_n(F(X))$. D'autre part, l'action du groupe des homographies dans $F(X)$ montre que, si $\sum n_i[g_i] \in \mathcal{A}_n(F(X))$ et si $a, b \in \mathbf{P}^1(F)$, on a aussi $\sum n_i([g_i(a)] - [g_i(b)]) \in \mathcal{R}_n(F)$. Par suite, quels que soient a et b

$$(s_a - s_b)\left(\sum n_i[f_i(X,0)]\right) \in \mathcal{R}_n(F),$$

et

$$(s_a - s_b)\left(\sum n_i[f_i(X,1)]\right) \in \mathcal{R}_n(F).$$

En appliquant le lemme à $c = 0, 1$, on peut trouver un élément $b \in F$ tel que, pour tout i

$$s_b([f_i(X,1)]) = s_1([f_i(b,Y)]),$$

et

$$s_b([f_i(X,0)]) = s_0([f_i(b,Y)]).$$

Pour un tel b, on a

$$s_b\left(\sum n_i\left([f_i(X,0)] - [f_i(X,1)]\right)\right) = (s_0 - s_1)\left(\sum n_i[f_i(b,Y)]\right),$$

mais ce dernier élément est dans $\mathcal{R}_n(F)$, car $\sum n_i[f_i(b,Y)] \in \mathcal{A}_n(F(Y))$. Finalement on obtient bien que $s_a(\sum n_i([f_i(X,0)] - [f_i(X,1)])) \in \mathcal{R}_n(F)$, ce qu'il fallait démontrer. □

On déduit de la proposition qui précède un complexe, où $\mathcal{B}_n(F)$ est placé en degré 1

$$(2)\quad \mathcal{B}_n(F) \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F^\times \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes \bigwedge^2 F^\times \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_2(F) \otimes \bigwedge^{n-2} F^\times \xrightarrow{\delta} \frac{\bigwedge^n F^\times}{(2\text{-torsion})},$$

où

$$\delta(\{x\}_{n-i} \otimes y_1 \wedge \ldots \wedge y_i) = \{x\}_{n-i-1} \otimes x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_i$$

et

$$\delta(\{x\}_2 \otimes y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-2}) = (1-x) \wedge x \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-2}.$$

Le complexe (2) a été introduit par Goncharov [9], [10].

3.2. Présentation de $\mathcal{B}_2(F)$.

Dans un groupe abélien engendré par les symboles $\{a\}$, où $a \in F\backslash\{0,1\}$, on envisage, pour $a \neq b$, les relations suivantes:

$$\{a\} - \{b\} + \{b/a\} - \{(1-b)/(1-a)\} + \{(1-b^{-1})/(1-a^{-1})\} = 0, \tag{3}$$

$$\{a\} - \{b\} + \{b/a\} - \{(1-a^{-1})/(1-b^{-1})\} + \{(1-a)/(1-b)\} = 0, \tag{4}$$

$$\{a\} + \{a^{-1}\} = 0, \tag{5}$$

$$\{a\} + \{1-a\} = 0. \tag{6}$$

PROPOSITION 2. — *On a :*

i) *En présence des relations (5), les relations (3) et (4) sont équivalentes.*

ii) *Les relations (3) entraînent les relations* $2(\{a\}+\{a^{-1}\}) = 0$. *Si F est de caractéristique $\neq 2$, elles entraînent les relations* $6(\{a\} + \{1-a\}) = 0$. *Si F est algébriquement clos, elles entraînent les relations (5) et (6).*

iii) *Les relations (4) entraînent les relations* $2(\{a\} + \{a^{-1}\}) = 0$ *et* $6(\{a\} + \{1-a\}) = 0$. *Si F est algébriquement clos, elles entraînent les relations (5) et (6).*

Preuve. — i) est évident; pour le ii) voir [7] (en fait la restriction sur la caractéristique n'est pas nécessaire) et pour le iii) voir [13]. □

PROPOSITION 3. — *On a dans $\mathcal{B}_2(F)$ les relations, où $a, b \in \mathbf{P}^1(F)$:*

1) $\{a\}_2-\{b\}_2+\{b/a\}_2-\{(1-a^{-1})/(1-b^{-1})\}_2+\{(1-a)/(1-b)\}_2 = 0$, *pour $a \neq b$.*

2) $\{a\}_2 + \{1-a\}_2 = 0$.

3) $\{a\}_2 + \{a^{-1}\}_2 = 0$.

4) $\{1\}_2 = 0$.

Preuve. — On remarque que

$$[X] - [Y] + [Y/X] - [(1-X^{-1})/(1-Y^{-1})] + [(1-X)/(1-Y)]$$

est dans $\mathcal{A}_2(F(X,Y))$.

Par spécialisation en $Y = 0$ et $Y = 1$, on voit que $[X] + [1-X]$ et $[X] + [X^{-1}] - [1]$ sont dans $\mathcal{A}_2(F(X))$. On obtient le 4) à partir de la

définition de $\mathcal{B}_2(F)$, en appliquant $s_\infty - s_0$ à $[X] + [1-X]$. En appliquant $s_a - s_0$ à $[X] + [1-X]$ et $[X] + [X^{-1}] - [1]$, et en tenant compte de 4), on a les relations 2) et 3).

