ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MOUSSA SAIBI

Transformation de Fourier-Deligne sur les groupes unipotents

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 5 (1996), p. 1205-1242

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_5_1205_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 5 (1996), 1205–1242

TRANSFORMATION DE FOURIER-DELIGNE SUR LES GROUPES UNIPOTENTS

par Moussa SAIBI

0. Introduction.

Pour chaque schéma en groupes commutatifs unipotent connexe G sur un corps parfait k, Deligne [4] a introduit la transformation de Fourier ℓ-adique $\mathcal{F}_{G,\Psi}$. C'est une équivalence de catégories

$$D_c^b(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(G',\overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

où G' est le dual au sens de Serre de G et où $D_c^b(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (resp. $D_c^b(G,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$) est la catégorie dérivée des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles sur G (resp. G'). Dans le cas particulier où $G = (\mathbb{A}^1_{,k})^N$, cette transformation de Fourier commute à la dualité (théorème de Verdier) et cette propriété fondamentale a permis d'obtenir dans de nombreux cas des majorations de sommes trigonométriques sur un corps fini [11]. L'objet de ce travail est de montrer que $\mathcal{F}_{G,\Psi}$ commute à la dualité en général.

Dans une partie liminaire, on rassemble les notations et les résultats dont on a besoin, concernant la cohomologie ℓ-adique, les vecteurs de Witt et l'isogénie de Lang. Dans une première partie, on introduit la notion de paires duales de S-schémas en groupes unipotents connexes. On introduit aussi la notion d'admissibilité pour une telle paire. Il s'agit d'une propriété technique qui devrait être satisfaite par toutes les paires duales mais que nous ne savons pas démontrer en général. Néanmoins, elle est automatiquement satisfaite lorsque l'on travaille sur un corps parfait, ainsi que pour la paire duale canonique $(W_{n,S}, W_{n,S}, m^*(\mathcal{L}_n))$ où

$$m : W_{n,S} \times_S W_{n,S} \longrightarrow W_{n,S} \longrightarrow W_{n,k}$$

est le produit et $\mathcal{L}_n$ la $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$-extension d'Artin-Schreier de $W_{n,k}$.

Mots-clés : Cohomologie ℓ-adique – Vecteurs de Witt – Groupes unipotents.
Classification math. : 14F20.

La deuxième partie est consacrée à la définition de la transformation de Fourier-Deligne pour les paires duales et à ses premières propriétés (en particulier, l'involutivité). Dans la dernière partie, on montre le résultat principal de ce travail (*cf.* théorème 3.1) pour les paires duales admissibles. Pour cela, on se réduit d'abord à la paire canonique $(W_{n,S}, W_{n,S}, m^*(\mathcal{L}_n))$, puis on procède par récurrence sur n pour se ramener au cas où $n = 1$ traité dans [11]. Un corollaire du théorème principal est que la transformation de Fourier-Deligne commute à la dualité.

0.0. Le dictionnaire fonctions-faisceaux de Grothendieck : rappels [22].

0.0.1. Dans tout ce qui suit, on fixe un nombre premier p, un corps parfait k de caractéristique p et une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Si q est une puissance de p, on désignera par $\mathbb{F}_q$ l'unique sous-corps à q éléments de k. De plus, on fixe un nombre premier ℓ différent de p et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques.

0.0.2. On fixe aussi un caractère fidèle, $\Psi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$. On notera

$$\Psi_n : p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longhookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$$

le caractère additif fidèle restriction de Ψ à

$$p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longhookrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \lim p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

0.0.3. Si X est un schéma de type fini sur k, nous dirons $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-*faisceaux sur* X pour $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux constructibles. Nous noterons $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques (*cf.* [5], 1.1.2 et 1.1.3 si k est fini ou algébriquement clos, et [8], 6.3 si k est parfait). Pour X, Y des k-schémas de type fini et pour $f : X \to Y$ un k-morphisme, on dispose des foncteurs :

$$Rf_!, Rf_* : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$Lf^*, Rf^! : D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

et des opérations internes $\otimes$ et $\underline{\mathrm{Rhom}}$ sur $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On notera $D_{X/k} : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\mathrm{opp}} \to D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ le foncteur dualisant :

$$D_{X/k}(\,.\,) = \underline{\mathrm{Rhom}}(.\,, Ra^! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où $a : X \to \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structural (*cf.* [22], Dualité).

0.0.4. Si X est un schéma de type fini sur $k = \mathbb{F}_q$, pour tout point fermé x de X et $\mathcal{F}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur X, la fibre $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ en un point géométrique $\bar{x}$ localisé en x est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel $\mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$ agit. On note $\mathrm{Frob}_{\bar{x}} \in \mathrm{Gal}(k(\bar{x})/k(x))$ le Frobenius géométrique relatif à $k(x)$; alors $\det(1 - t\,\mathrm{Frob}_{\bar{x}}, \mathcal{F}_{\bar{x}})$ est bien défini, et est indépendant du choix de $\bar{x}$ (*cf.* [5], 1.1.8). On notera simplement $\boldsymbol{t}_{\mathcal{F}}(x)$ la trace de $\mathrm{Frob}_{\bar{x}}$ agissant sur $\mathcal{F}_{\bar{x}}$. Plus généralement, pour $n \geq 1$ on pose :

$$\boldsymbol{t}_{\mathcal{F},n} := \boldsymbol{t}_{\mathcal{F}/X\otimes\mathbb{F}_{q^n}} : X(\mathbb{F}_{q^n}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

La fonction $\boldsymbol{t}_{K,n}$ satisfait au formalisme suivant :

(i) $\boldsymbol{t}_{K\otimes L,n} = \boldsymbol{t}_{K,n} \cdot \boldsymbol{t}_{L,n}$ pour tous $K, L \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$;

(ii) $\boldsymbol{t}_{f^*K,n} = \boldsymbol{t}_{K,n} \circ f$ pour tout $\mathbb{F}_q$ morphisme $f : X \to Y$ entre $\mathbb{F}_q$-schémas de type fini et tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

On a aussi le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME 0.0.4.1 (formule des traces de Grothendieck, [23], XVI et [22]). — *Pour tout $\mathbb{F}_q$-morphisme $f : X \to Y$ entre $\mathbb{F}_q$-schémas de type fini et tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on a, pour tout $y \in Y(\mathbb{F}_{q^n})$:*

$$\boldsymbol{t}_{Rf!K,n}(y) = \sum_{x\in X(\mathbb{F}_{q^n})} \boldsymbol{t}_{K,n}(x).$$

0.0.5. Si X est un schéma de type fini sur k, la catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est triangulée et est munie d'une t-structure associée à la perversité autoduale dont le cœur est la catégorie abélienne artinienne et noethérienne des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur X, notée $\mathrm{Perv}(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (*cf.* [1], 2.2, 4.3.1 et [8], th. 6.3).

0.1. Rappel sur les groupes de Witt.

0.1.1. On rappelle qu'on a fixé le nombre premier p ; soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $W_{n,\mathbb{Z}}$ le schéma affine en anneaux des vecteurs de Witt de longueur n, *i.e.* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ muni des deux lois $+$ et $\cdot$ suivantes :

$$\begin{aligned}(X_0, \ldots, X_{n-1}) &+ (Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \\ &= \big(S_0(X_0, Y_0), S_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1), \\ &\qquad \ldots, S_{n-1}(X_0, \ldots, X_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_{n-1})\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X_0, \ldots, X_{n-1}) &\cdot (Y_0, \ldots, Y_{n-1}) \\ &= \big(P_0(X_0, Y_0), P_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1), \\ &\qquad \ldots, P_{n-1}(X_0, \ldots, X_{n-1}, Y_0, \ldots, Y_{n-1})\big)\end{aligned}$$

où les S_i et P_i sont les polynômes universels dans $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_{n-1}]$ définis dans [3], chap. IX, §3. Si on définit les polynômes de Witt (*ibid.*, §1) par :

$$\begin{cases} \Phi_0 = X_0, \\ \Phi_1 = X_0^p + pX_1, \\ \cdots \\ \Phi_{n-1} = X_0^{p^{n-1}} + pX_1^{p^{n-2}} + \cdots + p^{n-1}X_{n-1}, \end{cases}$$

alors les polynômes P_i et S_i sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &\Phi_i\big(S_0(X_0, Y_0), S_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1), \\ &\qquad \ldots, S_i(X_0, \ldots, X_i, Y_0, \ldots, Y_i)\big) \\ &\qquad\qquad = \Phi_i(X_0, \ldots, X_i) + \Phi_i(Y_0, \ldots, Y_i) \\ &\Phi_i\big(P_0(X_0, Y_0), P_1(X_0, X_1, Y_0, Y_1), \\ &\qquad \ldots, P_i(X_0, \ldots, X_i, Y_0, \ldots, Y_i)\big) \\ &\qquad\qquad = \Phi_i(X_0, \ldots, X_i) \cdot \Phi_i(Y_0, \ldots, Y_i). \end{aligned}$$

Les polynômes Φ_i vérifient les propriétés suivantes :

$$(0.1.1) \quad \begin{cases} \Phi_0 = X_0, \quad \Phi_{i+1}(X_0, \ldots, X_{i+1}) = \Phi_i(X_0^p, \ldots, X_i^p)p^{i+1}X_{i+1}, \\ \Phi_{i+1}(X_0, \ldots, X_{i+1}) = p\,\Phi_i(X_1, \ldots, X_{i+1}) + X_0^{p^{n+1}}. \end{cases}$$

Si S est un schéma, on notera par $W_{n,S}$ le S-schéma $W_{n\times_{\mathbb{Z}}}S$.

0.1.2. Les applications de restriction R, de décalage V et de Frobenius F' sont les morphismes de schémas :

$$\begin{aligned} R &: W_{n+1,\mathbb{Z}} \longrightarrow W_{n,\mathbb{Z}}, \qquad (X_0, \ldots, X_n) \longmapsto (X_0, \ldots, X_{n-1}), \\ V &: W_{n,\mathbb{Z}} \longrightarrow W_{n+1,\mathbb{Z}}, \quad (X_0, \ldots, X_{n-1}) \longmapsto (0, X_0, \ldots, X_{n-1}), \\ F' &: W_{n,\mathbb{Z}} \longrightarrow W_{n-1,\mathbb{Z}}, \quad (X_0, \cdots, X_{n-1}) \longmapsto \\ &\qquad \big(F_0(X_0, X_1), F_1(X_0, X_1, X_2), \ldots, F_{n-2}(X_0, \ldots, X_{n-1})\big), \end{aligned}$$

où les polynômes F_i sont déterminés par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &\Phi_i\big(F_0(X_0, X_1), F_1(X_0, X_1, X_2), \ldots, F_i(X_0, \ldots, X_{i+1})\big) \\ &\qquad\qquad = \Phi_{i+1}(X_0, \ldots, X_{i+1}) \end{aligned}$$

pour tout $i \leq n-2$. On a en particulier :

$$F_0(X_0, X_1) = X_0^p + pX_1,$$
$$F_1(X_0, X_1, X_2) = X_1^p + pX_2 + p^{-1}\big(X_0^{p^2} - (X_0^p + pX_1)^p\big).$$

Sur $W_{n,\mathbb{F}_p}$ (et donc en caractéristique p), le morphisme F' devient :

$$W_{n,\mathbb{F}_p} \longrightarrow W_{n-1,\mathbb{F}_p}$$
$$(X_0, \ldots, X_{n-1}) \longmapsto (X_0^p, \ldots, X_{n-2}^p).$$

On notera alors par F le morphisme :

$$W_{n,\mathbb{F}_p} \longrightarrow W_{n,\mathbb{F}_p}$$
$$(X_0, \ldots, X_{n-1}) \longmapsto (X_0^p, \ldots, X_{n-1}^p)$$

de sorte que $FR = RF = F'$ (*cf.* [3], chap. IX, §8). Les morphismes R et F' sont des homomorphismes de schémas en anneaux, alors que V est un homomorphisme de schémas en groupes (*ibid.*, §7).

Si m et n sont deux entiers positifs, on dispose d'une suite exacte de $\mathbb{F}_p$-schémas en groupes (*ibid.*, §7) :

$$0 \to W_{n,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{V^m} W_{n+m,\mathbb{F}_p} \xrightarrow{R^n} W_{m,\mathbb{F}_p} \to 0. \tag{0.1.2.1}$$

Ceci montre que $W_{n,\mathbb{F}_p}$ est extension successive de $G_{a,\mathbb{F}_p} = W_{1,\mathbb{F}_p}$.

0.1.3. Dans la suite, on aura à utiliser certaines relations dans $W_{n,\mathbb{F}_p}$. Pour cela, nous allons introduire les notations suivantes. On notera

$$X_0 \longrightarrow \underline{X}_0$$

le morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas $W_{1,\mathbb{F}_p} \to W_{n,\mathbb{F}_p}$ donné par

$$\underline{X}_0 = (X_0, 0, \ldots, 0);$$

$\underline{X}_0$ est appelé le *représentant multiplicatif* de X_0 car on a la relation suivante :

$$\underline{X}_0 \cdot \underline{Y}_0 = \underline{(X_0 Y_0)}.$$

On notera

$$\mathcal{S} : W_{n,\mathbb{F}_p} \longrightarrow W_{n+1,\mathbb{F}_p}$$

le morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas défini par

$$\mathcal{S}(X_0, \ldots, X_{n-1}) = (X_0, \ldots, X_{n-1}, 0).$$

On remarquera que $\mathcal{S}$ est une section du morphisme R. On considère aussi le morphisme de $\mathbb{F}_p$-schémas

$$\tau : W_{n,\mathbb{F}_p} \longrightarrow W_{n,\mathbb{F}_p}$$

qui à l'élément $(X_0, \ldots, X_{n-1})$ associe l'élément $(0, X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre, notons f_A l'application qui à l'élément $(X_0, \ldots, X_n)$ de A^{n+1} associe l'élément $(X_1, \ldots, X_n)$ de A^n ; de même, on note

$$v_A : (X_0, \ldots, X_n) \longrightarrow (0, pX_0, \ldots, pX_n)$$

l'application de A^{n+1} vers A^{n+2}.

