ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SOPHIE CHEMLA

Propriétés de dualité dans les représentations coinduites de superalgèbres de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 4 (1994), p. 1067-1090

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_4_1067_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 4 (1994), 1067–1090

PROPRIÉTÉS DE DUALITÉ DANS LES REPRÉSENTATIONS COINDUITES DE SUPERALGÈBRES DE LIE

par
Sophie CHEMLA

1. Introduction.

Le but de cet article est de donner une nouvelle démonstration d'un résultat — établi par M. Duflo dans le cas des algèbres de Lie de dimension finie puis généralisé dans [C] — concernant une propriété de dualité dans les représentations coinduites. Tout au long de ce travail, k désignera un corps commutatif de caractéristique nulle.

Soient $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous superalgèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et (π, V) une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un superespace V. Notons $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ la représentation coinduite de $\mathfrak{g}$ à partir de π et $I_\pi \subset U(\mathfrak{g})$ son noyau. Désignons par « $\check{}$ » l'antiautomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ défini comme suit : si X est dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\check{X} = -X$$

et si u, v sont deux éléments homogènes de $U(\mathfrak{g})$, on a

$$(uv)^{\check{}} = (-1)^{|v||u|} \check{v}\,\check{u}.$$

Si π^* est la représentation contragrédiente de π, le résultat s'énonce comme suit :

Mots-clés : Représentations coinduites – Dualité – Superalgèbres de Lie – Représentations induites de supergroupes.
Classification A.M.S. : 17B70 – 17A70 – 17B35.

THÉORÈME 3.1.1. — *Si* $\mathfrak{h}$ *est de codimension finie, on a la relation*

$$\overset{\vee}{I}_{\pi} = I_{\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)}$$

où $\mathfrak{h}$ *agit par le caractère* $-\operatorname{str} \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *sur* $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$, *le module bérézinien de* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$.

La démonstration que j'en propose est — même dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie — différente de celle de M. Duflo. Elle utilise la superalgèbre des opérateurs différentiels sur le $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(0)$-module $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ ainsi que la correspondance, mise en évidence par J. Bernstein, entre D-modules à droite et D-modules à gauche. Elle donne aussi une interprétation de la torsion apparaissant dans le théorème 3.1.1 en termes de D-modules. Dans [C], ce théorème est obtenu comme corollaire de la réalisation de la représentation induite d'une superalgèbre de Lie en termes de cohomologie locale de Grothendieck (dans l'ordre chronologique : [BB], [Le] et [C]).

Nous donnerons aussi une interprétation du théorème 3.1.1 en termes de représentations induites de supergroupes.

Donnons le plan de ce travail. La première partie est consacrée à quelques rappels concernant les A-$\mathfrak{g}$-modules, le module bérézinien, les représentations coinduites et le critère de coinduction de Blattner (cf. [Bla] et [Sch]). Dans la deuxième partie, je démontre le théorème de dualité sur les représentations coinduites (théorème 3.1.1) après en avoir proposé une interprétation en termes de représentations induites de supergroupes.

Fixons maintenant quelques conventions et notations que nous utiliserons constamment.

Notons $\bar{0}$ et $\bar{1}$ les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On appelle *superespace* un espace vectoriel V sur k gradué sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Si V et W sont deux superespaces, alors $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ est muni d'une structure naturelle de superespace. Si f est un morphisme de degré i de V dans W et si v est dans V_j, on pose :

$$\langle v, f \rangle = (-1)^{ij} f(v) = (-1)^{ij} \langle f, v \rangle.$$

Si l'on considère k comme un superespace totalement pair, de ce qui précède découle une structure naturelle de superespace sur V^*. Nous avons de plus un morphisme injectif $\phi : V \to V^{**}$ défini par :

$$\forall v \in V_i,\ \forall w^* \in V_j^*, \quad \langle \phi(v), w^* \rangle = (-1)^{ij} \langle w^*, v \rangle.$$

La convention faite précédemment nous permettra d'identifier v avec son image par ϕ.

Si V est un superespace, on définit le superespace ΠV qui, en tant qu'espace vectoriel, est égal à V mais dont la graduation est :

$$(\Pi V)_{\bar{0}} = V_{\bar{1}}, \quad (\Pi V)_{\bar{1}} = V_{\bar{0}}.$$

Introduisons l'application $\pi : V \to \Pi V$ qui, en tant que morphisme d'espaces vectoriels, est égale à l'identité. Elle est de degré $\bar{1}$.

Soient A une k-superalgèbre associative, supercommutative, avec élément unité. $\mathrm{Der}(A)$ désignera la superalgèbre de Lie des dérivations de A. Soit M un A-module. Une base de M est une famille $(v_i)_{i \in I \amalg J} \in M_{\bar{0}}^I \times M_{\bar{1}}^J$ telle que tout élément de M s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des $(v_i)_{i \in I \amalg J}$. Si I et J sont finis, leurs cardinaux sont indépendants de la base du A-module M. On définit la dimension de M sur A comme étant l'élément $|I| + \epsilon|J|$ de $\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2 - 1)$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base du A-module M, alors la famille $(e^1, \ldots, e^n)$, où e^j est défini par $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_{i,j}$, est une base de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ appelée *base duale*. Rappelons aussi que ΠM a une structure naturelle de A-module donnée par :

$$\forall a \in A, \ \forall m \in M, \quad a \cdot \pi m = (-1)^{|a|} \pi(a \cdot m).$$

On désignera par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels. Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}$. Nous noterons :

$$\mathbb{N}_{m+\epsilon n} = \mathbb{N}^m \times \{0, 1\}^n.$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n})$ est un élément de $\mathbb{N}_{m+\epsilon n}$, on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m+n}.$$

On désignera par $\mathrm{Mat}(m + \epsilon n, k)$ la superalgèbre des matrices à coefficients dans k avec m lignes (resp. colonnes) paires et n lignes (resp. colonnes) impaires. Munie de sa structure naturelle de superalgèbre de Lie, on la notera $\mathfrak{gl}(m + \epsilon n, k)$. On adopte des notations analogues pour les supermatrices à coefficients dans une superalgèbre supercommutative, associative, avec unité.