Par spécialisation de la première expression en $Y = b$, on déduit que $[X] - [b] + [b/X] - [(1-X^{-1})/(1-b^{-1})] + [(1-X)/(1-b)] \in \mathcal{A}_2(F(X))$. Le 1) en résulte, en appliquant $s_a - s_1$. □

DÉFINITION 1 [13], [14]. — *On note $\mathcal{P}_F$ le groupe abélien engendré par les symboles $\{a\}, a \in F\backslash\{0,1\}$ soumis aux relations (4) du début du paragraphe. On note de plus $\mathcal{P}'_F$ le produit tensoriel $\mathcal{P}_F \otimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$.*

Remarque. — Le groupe défini de façon analogue en considérant la relation (3) est isomorphe à $\mathcal{P}_F$; l'isomorphisme est donné par $[a] \mapsto [a^{-1}]$ [11].

PROPOSITION 4. — *Pour $a \in \mathbf{P}^1(F)$, on a un morphisme de spécialisation*

$$\mathbf{s}_a : \mathcal{P}'_{F(X)} \to \mathcal{P}'_F,$$

tel que

$$\{f\} \mapsto \begin{cases} \{f(a)\} & \text{si } f(a) \neq 0, 1, \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si F est algébriquement clos, on a un morphisme analogue

$$\mathbf{s}_a : \mathcal{P}_{F(X)} \to \mathcal{P}_F.$$

Cela résulte de la proposition 2, en montrant que les relations du type (4), relatives à $F(X)$, donnent par spécialisation des relations de l'un des types (4), (5) ou (6), pour F. □

La proposition suivante est implicite chez Goncharov.

PROPOSITION 5. — *Soit $\mathcal{B}'_2(F)$ le produit tensoriel $\mathcal{B}_2(F) \otimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$, on a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} \lambda : \quad & \mathcal{P}'_F \to \mathcal{B}'_2(F) \\ & \{x\} \mapsto \{x\}_2. \end{aligned}$$

Si F est algébriquement clos, alors $\mathcal{P}_F$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{B}_2(F)$.

Preuve. — D'après ce qui précède, l'application λ existe et est surjective. On va vérifier que λ est injective. Soit

$$\mathbf{B}(F) := Ker\{\mathcal{P}_F \to F^\times \bigotimes F^\times / < x\otimes y + y\otimes x >, \{x\} \mapsto (1-x)\otimes x\}.$$

Suslin ([13], [14]) a montré que le morphisme canonique $i : \mathbf{B}(F) \to \mathbf{B}(F(X))$ est bijectif. Il en est donc de même du morphisme $i : \mathbf{B}'(F) \to \mathbf{B}'(F(X))$, où $\mathbf{B}'$ est le foncteur obtenu, à partir de $\mathbf{B}$, en tensorisant par $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$. En notant que $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$ est $\mathbf{Z}$-plat, on voit que

$$(F^\times \bigotimes F^\times / < x\otimes y + y\otimes x >) \bigotimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right] \cong \bigwedge\nolimits'^2 F^\times,$$

où $\bigwedge'^2 F^\times = (\bigwedge^2 F^\times) \bigotimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$, et on a de plus

$$\mathbf{B}'(F) := \mathrm{Ker}\,\{\delta : \mathcal{P}'_F \to \bigwedge\nolimits'^2 F^\times, \{x\} \mapsto (1-x)\wedge x\}.$$

En utilisant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}'_{F(X)} & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge'^2 F(X)^\times \\ \mathbf{s}_a \downarrow & & \downarrow \wedge^2 s_a^{(1)} \\ \mathcal{P}'_F & \xrightarrow{\delta} & \bigwedge'^2 F^\times, \end{array}$$

on voit que pour tout $a \in F\backslash\{0,1\}$, la restriction de $\mathbf{s}_a$ à $\mathbf{B}'(F(X))$ est à valeurs dans $\mathbf{B}'(F)$ et donc, elle coïncide avec l'inverse de i.

On a aussi $\bigwedge'^2 F(X)^\times \cong \dfrac{\bigwedge^2 F(X)^\times}{(2-torsion)} \bigotimes \mathbf{Z}\left[\frac{1}{6}\right]$. On note δ'_2 l'application : $\mathcal{B}'_2(F(X)) \to \bigwedge'^2 F(X)^\times$, déduite de δ_2. On a $\delta'_2 \circ \lambda = \delta$.

L'injectivité de λ vient alors de la forme des relations de définition de $\mathcal{B}_2(F)$. Plus précisément, soit $u \in \mathcal{P}'_F$ tel que $\lambda(u) = 0$. En utilisant les relations de définition de $\mathcal{B}_2(F)$ combinées avec la surjectivité des applications λ et la relation $\lambda \circ \mathbf{s}_a = s_a \circ \lambda$, on peut trouver un élément $w \in \mathcal{P}'_{F(X)}$, tel que : $\lambda(w) \in \mathrm{Ker}\,\delta'_2$ et $\mathbf{s}_1(w) - \mathbf{s}_0(w) = u$. Comme $\delta(w) = \delta'_2(\lambda(w)) = 0$, on voit que $w \in \mathbf{B}'(F(X))$. Mais les restrictions à $\mathbf{B}'(F(X))$ de $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_0$ coïncident, par suite $u = 0$.