On notera par $\Phi_A : A^{n+1} \to A^{n+1}$ l'application définie par $\Phi_A = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)$. On a alors :

$$\Phi_A \circ F' = f_A \circ \Phi_A, \quad \Phi_A \circ V = v_A \circ \Phi_A.$$

LEMME 0.1.3.1. — *Soit A un anneau. Il existe un homomorphisme surjectif d'anneaux $\rho : B \to A$, où B est un anneau dans lequel p n'est pas un diviseur de 0.*

Preuve. — Prendre $B = \mathbb{Z}[(X_a)_{a \in A}]$ et $\rho(X_a) = a$. □

L'intérêt de ce lemme vient de la remarque suivante. Si p n'est pas un diviseur de 0 dans B et si $X \in B^n$ est tel que $\Phi_B(X) = 0$, alors $X = 0$. En effet, $\Phi_B(X) = 0$ est équivalent au système :

$$\begin{cases} X_0 = 0, \\ \Phi_{i-1}(X_0^p, \ldots, X_{i-1}^p) + p^i X_i = 0 \quad \text{pour tout } i \leq n \end{cases}$$

et donc $X = 0$ par récurrence sur i. On a alors le lemme suivant :

LEMME 0.1.3.2. — *Soit A une $\mathbb{F}_p$-algèbre.*

1) *Pour tous $X = (X_0, \ldots, X_{n-1})$ dans $W_n(A)$ et $Y = (Y_0, \ldots, Y_{n-2})$ dans $W_{n-1}(A)$, on a :*

(i) $X = \sum_{i=0}^{n-1} V^i \underline{X}_i$ *où* $\underline{X}_i = (X_i, 0, \ldots, 0) \in W_{n-i}(A)$.

(ii) $\tau(X) = \sum_{i=0}^{n-1} V^i \underline{X}_i$ *où* $\underline{X}_i = (X_i, 0, \ldots, 0)$ *est dans* $W_{n-i}(A)$ *et donc* $X = \underline{X}_0 + \tau(X)$.

(iii) $\mathcal{S}(Y) = \sum_{i=0}^{n-2} V^i \underline{Y}_i$ *où* $\underline{Y}_i = (Y_i, 0, \ldots, 0)$ *est dans* $W_{n-i}(A)$ *et donc*

$$X = V^{n-1}(X_{n-1}) + \mathcal{S}(R(X)).$$

2) *Pour tout* $X \in W_n(A)$ *et tout* $X' \in W_{n+1}(A)$ *on a :*

$$V(X) \cdot X' = V\big(X \cdot FR(X')\big).$$

3) *Pour tout* $X \in W_n(A)$ *et tout* $X' \in W_1(A)$ *on a :*

$$\tau(X) \cdot V^{n-1}(X') = 0.$$

4) *Pour tout* $X \in W_n(A)$ *et tout* $X' \in W_n(A)$ *on a :*

$$V(X) \cdot \mathcal{S}(X') = V\big(X \cdot F(X')\big).$$

Preuve.

1) En utilisant la récurrence sur n, pour démontrer (i), (ii) et (iii), il suffit de voir que :

$$(X_0, \ldots, X_{n-1}) = (X_0, 0, \ldots, 0) + (0, X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

Soit $\rho : B \to A$ un homomorphisme d'anneaux satisfaisant aux conditions du lemme 0.1.3.1. Alors $W_n(\rho) : W_n(B) \to W_n(A)$ est un homomorphisme d'anneaux surjectif, et $\Phi_B : W_n(B) \to B^n$ est un homomorphisme injectif. Il suffit donc de prouver que l'on a pour tout $i \geq 0$:

$$\Phi_i(X_0, \ldots, X_i) = \Phi_i(X_0, 0, \ldots, 0) + \Phi_i(0, X_1, \ldots, X_i),$$

ce qui est évident sur les expressions donnant les Φ_i.

2) Raisonnement analogue. Tenant compte de $\Phi_B \circ F' = f_B \circ \Phi_B$ et $\Phi_B \circ V = v_B \circ \Phi_B$, on ramène la démonstration de la formule à celle de la relation :

$$v_B\big(X \cdot f_B(X')\big) = v_B(X) \cdot X'.$$

Or cela résulte des égalités :

$$X \cdot f_B(X') = (X_0 X'_1, \ldots, X_{n-1} X'_n),$$

$$v_B(X) \cdot X' = (0, pX_0 X'_1, \ldots, pX_{n-1} X'_n).$$

3) Comme

$$\tau(X) = \sum_{i=1}^{n-1} V^i(\underline{X}_i),$$

il suffit de voir que $V^i(\underline{X}_i) \cdot V^{n-1}(X') = 0$ pour $i \geq 1$. Par 2) on obtient la relation

$$V^i(\underline{X}_i) \cdot V^{n-1}(X') = V(V^{i-1}(\underline{X}_i) \cdot FR(V^{n-1}(X')))$$

pour tout $i \geq 1$, or $RV^{n-1}(X') = R(0,\ldots,0,X') = (0,\ldots,0)$ dans $W_{n-1}(A)$, d'où le résultat.

4) Découle directement de 2) du fait que S est une section de R. □

0.2. L'isogénie de Lang : rappels [22].

0.2.1. Soient S un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, A un groupe fini commutatif noté additivement et T un A-torseur sur S. À chaque représentation $\rho : A \to \mathrm{GL}(V)$ de A à valeur dans un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-vectoriel V de dimension finie, on associe à T un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau $\rho(T)$ lisse de rang $\dim V$ sur S (*cf.* [22], sommes trigonométriques).

Si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont deux représentations de A et $f : S' \to S$ un $\mathbb{F}_q$-morphisme de $\mathbb{F}_q$-schémas, on a :

(i) $(\rho_1 \oplus \rho_2)(T) = \rho_1(T) \oplus \rho_2(T)$;

(ii) $\rho(T)^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(\rho(T), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \rho^\vee(T)$;

(iii) $(\rho_1 \otimes \rho_2)(T) = \rho_1(T) \otimes \rho_2(T)$;

(iv) $f^*\rho(T) = \rho(f^*T)$;

où $\rho^\vee$ est définie, pour tout $a \in A$, $v \in V$ et $v^* \in V^*$, par :

$$\langle \rho^\vee(a)(v^*), v \rangle = \langle v^*, \rho(-a)(v) \rangle.$$

Rappelons les résultats suivants :

LEMME 0.2.1.1. — *Si $\pi : T \to S$ représente le faisceau T, on a canoniquement :*

$$\pi_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,T} = \bigoplus_{\Psi \in \overline{A}} \Psi(T),$$

où $\overline{A}$ est le groupe des caractères de A à valeur dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. □

Si Ψ est un caractère ($\dim V = 1$), le faisceau lisse de rang 1, $\Psi(T)$ sera aussi noté T_Ψ. Si T_1 et T_2 sont deux A-torseurs sur S, on définit un

nouveau A-torseur noté $T_1 \wedge T_2$ sur S de la manière suivante : $T_1 \wedge T_2$ est le quotient de $T_1 \times_S T_2$ par l'action de A sur $T_1 \times_S T_2$ donnée par :

$$a : (t_1, t_2) \longmapsto (t_1 + a, t_2 - a).$$

On a alors par construction :

$$(T_1 \wedge T_2)_\Psi = (T_1)_\Psi \otimes (T_2)_\Psi.$$

Si X est un $\mathbb{F}_q$-schéma de type fini et $f : X \to S$ un $\mathbb{F}_q$-morphisme, $f^* T_\Psi$ sera aussi noté $T_\Psi(f)$.

Si $S = G$ est un $\mathbb{F}_q$-schéma en groupes commutatifs de type fini, et que T est une extension de G par le $\mathbb{F}_q$-schéma en groupes constant de valeur A dans la catégorie des $\mathbb{F}_q$-schémas en groupes commutatifs alors on a :

$$0 \to A \xrightarrow{i} T \xrightarrow{\pi} G \to 0.$$

En particulier T est un A-torseur sur G.

THÉORÈME DU CARRÉ 0.2.1.2 (*cf.* [22], sommes trigonométriques, 1.7.1). — *Pour tout caractère Ψ de A à valeur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$:*

(i) *T_Ψ est canoniquement rigidifié à l'origine de G : $T_{\Psi/\{1\}} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.*

(ii) *Si on note par $s : G \times_{\mathbb{F}_q} G \to G$ et $\mathrm{pr}_i : G \times_{\mathbb{F}_q} G \to G$ $(i = 1, 2)$ la loi de groupe et les deux projections canoniques, il existe un et un seul isomorphisme :*

$$s^* T_\Psi \otimes \mathrm{pr}_1^*(T_\Psi)^\vee \otimes \mathrm{pr}_2^*(T_\Psi)^\vee = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses sur $G \times_{\mathbb{F}_q} G$, compatible aux rigidifications le long de $G \times \{1\}$ et $\{1\} \times G$ induites par la rigidification à l'origine de T_Ψ. □

COROLLAIRE 0.2.1.3. — *Si $f, g : X \to G$ sont deux morphismes de $\mathbb{F}_q$-schémas de type fini, on a canoniquement $T_\Psi(f+g) = T_\Psi(f) \otimes T_\Psi(g)$.* □

On a aussi :

THÉORÈME 0.2.1.4. — *Soient G un groupe algébrique commutatif, noté additivement, lisse, connexe et de type fini sur un corps k algébriquement clos et T une extension de G par A comme ci-dessus. On suppose que le schéma T est connexe et que $\Psi : A \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ est un caractère non trivial. On a alors :*

$$R\Gamma_c(G, T_\Psi) = R\Gamma(G, T_\Psi) = 0.$$

Preuve. — Dans [22], sommes trigonométriques, th. 2.7, on trouve une preuve utilisant un argument d'homotopie. Donnons-en une autre

preuve utilisant le théorème du carré. On s'inspire d'une preuve de Mumford (voir [14], 8.VII) de l'annulation de la cohomologie de Zariski d'une variété abélienne à coefficient dans un faisceau inversible non trivial appartenant à la composante neutre du groupe de Picard. Pour $i = 0$, on a $H^0(G, T_\Psi) = (T_{\Psi,\bar{1}})^{\pi_1(G,1)}$, où 1 est l'origine de G. Or le $\pi_1(G,1)$-module $T_{\Psi,\bar{1}}$ est obtenu comme suit : comme T est un revêtement connexe, galoisien de groupe de galois A de G et comme on peut pointer T par 1, on en déduit une surjection canonique $\pi_1(G,1) \to A$; la représentation du $\pi_1(G,1)$ est alors obtenue en composant cette surjection par Ψ^{-1}. Comme $\Psi \neq 1$, on a nécessairement $(T_{\Psi,\bar{1}})^{\pi_1(G,1)} = 0$.

Soit $a : G \to G \times_k G$ le morphisme défini par $g \mapsto (g, 0)$: on a $s \circ a = \mathrm{id}$. Par fonctorialité, on en déduit que le composé :

$$H^i(G, T_\Psi) \xrightarrow{s^*} H^i(G \times_k G, s^*T_\Psi) \xrightarrow{a^*} H^i(G, T_\Psi) \tag{0.2.1.5}$$

est l'identité. D'après le théorème du carré et la formule de Künneth pour la cohomologie ordinaire (*cf.* [22], th. final 1.11), on a :

$$\begin{aligned} H^i(G \times_k G, s^*T_\Psi) &= H^i(G \times_k G, \mathrm{pr}_1^* T_\Psi \otimes \mathrm{pr}_2^* T_\Psi) \\ &= \bigoplus_{r+s=i} H^r(G, T_\Psi) \otimes H^s(G, T_\Psi). \end{aligned}$$

Soit alors i_0 le plus petit entier tel que $H^{i_0}(G, T_\Psi) \neq 0$. On a $i_0 > 0$ car $H^0(G, T_\Psi) = 0$. Il s'en suit que $H^{i_0}(G \times_k G, s^*T_\Psi) = 0$, car si $r + s = i_0$ (avec $r, s \geq 0$), on a $r < i_0$ ou $s < i_0$. Ce qui est absurde compte tenu de (0.2.1.5). On termine alors en utilisant la dualité de Poincaré et le fait que $(T_\Psi)^\vee = T_{\Psi^{-1}}$ pour conclure que $H^i_c(G, T_\Psi) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et Ψ non trivial. □

0.2.2. Isogénie de Lang.

Soit G un groupe algébrique commutatif, noté additivement, lisse, connexe et de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Un exemple important d'extension de G est donné par le torseur de Lang. Considérons le morphisme $L : G \to G$ où

$$L = \mathrm{Frob} - \mathrm{id}_G,$$

Frob étant l'endomorphisme de Frobenius de G relativement à $\mathbb{F}_q$. D'après [12], le $\mathbb{F}_q$- morphisme $G \xrightarrow{L} G$ est surjectif. Comme le noyau de L est $G(\mathbb{F}_q)$, on obtient alors une suite exacte de $\mathbb{F}_q$-schémas en groupes :

$$0 \to G(\mathbb{F}_q) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{L} G \to 0.$$

On notera $\mathcal{L}$ le $G(\mathbb{F}_q)$-torseur sur G défini par cette suite exacte. On note simplement $\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q} : G(\mathbb{F}_{q^n}) \to G(\mathbb{F}_q)$ l'homomorphisme trace :

$$x \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Frob}^i(x).$$

On a alors :

LEMME 0.2.2.1 (*cf.* [22], sommes trigonométriques). — *Pour tout caractère $\Psi : G(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ et tout entier $n \geq 0$ on a :*

$$t_{\mathcal{L}_{\Psi,n}}(x) = \Psi \circ \mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(x) \qquad \forall x \in G(\mathbb{F}_{q^n}). \qquad \square$$

1. Paires duales admissibles de schémas en groupes unipotents.

1.0. Schémas parfaits : rappels.

DÉFINITION 1.0.1. — *Soit S un schéma de caractéristique p. On dit que S est parfait si l'endomorphisme de Frobenius absolu $F : S \to S$ est un automorphisme, i.e. le faisceau structural O_S est parfait* (*cf.* [23], *XV*, §1), *i.e. pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(A)$ de S, A est un anneau de caractéristique p parfait.*

Notons $\mathrm{Sch}_{/k}^{\mathrm{parf}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Sch}_{/k}$ des k-schémas dont les objets sont les k-schémas parfaits (en tant que schémas de caractéristique p). On rappelle que k est parfait.