Si V est un superespace, on notera $T(V)$ (resp. $S(V)$) la superalgèbre tensorielle (resp. symétrique) de V et $(T^n(V))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(S^n(V))_{n \in \mathbb{N}}$) les composantes homogènes de $T(V)$ (resp. $S(V)$). Si $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre

de Lie, $U(\mathfrak{g})$ désignera sa superalgèbre enveloppante et

$$k = U_0(\mathfrak{g}) \subset U_1(\mathfrak{g}) \subset \cdots U_n(\mathfrak{g}) \subset \cdots$$

la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})$. Enfin, si π est une représentation de $\mathfrak{g}$, on notera π^* sa représentation contragrédiente.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Duflo pour m'avoir guidée dans l'apprentissage de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Je tiens aussi à remercier Y. Benoist pour de nombreuses conversations utiles.

2. Rappels.

2.1. *Les A-$\mathfrak{g}$-modules* [Fe], [Ri].

Soient $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, A une k-superalgèbre supercommutative, associative, avec unité et σ un morphisme de k-superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Der}(A)$.

DÉFINITION. — Un k-superespace M est un $A - \mathfrak{g}$-*module* si :

(i) M est un A-module,

(ii) M est un $\mathfrak{g}$-module,

(iii) les actions de A et de $\mathfrak{g}$ sont compatibles dans le sens suivant :

$\forall m \in M,\ \forall a \in A,\ \forall X \in \mathfrak{g}$ (homogènes)

$$X \cdot (a \cdot m) = \sigma(X)(a) \cdot m + (-1)^{|a||X|} a \cdot (X \cdot m).$$

Un *morphisme* de A-$\mathfrak{g}$-modules est un morphisme de A-modules et de $\mathfrak{g}$-modules.

2.2. *Module bérézinien.*

Le module bérézinien est une généralisation de la puissance extérieure maximale d'un module non gradué. Soit A une superalgèbre associative, supercommutative, avec élément unité et M un A-module libre de dimension $m_0 + \epsilon m_1$. Supposons que $(e_1, ..., e_{m_0+m_1})$ soit une base de M telle que $(e_1, \ldots, e_{m_0})$ soient pairs et $(e_{m_0+1}, \ldots, e_{m_0+m_1})$ soient impairs. Notons $(e^1, \ldots, e^{m_0+m_1})$ sa base duale. Désignons enfin par d la multiplication à gauche par

$$\sum_{i=1}^{m_0+m_1} (-1)^{|e_i|+1} \pi e_i \otimes e^i$$

dans la superalgèbre $S_A(\Pi M \oplus M^*)$. L'endomorphisme d ne dépend pas du choix de la base.

PROPOSITION 2.2.1. — *Le complexe*

$$K(M) = \Big(S(\Pi M \oplus M^*) = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} S^n(\Pi M) \otimes S(M^*), d\Big)$$

a une cohomologie nulle en tout degré sauf en le degré m_0. *Le* A*-module* $H^{m_0}(K(M))$ *est libre de dimension* 1 *ou* ϵ *et l'élément*

$$\pi e_1 \cdots \pi e_{m_0} e^{m_0+1} \cdots e^{m_0+m_1}$$

est un cycle dont la classe est une base de $H^{m_0}(K(M))$.

Démonstration. — Voir [Ma], p. 172. □

On appelle *module bérézinien* et on note $\mathrm{Ber}(M)$ le A-module $H^{m_0}(K(M))$. La superalgèbre $\mathfrak{gl}_A(M)$ opère dans $S_A(\Pi M \oplus M^*)$ et son action commute avec la différentielle de $K(M)$. Elle opère donc dans $\mathrm{Ber}(M)$ au moyen d'un caractère appelé *supertrace* et noté str.

Si $\mathfrak{g}$ est une k-superalgèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous-superalgèbre de Lie de codimension finie de $\mathfrak{g}$, cette dernière agit sur $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ par multiplication par le caractère $-\operatorname{str}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$. Cette représentation sera notée $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$.

PROPOSITION 2.2.2. — *Si* M *est un* A*-*$\mathfrak{g}$*-module, alors* $\mathrm{Ber}(M)$ *est muni d'une structure naturelle de* A*-*$\mathfrak{g}$*-module.*

Démonstration. — Si M est un A-$\mathfrak{g}$-module, alors M^* muni des opérations suivantes

$$\forall a \in A,\ \forall F \in M^*,\ \forall m \in M, \quad \langle m, a\cdot F\rangle = (-1)^{|a||m|} a\langle m, F\rangle,$$

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \forall F \in M^*,\ \forall m \in M,$$
$$\langle m, X\cdot F\rangle = -(-1)^{|X||m|}\langle X\cdot m, F\rangle + (-1)^{|X||m|}\sigma(X)(\langle m, F\rangle)$$

est un A-$\mathfrak{g}$-module. On en déduit que $S(\Pi M \oplus M^*)$ est muni d'une structure de A-$\mathfrak{g}$-module. De plus, les actions de A et de $\mathfrak{g}$ commutent à la différentielle, ce qui nous permet de munir $\mathrm{Ber}(M)$ d'une structure naturelle de A-$\mathfrak{g}$-module. D'où la proposition. □

COROLLAIRE 2.2.3. — *Supposons que* $\mathrm{Der}(A)$ *soit un* A*-module libre de dimension finie. Alors* $\mathrm{Ber}(\mathrm{Der}(A)^*)$ *est muni d'une structure naturelle de* A*-*$\mathrm{Der}(A)$*-module.*

2.3. *Représentations coinduites de superalgèbres de Lie.*

Soient $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous superalgèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et (π, V) une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un superespace V. On définit le superespace coinduit à partir de π, $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, par :

$$\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi) = \big\{\lambda \in \mathrm{Hom}(U(\mathfrak{g}), V)\,;\ \forall H \in \mathfrak{h},\ \forall u \in U(\mathfrak{g}),\ \langle Hu, \lambda\rangle = \pi(H)\langle u, \lambda\rangle\big\}.$$

Considérons l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$ définie de la manière suivante. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, on pose :

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}), \quad \langle u, X \cdot \lambda\rangle = \langle uX, \lambda\rangle.$$

Elle définit une représentation de $\mathfrak{g}$ appelée *représentation coinduite* à partir de (π, V). On la prolonge en une représentation de $U(\mathfrak{g})$ dont le noyau sera noté I_π.