On procède de façon analogue pour la deuxième partie de la proposition en notant que si F est algébriquement clos, $\bigwedge^2 F^\times$ est divisible donc sans torsion. □

4. GROUPES POLYLOGARITHMIQUES INFINITÉSIMAUX

4.1. Définition.

Dans la suite, on notera $\{\ \}_n$ plus simplement $\{\ \}$. On considère les F-espaces vectoriels définis par récurrence de la façon suivante, à partir des groupes $\mathcal{B}_n(F)$:

$\beta_1(F) = F$;

$\beta_2(F) = \dfrac{F[F\backslash\{0,1\}]}{r_2(F)}$ où $r_2(F)$ est le noyau de l'application F-linéaire

$$\partial : F[F\backslash\{0,1\}] \to F \bigotimes F^\times,$$

$$[a] \mapsto a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a);$$

pour $n \geqslant 3$, $\beta_n(F) = \dfrac{F[F\backslash\{0,1\}]}{r_n(F)}$, où $r_n(F)$ est le noyau de l'application

$$\partial^n : F[F\backslash\{0,1\}] \to (\beta_{n-1}(F) \bigotimes F^\times) \bigoplus (\mathcal{B}_{n-1}(F) \bigotimes F),$$

$$[a] \mapsto \langle a \rangle \otimes a + \{a\} \otimes (1-a),$$

où $\langle a \rangle$ désigne la classe de $[a]$ dans $\beta_n(F)$.

Les groupes $\beta_n(F)$ sont des analogues infinitésimaux des groupes $\mathcal{B}_n(F)$.

4.2. Présentation de $\beta_2(F)$.

DÉFINITION 2. — *On note b_F le F-espace vectoriel engendré par les symboles $\langle a \rangle$, $a \in F\backslash\{0,1\}$ soumis aux relations*

$$\langle a \rangle - \langle b \rangle + a\langle b/a \rangle + (1-a)\langle (1-b)/(1-a) \rangle = 0, \tag{7}$$

pour $a \neq b$.

Si F est de caractéristique nulle, on a dans b_F ([4])

$$\langle a \rangle = \langle 1-a \rangle \text{ et } \langle a^{-1} \rangle = -a^{-1}\langle a \rangle. \tag{8}$$

On rappelle de plus ([4] p. 57, th. 1) la

PROPOSITION 6. — *Pour F de caractéristique zéro, on a une suite exacte*

$$0 \to b_F \xrightarrow{\partial} F \bigotimes F^\times \xrightarrow{d\log} \Omega^1_F \to 0,$$

où Ω^1_F désigne les formes de Kähler de F sur $\mathbf{Z}$, $\partial(\langle a \rangle) = a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a)$ et $d\log(b \otimes a) = b\dfrac{da}{a}$. En particulier $\beta_2(F) = b_F$.

Cette suite est l'analogue infinitésimal d'une suite étudiée par S. Bloch et A. Suslin (voir [14]). L'exactitude est liée à des questions sur l'homologie de SL_2 et la K-théorie algébrique (voir [4], [5], [8]).

5. IDENTITÉS FONCTIONNELLES

D'après Goncharov ([10] th. 1.15) et Zagier ([16], prop. 1):

THÉORÈME 1. — *Le morphisme de groupes abéliens*

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}_n : \quad \mathbf{Z}[\mathbf{C}^\times] &\longrightarrow \mathbf{R}(n-1) \\ [z] &\mapsto \mathcal{D}_n(z) \end{aligned}$$

est nul sur $\mathcal{R}_n(\mathbf{C})$.

On en déduit l'existence d'un morphisme

$$\tilde{\mathcal{D}}_n : \mathcal{B}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1).$$

La preuve de ce résultat utilise l'expression de la différentielle de $\mathcal{D}_n$.

On a l'analogue infinitésimal suivant du théorème:

PROPOSITION 7. — *Le morphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, où $n \geqslant 2$*

$$\begin{aligned} \widehat{d\mathcal{D}_n} : \quad \mathbf{C}[\mathbf{C}\backslash\{0,1\}] &\longrightarrow \mathbf{R}(n-1) \\ b[a] &\mapsto d\mathcal{D}_n(a)(a(1-a)b), \end{aligned}$$

est nul sur $r_n(\mathbf{C})$, d'où un morphisme

$$d\tilde{\mathcal{D}}_n : \beta_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{R}(n-1).$$

Preuve. — On considère le produit de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels

$$E := \prod_{k=1}^{n-2} \left((\mathbf{C}^\times)^{\otimes(k-1)} \bigotimes \mathcal{B}_{n-k}(\mathbf{C}) \bigotimes \mathbf{C} \right) \times \left((\mathbf{C}^\times)^{\otimes(n-2)} \bigotimes \mathbf{C}^\times \bigotimes \mathbf{C} \right).$$

Soit alors Ψ : $\mathbf{C}[\mathbf{C}\backslash\{0,1\}] \longrightarrow E$, le produit des applications $\mathbf{C}$-linéaires

$$\mathbf{C}[\mathbf{C}\backslash\{0,1\}] \longrightarrow (\mathbf{C}^\times)^{\otimes(k-1)} \bigotimes \mathcal{B}_{n-k}(\mathbf{C}) \bigotimes \mathbf{C}$$

$$[a] \mapsto a^{\otimes(k-1)} \otimes \{a\} \otimes (1-a),$$

pour $k = 1, ..., n-2$,

et de l'application $\mathbf{C}$-linéaire

$$\mathbf{C}[\mathbf{C}\backslash\{0,1\}] \longrightarrow (\mathbf{C}^\times)^{\otimes(n-2)} \bigotimes \mathbf{C}^\times \bigotimes \mathbf{C}$$

$$[a] \mapsto a^{\otimes(n-2)} \otimes (a \otimes a + (1-a) \otimes (1-a)).$$

La définition par récurrence des $\beta_n(\mathbf{C})$ montre que, pour $n \geqslant 2$, $r_n(\mathbf{C})$ est exactement le noyau de l'application Ψ. Pour achever la preuve de la proposition, il suffit donc de montrer qu'il existe Φ : $E \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$ vérifiant $\widehat{d\mathcal{D}_n} = \Phi \circ \Psi$.