Rappelons le résultat suivant :

LEMME 1.0.2 (*cf.* [6], V, §3, 6.11).

(i) *Le foncteur $i : \mathrm{Sch}_{/k}^{\mathrm{parf}} \hookrightarrow \mathrm{Sch}_{/k}$ admet un adjoint à droite $j : \mathrm{Sch}_{/k} \to \mathrm{Sch}_{/k}^{\mathrm{parf}}$. Le foncteur j est défini par*

$$j(X) = X^{\mathrm{parf}} = \varprojlim (\cdots \xrightarrow{F} X_n \to \cdots \to X_2 \xrightarrow{F} X_1 \xrightarrow{F} X_0)$$

où $X_i = X$ pour tout $i \geq 0$ et

$$j(f) = \varprojlim_n (f_n : X_n \to Y_n)$$

pour tout k-morphisme $f : X \to Y$ entre k-schémas.

Le foncteur j a en outre les propriétés suivantes :

(ii) *les morphismes canoniques*

$$\mathrm{can}_n : j(X) = X^{\mathrm{parf}} \longrightarrow X_n = X$$

pour $n \geq 0$ sont entiers, surjectifs et radiciels;

(iii) *soient X, Y et S trois k-schémas; on a un isomorphisme canonique :*

$$X^{\mathrm{parf}} \times_{S^{\mathrm{parf}}} Y^{\mathrm{parf}} \to (X \times_S Y)^{\mathrm{parf}}.$$

Remarque 1.0.3. — Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ où A est une k-algèbre de type fini et réduite, alors on a $X^{\mathrm{parf}} = \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{parf}})$ où A^{parf} peut être décrite comme suit. Pour tout entier n, notons $A^{p^{-n}}$ la k-algèbre obtenue en adjoignant à A les p^n-ièmes racines des éléments de A; la flèche qui à tout élément $a \in A^{\mathrm{parf}}$ associe l'élément $a_k^{p^{-k}}$ de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{p^{-n}}$ (où a_k est un élément de $A_k = A$ représentant a pour k assez grand) est un isomorphisme. Par suite, A^{parf} est obtenue en adjoignant à A les p^n-ième racines des éléments de A pour tout n.

Exemple.

$$\mathrm{Spec}\big(k[x, x', x'', \ldots]/(x'^p - x, x''^p - x', \ldots)\big) = \mathrm{Spec}\big(k[x]\big)^{\mathrm{parf}}.$$

1.1. Schémas en groupes parfaits.

Si G est un k-schéma en groupes, on dit qu'il est *parfait* s'il l'est en tant que k-schéma. On notera $G\,\mathrm{Sch}_{/k}^{\mathrm{parf}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $G\,\mathrm{Sch}_{/k}$ des k-schémas en groupes dont les objets sont les k-schémas en groupes parfaits.

Rappelons :

Définition 1.1.1. — *Un k-morphisme $u : G \to G'$ de k-schémas en groupes commutatifs et de type fini est une isogénie si u est surjectif et de noyau fini sur k.*

Lemme 1.1.2 (*cf.* [6], V, §3, 6.11).

(i) *Si G est un k-schéma en groupes alors G^{parf} a une structure naturelle de k-schémas en groupes parfaits.*

(ii) *Le foncteur $G \to G^{\mathrm{parf}}$ transforme les suites exactes de k-schémas en groupes commutatifs de type fini en suites exactes de k-schémas en groupes commutatifs parfaits.*

(iii) *Un morphisme $u : G \to G'$ de k-schémas en groupes commutatifs de type fini est une isogénie radicielle si et seulement si u^{parf} est un isomorphisme.*

DÉFINITION 1.1.3. — *On dit qu'un k-schéma en groupes commutatifs parfait $\mathcal{G}$ est quasi-algébrique s'il est isomorphe à G^{parf} où G est un k-schéma en groupes commutatifs de type fini.*

1.2. Bi-extensions de schémas en groupes : (voir [15]).

Soient G_1, G_2 deux S-schémas en groupes commutatifs et A un groupe abélien fini.

DÉFINITION 1.2.1 (*cf.* [15], §2). — *On appelle bi-extension de $G_1 \times_S G_2$ par A un A-torseur E sur $G_1 \times_S G_2$ muni des données suivantes :*

1) *un S-morphisme $E \xrightarrow{\pi} G_1 \times_S G_2$ faisant de E un A-torseur sur $G_1 \times_S G_2$;*

2) *deux lois de compositions $+_1 : E \times_{G_1} E \to E$ et $+_2 : E \times_{G_2} E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes. Soit T un S-schéma.*

(i) *pour tout T-point g_1 de G_1, $E_{g_1} = \pi^{-1}(T \times_S G_2)$ est un T-schéma en groupes commutatifs pour la loi $+_1$ et est extension du T-schéma $T \times_S G_2$ par A via π ;*

(ii) *pour tout T-point g_2 de G_2, $E_{g_2} = \pi^{-1}(G_1 \times_S T)$ est un T-schéma en groupes commutatifs pour la loi $+_2$ et est extension du T-schéma $G_1 \times_S T$ par A via π ;*

(iii) *pour tous x', x'', y', y'' des T-points de E tels que $\pi(x') = (g_1, g_1')$, $\pi(x'') = (g_1, g_2')$, $\pi(y') = (g_2, g_1')$ et $\pi(y'') = (g_2, g_2')$, on a :*

$$(x' +_1 x'') +_2 (y' +_1 y'') = (x' +_2 y') +_1 (x'' +_2 y'').$$

D'une manière équivalente, cela revient à se donner un A-torseur E sur $G_1 \times_S G_2$ avec des isomorphismes de torseurs $+_1$ et $+_2$:

$$+_1 : (g_1, g_2)^* E \wedge (g_1, g_2')^* E \longrightarrow (g_1, g_2 + g_2')^* E,$$
$$+_2 : (g_1, g_2)^* E \wedge (g_1', g_2)^* E \longrightarrow (g_1 + g_1', g_2)^* E$$

pour tous T-points $g_1, g_1' : T \to G_1$ $g_2, g_2' : T \to G_2$, de sorte que le

diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\big((g_1,g_2)^*E \wedge (g_1,g_2')^*E\big) \wedge \big((g_1',g_2)^*E \wedge (g_1',g_2')^*E\big) & = & \\
\big((g_1,g_2)^*E \wedge (g_1,g_2')^*E\big) \wedge \big((g_1',g_2)^*E \wedge (g_1',g_2')^*E\big) & & \big\downarrow (+_1)\wedge(+_1) \\
\big\downarrow (+_2)\wedge(+_2) & & (g_1,g_2+g_2')^*E \wedge (g_1',g_2+g_2')^*E \\
 & & \big\downarrow +_1 \\
(g_1+g_1',g_2)^*E \wedge (g_1+g_1',g_2')^*E & \longrightarrow & (g_1+g_1',g_2+g_2')^*E
\end{array}$$

On note BI-EXT$(G_1 \times_S G_2, A)$ la catégorie dont les objets sont les bi-extensions de $G_1 \times_S G_2$ par A et les flèches sont les morphismes de A-torseurs compatibles avec les isomorphismes de torseurs $+_1$ et $+_2$.

On a un foncteur :

$$\mathrm{can}_0^* : \text{BI-EXT}(G_1 \times_S G_2, A) \longrightarrow \text{BI-EXT}(G_1^{\mathrm{parf}} \times_{S^{\mathrm{parf}}} G_2^{\mathrm{parf}}, A).$$

PROPOSITION 1.2.2. — *Le foncteur* can_0^* *pour les bi-extensions est une équivalence de catégories.*

Preuve. — Montrons la pleine fidélité. Le foncteur can_0^* est fidèle car il l'est au niveau des A-torseurs (voir [21], VIII, 1.1 et 1.2). De plus, si $u : E^{\mathrm{parf}} \to E'^{\mathrm{parf}}$ est un morphisme de bi-extension sur $G_1 \times_S G_2$, il existe un morphisme $f : E \to E'$ de A-torseur tel que $f^{\mathrm{parf}} = u$. Pour voir qu'il est compatible avec les isomorphismes de torseurs $+_1$ et $+_2$, il suffit d'utiliser la fidélité du foncteur can_0^*. Par exemple, la compatibilité avec l'isomorphisme $+_1$ se traduit par la commutation du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
(g_1,g_2)^*E \wedge (g_1,g_2')^*E & \xrightarrow{+_1} & (g_1,g_2+g_2')^*E \\
\big\downarrow (g_1,g_2)^*f \wedge (g_1,g_2)^*f & & \big\downarrow (g_1,g_2+g_2')^*f \\
(g_1,g_2)^*E' \wedge (g_1,g_2')^*E' & \xrightarrow{+_1} & (g_1,g_2+g_2')^*E'
\end{array}$$

pour tous points g_1, g_2 de G_1 et G_2 respectivement et on a

$$f^{\mathrm{parf}} \circ (+_1)^{\mathrm{parf}} = (+_1)^{\mathrm{parf}} \circ (f^{\mathrm{parf}} \wedge f^{\mathrm{parf}}).$$

Pour montrer que le foncteur est essentiellement surjectif, on procède de la même manière en utilisant le fait que le foncteur can_0^* est essentiellement surjectif au niveau des A-torseurs et la pleine fidélité du foncteur can_0^* pour montrer qu'il s'agit bien d'une bi-extension. □

Remarque 1.2.3. — Soit E une bi-extension sur $G \times_S G'$ par A, l'existence des isomorphismes $+_1$ et $+_2$ implique un isomorphisme canonique entre $(f+g, f'+g')^*(E)$ et

$$(f,f')^*(E) \wedge (f,g')^*(E) \wedge (g,f')^*(E) \wedge (g,g')^*(E)$$

où $f, g : T \to G$, $f', g' : T \to G'$ sont des T-points de G et G' respectivement et T est un S-schéma.

1.3. Groupes algébriques commutatifs unipotents sur un corps parfait : (voir [20], exposé XVII, [6]).

DÉFINITION 1.3.1. — *Un k-schéma en groupes G sera dit unipotent s'il est commutatif, de type fini et si $G \otimes_k \bar{k}$ admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à des sous-groupes algébriques de $G_{a,\bar{k}}$*

D'après [20], exposé XVII, prop. 1.2, cette définition est indépendante du choix de la clôture algébrique $\bar{k}$ de k.

Exemple. — D'après (0.1.2.1), on voit que les $W_{n,k}$ sont des k-schémas en groupes unipotents. Notons $\alpha_{p,k}$ le noyau de l'endomorphisme de Frobenius de $G_{a,k}$. C'est un groupe radiciel et fini sur k. Comme k est de caractéristique p , on a alors le résultat suivant :

LEMME 1.3.2 (*ibid.*, corollaire 1.7). — *Pour qu'un groupe algébrique G défini sur k soit unipotent, il faut et il suffit que $G \otimes_k k$ possède une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à l'un des groupes $G_{a,k}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ou $\alpha_{p,k}$.*

Nous appellerons ces groupes les groupes *unipotents élémentaires.* Dans le cas où G est un groupe algébrique unipotent connexe, les quotients successifs sont isomorphes à l'un des groupes $G_{a,k}$ ou $\alpha_{p,k}$. Notons $\mathrm{GU\,Sch}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $G\,\mathrm{Sch}_{/k}$ dont les objets sont les k-schémas en groupes unipotents.

LEMME 1.3.3 (*ibid.*, 2.2).

(i) *Tout sous-groupe algébrique d'un groupe unipotent est unipotent.*

(ii) *Tout groupe algébrique quotient d'un groupe unipotent est unipotent.*

(iii) *Toute extension d'un groupe algébrique unipotent par un groupe algébrique unipotent (dans la catégorie des k-schémas en groupes commutatifs) est unipotente.*

On a un théorème de structure pour les k-schémas en groupes unipotents connexes.