Désignons par 0 le caractère nul de $\mathfrak{h}$ et posons (jusqu'à la fin de l'article) :

$$A = \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(0).$$

Soit Δ le coproduit de $U(\mathfrak{g})$. C'est le morphisme de superalgèbres de $U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ tel que, pour tout élément X de $\mathfrak{g}$, on ait

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X.$$

On définit une structure de superalgèbre sur A puis une structure de A-module sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ comme suit. Pour tout élément f dans A, λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ et u dans $U(\mathfrak{g})$, si $\Delta(u) = \sum_j u_j' \otimes u_j''$, on pose :

$$\langle u, f \cdot \lambda\rangle = \sum_j \langle u_j', f\rangle\langle u_j'', \lambda\rangle(-1)^{|f||u_j''|}.$$

Alors $f \cdot \lambda$ appartient à $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. La superalgèbre A est associative, unitaire et supercommutative. De surcroît, elle est locale d'idéal maximal :

$$\mathfrak{a} = \big\{f \in A\,;\ \langle 1, f\rangle = 0\big\}.$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{h}$ soit de codimension finie dans $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{p}$ un supplémentaire gradué de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. De manière analogue, on pose $F = \mathrm{Hom}_k(S(\mathfrak{p}), k)$. C'est une superalgèbre associative, supercommutative

et avec élément unité. Elle est de plus locale. On notera $\mathfrak{b}$ son idéal maximal. Le superespace $\mathrm{Hom}_k(S(\mathfrak{p}), V)$ est muni d'une structure naturelle de F-module. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p$ une base homogène de $\mathfrak{p}$. On suppose $X_1, \ldots, X_{d_0}$ pairs et $X_{d_0+1}, \ldots, X_p$ impairs et on pose $p = d_0 + d_1$. Associé au choix de $\mathfrak{p}$ et de sa base, on définit J_π l'isomorphisme de superespaces vectoriels de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ dans $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$ qui à l'élément λ de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ associe l'élément de $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$ défini par :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}, \quad \langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}, \lambda \rangle = \langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}, J_\pi(\lambda) \rangle.$$

PROPOSITION 2.3.1. — *Si f est dans A et λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, on a la relation $J_\pi(f\lambda) = J_0(f) J_\pi(\lambda)$.*

Démonstration. — Cela revient à démontrer que l'homomorphisme de superespaces σ de $S(\mathfrak{p})$ dans $U(\mathfrak{g})$ défini par

$$\sigma(X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}) = X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}$$

vérifie la relation $\Delta \circ \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \circ \Delta$.

On a $\mathfrak{b} = J_0(\mathfrak{a})$. Munissons :

- $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ de la topologie $\mathfrak{a}$-adique, à savoir celle définie par la famille de $\mathfrak{a}$-modules $(\mathfrak{a}^n \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))_{n \in \mathbb{N}}$;
- $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$ de la topologie $\mathfrak{b}$-adique.

L'application J_π est alors un homéomorphisme.

Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_0+d_1})$ les éléments de $\mathfrak{a}$ définis comme suit. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, on a :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}, \quad \langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}, \lambda_i \rangle = \delta_{\alpha_1,0} \cdots \delta_{\alpha_i,1} \cdots \delta_{\alpha_p,0}.$$

Alors A est isomorphe à $k[[\lambda_1, \ldots, \lambda_p]]$. Les λ_i seront appelés *coordonnées* sur A associées à $X_1, \ldots, X_p$.

Associé au choix d'un supplémentaire $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et d'une base $X_1, \ldots, X_p$ de ce supplémentaire, on a aussi une injection de V dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ dont nous nous servirons à plusieurs reprises : à l'élément v de V, on associe l'élément de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, encore noté v, défini par :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}, \quad \langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}, v \rangle = \delta_{\alpha_1,0} \cdots \delta_{\alpha_p,0} v.$$

La représentation coinduite fournit un morphisme σ_0 de superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Der}(A)$ qui nous permet de parler de A-$\mathfrak{g}$-module. A partir de maintenant (et jusqu'à la fin de l'article), lorsque nous parlerons de A-$\mathfrak{g}$-module, nous supposerons toujours que le morphisme de superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Der}(A)$ donné initialement est σ_0.

PROPOSITION 2.3.2. — $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ *est un* A-$\mathfrak{g}$-*module séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{a}$-*adique.*

Le théorème de Blattner [Bla], étendu aux superalgèbres de Lie (cf. [Sch], p. 63), fournit une réciproque à cette proposition. Il s'énonce comme suit :

THÉORÈME 2.3.3. — *Supposons* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *de dimension finie. Soit* W *un* A-$\mathfrak{g}$-*module séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{a}$-*adique. Posons* $V = W/\mathfrak{a}W$ *et notons* ρ *la projection de* W *sur* $W/\mathfrak{a}W$. *Le superespace* V *est un* $\mathfrak{h}$-*module et l'application* Ψ *de* W *dans* $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(V)$ *donnée par*

$$\forall w \in W,\ \forall a \in U(\mathfrak{g}), \quad \langle a, \Psi(w)\rangle = \rho(aw)$$

est un isomorphisme de A-$\mathfrak{g}$-*modules. Cet isomorphisme établit une équivalence de catégories entre la catégorie des* A-$\mathfrak{g}$-*modules séparés et complets pour la topologie* $\mathfrak{a}$-*adique et celle des* $\mathfrak{h}$-*modules.*