Posons, pour $v \in \mathbf{C}$, $\Gamma_k(v) = \mathrm{Re}(v)$ si k est pair, et $i\mathrm{Im}(v)$ si k est impair. Compte tenu du théorème 1, on peut considérer les applications $\mathbf{R}$-linéaires

$$(\mathbf{C}^\times)^{\otimes(k-1)} \bigotimes \mathcal{B}_{n-k}(\mathbf{C}) \bigotimes \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_{k-1} \otimes \{u\} \otimes v \mapsto -\frac{2^k B_k}{k!} \prod_1^{k-1} \log|a_j| \cdot \mathcal{D}_{n-k}(u) \cdot \Gamma_k(v),$$

pour $k = 1, ..., n-2$,

ainsi que

$$(\mathbf{C}^\times)^{\otimes(n-2)} \bigotimes \mathbf{C}^\times \bigotimes \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}(n-1)$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-2} \otimes u \otimes v \mapsto \frac{2^{n-1} B_{n-1}}{(n-1)!} \prod_{j=1}^{n-2} \log|a_j| \cdot \log|u| \cdot \Gamma_{n-1}(v).$$

On note Φ la somme de toutes ces applications. On a de plus, en considérant les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{dz}{z}$, les égalités

$$d\log|a|(a(1-a)b) = \mathrm{Re}((1-a)b),$$

$$d\log|1-a|(a(1-a)b) = -\mathrm{Re}(ab),$$

ainsi que celles analogues pour *di*arg. En utilisant l'expression (1) du paragraphe 2 pour la différentielle de $\mathcal{D}_n$, le théorème 1 et les égalités qui prédèdent, on obtient facilement la relation $\widehat{d\mathcal{D}_n} = \Phi \circ \Psi$, d'où la proposition. □

6. CALCUL DE $\beta_3(F)$

Le but de cette partie est d'expliciter le groupe $r_3(F)$ des relations de définition de $\beta_3(F)$, pour F un corps de caractéristique nulle.

6.1. Une suite exacte.

On considère les applications F-linéaires:

$$\partial_1 : \quad F[F\backslash\{0,1\}] \to (\beta_2(F) \otimes F^\times) \oplus (\mathcal{B}_2(F) \otimes F)$$
$$[a] \mapsto \langle a \rangle \otimes a + \{a\} \otimes (1-a),$$

$$\partial_2 : \quad (\beta_2(F) \otimes F^\times) \oplus (\mathcal{B}_2(F) \otimes F) \to F \otimes \bigwedge^2 F^\times$$
$$\langle a \rangle \otimes b \mapsto -(a \otimes a \wedge b + (1-a) \otimes (1-a) \wedge b),$$
$$\{a\} \otimes b \mapsto b \otimes (1-a) \wedge a,$$

$$\wedge^2 d\log : \quad F \otimes \bigwedge^2 F^\times \to \Omega_F^2$$
$$a \otimes b \wedge c \mapsto a \frac{db}{b} \wedge \frac{dc}{c}.$$

On a $\partial_1 = \partial_1' + \partial_1''$, où $\partial_1'([a]) = \langle a \rangle \otimes a$ et $\partial_1''([a]) = \{a\} \otimes (1-a)$ et ∂_1 est le ∂^3 de 4.1.

THÉORÈME 2. — *Pour tout corps de caractéristique nulle, la suite de F-espaces vectoriels*

$$(9) \quad F[F\backslash\{0,1\}] \xrightarrow{\partial_1} (\beta_2(F) \otimes F^\times) \oplus (\mathcal{B}_2(F) \otimes F) \xrightarrow{\partial_2} F \otimes \bigwedge^2 F^\times \xrightarrow{\wedge^2 d\log} \Omega_F^2 \to 0,$$

est exacte.

Remarque. — La suite

$$\beta_3(F) \xrightarrow{\partial_1} (\beta_2(F) \otimes F^\times) \oplus (\mathcal{B}_2(F) \otimes F) \xrightarrow{\partial_2} F \otimes \bigwedge^2 F^\times,$$

est un analogue infinitésimal du complexe de Goncharov (2) pour $n = 3$

$$\mathcal{B}_3(F) \xrightarrow{\delta} \mathcal{B}_2(F) \bigotimes F^\times \xrightarrow{\delta} \frac{\bigwedge^3 F^\times}{(2-torsion)}.$$

Le fait que la suite (9) soit exacte est très certainement lié aux résultats de [5], si l'on admet la conjecture que les complexes de Goncharov satisfont les exigences de Beilinson, à savoir que rationnellement leur cohomologie calcule la décomposition d'Adams des groupes de K-théorie algébrique du corps F.

Preuve du théorème. — Il est facile de vérifier que la suite est un complexe. Montrons que $\mathrm{Im}\partial_2 = \mathrm{Ker}\ \wedge^2 d\log$. On a $\partial_2(\{a\} \otimes b) = -\partial_2(\frac{b}{1-a}\langle a\rangle \otimes a)$ $(\partial_2 \circ \partial_1 = 0)$, d'où $\partial_2(\mathcal{B}_2(F) \bigotimes F) \subset \partial_2(\beta_2(F) \bigotimes F^\times)$. Par suite $\mathrm{Im}\partial_2$ est engendrée par les éléments de la forme

$$a \otimes a \wedge b + (1-a) \otimes (1-a) \wedge b.$$

Pour conclure, il suffit de prouver que l'application $\wedge^2 d\log$ induit un isomorphisme

$$\frac{F \bigotimes \bigwedge^2 F^\times}{\mathrm{Im}\partial_2} \to \Omega^2_F.$$