THÉORÈME 1.3.4. — *Si $G \in \operatorname{obj} GU\,\mathrm{Sch}_{/k}$ est connexe, il existe une suite d'entiers $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ (éventuellement vide), uniquement déterminée à l'ordre près, telle que G soit isogène à $\prod_{i=1}^{r} W_{n_i/k}$.*

Preuve. — Voir [6], V, §3, 6.11. □

DÉFINITION 1.3.5. — *Soit $\mathcal{G}$ un k-groupe quasi-algébrique. On dit que $\mathcal{G}$ est unipotent s'il existe un groupe unipotent G' tel que $\mathcal{G}$ soit isomorphe à ${G'}^{\mathrm{parf}}$.*

Remarque 1.3.6. — Si $\mathcal{G}$ est isomorphe à ${G'}^{\mathrm{parf}}$, alors pour tout G'' tel que ${G''}^{\mathrm{parf}}$ soit isomorphe à $\mathcal{G}$, G'' est un groupe unipotent. En effet d'après le lemme 1.1.2. (iii), il y a une isogénie radicielle $G' \to G''$; comme G' est unipotent, il en est de même de G'' d'après 1.3.3. (ii). D'après [7], chap. II, §5, n° 2, cor. 2.3, on peut choisir le k-groupe unipotent G' lisse. Il suffit de prendre le k-groupe unipotent G'_{red}.

1.4. Dual de Serre : (voir [2], §1).

On note $\mathcal{F}^{\mathrm{parf}}/k$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs sur la catégorie $\mathrm{Alg}^{\mathrm{parf}}/k$ des k-algèbres parfaites et à valeur dans la catégorie des groupes abéliens. Soit M un k-schéma en groupes commutatifs parfait, on définit un objet D_M dans $\mathcal{F}^{\mathrm{parf}}/k$ de la manière suivante :

$$\mathrm{Alg}^{\mathrm{parf}}/k = (k\text{-algèbres parfaites}) \xrightarrow{D_M} (\text{groupes abéliens}),$$

$$A \longmapsto D_M(A) = \mathrm{Ext}^1(M \otimes_k A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$
$$= \varinjlim_n \mathrm{Ext}^1(M \otimes_k A, p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}),$$

où $\mathrm{Ext}^1(X,Y)$ désigne le groupe des extensions de X par Y dans la catégorie des A-schémas en groupes commutatifs. On a alors le foncteur :

$$D : G\,\mathrm{Sch}_{/k}^{\mathrm{parf}} \longrightarrow \mathcal{F}_{/k}^{\mathrm{parf}}.$$

On a le résultat important suivant :

THÉORÈME 1.4.1 (voir [2]). — *Soit G un k-schéma en groupes unipotent connexe. Alors $D_{G^{\mathrm{parf}}}$ est représentable par un k-schéma en groupes $(G^{\mathrm{parf}})^*$ parfait unipotent et connexe. Les k-schémas en groupes G^{parf} et $(G^{\mathrm{parf}})^*$ sont isogènes. Le foncteur $G^{\mathrm{parf}} \to (G^{\mathrm{parf}})^*$ est exact et involutif dans la catégorie des k-groupes parfaits unipotents connexes.*

On notera $\mathcal{L}_G$ l'extension universelle du $(G^{\mathrm{parf}})^*$-schéma en groupes $G^{\mathrm{parf}} \times_k (G^{\mathrm{parf}})^*$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Il est formel de voir qu'en fait $\mathcal{L}_G$ est canoniquement munie d'une structure de bi-extension de $G^{\mathrm{parf}} \times_k (G^{\mathrm{parf}})^*$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ qui étend la structure d'extension ci-dessus. On dira que cette bi-extension est la bi-extension universelle.

La preuve se divise en deux parties. On commence par prouver le théorème pour $G = W_{n,k}$.

THÉORÈME 1.4.2. — *Pour tout $n \geq 1$, $D_{W_{n,k}^{\mathrm{parf}}}$ est représenté par $W_{n,k}^{\mathrm{parf}}$ et la bi-extension universelle de $W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \times_k W_{n,k}^{\mathrm{parf}}$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est induite par $m_n^*((\mathcal{L}_n)^{\mathrm{parf}})$ où m_n est la multiplication dans $W_{n,k}^{\mathrm{parf}}$ et $(\mathcal{L}_n)^{\mathrm{parf}}$ est l'isogénie de Lang* (0.2.2).

Rappelons simplement la construction de l'isomorphisme

$$W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \longrightarrow D_{W_{n,k}}^{\mathrm{parf}}.$$

Soient $A \in \mathrm{Alg}^{\mathrm{parf}}/k$ et $u \in W_{n,k}^{\mathrm{parf}}(A)$; on obtient alors un élément de $\mathrm{Ext}^1(W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \otimes_k A, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ en tirant par

$$\begin{array}{ccccc} W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \otimes_k A & \longrightarrow & W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \otimes_k A & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & W_{n,k}^{\mathrm{parf}} \\ v & \longmapsto & uv & & \end{array}$$

l'élément correspondant à l'isogénie de Lang (0.2.2). Les détails se trouvent dans [2], §1, 1.1.3.

Remarque 1.4.3 :

(i) Plus généralement, le dual de Serre de $\left(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i,k}\right)^{\mathrm{parf}}$ existe et est isomorphe à $\left(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i,k}\right)^{\mathrm{parf}}$.

De plus la bi-extension universelle est induite par $\bigotimes_i \mathrm{pr}_i^*(m_i^*(\mathcal{L}_i)^{\mathrm{parf}})$ où pr_i est la projection canonique de $\big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\big)^{\mathrm{parf}} \times_k \big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\big)^{\mathrm{parf}}$ dans $W_{n_i}^{\mathrm{parf}} \times_k W_{n_i}^{\mathrm{parf}}$, où $\mathcal{L}_i$ est le torseur de Lang sur $W_{n_i}^{\mathrm{parf}}$ et où m_i est la multiplication dans $W_{n_i}^{\mathrm{parf}}$. D'après le théorème du carré (0.2.1.2), cette bi-extension est canoniquement isomorphe à $\lambda^*(\mathcal{L}_n)^{\mathrm{parf}}$ où $\mathcal{L}_n$ est le torseur de Lang sur $W_{n,k}$ pour un n quelconque supérieur ou égal aux n_i et où λ est le k-morphisme suivant :

$$\prod_{i=1}^r W_{n_i,S} \times_S \prod_{i=1}^r W_{n_i,S} \longrightarrow W_{n,S},$$
$$\big((x_i),(y_i)\big) \longmapsto \sum_{i=1}^r V^{n-n_i}(x_i,y_i).$$

On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 1.4.4. — *Soit G un k-schéma en groupes unipotent connexe. Il existe un k-morphisme $f : W \to G$ de k-schémas en groupes (où W est un produit de vecteurs de Witt) tels que* : $\mathrm{Ker}(f)$ (*resp.* $\mathrm{Coker}(f)$) *est un k-schéma en groupes connexe* (*resp. radiciel*).

Preuve. — On procède par récurrence sur la dimension d de G. Si $d = 0$, G est alors radiciel et le lemme est trivial. Si G est un groupe unipotent connexe de dimension $d \geq 1$, on peut montrer par récurrence sur la longueur d'une suite de composition que G contient un sous-groupe isomorphe à G_a. En effet, si G a une suite de composition de longueur 1, le résultat est évident. Si G a une suite de composition de longueur n qui commence par α_p, on dispose alors d'une suite exacte $0 \to \alpha_p \to G \to G' \to 0$ où G' est un groupe unipotent possedant une suite de composition de longueur inferieur à celle de G. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \alpha_p & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \to & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \alpha_p & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G_a & \to & 0. \end{array}$$

D'après [6], chap III, §6, n° 5, cor. 5.5, l'extension H est soit triviale, soit isomorphe à G_a.

On dispose alors d'une suite exacte de k-schémas en groupes unipotents connexes :

$$0 \to G_a \longrightarrow G \longrightarrow G' \to 0$$

où G' est un k-schéma en groupes unipotent connexe de dimension $(d-1)$. On en déduit un k-homomorphisme $g : W' \to G'$ (où W' est un produit de vecteur de Witt) vérifiant le lemme 1.4.4 et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G_a & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle h} & & \uparrow{\scriptstyle g} & & \\ 0 & \longrightarrow & G_a & \longrightarrow & L & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où $\mathrm{Ker}(h)$ (resp. $\mathrm{Coker}(h)$) est isomorphe à $\mathrm{Ker}(g)$ (resp. $\mathrm{Coker}(g)$). D'après [18], chap VII, n° 12, th. 3, L est un quotient d'un produit de vecteurs de Witt $W'' \xrightarrow{s} L \longrightarrow 0$ par un k-groupe connexe. Le k-morphisme $h \circ s : W'' \to G$ répond à la question. □

Preuve du théorème 1.4.1 (voir [2], §1, 1.2.1). — D'après le lemme 1.4.4, tout k-groupe quasi-algébrique unipotent connexe est quotient d'un produit fini de k-groupes parfaits de vecteurs de Witt de longueur finie par un sous-k-groupe quasi-algébrique connexe (car si H est un k-groupe radiciel, on a $H^{\mathrm{parf}} = 0$ d'après 1.1.2 (iii)). Donc il existe une k-suite exacte :

$$\prod_{i=1}^{r} (W_{n_i})^{\mathrm{parf}} \xrightarrow{g} \prod_{j=1}^{s} (W_{m_j})^{\mathrm{parf}} \longrightarrow G^{\mathrm{parf}} \to 0$$

où le noyau de g est connexe. On définira alors $(G^{\mathrm{parf}})^*$ comme étant le noyau du transposé g^* de g. Reste à voir qu'il représente bien le foncteur $D_{G^{\mathrm{parf}}}$, ce qui est fait dans [2], §1, 1.2.1, et que $(G^{\mathrm{parf}})^*$ est bien un k-groupe parfait unipotent connexe.

D'après (1.4.3), la flèche g^* est un homomorphisme de $\prod_{j=1}^{s} (W_{m_j})^{\mathrm{parf}}$ dans $\prod_{i=1}^{r} (W_{n_i})^{\mathrm{parf}}$. On utilise alors le lemme 1.0.2 pour conclure que g^* se factorise en un cran fini, ce qui signifie qu'il existe un k-morphisme

$$g' : \Big(\prod_{j=1}^{s} W_{m_j}\Big) \longrightarrow \Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big)$$

tel que $g^* = (g')^{\mathrm{parf}}$. Posons alors $G' := \mathrm{Ker}(g')$. D'après le lemme 1.0.2, G' est un k-schéma en groupes unipotent, et G'^{parf} est isomorphe à $(G^{\mathrm{parf}})^*$ d'après 1.1.2 (iii).

Pour voir que $(G^{\mathrm{parf}})^*$ est connexe, il suffit de construire une isogénie entre G^{parf} et $(G^{\mathrm{parf}})^*$. Elle est construite de la manière suivante. D'après le théorème 1.3.4, il existe une isogénie $\beta : G^{\mathrm{parf}} \to (\prod_{\ell=1}^{t} W_{n_\ell})^{\mathrm{parf}}$ et Bégueri montre que le transposé β^* de β est encore une isogénie, (voir ([2], §1, 1.2.1)). Alors $\beta^* \circ \beta$ est une isogénie de G^{parf} sur $(G^{\mathrm{parf}})^*$. □

1.5. Paires duales admissibles de schémas en groupes unipotents.

Soit S un k-schéma noethérien.

DÉFINITIONS 1.5.1.

(i) *Un S-schéma en groupes unipotents connexes est un S-schéma en groupes commutatifs plat et de type fini M tel que, pour tout point parfait s de S (i.e. tout point s de S à valeurs dans un corps parfait $k(s)$), la fibre M_s est un $k(s)$-schéma en groupes (commutatifs) unipotent connexe.*

(ii) *Une paire duale de S-schémas en groupes unipotents connexes est un triplet $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ où M et M' sont des S-schémas en groupes unipotents connexes, où $\mathcal{L}_{M',M}$ est une bi-extension (de S- schémas en groupes commutatifs) de $M' \times_S M$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ qui provient pour un entier $n \gg 0$ (et donc pour tout entier $n \gg 0$) d'une bi-extension $\mathcal{L}_{n,M',M}$ de $M' \times_S M$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et tel que, pour tout point parfait s de S, $(M'_s)^{\mathrm{parf}}$ est le dual de Serre de $(M_s)^{\mathrm{parf}}$ et $(\mathcal{L}_{M',M,s})^{\mathrm{parf}}$ est la bi-extension universelle correspondante.*

(iii) *Soient $(M_1, M'_1, \mathcal{L}_1)$ et $(M_2, M'_2, \mathcal{L}_2)$ deux paires duales de S-schémas en groupes unipotents connexes. Un morphisme $(f, f') : (M_1, M'_1, \mathcal{L}_1) \to (M_2, M'_2, \mathcal{L}_2)$ est une paire de S-morphismes de S-schémas en groupes $f : M_1 \to M_2$, $f' : M'_2 \to M'_1$ telle que on a l'adjonction suivante : $(\mathrm{id} \times f)^* \mathcal{L}_2 = (f' \times \mathrm{id})^* \mathcal{L}_1$ en tant que bi-extensions de $M'_2 \times_S M_1$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.*

DÉFINITIONS 1.5.2.