3. Un théorème de dualité dans les représentations coinduites.

3.1. *Énoncé du théorème.*

Soient $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous superalgèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et (π, V) une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un superespace V. Rappelons que I_π (avec $I_\pi \subset U(\mathfrak{g})$) désigne le noyau de la représentation coinduite à partir de (π, V) et que « $\check{}$ » est l'antiautomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ défini comme suit. Si X est dans $\mathfrak{g}$, on a $\check{X} = -X$ et si u, v sont deux éléments homogènes de $U(\mathfrak{g})$, on a $(uv)\check{} = (-1)^{|v||u|}\check{v}\check{u}$. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.1. — *Si* $\mathfrak{h}$ *est de codimension finie, on a la relation*

$$\check{I}_\pi = I_{\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)}.$$

Le théorème 3.1.1 a été démontré par M. Duflo [Du] dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie. La démonstration de [Du] ne s'étend pas au cas où seulement $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est de dimension finie. Ce théorème peut aussi s'obtenir comme corollaire de la réalisation d'une représentation induite de superalgèbre de Lie en termes de cohomologie locale de Grothendieck (cf. [BB], [Le] et [C]).

3.2. *Représentations induites de supergroupes de Lie.*

Ce paragraphe n'est pas utilisé dans la suite. Il montre pourquoi le théorème 3.1.1 est naturel (pour les superespaces réels de dimension finie) en termes d'interprétation sur les supergroupes de Lie. Soit $\mathcal{X}$ une supervariété de dimension $p + \epsilon q$ au sens de Kostant et Leites (cf. [K], [L]). Nous adopterons la notation

$$\mathcal{X} = (X, O_{\mathcal{X}}),$$

où X est l'espace topologique sous-jacent à $\mathcal{X}$ et $O_{\mathcal{X}}$ le faisceau structural (de base X) de $\mathcal{X}$.

L'espace topologique X est canoniquement muni d'une structure de variété de classe C^∞, notée $\mathcal{X}_{\text{red}}$, qui est la variété réduite de $\mathcal{X}$. Il existe un morphisme canonique de $\mathcal{X}_{\text{red}}$ dans $\mathcal{X}$ qui, pour tout ouvert U de X et à toute superfonction f de $O_{\mathcal{X}}(U)$, permet d'associer une fonction de classe C^∞ sur U notée $\tilde{f}$.

Soit $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ un superespace réel de dimension finie. Alors il est naturellement muni d'une structure de supervariété, notée V^{var}, définie comme suit. L'espace topologique sous-jacent est $V_{\bar{0}}$ et le faisceau des superfonctions est défini par : si U est un ouvert de $V_{\bar{0}}$, on a

$$O_{V^{\text{var}}}(U) = C^\infty(U) \otimes \Lambda(V_{\bar{1}}^*).$$

Un ouvert U de X est appelé un *ouvert de coordonnées* si $\mathcal{X}_{|U}$ est isomorphe à un ouvert de la supervariété définie par un superespace.

On montre que si U est un ouvert de coordonnées, $\text{Der}(O_{\mathcal{X}}(U))$ est un $O_{\mathcal{X}}(U)$-module libre de dimension $p + \epsilon q$. On appelle *fibré des champs de vecteurs* sur $\mathcal{X}$ le $O_{\mathcal{X}}$-module localement libre dont le module des sections est égal à $\text{Der}(O_{\mathcal{X}}(U))$ pour tout ouvert de coordonnées U. Le fibré des formes volumes $\text{Vol}_{\mathcal{X}}$ est l'unique $O_{\mathcal{X}}$-module localement libre vérifiant la condition suivante : pour tout ouvert de coordonnées U, on a

$$\text{Vol}_{\mathcal{X}}(U) = \text{Ber}\big(\text{Der}(O_{\mathcal{X}}(U))^*\big).$$

Rappelons que si $\mathcal{X}_{\text{red}}$ est orientée, il existe une théorie de l'intégration, appelée *intégrale de Bérézin* (cf. [L]), permettant d'intégrer toute forme volume à support compact. Pour tout ouvert W, nous allons définir une action de la superalgèbre de Lie des champs de vecteurs sur W dans le superespace des formes volumes sur W. Il suffit de le faire localement. Soit U un ouvert de coordonnées de $\mathcal{X}$. Le superespace $\text{Vol}_{\mathcal{X}}(U)$ est un $O_{\mathcal{X}}(U)$-$\text{Der}(O_{\mathcal{X}}(U))$-module. L'action d'un élément D de $\text{Der}(O_{\mathcal{X}}(U))$ sur $\text{Vol}_{\mathcal{X}}(U)$ s'appelle *dérivée de Lie* suivant le champ de vecteurs D et est notée $\mathcal{L}_D$. On montre (cf. [L]) que l'on a :

PROPOSITION 3.2.1. — *Supposons $\mathcal{X}_{\mathrm{red}}$ orientée. Soient ρ une forme volume à support compact sur X et D un champ de vecteurs sur X. On a :*

$$\int_X \mathcal{L}_D(\rho) = 0.$$

Soit a un point de X et $O_{\mathcal{X},a}$ le germe de $O_{\mathcal{X}}$ en a. Le caractère $\delta_a : O_{\mathcal{X},a} \to \mathbb{R}$ donné par

$$\forall \bar{f} \in O_{\mathcal{X},a}, \quad \delta_a(\bar{f}) = \tilde{f}(a),$$

où f est un représentant de $\bar{f}$, est appelé *distribution de Dirac* en a. On notera $T_a(\mathcal{X})$ le superespace tangent de $\mathcal{X}$ en a. Soient $\mathcal{Y}$ une autre supervariété et ϕ un morphisme de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. On désignera par $\mathrm{d}_a\phi$ la différentielle de ϕ en a.