En fait l'isomorphisme inverse est donné par

$$da \wedge db \mapsto ab \otimes a \wedge b \ (\mathrm{mod}(\mathrm{Im}\partial_2)).$$

La cohérence de cette définition avec les relations vérifiées par les formes de Kähler vient du fait que

$$aa'b \otimes aa' \wedge b = aa'b \otimes a \wedge b + aa'b \otimes a' \wedge b,$$

et que

$$(a+a')b \otimes (a+a') \wedge b = ab \otimes a \wedge b + a'b \otimes a' \wedge b \ (\mathrm{mod}(\mathrm{Im}\partial_2));$$

en effet (voir par exemple les calculs de [4]), on a dans $F \bigotimes F^\times$ la relation

$$\begin{aligned} &a \otimes a + a' \otimes a' - (a+a') \otimes (a+a') \\ &= (a+a')\left(\frac{a}{a+a'} \otimes \frac{a}{a+a'} + (1-\frac{a}{a+a'}) \otimes (1-\frac{a}{a+a'})\right). \end{aligned}$$

Passons à l'exactitude en $(\beta_2(F) \bigotimes F^\times) \bigoplus (\mathcal{B}_2(F) \bigotimes F)$. On veut montrer que ∂_2 induit un isomorphisme

$$\frac{(\beta_2(F) \bigotimes F^\times) \bigoplus (\mathcal{B}_2(F) \bigotimes F)}{\mathrm{Im}\partial_1} \to \mathrm{Im}\partial_2.$$

Comme $\{a\} \otimes b = -\dfrac{b}{1-a}\langle a \rangle \otimes a \ (\mathrm{mod}(\mathrm{Im}\partial_1))$, on a un isomorphisme

$$\frac{\beta_2(F) \bigotimes F^\times}{\Gamma} \to \frac{(\beta_2(F) \bigotimes F^\times) \bigoplus (\mathcal{B}_2(F) \bigotimes F)}{\mathrm{Im}\partial_1}$$

où $\Gamma = \mathrm{Im}\partial_1 \cap (\beta_2(F) \bigotimes F^\times)$. On est donc ramené à prouver que

$$\Gamma = \mathrm{Ker}\,\partial_2 \cap (\beta_2(F) \bigotimes F^\times).$$

DÉFINITION 3. — *On considère les éléments de* $F[F\backslash\{0,1\}]$

$$\sigma(a) := a[a] + (1-a)[1-a],$$

et pour $a \neq b$

$$\tau(a,b) := \frac{1}{1-a}[a] - \frac{1}{1-b}[b] + \frac{a}{a-b}\left[\frac{b}{a}\right] + \frac{1-a}{a-b}\left[\frac{1-b}{1-a}\right] - \frac{b(1-a)}{a-b}\left[\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right].$$

LEMME 2. — *L'espace* $\mathrm{Ker}\,\partial_1''$ *est engendré par les* $\tau(a,b)$ *et contient les* $\sigma(a)$.

Preuve. — Soit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F[F\backslash\{0,1\}] & \xrightarrow{\partial_1''} & \mathcal{B}_2(F) \bigotimes F \\ & \searrow h & \uparrow \mu \\ & & F[F\backslash\{0,1\}] \end{array}$$

où $h([a]) = (1-a)[a]$ et $\mu([a]) = \{a\} \otimes 1$; h est un isomorphisme. De plus, on a

$$h(\tau(a,b)) = [a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-b}{1-a}\right] + \left[\frac{1-b^{-1}}{1-a^{-1}}\right],$$

et

$$h(\sigma([a])) = a(1-a)([a] + [1-a]).$$

La première partie du lemme vient du fait que le noyau de μ est engendré par les

$$[a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-b}{1-a}\right] + \left[\frac{1-b^{-1}}{1-a^{-1}}\right].$$

Ce dernier point résulte des propositions 2, 3 et 5 et de ce que F est de caractéristique nulle.

D'autre part dans $\mathcal{B}_2(F)$, on a $\{a\}+\{1-a\}=0$ modulo la 2-torsion, d'où l'assertion sur $\sigma(a)$. □

LEMME 3. — *L'espace* Γ *défini ci-dessus coïncide avec le sous-espace vectoriel de* $\beta_2(F)\otimes F^\times$ *engendré par les éléments de la forme*

$$a\langle b\rangle\otimes a+(1-a)\langle b\rangle\otimes(1-a)+b\langle a\rangle\otimes b+(1-b)\langle a\rangle\otimes(1-b). \tag{10}$$

Preuve. — Notons que $\partial_1(\operatorname{Ker}\partial_1'')=\Gamma$. On en déduit que Γ est engendré, comme F-espace vectoriel, par les $\partial_1(\tau(a,b))$ où a,b sont des éléments distincts de $F\backslash\{0,1\}$, c'est-à-dire par les éléments de la forme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-a}\langle a\rangle\otimes a-\frac{1}{1-b}\langle b\rangle\otimes b+\frac{a}{a-b}\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle\otimes\frac{b}{a}\\&+\frac{1-a}{a-b}\left\langle\frac{1-b}{1-a}\right\rangle\otimes\frac{1-b}{1-a}+\frac{ab(1-a^{-1})}{a-b}\left\langle\frac{1-b^{-1}}{1-a^{-1}}\right\rangle\otimes\frac{a(1-b)}{b(1-a)}.\end{aligned} \tag{11}$$