(i) *Une isogénie $a : M_1 \to M_2$ entre deux S-schémas en groupes unipotents connexes est dite admissible s'il existe un troisième S-schéma en groupes unipotents connexes, une isogénie radicielle $a_{\mathrm{rad}} : M_1 \to M_3$ ($\mathrm{Ker}(a_{\mathrm{rad}})$ est fini, plat et radiciel sur S) et une isogénie étale $a_{\text{ét}} : M_3 \to M_2$ ($\mathrm{Ker}(a_{\text{ét}})$ est fini et étale sur S) tel que $a = a_{\text{ét}} \circ a_{\mathrm{rad}}$.*

(ii) *Une paire duale de S-schémas en groupes unipotents connexes $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ est admissible s'il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$*

de S pour la topologie de Zariski et, pour chaque $i \in I$, des entiers $n_{i,1}, ..., n_{i,r_i} \geq 1$ et $m_i \geq 0$ et des isogénies admissibles

$$M \times_S U_i \xrightarrow{\alpha_i} (W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \ldots \times W_{n_{i,r_i}}) \times_S U_i$$

$$M' \times_S U_i \xrightarrow{\beta_i} (W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \ldots \times W_{n_{i,r_i}}) \times_S U_i$$

$$(W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \ldots \times W_{n_{i,r_i}}) \times_S U_i \xrightarrow{\alpha'_i} M' \times_S U_i$$

$$(W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \ldots \times W_{n_{i,r_i}}) \times_S U_i \xrightarrow{\beta'_i} M \times_S U_i$$

tels que, pour tout entier $n > 0$, on ait

$$(F^{m_i} \times \alpha_i)^* \mathcal{L}_{n,i} = (\alpha'_i \times \mathrm{id})^* \mathcal{L}_{n,M',M,U_i},$$
$$(\beta_i \times F^{m_i})^* \mathcal{L}_{n,i} = (\mathrm{id} \times \beta'_i)^* \mathcal{L}_{n,M',M,U_i}$$

en tant que bi-extensions de $(W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \cdots \times W_{n_{i,r_i}} \times_S (M' \times_S U_i)$ et $(M' \times_S U_i) \times_S (W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \cdots \times W_{n_{i,r_i}})$ respectivement, où $\mathcal{L}_{n,M',M,U_i}$ est la restriction de $\mathcal{L}_{n,M',M}$ à $M \times_S M' \times_S U_i$, où $\mathcal{L}_{n,i}$ est la bi-extension universelle de $(W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \cdots \times W_{n_{i,r_i}})^2 \times_S U_i$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ cf. (1.4.3) (i)) et où $F : W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \cdots \times W_{n_{i,r_i}} \to W_{n_{i,1}} \times W_{n_{i,2}} \times \cdots \times W_{n_{i,r_i}}$ est l'endomorphisme de Frobenius.

Remarque 1.5.3. — Si $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ est une paire duale (resp paire duale admissible), il en ait de même pour $(M', M, \mathcal{L}_{M,M'} = \tau^* \mathcal{L}_{M',M})$ où $\tau : M \times_S M' \to M' \times_S M$ est donné par $(m, m') \to (m', m)$.

Exemples 1.5.4.

LEMME 1.5.4.1. — *Soit G un k-groupe algébrique unipotent connexe. Alors il existe un k-groupe algébrique unipotent connexe G' et $\mathcal{L}_{G',G}$ dans* Bi-ext$(G' \times_S G, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ *tel que $(G, G', \mathcal{L}_{G',G})$ soit une paire duale. De plus cette paire est automatiquement admissible.*

Preuve. — D'après (1.4.1), il existe un k-schéma en groupes commutatif unipotent connexe G' et un isomorphisme $g : (G^{\mathrm{parf}})^* \to G'^{\mathrm{parf}}$. D'après 1.2.2, il existe une bi-extension $\mathcal{L}_{G',G}$ de $G' \times_S G$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ telle que $\mathcal{L}_G = (g \times \mathrm{id})^* (\mathcal{L}_{G',G})^{\mathrm{parf}}$ (où $\mathcal{L}_G$ est la bi-extension universelle de $G^{\mathrm{parf}} \times_k (G^{\mathrm{parf}})^*$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$).

Choisissons arbitrairement une isogénie $\alpha : G \to \prod_{i=1}^{r} W_{n_i}$ (il en existe par 1.3.4) et soit $(\alpha^{\mathrm{parf}})^*$ la transposée de α^{parf}. Alors, en considérant les morphismes :

$$\Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big)^{\mathrm{parf}} \xrightarrow{(\alpha^{\mathrm{parf}})^*} (G^{\mathrm{parf}})^* \xrightarrow{g} G'^{\mathrm{parf}} \xrightarrow{\mathrm{can}_0} G'$$

on voit qu'il existe un entier $m \geq 0$ et une isogénie $\alpha' : \prod_{i=1}^{r} W_{n_i} \to G'$ tel que $\alpha' \circ \mathrm{can}_m = \mathrm{can}_0 \circ g \circ (\alpha^{\mathrm{parf}})^*$ et donc tel que $(F^m \times \alpha)^* \mathcal{L} = (\alpha' \times \mathrm{id})^* \mathcal{L}_{G',G}$ où $\mathcal{L}$ est la bi-extension de Lang sur $\big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\big)^2$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ déduite de l'extension de Lang de $\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_n$ (cf. 1.4.3).

On procède de même pour β et β' (remarquons que l'on peut remplacer m par $m + m'$ et α' par $\alpha' \circ F'^{m}$ pour tout entier $m' \geq 0$).

1.5.4.2. En particulier si $G = \prod_{i=1}^{r} W_{n_{i,k}}$, on peut prendre $G' = \prod_{i=1}^{r} W_{n_{i,k}}$ et $\mathcal{L}_{G',G}$ la bi-extension induite par $\lambda^*(\mathcal{L}_n)$.

1.5.4.3. Soient E un fibré de rang r sur S, E' le fibré dual et $\mathcal{L}_{E',E}$ la bi-extension sur $E' \times_S E$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ obtenue en tirant l'extension d'Artin-Schreier de $\mathbb{A}^1_{/S}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, par le morphisme naturel $E' \times_S E \to \mathbb{A}^1_{/S}$ et en induisant de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Alors $(E, E', \mathcal{L}_{E',E})$ est une paire duale admissible de schémas en groupes unipotents. Dans ce cas l'isogénie α_i n'est autre qu'une trivialisation de E sur U_i, α'_i est le transposé de α_i, β_i est l'inverse de α'_i et β'_i est l'inverse de α_i.

1.5.4.4. Soit $W_n(\mathcal{O}_S)$ le faisceau en anneaux sur S défini par $U \to W_n(\Gamma(U, \mathcal{O}_S))$. On a une équivalence de catégories entre la catégorie des $W_n(\mathcal{O}_S)$-modules $\mathcal{M}$ localement libres de rang r et la catégorie des S-schémas M en $W_{n,S}$-modules qui sont localement pour la topologie de Zariski sur S, isomorphes à $(W_{n,S})^r$. Soit M' le S-schéma en $W_{n,S}$-modules associé au $W_n(\mathcal{O}_S)$-module localement libre $\mathcal{M}' = \mathcal{H}\mathrm{om}_{W_n(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{M}, W_n(\mathcal{O}_S))$. Soit $\mathcal{L}_{M',M}$ la bi-extension de $M' \times_S M$ par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ obtenue en tirant l'extension d'Artin-Schreier sur $W_{n,S}$ par le morphisme naturel $M' \times_S M \to W_{n,S}$ et en induisant de $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Alors $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ est une paire duale admissible de schémas en groupes unipotents.

1.5.5. — On notera $\mathcal{L}_{M',M\psi}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse de rang 1 sur $M' \times_S M$ associé au $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-torseur $\mathcal{L}_{n,M',M}$ et au caractère $\Psi_n : p^{-n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^*$ pour $n \gg 0$ ((0.2.1), (0.0.2)).

2. Transformation de Fourier-Deligne sur les paires duales de schémas en groupes unipotents connexes.

2.1 Composition de noyaux.

Soient S un schéma de type fini sur k et X_1, X_2 deux S-schémas de type fini, et K_{21} un objet de $D_c^b(X_2 \times_S X_1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On définit alors un foncteur :

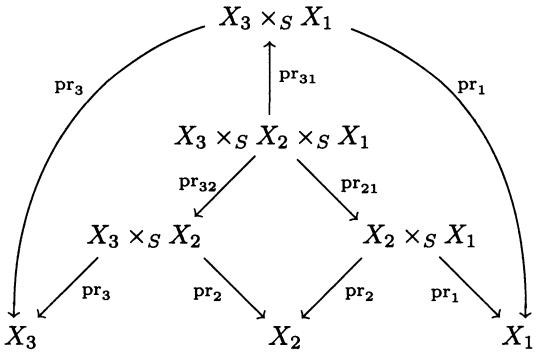
$$\mathcal{F}_{X_2 \leftarrow X_1, K_{21}!} : D_c^b(X_1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(X_2, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

$$\mathcal{F}_{X_2 \leftarrow X_1, K_{21}!}(M) = R\,\mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^* M \otimes K_{21})$$

où $\mathrm{pr}_1 : X_2 \times_S X_1 \to X_1$ et $\mathrm{pr}_2 : X_2 \times_S X_1 \to X_2$ sont les projections canoniques.

Le foncteur $\mathcal{F}_{X_2 \leftarrow X_1, K_{21}!}$ est appelé *l'opérateur de noyau* K_{21}.

Soient X_3 un troisième S-schéma de type fini et K_{32} un objet de $D_c^b(X_3 \times_S X_2, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, considérons le diagramme suivant :



On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.2. — *On a un isomorphisme fonctoriel* :

$$\mathcal{F}_{X_3 \leftarrow X_2, K_{32}!} \circ \mathcal{F}_{X_2 \leftarrow X_1, K_{21}!} = \mathcal{F}_{X_3 \leftarrow X_1, K_{31}!}$$

où $K_{31} = R\,\mathrm{pr}_{31!}(\mathrm{pr}_{32}^* K_{32} \otimes \mathrm{pr}_{21}^* K_{21})$.

Preuve. — En suivant le diagramme ci-dessus, et en utilisant le théorème de changement de base propre (*cf.* [21], XVII, 5.2.6) et de la formule des projections (*ibid.*, 5.2.9), on a :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{X_3\leftarrow X_2,K_{32!}} \circ \mathcal{F}_{X_2\leftarrow X_1,K_{21!}}(M) \\
&\quad = R\,\mathrm{pr}_{3!}(\mathrm{pr}_2^*\, R\,\mathrm{pr}_{2!}(\mathrm{pr}_1^*\, M \otimes K_{21}) \otimes K_{32}) \\
&\quad = R\,\mathrm{pr}_{3!}\big(R\,\mathrm{pr}_{32!}(\mathrm{pr}_{21}^*\,\mathrm{pr}_1^*\, M \otimes \mathrm{pr}_{21}^*\, K_{21}) \otimes K_{32}\big) \\
&\quad = R\,\mathrm{pr}_{3!}\, R\,\mathrm{pr}_{32!}\big((\mathrm{pr}_{21}^*\,\mathrm{pr}_1^*\, M \otimes \mathrm{pr}_{21}^*\, K_{21}) \otimes \mathrm{pr}_{32}^*\, K_{32}\big) \\
&\quad = R\,\mathrm{pr}_{3!}\, R\,\mathrm{pr}_{31!}\big((\mathrm{pr}_{31}^*\,\mathrm{pr}_1^*\, M \otimes \mathrm{pr}_{21}^*\, K_{21}) \otimes \mathrm{pr}_{32}^*\, K_{32}\big) \\
&\quad = R\,\mathrm{pr}_{3!}\big(\mathrm{pr}_1^*\, M \otimes R\,\mathrm{pr}_{31!}(\mathrm{pr}_{21} \otimes K_{21}^*\,\mathrm{pr}_{32}^*\, K_{32})\big).
\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1.3. — *Avec les notations de ci-dessus et pour $k = \mathbb{F}_q$, on a pour tout $x_2 \in X_2(\mathbb{F}_q)$:*

$$t_{\mathcal{F}_{X_2\leftarrow X_1,K_{21!}}(M)}(x_2) = \sum_{\substack{x_1\in X_1(\mathbb{F}_q)\\ \pi_1(x_1)=\pi_2(x_2)}} t_{K_{21}}(x_2,x_1)\cdot t_M(x_1)$$

où $\pi_1 : X_1 \to S$ et $\pi_2 : X_2 \to S$ sont les morphismes structuraux.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de (0.0.4) et (0.0.4.1). □

Remarque 2.1.4. — Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme de type fini entre S-schémas de type fini, on note $(f, \mathrm{id}) : X \to Y \times_S X$ le S-morphisme induit par f. Alors pour $K = R(f,\mathrm{id})_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \in \mathrm{ob}\, D_c^b(Y \times_S X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on a :

$$\mathcal{F}_{Y\leftarrow X,K!} = Rf_!, \quad \mathcal{F}_{X\leftarrow Y,K!} = Lf^*.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{Y\leftarrow X,K!}(\cdot) &= R\,\mathrm{pr}_{Y!}\big(\mathrm{pr}_X^*(\cdot) \otimes R(f,\mathrm{id})_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell\big) \\
&= R\,\mathrm{pr}_{Y!}\, R(f,\mathrm{id})_!\big((\mathrm{id},f)^*\,\mathrm{pr}_X^*(\cdot) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell\big) \\
&= Rf_!(\cdot).
\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour le deuxième isomorphisme. □

2.2. La Transformation de Fourier-Deligne [4], [11].

2.2.1. Soient S un k-schéma de type fini et $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ une paire duale de S-schémas en groupes unipotents connexes purement de dimension relative d (1.5.1). Considérons le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse $\mathcal{L}_{M',M,\psi}$ de rang 1 sur $M' \times_S M$ défini en (1.5.5). Dans toute la suite on le notera plus simplement par $\mathcal{L}_{\psi,S}$.