Soit maintenant $\mathcal{G} = (G, O_{\mathcal{G}})$ un supergroupe de Lie. Alors $\mathcal{G}_{\mathrm{red}}$ est un groupe de Lie dont l'unité sera notée 1. Le superespace tangent $T_1(\mathcal{G})$ est muni d'une structure de superalgèbre de Lie. On note R_X (resp. L_X) l'unique champ de vecteurs invariant à gauche (resp. à droite) tel que $\delta_1 \circ R_X = X$ (resp. $\delta_1 \circ L_X = X$). Si g est un élément de G, alors R_g (resp. L_g) désignera la translation à droite (resp. à gauche) par g. Soient m et n deux entiers naturels. Notons

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m+\epsilon p, \mathbb{R})_{\bar{0}} \,;\ \det(\alpha) \neq 0 \text{ et } \det(\delta) \neq 0 \right\}$$

et posons :

$$\mathrm{GL}(m+\epsilon p) = \mathrm{Mat}(m+\epsilon p, \mathbb{R})^{\mathrm{var}}_{|U}.$$

La multiplication habituelle des matrices permet alors de munir $\mathrm{GL}(m+\epsilon p)$ d'une structure de supergroupe de Lie. Si V est un superespace réel de dimension $m+\epsilon p$, on définit de façon analogue le supergroupe $\mathrm{GL}(V)$. La représentation standard de $\mathrm{GL}(V)$ induit une représentation de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{Ber}(V)$ appelé *caractère bérézinien.*

Soient maintenant $\mathcal{G} = (G, O_{\mathcal{G}})$ un supergroupe et $\mathcal{H} = (H, O_{\mathcal{H}})$ un sous-supergroupe de Lie fermé et connexe de $\mathcal{G}$, de dimensions respectives $n+\epsilon q$ et $m+\epsilon p$ et de superalgèbres respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$. Notons $\tilde{p}$ la projection naturelle de G sur G/H. Notons $O_{\mathcal{G}}{}^{H,\mathfrak{h}}$ le superespace annelé de base G/H défini par : si $\bar{U}$ est un ouvert de G/H et si U désigne l'ouvert $\tilde{p}^{-1}(\bar{U})$ de G, on a

$$O_{\mathcal{G}}^{H,\mathfrak{h}}(\bar{U}) = \left\{ f \in O_G(U) \,;\ \forall h \in H,\ R_h(f) = f \text{ et } \forall X \in \mathfrak{h},\ R_X(f) = 0 \right\}.$$

On sait (cf. [K], p. 236) que $(G/H, O_{\mathcal{G}}^{H,\mathfrak{h}})$ est une supervariété de dimension $p - m + \epsilon(q-n)$ dont le superespace tangent en $\tilde{p}(1)$ est $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On la

notera $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Notons que si Y est un élément de $\mathfrak{g}$, alors L_{-Y} est un champ de vecteurs sur $\mathcal{G}/\mathcal{H}$. Ceci permet de munir $\mathrm{Vol}_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(G/H)$ d'une structure de $\mathfrak{g}$-module comme suit : pour tout Y dans $\mathfrak{g}$ et tout ω dans $\mathrm{Vol}_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(G/H)$, on a

$$Y \cdot \omega = \mathcal{L}_{L_{-Y}}(\omega).$$

Représentations induites.

On reprend les mêmes notations que précédemment. Soit π une représentation de $\mathcal{H}$ dans un superespace V de dimension finie. On définit le superespace $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$ comme étant :

$$\Big\{ \sum_i f_i \otimes v_i \in O_{\mathcal{G}}(G) \otimes V \,;\; \forall X \in \mathfrak{h},\ \sum_i R_X(f_i) \otimes v_i = -\sum_i (-1)^{|X||f_i|} f_i \otimes d_1\pi(X) \cdot v_i \quad \text{et } \forall h \in H,\ \sum_i R_h(f_i) \otimes \pi(h) v_i = \sum_i f_i \otimes v_i \Big\}.$$

Sur $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$, il existe une représentation naturelle de $\mathfrak{g}$ appelée *représentation induite* et définie par : pour tout élément Y dans $\mathfrak{g}$ et pour tout élément $\sum_i f_i \otimes v_i$ dans $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$, on a

$$Y \cdot \Big(\sum_i f_i \otimes v_i \Big) = \sum_i L_{-Y}(f_i) \otimes v_i.$$

Cette représentation s'étend en une représentation de $U(\mathfrak{g})$ dont le noyau sera noté K_π.

THÉORÈME 3.2.2. — *Notons* $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ *la représentation de* $\mathcal{H}$ *obtenue en composant le caractère bérézinien avec la représentation contragédiente de la repésentation adjointe de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. *Si* π^* *désigne la représentation contragrédiente de* π, *on a la relation* :

$$\overset{\vee}{K}_{\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)} = K_\pi.$$

Nous utiliserons la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2.3. — $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ *et* $\mathrm{Vol}_{\mathcal{G}/\mathcal{H}}(G/H)$ *sont isomorphes en tant que* $\mathfrak{g}$*-modules.*

Démonstration du théorème 3.2.2. — Désignons par $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$ le sous-espace de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$ constitué des éléments à support compact modulo H et

par $L_\pi \subset U(\mathfrak{g})$ le noyau de l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$. Considérons la forme bilinéaire (,) sur

$$\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)) \times \mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$$

définie par : pour tout $\sum_i f_i \otimes v_i^* \otimes \omega$ dans $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ et tout $\sum_j g_j \otimes w_j$ dans $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$, on a

$$\Big(\sum_i f_i \otimes v_i^* \otimes \omega, \sum_j g_j \otimes w_j\Big) = \int_{G/H} \sum_{i,j} f_i\, g_j \langle v_i^*, w_j\rangle\, \omega (-1)^{(|v_i^*|+|\omega|)|g_j|}\, (-1)^{|\omega||w_j|}.$$

La proposition 3.2.3 établit une dualité $\mathfrak{g}$ invariante entre $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ et $\mathrm{Ind}_{c,\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$. On en déduit la relation $\check{L}_{\pi^* \otimes \mathrm{Ber}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*} = L_\pi$. Un argument de partition de l'unité montre que L_π et K_π coïncident, ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.2.