En utilisant les relations (7) et (8), on a dans $\beta_2(F)$

$$(1-a)\left\langle\frac{1-b}{1-a}\right\rangle=-\langle a\rangle+\langle b\rangle-a\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle$$

et

$$\begin{aligned}(1-a^{-1})\left\langle\frac{1-b^{-1}}{1-a^{-1}}\right\rangle&=-\langle a^{-1}\rangle+\langle b^{-1}\rangle-a^{-1}\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle\\&=a^{-1}\langle a\rangle-b^{-1}\langle b\rangle+b^{-1}\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle.\end{aligned}$$

L'expression (11) devient alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-a}\langle a\rangle\otimes a-\frac{1}{1-b}\langle b\rangle\otimes b+\frac{a}{a-b}\langle\frac{b}{a}\rangle\otimes\frac{b}{a}\\&-\frac{1}{a-b}(\langle a\rangle-\langle b\rangle+a\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle)\otimes\frac{1-b}{1-a}+\frac{1}{a-b}(b\langle a\rangle-a\langle b\rangle+a\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle)\otimes\frac{a(1-b)}{b(1-a)},\end{aligned}$$

soit après calcul

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a(1-b)}{(1-a)(a-b)}\langle a\rangle-\frac{a}{a-b}\langle b\rangle\right)\otimes a+\left(\frac{b(1-a)}{(1-b)(a-b)}\langle b\rangle-\frac{b}{a-b}\langle a\rangle\right)\otimes b\\&+\left(\frac{1-a}{a-b}\langle b\rangle-\frac{1-b}{a-b}\langle a\rangle\right)\otimes\frac{1-b}{1-a}.\end{aligned}$$

En multipliant par $b-a$, on trouve que Γ est engendré par les éléments de la forme

$$a\langle b\rangle\otimes a+(1-a)\langle b\rangle\otimes(1-a)+b\langle a\rangle\otimes b+(1-b)\langle a\rangle\otimes(1-b)$$
$$-\frac{1-b}{1-a}\,(a\langle a\rangle\otimes a+(1-a)\langle a\rangle\otimes(1-a))$$
$$-\frac{1-a}{1-b}\,(b\langle b\rangle\otimes b+(1-b)\langle b\rangle\otimes(1-b))\,,$$

pour deux éléments distincts a, b de $F\backslash\{0,1\}$.

D'autre part, Γ contient les éléments

$$\partial_1(\sigma(a))=a\langle a\rangle\otimes a+(1-a)\langle 1-a\rangle\otimes(1-a).$$

Et comme $\langle a\rangle=\langle 1-a\rangle$ dans $\beta_2(F)$, Γ contient les éléments de la forme

$$a\langle a\rangle\otimes a+(1-a)\langle a\rangle\otimes(1-a). \tag{12}$$

On voit donc que Γ contient les éléments de la forme (10) pour $a\neq b$. D'autre part, si $b=a$ dans (10), on retrouve à un facteur 2 près l'expression (12). Le lemme en résulte. □

Fin de la preuve du théorème 2. — On va montrer que la restriction de ∂_2 à $\beta_2(F)\bigotimes F^\times$ a pour noyau le groupe Γ. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}\beta_2(F)\bigotimes F^\times & \xrightarrow{\tilde\delta} & F\bigotimes F^\times\bigotimes F^\times\\ & \searrow\,\partial_2 & \downarrow p\\ & & F\bigotimes\wedge^2F^\times\end{array}$$

où p est l'application quotient, $\tilde\delta=\partial\otimes\mathrm{id}$ et on rappelle que $\partial(\langle a\rangle)=a\otimes a+(1-a)\otimes(1-a)$. D'autre part, on sait que ∂ est injective et l'on peut trouver une rétraction de ∂ telle que $1\otimes a\mapsto\phi(a)$ où $\phi: F^\times\to\beta_2(F)$. On en déduit une rétraction r de $F\bigotimes F^\times\bigotimes F^\times$ sur $\mathrm{Im}\tilde\partial$ telle que $r(1\otimes a\otimes b)=\tilde\partial(\phi(a)\otimes b)$. Considérons de plus l'involution s de $F\bigotimes F^\times\bigotimes F^\times$ telle que $s(1\otimes a\otimes b)=1\otimes b\otimes a$ et soit, pour $u\in F\bigotimes F^\times\bigotimes F^\times$, $t(u)=u+s(u)$. Soit $a,b\in F\backslash\{0,1\}$, on peut écrire $\phi(a)=\sum_i\alpha_i\langle a_i\rangle$ et $\phi(b)=\sum_j\beta_j\langle b_j\rangle$. Le calcul montre que

$$(t\circ r\circ s\circ r)(1\otimes a\otimes b)=\tilde\partial\Big(\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j\,(a_i\langle b_j\rangle\otimes a_i$$
$$+(1-a_i)\langle b_j\rangle\otimes(1-a_i)+b_j\langle a_i\rangle\otimes b_j+(1-b_j)\langle a_i\rangle\otimes(1-b_j))\Big).$$

D'où, par le lemme 2, $(t \circ r \circ s \circ r)(1 \otimes a \otimes b) \in \tilde{\partial}(\Gamma)$. Si $v \in \operatorname{Ker} \partial_2$ alors $u = \tilde{\partial}(v)$ appartient à $\operatorname{Im}\tilde{\partial} \cap \operatorname{Ker} p$, par suite $u = r(u) = s(u) = 1/2t(u)$ et $(t \circ r \circ s \circ r)(u) = 2u$. On en déduit d'après ce qui précède que $u \in \tilde{\partial}(\Gamma)$; et comme $\tilde{\partial}$ est injective, v est dans Γ, ce qui achève la preuve du théorème. □

6.2. L'espace $\beta_3(F)$.

Dans ce paragraphe, on donne une liste de générateurs de $r_3(F) := \operatorname{Ker} \partial_1$ comme F-espace vectoriel.