On note $\pi : M \to S$, $\pi' : M' \to S$ les morphismes structuraux et $\mathrm{pr} : M' \times_S M \to M$, $\mathrm{pr}' : M' \times_S M \to M'$ les deux projections canoniques.

DÉFINITION 2.2.2 (*cf.* [4] et [11]). — *La transformation de Fourier-Deligne pour* $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ *est l'opérateur de noyau* $\mathcal{L}_{\psi,S}[d]$ *appartenant à* $D_c^b(M' \times_S M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, *i.e.* :

$$\mathcal{F}_{M/S,\psi!} : D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(M', \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$\mathcal{F}_{M/S,\psi!}(K) = R\,\mathrm{pr}'!(\mathrm{pr}^* K \otimes \mathcal{L}_{\psi,S})[d].$$

Dans la notation de $\mathcal{F}_{M/S,\psi!}$ *on omettra le plus souvent le caractère* ψ *qui est définitivement fixé.*

Remarque 2.2.3. — D'après (0.0.4), on a pour tout $m' \in M'(\mathbb{F}_q)$:

$$t_{\mathcal{F}_{M/S!(K)}}(m') = (-1)^d \sum_{\substack{m \in M(\mathbb{F}_q) \\ \pi(m)=\pi'(m')}} t_K(m)\, t_{\mathcal{L}_{\psi,S}}(m', m).$$

Donc la fonction $t_{\mathcal{F}_{M/S!(K)}}$ est la transformation de Fourier usuelle (au signe près) de la fonction t_K relativement à la forme bilinéaire $t_{\mathcal{L}_{\psi,S}}$ (*cf.* (1.2.3)).

2.2.4. Nous allons montrer un certain nombre de propriétés de $\mathcal{F}_{M/S}$ analogue à celles de la transformation de Fourier pour les fonctions.

THÉORÈME 2.2.4.1 (Deligne). — *Si* $\mathcal{F}_{M'/S!}$ *désigne la transformation de Fourier-Deligne pour la paire duale* $(M', M, \mathcal{L}_{M,M'})$, *on a alors un isomorphisme fonctoriel* :

$$\mathcal{F}_{M'/S!} \circ \mathcal{F}_{M/S!}(K) = (-1)_* K(-d) \quad \text{pour } K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Preuve (voir [4]). — D'après (2.1.2), $\mathcal{F}_{M'/S!} \circ \mathcal{F}_{M/S!}(K)$ est un opérateur de noyau $R\,\mathrm{pr}_{31!}(\mathrm{pr}_{32}^* \mathcal{L}_{\psi,S} \otimes \mathrm{pr}_{21}^* \mathcal{L}_{\psi,S})[2d]$ où $X_1 = M$, $X_2 = M'$ et $X_3 = M$. Considérons le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} M \times_S M' \times_S M & \xrightarrow{\mu} & M' \times_S M \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_{31}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}} \\ M \times_S M & \xrightarrow[s]{} & M \end{array}$$

où $\mu(m_3, m', m_1) = (m', m_3 + m_1)$ et $s : M \times_S M \to M$ est la loi de groupe.

D'après (1.2.3), on a $\mathrm{pr}_{32}^* \mathcal{L}_{\psi S} \otimes \mathrm{pr}_{21}^* \mathcal{L}_{\psi,S} = \mu^* \mathcal{L}_{\psi,S}$ et d'après le théorème du changement de base propre on a :

$$R\,\mathrm{pr}_{31!}(\mathrm{pr}_{32}^* \mathcal{L}_{\psi,S} \otimes \mathrm{pr}_{21}^* \mathcal{L}_{\psi,S}) = s^* R\,\mathrm{pr}_! \mathcal{L}_{\psi,S}.$$

Or, pour tout point géométrique $\overline{m}$ localisé en un point m de M, par le théorème du changement de base propre de nouveau, on a :

$$(R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S})_{\overline{m}} = RG_c\big(M' \otimes_S \pi(\overline{m}), \mathcal{L}_{\psi,S\overline{m}}\big).$$

De plus, si $e(S)$ où $e : S \to M$ est la section nulle, $\mathcal{L}_{\psi,S\overline{m}}$ est de la forme $T_{\psi'}$ pour une extension T de M' par un sous-groupe fini A de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ avec T connexe et ψ' le composé de $A \hookrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ avec ψ. (Choisir une extension $A_1 \to T_1 \to M'$ avec $A_1 \hookrightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ qui induit $\overline{m} \in M' \otimes_S \pi(\overline{m}) = \mathrm{Ext}^1(M \otimes_S \pi(\overline{m}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et remplacer T_1 par une de ses composantes connexes T et A_1 par le stabilisateur A de T.) Par suite, d'après (0.2.1.4), $R\Gamma_c(M \otimes_S \pi(\overline{m}), \mathcal{L}_{\psi,S\overline{m}}) = 0$ si $\overline{m} \in e(S)$, de sorte que $R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S}$ est concentré sur $e(S)$. Le morphisme d'adjonction $R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S} \to e_*e^*R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S}$ est donc un isomorphisme. Une nouvelle application du théorème de changement de base propre aux diagrammes cartésiens suivants :

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{(\mathrm{id},e\circ\pi')} & M' \times_S M \\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{pr}} \\ S & \xrightarrow{e} & M \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & S \\ \downarrow{\scriptstyle(-\mathrm{id},\mathrm{id})} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ M \times_S M & \xrightarrow{s} & M \end{array}$$

montre que :

$$e^*R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S} = R\pi'_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M'}, \quad s^*e_* = (-\mathrm{id},\mathrm{id})_*\pi^*.$$

Or d'après le lemme (2.2.4.2) ci-dessous on a $R\pi_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,S}(-d)[-2d]$ d'où $s^*R\mathrm{pr}_!\,\mathcal{L}_{\psi,S} = (-\mathrm{id},\mathrm{id})_*\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,S}(-d)[-2d]$ et le théorème est démontrée (*cf.* remarque 2.1.5). □

LEMME 2.2.4.2. — *Soit M un S-schéma en groupes unipotents connexes purement de dimension relative d. Alors, le morphisme trace induit un isomorphisme $R\pi_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,S}(-d)[-2d]$.*

Preuve. — On a un morphisme trace

$$R\pi_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M} \longrightarrow R^{2d}\pi_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M}[-2d] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,S}(-d)[-2d]$$

et on veut montrer que c'est un isomorphisme. Il suffit de le voir fibre par fibre. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre

et la compatibilité du morphisme trace au changement de base (*cf.* [21], XVIII, 2.9), on se ramène au cas où $S = k$ est un corps algébriquement clos. D'après (1.5.1), M est alors un k-schéma en groupes unipotents connexe de dimension d. On raisonne par récurrence sur la dimension d. Si d est nul, M est alors extension successive de α_p et π est radiciel. On suppose que le morphisme trace est un isomorphisme pour tout k-schéma en groupes unipotents connexe de dimension $d' < d$. Si $\dim_k M = d > 0$, on peut trouver une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to N & \xrightarrow{g} & M & \xrightarrow{f} & G_{a,k} \to 0 \\ & \beta \searrow & \downarrow \pi & \swarrow \alpha & \\ & & \mathrm{Spec}(k) & & \end{array}$$

où N est un k-schéma en groupes unipotents connexe de dimension $(d-1)$. Le morphisme trace $Rf_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M} \to \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,G_{a,k}}(-d+1)[-2(d-1)]$ est un isomorphisme par hypothèse de récurrence pour N, car les fibres géométriques de f sont isomorphes à N. Par la suite spectrale de Leray on a $Rp_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M} = R\alpha_!\,Rf_!\,\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,M}$. On termine alors en utilisant *ibid.*, 2.9, var 4, (II) pour le k-schéma en groupes $G_{a,k}$ et la compatibilité du morphisme trace à la composition des morphismes (*ibid.*, 2.9). □

COROLLAIRE 2.2.4.3. — *$\mathcal{F}_{M/S!}(-)$ est une équivalence de catégories de $D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sur $D_c^b(M', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de quasi-inverse $(-1)^*\mathcal{F}_{M'/S!}(-)(d)$.*

PROPOSITION 2.2.4.4 (*cf.* [13], 1.2.2.4). — *Soient $(M_1, M_1', \mathcal{L}_1)$ et $(M_2, M_2', \mathcal{L}_2)$ deux paires duales de S-schémas en groupes unipotents connexes purement de dimensions relatives d_1 et d_2 respectivement, et (f, f') un morphisme entre ces deux paires. On a alors un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathcal{F}_{M_2/S!}(Rf!\,K_1) \leftarrow f'^*\mathcal{F}_{M_1/S!}(K_1)[d_2 - d_1].$$ □

PROPOSITION 2.2.4.5. — *La formation de $\mathcal{F}_{M/S!}(K)$ commute à tout changement de base $f : S_1 \to S$, i.e. on a un isomorphisme fonctoriel :*

$$f_{M'}^*\mathcal{F}_{M/S!}(K) = \mathcal{F}_{M_1/S_1!}(f_M^*K)$$

pour $K \in D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ où $(M_1, M_1', \mathcal{L}_{M_1', M_1})$ est la paire duale de S-schémas en groupes unipotents connexes déduite de $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ par le changement de base $f : S_1 \longrightarrow S$ et où $f_M : M \times_S S_1 \longrightarrow M$ et $f_{M'} : M' \times_S S_1 \longrightarrow M'$ sont les projections canoniques.

Preuve. — La proposition résulte directement du théorème de changement de base propre. □

3. La transformation de Fourier-Deligne et la dualité.

En gardant les notations de 2.2.1, on peut définir un autre foncteur entre $D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $D_c^b(M', \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui mérite aussi le nom de transformation de Fourier-Deligne. On le définit par :

$$\mathcal{F}_{M/S,\psi^*} = \mathcal{F}_{M/S^*} : D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_c^b(M', \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$
$$\mathcal{F}_{M/S^*}(K) = R\,\mathrm{pr}'_*(\mathrm{pr}^* K \otimes \mathcal{L}_{\psi,S})[d].$$

3.1. Résultat principal.

Le résultat principal de ce travail est le suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ est admissible, pour tout K dans* ob $D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, *la flèche d'oubli de supports*

$$\mathrm{can} : \mathcal{F}_{M/S!}(K) \longrightarrow f_{M/S^*}(K)$$

est un isomorphisme.

Ce résultat généralise [11], 2.4.1. La preuve sera donnée au paragraphe 3.3. On notera donc simplement $\mathcal{F}_{M/S} = \mathcal{F}_{M/S^*} = f_{M/S!}$ la transformation de Fourier-Deligne.

3.2. Le théorème 3.1 admet les corollaires suivants.

On suppose que la paire $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ est admissible et que les S-schémas M et M' sont lisses.

COROLLAIRE 3.2.1. — *On a un isomorphisme fonctoriel :*

$$D_{M'/S}\big(\mathcal{F}_{M/S,\psi}(K)\big) = \mathcal{F}_{M/S,\psi^{-1}}\big(D_{M/S}(K)\big)(d)$$

pour tout $K \in D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Preuve. — Cela résulte du théorème 3.1 et des théorèmes de dualités :

$$\begin{aligned}
D_{M'/S}\big(\mathcal{F}_{\psi!}(K)\big) &= D_{M'/S} R\,\mathrm{pr}'_!(\mathrm{pr}^*\,K \otimes \mathcal{L}_{\psi,S})[d] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, D_{M'\times M/S}(\mathrm{pr}^*\,K \otimes \mathcal{L}_{\psi,S})[-d] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathrm{pr}^*\mathrm{K} \otimes \mathcal{L}_{\psi,\mathrm{S}}, (\pi' \times_{\mathrm{S}} \pi)^!\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell\big)[-\mathrm{d}] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathcal{L}_{\psi,S}, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{pr}^*\,K, (\pi' \times_S \pi)^!\,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\big)[-d] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathcal{L}_{\psi,S}, D_{M'\times M/S}(\mathrm{pr}^*\,K)\big)[-d] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathcal{L}_{\psi,S}, \mathrm{pr}^!\,D_{M/S}(K)\big)[-d] \\
&= R\,\mathrm{pr}'_*\, \mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}\big(\mathcal{L}_{\psi,S}, \mathrm{pr}^*\,D_{M/S}(K)\big)[d](d),
\end{aligned}$$

car pr est lisse, purement de dimension relative d, donc $\mathrm{pr}^! = \mathrm{pr}^*[2d](d)$. On termine alors en remarquant que $\mathcal{L}_{\psi,S}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse sur $M' \times_S M$ de dual $\mathcal{L}_{\psi^{-1},S}$, d'où $\mathrm{R}\underline{\mathrm{hom}}(\mathcal{L}_{\psi,S},\cdot) = \mathcal{L}_{\psi^{-1},S} \otimes (\cdot)$. On a alors

$$D_{M'/S}\big(\mathcal{F}_{\psi!}(K)\big) = R\,\mathrm{pr}'_*\big(\mathrm{pr}^*\,D_{M/S}(K) \otimes \mathcal{L}_{\psi^{-1},S}\big)[d](d),$$

d'où le résultat. □

COROLLAIRE 3.2.2. — *Le foncteur $\mathcal{F}_{M/S}$ transforme les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur M en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers sur M'. En particulier, le foncteur $\mathcal{F}_{M/S}$ induit une équivalence de catégories abéliennes de* $\mathrm{Perv}(M,\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *sur* $\mathrm{Perv}(M',\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, *et transforme les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples sur M en $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers simples sur M'.*

Preuve. — Il suffit de montrer la première assertion compte tenu de 2.2.4.1. Comme pr est lisse, purement de dimension relative d, $\mathrm{pr}^*[d]$ est t-exact (*cf.* [1], 4.2.5); pr′ étant affine, $R\,\mathrm{pr}'_!$ est t-exact à gauche (*ibid.*, 4.1.2); de même $R\,\mathrm{pr}'_*$ est t-exact à droite (*ibid.*, 4.1.1). Donc $f_{M/S!}$ est t-exact à gauche et $f_{M/S*}$ est t-exact à droite. D'où le résultat d'après 3.1. □

3.3. Démonstration du théorème 3.1.

Comme l'énoncé 3.1 est local pour la topologie de Zariski sur S, il suffit de démontrer le théorème pour une paire duale $(M, M', \mathcal{L}_{M',M})$ munie d'isogénies :

$$M \xrightarrow{\alpha} \Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big) \times S, \quad \Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big) \times S \xrightarrow{\alpha'} M'$$

telles que $(F^m \times \alpha)^*\mathcal{L}_n = (\alpha' \times \mathrm{id})^*\mathcal{L}_{n,M',M}$ (*cf.* 1.5.2).