Lien entre représentations induites de supergroupes de Lie et représentations coinduites de superalgèbres de Lie.

Soient $\mathcal{G}$ un supergroupe de Lie de superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathcal{H}$ un sous supergroupe fermé connexe de superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et (π, V) une représentation de dimension finie de $\mathcal{H}$. Notons $\mathrm{d}_1\pi$ l'application tangente de π en 1. Le morphisme Ψ de $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi)$ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{d}_1\pi)$ défini par

$$\forall \phi \in \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}(\pi),\ \forall u \in U(\mathfrak{g}), \quad \langle u, \Psi(\phi)\rangle = \delta_1 u \cdot \phi$$

est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules. D'après la généralisation du théorème de Borel aux supervariétés, il est surjectif. On a donc $K_\pi \subset I_{\mathrm{d}_1\pi}$. La proposition suivante permet d'établir l'inclusion inverse dans le cas où G est connexe.

PROPOSITION 3.2.4. — *Si G_0 désigne la composante connexe de l'élément neutre, on a la relation*

$$K_\pi = \bigcap_{g \in G} g I_{\mathrm{d}_1\pi} g^{-1}$$

et $I_{\mathrm{d}_1\pi}$ est stable par G_0H. En particulier, si $G = G_0H$, on a $K_\pi = I_{\mathrm{d}_1\pi}$.

Démonstration. — L'application Ψ étant surjective, on voit aisément que :

$$g^{-1}I_{\mathrm{d}_1\pi}g = \{u \in U(\mathfrak{g})\,;\ \forall \phi \in \mathrm{Ind}_H^G(\pi),\ \forall v \in U(\mathfrak{g}),\ \delta_g vu \cdot \phi = 0\}.$$

On a donc bien

$$K_\pi = \bigcap_{g\in G} gI_{\mathrm{d}_1\pi}g^{-1}.$$

On en déduit aussi l'égalité $hI_{\mathrm{d}_1\pi}h^{-1} = I_{\mathrm{d}_1\pi}$. Pour montrer que $I_{\mathrm{d}_1\pi}$ est stable par G_0H, rappelons le lemme suivant :

LEMME 3.2.5. — *Soient K un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et V un sous espace vectoriel de $U(\mathfrak{k})$. Alors V est stable par K (au moyen de* Ad*) si et seulement si V est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{k}$.*

Appliquons le résultat de ce lemme au cas qui nous intéresse. Comme $I_{\mathrm{d}_1\pi}$ est stable par l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ (donc de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$), si g_0 est un élément de G_0 on a $g_0 I_{\mathrm{d}_1\pi} g_0^{-1} = I_{\mathrm{d}_1\pi}$. La proposition en découle.

La comparaison de 3.2.4 et 3.2.2 donne un cas particulier du théorème 3.1.1. Revenons au cas général.

3.3. *Étude préliminaire.*

Soit $\mathfrak{h}$ une sous superalgèbre de Lie de codimension finie de $\mathfrak{g}$. Dans ce paragraphe, on supposera donné un supplémentaire gradué $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ ainsi qu'une base $(X_1, \ldots, X_{d_0})$ de $\mathfrak{p}_{\bar{0}}$ et une base $(X_{d_0+1}, \ldots, X_{d_0+d_1})$ de $\mathfrak{p}_{\bar{1}}$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_0+d_1})$ les coordonnées sur A associées à ce choix.

3.3.1. *Rappels.*

- *Opérateurs différentiels sur* $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$.

On définit, par récurrence sur s, les superespaces Diff_V^s comme suit. Soit f dans F. Notons μ_f la multiplication par f. On a

$$\mathrm{Diff}_V^0 = \mathrm{End}_F\big(\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)\big),$$

puis, pour $s \geq 1$,

$$\mathrm{Diff}_V^s = \{A \in \mathrm{End}_k(\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V))\,;\ \forall f \in F,\ [A, \mu_f] \in \mathrm{Diff}_V^{s-1}\}$$

où [ ] désignent en fait des supercommutateurs. On définit l'ensemble des opérateurs différentiels sur $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$ par $\mathrm{Diff}_V = \bigcup_s \mathrm{Diff}_V^s$. Cette définition généralise celle de Bernstein-Gelfand-Gelfand.

• *Définition de la dérivée dans la direction d'un vecteur.*

Soit m dans $\mathfrak{p}$ et soit λ dans $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$. La dérivée dans la direction de m (notée ∂_m), est définie par

$$\forall u \in S(\mathfrak{p}), \quad \langle u, \partial_m \lambda \rangle = \langle um, \lambda \rangle.$$

∂_m est un opérateur différentiel de degré 1 sur le F-module $\mathrm{Hom}(S(\mathfrak{p}), V)$. On notera ∂_i la dérivée dans la direction du vecteur X_i.

• *Opérateurs différentiels sur* $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$.

Soit Diff_π la superalgèbre des opérateurs différentiels sur le A-module $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. On montre facilement l'équivalence

$$\delta \in \mathrm{Diff}_\pi^s \iff J_\pi \circ \delta \circ J_\pi^{-1} \in \mathrm{Diff}_V^s .$$

Les opérateurs différentiels $J_\pi^{-1} \circ \partial_m \circ J_\pi$ (pour m élément de $\mathfrak{p}$) et $J_\pi^{-1} \circ \partial_i \circ J_\pi$ sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ seront aussi notés ∂_m et ∂_i. On montre l' égalité :

$$\mathrm{Der}(A) = \Big\{ \sum_i f_i \partial_i \,;\; f_i \in A \Big\}.$$

• *Étude de l'opérateur différentiel défini par un élément de* $\mathfrak{g}$.