DÉFINITION 4. — *On introduit les éléments suivants de* $\operatorname{Ker} \partial_1''$

$$[[a, a]] := 2\sigma(a)$$

et

$$[[a, b]] := (b - a)\tau(a, b) + \frac{1 - b}{1 - a}\sigma(a) + \frac{1 - a}{1 - b}\sigma(b),$$

pour $a \neq b$.

LEMME 4. — *L'espace* $\operatorname{Ker} \partial_1''$ *est engendré par les* $[[a, b]]$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 2. □

LEMME 5. — *On a*

$$\partial_1([[a, b]]) = a\langle b\rangle \otimes a + (1 - a)\langle b\rangle \otimes (1 - a) + b\langle a\rangle \otimes b + (1 - b)\langle a\rangle \otimes (1 - b).$$

Ce calcul est contenu dans la preuve du lemme 3. □

THÉORÈME 3. — *Le noyau de* ∂_1 *est engendré par les éléments de* $F[F\backslash\{0, 1\}]$ *suivants :*

i) $[[a, b]] - [[b, a]]$,

ii) $[[a, c]] - [[b, c]] + a\left[\left[\frac{b}{a}, c\right]\right] + (1 - a)\left[\left[\frac{1 - b}{1 - a}, c\right]\right]$, *pour* $a \neq b$.

Preuve. — Soit $\tilde{\partial} = \partial \otimes id : \beta_2(F) \bigotimes F^\times \to F \bigotimes F^\times \bigotimes F^\times$, l'application déjà considérée ; soit ν l'application :

$$F[F\backslash\{0, 1\}] \to \beta_2(F),\ [a] \mapsto \langle a\rangle;$$

soit de plus q l'application quotient $F \bigotimes F^\times \bigotimes F^\times \to F \bigotimes S^2 F^\times$, où S est la puissance symétrique; on pose $\lambda = q \circ (\partial \otimes \partial) \circ (\nu \otimes \nu)$, où les produits tensoriels sont pris sur F.

LEMME 6. — *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} F[F\backslash\{0,1\}] & \xrightarrow{q\circ\tilde{\partial}\circ\partial_1} & F \bigotimes S^2 F^\times \\ \varphi \uparrow & 2\lambda \nearrow & \\ F[F\backslash\{0,1\}] \bigotimes_F F[F\backslash\{0,1\}] & & \end{array}$$

où $\varphi([a] \otimes [b]) = [[a,b]]$.

Cela résulte du calcul suivant utilisant le lemme 5:

$$\begin{aligned}(\tilde{\partial} \circ \partial_1')([[a,b]]) = {} & ab \otimes b \otimes a + a(1-b) \otimes (1-b) \otimes a \\ & + ab \otimes a \otimes b + (1-a)b \otimes (1-a) \otimes b \\ & + (1-a)b \otimes b \otimes (1-a) + (1-a)(1-b) \otimes (1-b) \otimes (1-a) \\ & + a(1-b) \otimes a \otimes (1-b) + (1-a)(1-b) \otimes (1-a) \otimes (1-b). \quad \square\end{aligned}$$

LEMME 7. — *Le noyau de* λ *est engendré par les éléments:*

i) $[a] \otimes [b] - [b] \otimes [a]$,

ii) $([a] - [b] + a\left[\frac{b}{a}\right] + (1-a)\left[\frac{1-b}{1-a}\right]) \otimes [c]$, *pour* $a \neq b$.

Le noyau de $q \circ (\partial \otimes \partial)$ dans $\beta_2(F) \bigotimes \beta_2(F)$ est engendré par les $\langle a \rangle \otimes \langle b \rangle - \langle b \rangle \otimes \langle a \rangle$. En effet, soit $s' : F \bigotimes F^\times \bigotimes F^\times \to F \bigotimes F^\times \bigotimes F^\times$, $1 \otimes a \otimes b \mapsto 1 \otimes a \otimes b - 1 \otimes b \otimes a$ et $s'' : \beta_2(F) \bigotimes \beta_2(F) \to \beta_2(F) \bigotimes \beta_2(F)$, $\langle a \rangle \otimes \langle b \rangle \mapsto \langle a \rangle \otimes \langle b \rangle - \langle b \rangle \otimes \langle a \rangle$, si $u \in \operatorname{Ker} q \circ (\partial \otimes \partial)$ alors $s'((\partial \otimes \partial)(u)) = 2(\partial \otimes \partial)(u)$ et par suite, $s''(u) = 2u$, car $\partial \otimes \partial$ est injective. On en déduit le lemme en utilisant la présentation de $\beta_2(F)$. $\square$

Le théorème résulte alors des lemmes en remarquant que l'on a $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker} \partial_1''$ et $\operatorname{Ker}(q \circ \tilde{\partial} \circ \partial_1) \cap \operatorname{Ker} \partial_1'' = \operatorname{Ker} \partial_1$. $\square$

Ce qui précède montre aussi que $\operatorname{Ker} \partial_1'' / \operatorname{Ker} \partial_1 \cong S^2_F \beta_2(F)$.

Un calcul fastidieux donne alors le corollaire suivant, où les relations 1) proviennent des relations i) du théorème 3, les relations 2) des relations ii) du même théorème pour $c \neq a, b, \frac{b}{a}, \frac{1-b}{1-a}$, et les relations 3) des relations ii) pour $c = a, b, \frac{b}{a}, \frac{1-b}{1-a}$.