Réduction à la paire $\big((\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}) \times S, (\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}) \times S, \lambda^*\mathcal{L}\big)$.

Soient $(M_1, M_1', \mathcal{L}_1)$ et $(M_2, M_2', \mathcal{L}_2)$ deux paires duales et (δ, δ') un morphisme entre ces deux paires (*cf.* 1.5.1) :

$$M_1 \xrightarrow{\delta} M_2\,, \quad M_2' \xrightarrow{\delta'} M_1'\,.$$

LEMME 3.3.1. — *On suppose que δ et δ' sont des isogénies admissibles. Alors, il existe des isomorphismes de foncteurs $s_!$ et s_*, de sorte qu'on ait le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \delta'^*\mathcal{F}_{1!}(K) & \longrightarrow & \delta'^*\mathcal{F}_{1*}(K) \\ {\scriptstyle s_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_*} \\ \mathcal{F}_{2!}(R\delta_!K) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{2*}(R\delta_!K) \end{array}$$

les flèches horizontales étant les morphismes d'oubli des supports.

Preuve. — Considérons le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} M_2' \times M_1 & \xrightarrow{\delta' \times \mathrm{id}} & M_1' \times M_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_2'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1'} \\ M_2' & \xrightarrow{\delta'} & M_1'. \end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \delta'^* R\,\mathrm{pr}_1'(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) & \xrightarrow{\delta'^*(\mathrm{can})} & \delta'^* R\,\mathrm{pr}_{1*}'(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) \\ {\scriptstyle \tau_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_*} \\ R\,\mathrm{pr}_{2!}'(\delta' \times \mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & R\,\mathrm{pr}_{2*}'(\delta' \times \mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) \end{array}$$

la première flèche verticale est un isomorphisme par le théorème de changement de base propre, la flèche de changement de base τ_* est aussi un isomorphisme car δ' est le composé d'un morphisme étale et d'un morphisme radiciel. On a :

$$(\delta' \times \mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) = \mathrm{pr}_1^* K \otimes (\delta' \times \mathrm{id})^*\mathcal{L}_1 = \mathrm{pr}_1^* K \otimes (\mathrm{id} \times \delta)^*\mathcal{L}_2$$

où $\mathrm{pr}_1 : M_2' \times M_1 \to M_1$ est la première projection. Or

$$R\,\mathrm{pr}_{2!}' = R\,\mathrm{pr}_{2!}'\,R(\mathrm{id} \times \delta)_!, \quad R\,\mathrm{pr}_{2*}' = R\,\mathrm{pr}_{2*}'\,R(\mathrm{id} \times \delta)_*.$$

Donc en utilisant la formule des projections pour $\mathrm{id} \times \delta$, on obtient :

$$R\,\mathrm{pr}_{2!}'(\delta' \times \mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1 K \otimes \mathcal{L}_1) = R\,\mathrm{pr}_{2!}'(R(\mathrm{id} \times \delta)_*\,\mathrm{pr}_1^* K) \otimes \mathcal{L}_2,$$

$$R\,\mathrm{pr}_{2*}'(\delta' \times \mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) = R\,\mathrm{pr}_{2*}'(R(\mathrm{id} \times \delta)_*\,\mathrm{pr}_1 K) \otimes \mathcal{L}_2$$

(δ et donc $\mathrm{id}\times\delta$ est un morphisme fini). De plus, on a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} M_2' \times M_1 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & M_1 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times\delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\ M_2' \times M_2 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & M_2 \end{array}$$

d'où $R(\mathrm{id}\times\delta)_* \mathrm{pr}_1^* K = \mathrm{pr}_2^* R\delta_* K$ et le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\mathrm{pr}'_{2!}(\delta'\times\mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & R\mathrm{pr}'_{2*}(\delta'\times\mathrm{id})^*(\mathrm{pr}_1^* K \otimes \mathcal{L}_1) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ R\mathrm{pr}'_{2!}(\mathrm{pr}_2^* R\delta_* K \otimes \mathcal{L}_2) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & R\mathrm{pr}'_{2*}(\mathrm{pr}_2^* R\delta_* K \otimes \mathcal{L}_2) \end{array}$$

et d'où le lemme. □

Considérons alors, les paires duales

$$\begin{aligned} &(M, M', \mathcal{L}_{M',M}), \\ &\Big(\Big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\Big)\times S,\ \Big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\Big)\times S,\ (F^m\times\alpha)^*\lambda^*\mathcal{L}\Big), \\ &\Big(\Big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\Big)\times S,\ \Big(\prod_{i=1}^r W_{n_i}\Big)\times S,\ \lambda^*\mathcal{L}\Big) \end{aligned}$$

et les transformations de Fourier correspondantes $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

En appliquant (3.3.1) aux morphismes de paires (α, α') et (id, F^m), on obtient pour tout ob $D_c^b(M, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \alpha'^*\mathcal{F}_{1!}(K) & \longrightarrow & \alpha'^*\mathcal{F}_{1*}(K) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathcal{F}_{2!}(R\alpha_! K) & \longrightarrow & \mathcal{F}_{2*}(R\alpha_! K) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ (F^m)^*\mathcal{F}_{3!}(R\alpha_! K) & \longrightarrow & (F^m)^*\mathcal{F}_{3*}(R\alpha_! K) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes d'oubli des supports. Par suite, pour montrer que $\mathcal{F}_{1!}(K) \to \mathcal{F}_{1*}(K)$, il suffit de montrer que

$\mathcal{F}_{3!}(R\alpha_!K) \to \mathcal{F}_{3*}(R\alpha_!K)$ (α' est surjective) et donc on est ramené à démontrer le théorème 3.1 pour la paire

$$\Big(\Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big) \times S,\ \Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big) \times X,\ \lambda^*\mathcal{L}\Big).$$

Réduction au cas $r = 1$.

Introduisons les notations suivantes :

$$M = \Big(\prod_{i=1}^{r} W_{n_i}\Big) \times S, \quad S_1 = Wn_{r,S}\,, \quad S_2 = \Big(\prod_{i=1}^{r-1} W_{n_i}\Big) \times S.$$

On a alors $M = \big(\prod_{i=1}^{r-1} W_{n_i}\big) \times S_1 = W_{n_r,S_2}$ et des projections $\mathrm{pr}_0 : M \to S_1$, $\mathrm{pr}_0' : M \to S_2$. En s'inspirant de la relation (3.3.1.1)

$$\sum_{\substack{X_1,\dots,X_r \\ X_i \in \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}}} f(X_1,\dots,X_r)\,\psi_n\Big(\sum_{i=1}^{r} V^{n-n_i}(X_i \cdot Y_i)\Big)$$

$$= \sum_{x_r \in \mathbb{Z}/p^{n_r}\mathbb{Z}} \psi_n\big(V^{n-n_r}(X_r \cdot Y_r)\big) \times \Big[\sum_{\substack{X_1,\dots,X_{r-1} \\ x_i \in \mathbb{Z}/p^{n_i}\mathbb{Z}}} f(X_1,\dots,X_r)\,\psi_n\Big(\sum_{i=1}^{r-1} V^{n-n_i}(X_i \cdot Y_i)\Big)\Big]$$

on peut construire des isomorphismes de foncteurs $\gamma_!$ et γ_* tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{M/S_2!} \circ \mathcal{F}_{M/S_1!} & \xrightarrow{\text{can} \circ \text{can}} & \mathcal{F}_{M/S_2^*} \circ \mathcal{F}_{M/S_1^*} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_!} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_*} \\ \mathcal{F}_{M/S!} & \xrightarrow{\text{can}} & \mathcal{F}_{M/S^*}. \end{array}$$

Donc, pour montrer 3.1, on est ramené au cas $M = W_{n,S}$.

On procède par récurrence sur n, en s'inspirant d'une relation analogue à celle de (3.3.1.1). Pour $n = 1$, l'énoncé du théorème 3.1 pour $W_{1,S}$ n'est autre que le théorème 2.4.1 de [11] pour $\mathbb{A}^1_{/S}$. On supposera donc que le théorème 3.1 est vrai pour tout $W_{n',S'}$ où $n' < n$ et S' est un $\mathbb{F}_q$-schéma de type fini et on va le montrer pour $W_{n,S}$.

Pour tout corps fini k de car p, on a la relation (*) :

$$\sum_{X\in W_n(k)} f(X)\,\psi_{n,k}(X\cdot Y)$$
$$= \sum_{X_0\in k} \psi_{1,k}\big(Y_{n-1^*}(X_0)^{p^{n-1}}\big)$$
$$\times \Big[\psi_{n,k}(\underline{X}_0, \mathcal{S}(Y'))\Big[\sum_{X'\in W_{n-1}(k)} f\big(\underline{X}_0 + V(X')\big)\,\psi_{n-1,k}\big(X'\cdot F(Y')\big)\Big]\Big].$$

Pour $x, y \in W_n(k)$, on a noté $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ l'élément de $W_{n-1}(k)$ défini par $\tau(x) = V(x')$ et on a posé $y' = R(y) \in W_{n-1}(k)$. Rappelons qu'on a (*cf.* (0.1.3.2)) :

$$x = \underline{x}_0 + V(x'), \quad y = V^{n-1}(y_{n-1}) + \mathcal{S}(y'),$$

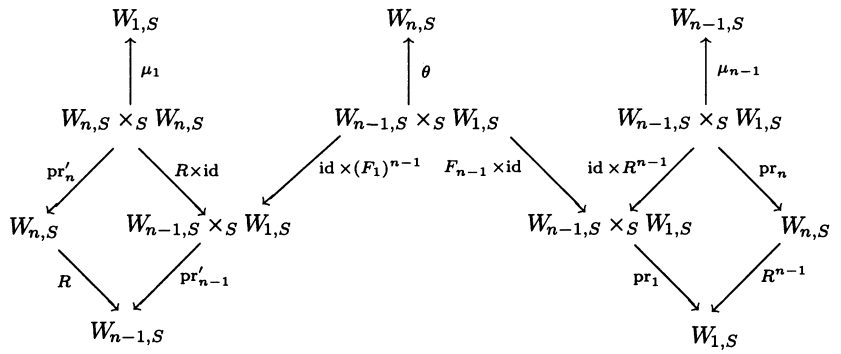
de sorte que

$$x\cdot y = V^{n-1}\big(y_{n-1}\cdot (x_0)^{p^{n-1}}\big) + V\big(x'\cdot F(y')\big) + \underline{x}_0\cdot \mathcal{S}(y')$$

(on a $V(x')\cdot\mathcal{S}(y') = V(x'\cdot F(y'), \underline{x}_0\cdot V^{n-1}(y_{n-1}) = V^{n-1}\big(y_{n-1}\cdot(x_0)^{p^{n-1}}\big)$ et $V^{n-1}(y_{n-1}) = \tau(x)\cdot V^{n-1}(y_{n-1}) = 0$).

On a noté $\psi_{n,k} = \psi_n \circ \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p} : W_n(k) \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ le caractère additif de $W_n(k)$ induit par ψ_n.