PROPOSITION 3.3.1. — *L'action d'un élément X de $\mathfrak{g}$ définit un opérateur différentiel $D_\pi(X)$ de degré inférieur ou égal à 1 sur* $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. *En particulier, X définit une dérivation sur A. Si cette dérivation est égale à $\sum f_i(X)\partial_i$, on a*

$$D_\pi(X) = \Big(\sum_i f_i(X) \partial_i + F_\pi^0 \Big)$$

où F_π^0 est l'opérateur différentiel de degré 0 sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ *défini par $F_\pi^0(v) = X \cdot v$ pour tout élément v de V. Cette écriture dépend du choix de la base de $\mathfrak{p}$.*

Démonstration. — Soient X dans $\mathfrak{g}$, f dans A et λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. On a :

$$X(f\lambda) = \sigma_0(X)(f)\lambda + (-1)^{|f||X|} f X(\lambda).$$

Cette relation permet de démontrer la première assertion de la proposition. Pour finir, il suffit de remarquer que $D_\pi(X) - \sum_i f_i(X)\partial_i$ est un élément de $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$.

3.3.2. *Connexions.*

DÉFINITION. — Une connexion ∇ sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ est un homomorphisme de superespaces

$$\nabla : \mathrm{Der}(A) \longrightarrow \mathrm{End}\big(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)\big)$$

vérifiant les relations : si les éléments f dans A, m dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ et ξ dans $\mathrm{Der}(A)$ sont supposés homogènes, on a

(a) $\nabla_\xi(fm) = \xi(f)m + (-1)^{|f||\xi|} f\nabla_\xi(m)$,

(b) $f\nabla_X = \nabla_{fX}$.

Remarques.

(α) Soient H un élément homogène de Diff_π^0 et ∇ une connexion. Pour tout élément homogène ξ de $\mathrm{Der}(A)$,

$$[\nabla_\xi, H] = \nabla_\xi \circ H - (-1)^{|H||\xi|} H \circ \nabla_\xi$$

est un élément de Diff_π^0.

(β) Si ξ et η sont deux éléments homogènes de $\mathrm{Der}(A)$, alors

$$[\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}$$

est un élément de Diff_π^0 que l'on notera $R_\nabla(\xi,\eta)$. L'application R_∇ sera appelée la *courbure* de la connexion ∇.

(γ) Soient ∇ et ∇' deux connexions. Pour tout élément ξ de $\mathrm{Der}(A)$, $\nabla_\xi - \nabla'_\xi$ est un opérateur différentiel de degré 0 que l'on notera $a_{\nabla,\nabla'}(\xi)$ ou plus simplement $a(\xi)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple de connexion.

A la base $X_1, \ldots, X_p$ de $\mathfrak{p}$, on associe une connexion $\widetilde{\nabla}(\pi)$ définie par : pour tout champ de vecteurs $\sum f_i \partial_i$, on a

$$\widetilde{\nabla}(\pi)_{\sum f_i\partial_i} = \sum \mu_{f_i}\partial_i.$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, cette connexion sera simplement notée $\widetilde{\nabla}$. On remarque que $R_{\widetilde{\nabla}}$ est nul.

- *La superalgèbre $\mathcal{D}_\pi^\nabla$.*

Supposons donnée une connexion ∇. Désignons par $\mathcal{D}_\pi^\nabla$ la superalgèbre associative engendrée linéairement par les ∇_ξ pour ξ parcourant $\mathrm{Der}(A)$ et par les éléments de $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi))$ satisfaisant de plus les relations

(i) $\forall (F,G) \in \mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi))^2, \quad F \cdot G = F \circ G;$

(ii) $\forall (f,\xi) \in A \times \mathrm{Der}(A), \quad \mu_f \cdot \nabla_\xi = \nabla_{f\xi}$;

(iii) $\forall (A,\xi) \in \mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi)) \times \mathrm{Der}(A)$ (homogènes),

$$\nabla_\xi \cdot A - (-1)^{|\xi||A|} A \cdot \nabla_\xi = [\nabla_\xi, A]$$

(iv) $\forall (\xi,\eta) \in \mathrm{Der}(A)^2$ (homogènes),

$$\nabla_\xi \cdot \nabla_\eta - (-1)^{|\xi||\eta|} \nabla_\eta \cdot \nabla_\xi = \nabla_{[\xi,\eta]} + R_\nabla(\xi,\eta).$$

PROPOSITION 3.3.2. — *Soient ∇ et ∇' deux connexions. Les deux superalgèbres $\mathcal{D}_\pi^\nabla$ et $\mathcal{D}_\pi^{\nabla'}$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Soit L_π^∇ la superalgèbre associative libre engendrée par $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi))$ et les ∇_ξ pour ξ parcourant $\mathrm{Der}(A)$. On a donc

$$L_\pi^\nabla = T(W)$$

où

$$W = \mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi)) \oplus \sum_{\xi \in \mathrm{Der}(A)} k\nabla_\xi.$$

Soit I_π^∇ l'idéal de L_π^∇ engendré par les relations (i), (ii), (iii) et (iv). On a $\mathcal{D}_\pi^\nabla = L_\pi^\nabla / I_\pi^\nabla$. Considérons l'application

$$\psi_{\nabla,\nabla'} : L_\pi^\nabla \longrightarrow L_\pi^{\nabla'}$$

telle que :

- $\psi_{\nabla,\nabla'}(F) = F$ pour tout F dans $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_\mathfrak{h}^\mathfrak{g}(\pi))$ et
- $\psi_{\nabla,\nabla'}(\nabla_\xi) = \nabla'_\xi + a(\xi)$ pour tout ξ dans $\mathrm{Der}(A)$.

On montre l'inclusion $\psi_{\nabla,\nabla'}(I_\pi^\nabla) \subset I_\pi^{\nabla'}$. On peut donc définir une application $\bar{\psi}_{\nabla,\nabla'}$ de D_π^∇ dans $D_\pi^{\nabla'}$ par passage au quotient. Elle admet $\bar{\psi}_{\nabla',\nabla}$ pour application réciproque, c'est donc un isomorphisme. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.3.2.