COROLLAIRE 1. — *L'espace* $\beta_3(F)$ *s'identifie au* F*-espace vectoriel engendré par les symboles* $\langle a \rangle$, $a \in F\backslash\{0,1\}$, *soumis aux relations*

1) *Pour* $a \neq b$,

$$a\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle - b\left\langle\frac{a}{b}\right\rangle + (1-a)\left\langle\frac{1-b}{1-a}\right\rangle - (1-b)\left\langle\frac{1-a}{1-b}\right\rangle$$
$$-b(1-a)\left\langle\frac{a(1-b)}{b(1-a)}\right\rangle + a(1-b)\left\langle\frac{b(1-a)}{a(1-b)}\right\rangle = 0.$$

2) *Pour* $a \neq b$ *et* $c \neq a, b, \dfrac{b}{a}, \dfrac{1-b}{1-a}$,

$$c\langle a\rangle - c\langle b\rangle + (a-b+1)\langle c\rangle$$
$$+(1-c)\langle 1-a\rangle - (1-c)\langle 1-b\rangle + (b-a)\langle 1-c\rangle$$
$$-a\left\langle\frac{c}{a}\right\rangle + b\left\langle\frac{c}{b}\right\rangle + ca\left\langle\frac{b}{a}\right\rangle$$
$$-(1-a)\left\langle\frac{1-c}{1-a}\right\rangle + (1-b)\left\langle\frac{1-c}{1-b}\right\rangle + c(1-a)\left\langle\frac{1-b}{1-a}\right\rangle$$
$$+c(1-a)\left\langle\frac{a(1-c)}{c(1-a)}\right\rangle - c(1-b)\left\langle\frac{b(1-c)}{c(1-b)}\right\rangle$$
$$-b\left\langle\frac{ca}{b}\right\rangle - (1-b)\left\langle\frac{c(1-a)}{1-b}\right\rangle$$
$$+(1-c)a\left\langle\frac{a-b}{a}\right\rangle + (1-c)(1-a)\left\langle\frac{b-a}{1-a}\right\rangle$$
$$-(a-b)\left\langle\frac{(1-c)a}{a-b}\right\rangle - (b-a)\left\langle\frac{(1-c)(1-a)}{b-a}\right\rangle$$
$$+c(a-b)\left\langle\frac{(1-c)b}{c(a-b)}\right\rangle + c(b-a)\left\langle\frac{(1-c)(1-b)}{c(b-a)}\right\rangle = 0.$$

3) *Les relations obtenues à partir des relations 2) en égalant* c *respectivement à* $a, b, \dfrac{b}{a}$ *ou* $\dfrac{1-b}{1-a}$, *et en supprimant, dans l'expression obtenue, les termes où le résultat du calcul dans* $\langle\ \rangle$ *est égal à 1.* □

D'après la proposition 7, ce corollaire fournit des équations fonctionnelles explicites pour la différentielle du trilogarithme $\mathcal{D}_3$. A ma connaissance, on ne sait pas expliciter complètement $\mathcal{R}_3(F)$, mais Goncharov en a donné des éléments remarquables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ACZÉL, The state of the second part of Hilbert's fifth problem, Bull. Amer. Math. Soc., 20 (1989), 153-163.

[2] S. BLOCH, Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves, Lect. notes, Irvine, 1977.

[3] S. BLOCH, Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry, Proc. Int. Symp. Alg. Geom., Kyoto, (1977), 1-14.

[4] J.-L. CATHELINEAU, Sur l'homologie de SL_2 à coefficients dans l'action adjointe, Math. Scand., 63 (1988), 51-86.

[5] J.-L. CATHELINEAU, λ-Structures in Algebraic K-Theory and Cyclic Homology, K-Theory, 4 (1991), 591-606.

[6] J.-L. CATHELINEAU, Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes (d'après Goncharov et d'autres), Séminaire Bourbaki, 772 (1992-93), Astérisque, 216 (1993), 311-341.

[7] J. DUPONT, C. H. SAH, Scissors congruences II, J. Pure Appl. Alg., 25 (1982), 159-195.

[8] Ph. ELBAZ-VINCENT, K_3 indécomposable des anneaux et homologie de SL_2, Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia-Antipolis (1995).

[9] A.B. GONCHAROV, Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology, Adv. Math., 114 (1995), 197-318.

[10] A.B. GONCHAROV, Polylogarithms and motivic Galois groups, Proc. of the Seattle conf. on motives, Seattle july 1991, AMS Proc. Symp. in Pure Math., 2, 55 (1994), 43-96.

[11] S. LICHTENBAUM, Groups related to scissors congruence groups, Contemp. Math., 83 (1989), 151-157.

[12] J. OESTERLÉ, Polylogarithmes, Sém. Bourbaki, 762 (1992-93), Astérisque, 216 (1993), 49-67.

[13] A.A. SUSLIN, Algebraic K-theory of fields, Proc. Int. Cong. of Math., 1986, Berkeley, 222-243.

[14] A.A. SUSLIN, K_3 of a field and the Bloch group, Proc. Steklov Inst. of Math., 4 (1991), 217-239.

[15] Z. WOJTKOWIAK, A construction of analogs of the Bloch-Wigner function, Math. Scand., 65 (1989),140-142.

[16] D. ZAGIER, Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields, Proc. Texel Conf. on Arithm. Alg. Geometry 1989, Birkhäuser, Boston (1991), 391-430.

Manuscrit reçu le 22 septembre 1995,
révisé le 11 juin 1996,
accepté le 18 juillet 1996.

Jean-Louis CATHELINEAU,
Laboratoire Jean Dieudonné
URA CNRS 168
Université de Nice
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2.