Dans toute la suite, on suivra les notations du diagramme 1 :



$R(y) = y'$ $\quad$ $F_1(x_0) = x_0^p$ $\quad$ $R^{n-1}(x) = x_0$

$\mathrm{pr}'_{n-1}(y', x_0) = y'$ $\quad$ $\theta(y', x_0) = x_0\cdot\mathcal{S}(y')$ $\quad$ $\mathrm{pr}_1(y', x_0) = x_0$

$\mathrm{pr}'_n(y, x_0) = y$ $\quad$ $F_{n-1}(y') = F(y')$ $\quad$ $\mathrm{pr}_n(y', x) = x$

$\mu_1(y, x_0) = y_{n-1}\cdot x_0$ $\quad$ $\mu_{n-1}(y', x) = x'\cdot y'$

Diagramme 1

On note $\mathcal{L}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau sur $W_{1,S} \times_S W_{n-1,S}$ définit par $\theta^* \mathcal{L}_{\psi_n}$ où

$$\begin{aligned} \theta : W_{1,S} \times_S W_{n-1,S} &\longrightarrow W_{n,S}\,, \\ (x_0, y') &\longmapsto \underline{x}_0 \cdot \mathcal{S}(y'). \end{aligned}$$

La relation (*) suggère :

LEMME 3.3.2. — *Il existe deux isomorphismes canoniques $r_!$ et r_* tel que l'on ait pour tout $K \in \mathrm{ob}\, D_c^b(W_{n,S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ le diagramme commutatif suivant :*

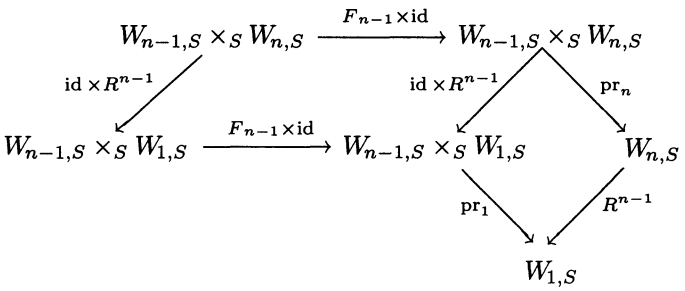
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{W_n/S!}(K) & \xleftarrow{r_!} & \mathcal{F}_{W_{1,S}\times_S W_{n-1,S}/W_{n-1,S!}}\big[(\mathrm{id}\times F_1^{n-1}) \\ & & *\big[(F_{n-1}\times \mathrm{id})^* \mathcal{F}_{W_{n,S}/W_{1,S}!}(K)\otimes \mathcal{L}\big]\big] \\ \Big\downarrow \mathrm{can} & & \Big\downarrow \mathrm{can}[(\mathrm{id}\times F_1^{n-1})*[(F_{n-1}\times\mathrm{id})^*\,\mathrm{can}\otimes \mathrm{id}] \\ \mathcal{F}_{W_n/S^*}(K) & \xleftarrow{r_*} & \mathcal{F}_{W_{1,S}\times_S W_{n-1,S}/W_{n-1,S}} * \big[(\mathrm{id}\times F_1^{n-1}) \\ & & *\big[(F_{n-1}\times \mathrm{id})^* \mathcal{F}_{W_{n,S}/W_{1,S}} * (K)\otimes \mathcal{L}\big]\big] \end{array}$$

où $\mathcal{F}_{W_{n,S}/W_{1,S}!}$ (resp. $\mathcal{F}_{W_{1,S}\times_S W_{n-1,S}/W_{n-1,S}!}$) désigne la transformation de Fourier-Deligne associée à la paire duale

$$(W_{n,S}/W_{1,S}, W_{n-1,S} \times_S W_{1,S}/W_{1,S}, \mathcal{L}_{n-1})$$

avec $\mathcal{L}_{n-1} = \mu_{n-1}^* \mathcal{L}_{\psi_{n-1}}$ (resp. $(W_{n,S}/W_{n-1,S}, W_{n-1,S} \times_S W_{1,S}/W_{n-1,S}, \mathcal{L}_1)$ avec $\mathcal{L}_1 = \mu_1^* \mathcal{L}_{\psi_1}$).

Preuve. — Notons $L_!$ (resp L_*) le membre droite de $r_!$ (resp r_*). Le lemme résultera d'une succession de diagrammes commutatifs, obtenus en utilisant le théorème de changement de base propre (resp lisse) et les formules de projections. Considérons le diagramme suivant :



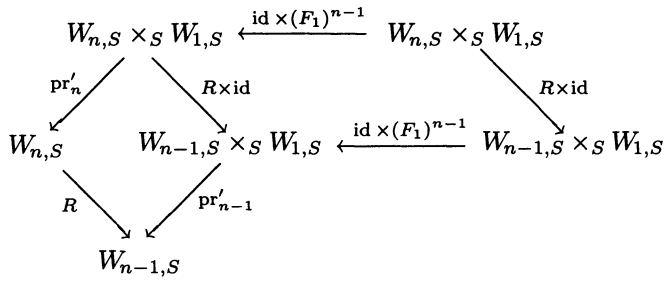
On en déduit le diagramme commutatif de foncteurs suivant :

$$\begin{array}{ccc} (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_! & \longrightarrow & (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_* \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_! (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* & \longrightarrow & R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_* (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* \end{array}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes car $F_{n-1}\times \mathrm{id}$ est un morphisme radiciel. Il s'en suit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* \mathcal{F}_{W_{n,S}/W_{1,S}!}(K)\otimes \mathcal{L} & \longrightarrow & R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_! \\ & & \big(\mathrm{pr}_n^*(K)\otimes (F_{n-1}\times \mathrm{id})^*\mathcal{L}_1\big) \\ \simeq \downarrow & & \otimes \mathcal{L}[n-1] \\ & & \simeq \downarrow \\ (F_{n-1}\times \mathrm{id})^* \mathcal{F}_{W_{n,S}/W_{1,S}*}(K)\otimes \mathcal{L} & \longrightarrow & R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_* \\ & & \big(\mathrm{pr}_n^*(K)\otimes (F_{n-1}\times \mathrm{id})^*\mathcal{L}_1\big) \\ & & \otimes \mathcal{L}[n-1] \end{array}$$

puisque $\mathrm{pr}_n \circ (F_{n-1}\times \mathrm{id}) = \mathrm{pr}_n$. (On a fait tourner le diagramme du lemme 3.3.2.) De la même manière considérons le diagramme suivant :



Comme $\mathrm{id}\times F_1^{n-1}$ est un morphisme fini, on a un isomorphisme de changement de base diagramme

$$(R\times \mathrm{id})^*(\mathrm{id}\times F_1^{n-1})\circ \longrightarrow (\mathrm{id}\times F_1^{n-1}) * (R\times \mathrm{id})^*.$$

Par suite, en utilisant la formule des projections pour le morphisme

$\mathrm{id}\times F_1^{n-1}$, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_! & \longrightarrow & R\,\mathrm{pr}'_{n!}\big[(R\times\mathrm{id})^*R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_! \\ & & \quad (\mathrm{pr}_n^*(K)\otimes(F_{n-1}\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}_1)\otimes(R\times\mathrm{id})^*\mathcal{L} \\ \simeq\big\downarrow & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times F_1^{n-1})^*\mathcal{L}_{n-1})\big][1+n-1] \\ & & \quad\quad \big\downarrow\simeq \\ L_! & \longrightarrow & R\,\mathrm{pr}'_{n*}\big[(R\times\mathrm{id})^*R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_* \\ & & \quad (\mathrm{pr}_n^*(K)\otimes(F_{n-1}\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}_1)\otimes(R\times\mathrm{id})^*\mathcal{L} \\ & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times F1^{n-1})^*\mathcal{L}_{n-1})\big][1+n-1]. \end{array}$$

Enfin, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_{n,S}\times_S W_{n,S} & \xrightarrow{R\times\mathrm{id}} & W_{n-1,S}\times_S W_{n,S} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times R^{n-1}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times R^{n-1}} \\ W_{n,S}\times_S W_{1,S} & \xrightarrow{R\times\mathrm{id}} & W_{n-1,S}\times_S W_{1,S}. \end{array}$$

On a le diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} R(R\times\mathrm{id})^*(\mathrm{id}\times R^{n-1})_! & \longrightarrow & (R\times\mathrm{id})^*R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_* \\ \simeq\big\downarrow & & \big\downarrow\simeq \\ R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_!(R\times\mathrm{id})^* & \longrightarrow & R(\mathrm{id}\times R^{n-1})_*(R\times\mathrm{id})^* \end{array}$$

où la flèche verticale gauche (resp. droite) est un isomorphisme par le théorème de changement de base propre (resp. lisse).

Or $\mathrm{pr}'_n\circ(\mathrm{id}\times R^{n-1})=\mathrm{pr}' : W_{n,S}\times_S W_{n,S}\to W_{n,S}$ est la première projection canonique, $\mathrm{pr}_n\circ(R\times\mathrm{id})=\mathrm{pr} : W_{n,S}\times_S W_{n,S}\to W_{n,S}$ est la seconde projection canonique.

On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L_! & \longrightarrow & R\,\mathrm{pr}'_!\big[\mathrm{pr}^*(K)\otimes(R\times\mathrm{id})^*(F_{n-1}\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}_1 \\ & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times R^{n-1})^*(R\times\mathrm{id})^*\mathcal{L} \\ \simeq\big\downarrow & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times R^{n-1})^*(\mathrm{id}\times F1^{n-1})^*\mathcal{L}_{n-1}\big][n] \\ & & \quad\quad \simeq\big\downarrow \\ L_* & \longrightarrow & R\,\mathrm{pr}'_*\big[\mathrm{pr}^*(K)\otimes(R\times\mathrm{id})^*(F_{n-1}\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}_1 \\ & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times R^{n-1})^*(R\times\mathrm{id})^*\mathcal{L} \\ & & \quad \otimes(\mathrm{id}\times R^{n-1})^*(\mathrm{id}\times F1^{n-1})^*\mathcal{L}_{n-1})\big][n] \end{array}$$

D'après le théorème du carré, on voit que le noyau

$$(R \times \mathrm{id})^*(F_{n-1} \times \mathrm{id})^*\mathcal{L}_1 \otimes (\mathrm{id} \times R^{n-1})^*(R \times \mathrm{id})^*\mathcal{L} \otimes (\mathrm{id} \times R^{n-1})^*(\mathrm{id} \times F_1^{n-1})^*\mathcal{L}_{n-1}$$

n'est autre que $\mathcal{L}_{\psi_n}(x \cdot y)$, d'où le lemme. □

Fin de la preuve de 3.1. — On termine alors la preuve du théorème 3.1, en utilisant le lemme 3.3.2 et l'hypothèse de récurrence appliquée aux paires duales $(W_{n,S}/W_{1,S}, W_{n-1,S} \times_S W_{1,S}/W_{1,S}, \mathcal{L}_{n-1})$ et $(W_{n,S}/W_{n-1,S}, W_{n-1,S} \times_S W_{1,S}/W_{n-1,S}, \mathcal{L}_1)$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.A. BEILINSON, I.N. BERNSTEIN, P. DELIGNE, Faisceaux pervers, dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I), Conférence de Luminy, juillet 1981, Astérisque, 100 (1982).

[2] L. BEGUERI, Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos, Bull. Soc. Math. de France, mémoire 108 (1980).

[3] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Éléments de Mathématiques, chap. 8–9, Hermann.

[4] P. DELIGNE, Lettre à D. Kazhdan, 29 novembre 1976.

[5] P. DELIGNE, La conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S., 52 (1981).

[6] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, Groupes algébriques, vol. 1, Masson, Paris, 1970.

[7] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, Introduction to Algebraic Geometry and Algebraic Groups, North–Holland Mathematics Studies, 39 (1980).

[8] T. EKEDAHL, On the adic formalism, The Grothendieck Festschrift, vol. II, Progress in Math., Birkhäuser (1990).

[9] R. HARTSHORNE, Residues and duality, Lecture notes in Math., vol. 20, Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1966).

[10] N.M. KATZ, Travaux de Laumon, Séminaire Bourbaki, exposé 691 (1987–88).

[11] N.M. KATZ, G. LAUMON, Transformation de Fourier et majoration des sommes exponentielles, Publ. Math. I.H.E.S., 62 (1985), 361–418.

[12] S. LANG, Algebraic groups over finite fields, Amer. J. Math., 78 (1956), 555–563.

[13] G. LAUMON, Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, Publ. Math. I.H.E.S., 65 (1987), 131–210.

[14] D. MUMFORD, Abelian Varieties, Oxford University Press, Oxford, 1970.

[15] D. MUMFORD, Bi–extension of formal groups, in Algebraic Geometry, paper presented at the Bombay colloquium 1968, Oxford University Press, 1969.

[16] J.-P. SERRE, Corps Locaux, Hermann, Paris, 1968.

[17] J.-P. SERRE, Groupes proalgébriques, Publ. Math. I.H.E.S., 7 (1960).

[18] J.-P. SERRE, Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, Paris, 1968.

[19] SGA1, Revêtement Etales et Groupe Fondamental, dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer Verlag (1971).

[20] SGA3, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lecture Notes in Math., vol. 151, 152, 153, Springer Verlag (1970).

[21] SGA4, Théorie des Topos et cohomologie étales des schémas, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270 et 305 Springer Verlag (1972, 1973).

[22] SGA41/2, Cohomologie étale, par P. Deligne, avec la collaboration de J.-F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J.-L. Verdier, Lecture Notes in Math., vol. 569. Springer Verlag (1977).

[23] SGA5, Cohomologie ℓ–adique et Fonction L, dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de I. Bucur, C. Houzel, L. Illusie, J.-P. Jouanolou et J.-P. Serre, Lecture Notes in Math., vol. 225, Springer Verlag (1971).

Manuscrit reçu le 11 mars 1996,
accepté le 28 mai 1996.

Moussa SAIBI,
LAMIFA
Université de Picardie
33 rue Saint–Leu
80039 Amiens (France).