PROPOSITION 3.3.3. — *Soit ∇ une connexion. Il existe un morphisme injectif naturel Φ^{∇} de $\mathcal{D}_{\pi}^{\nabla}$ dans* $\mathrm{End}(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$.

Démonstration. — On conserve les mêmes notations que pour la démonstration précédente. Considérons l'application linéaire Φ de $T(W)$ dans $\mathrm{End}_k(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$ définie par : pour tout élément $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p$ de $T^p(W)$, on a $\Phi(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_1 \circ \cdots \circ w_p$. L'idéal I_{π}^{∇} ayant une image nulle par Φ, l'application Φ se factorise pour donner une application Φ^{∇} de $\mathcal{D}_{\pi}^{\nabla}$ dans $\mathrm{End}(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$. De plus, si ∇ et ∇' sont deux connexions, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\pi}^{\nabla'} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)) \\ \downarrow & \nearrow & \\ D_{\pi}^{\nabla} & & \end{array}$$

Montrons que Φ^{∇} est injective. On peut supposer $\nabla = \widetilde{\nabla}$. Tout élément Δ de $\mathcal{D}_{\pi}^{\nabla}$ s'écrit alors sous la forme :

$$\Delta = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}} A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_p^{\alpha_p} + I_{\pi}^{\widetilde{\nabla}}.$$

Or on a :

$$\Phi^{\widetilde{\nabla}}(\Delta) = \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}} A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_p^{\alpha_p}.$$

Donc si $\Phi^{\widetilde{\nabla}}(\Delta)(\lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_p^{\alpha_p} v_i) = 0$, on a $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \cdot v_i = 0$. (On le démontre en procédant par ordre lexicographique croissant sur $(\alpha_1, \ldots \alpha_p)$.) Donc $(A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)})_{|A\otimes V}$ est nul. Comme $A \otimes V$ est un sous-espace dense de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ et $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}$ est continu, $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)}$ est nul. D'où la proposition 3.3.3.

PROPOSITION 3.3.4. — *En notant $\mathcal{D}_{\pi}$ l'image de Φ^{∇}, on a $\mathcal{D}_{\pi} = \mathrm{Diff}_{\pi}$.*

Démonstration. — On a clairement l'inclusion $\mathcal{D}_{\pi} \subset \mathrm{Diff}_{\pi}$. Établissons l'inclusion réciproque. Plus précisément, montrons que tout opérateur différentiel δ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\delta = \sum_{(\alpha_1,\ldots\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}} A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_p^{\alpha_p}$$

avec $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)} \in \mathrm{Diff}_{\pi}^0(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$. Nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 3.3.5. — *Soit f un élément de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. Alors il existe une famille $(g_i)_{i\in[1,p]}$ de $(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))^p$ tels que $f = \langle 1, f\rangle + \sum_{i\in[1,p]} \lambda_i g_i$. Cette écriture n'est pas unique.*

Démonstration du lemme 3.3.5. — L'élément f s'écrit sous la forme $f = \sum \lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_p^{\alpha_p} a_\alpha$ où $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ est dans $\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}$. Posons :

$$g_i = \sum_{\substack{(\alpha_1,\dots\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}\\ |\alpha|\neq 0}} (-1)^{|\lambda_i|(\alpha_1|\lambda_1|+\cdots+\alpha_{i-1}|\lambda_{i-1}|)}\frac{\alpha_i}{|\alpha|}(\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_i^{\alpha_i-1}\cdots\lambda_p^{\alpha_p})a_\alpha.$$

On a clairement $f = \langle 1, f\rangle + \sum_{i\in[1,p]} \lambda_i g_i$. D'où le lemme 3.3.5.

Poursuivons la démonstration de la proposition 3.3.4. Déterminons la forme nécessaire des A_α tout en montrant l'unicité de l'écriture. Si on a

$$\delta = \sum_{(\alpha_1,\dots\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}} A_{(\alpha_1,\dots\alpha_p)}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_p^{\alpha_p},$$

alors les égalités suivantes

$$(*)\quad \delta(\lambda_1^{\beta_1}\dots\lambda_p^{\beta_p}v_i) = \sum_{(\alpha_1,\dots\alpha_p)\in\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}} (A_{(\alpha_1,\dots\alpha_p)}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_p^{\alpha_p})(\lambda_1^{\beta_1}\cdots\lambda_p^{\beta_p}v_i)$$

permettent de déterminer $A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}\cdot v_i$, et donc les opérateurs $A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p}$, par ordre lexicographique croissant. Pour toute la suite du raisonnement nous supposerons les A_α donnés par les relations (*).

Soit δ un élément de Diff_π^n. L'opérateur différentiel

$$\delta - \sum_{(\alpha_1+\cdots+\alpha_p)\leq n} A_{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_p^{\alpha_p}$$

est de degré inférieur ou égal à n et nul sur tous les éléments de la forme $\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_p^{\alpha_p}\cdot v_i$ pour $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ appartenant à $\mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}$ et tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_p \leq n$. Montrons par récurrence sur n qu'un tel opérateur est nul.

Pour $n = 0$ c'est clair.

Supposons que ce soit vérifié jusqu'à l'ordre n. Soit $\delta \in \mathrm{Diff}_\pi^{n+1}$ tel que $\delta(\lambda_1^{\alpha_1}\cdots\lambda_p^{\alpha_p}v_i)$ soit nul pour $\alpha_1+\cdots+\alpha_p \leq n$. L'hypothèse de

récurrence nous montre que $[\delta, \lambda_i]$ est nul pour tout i appartenant à $[1, p]$. Soit $f \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. Alors f s'écrit $f = \langle 1, f\rangle + \sum_{i\in[1,p]} \lambda_i g_i$. On a :

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \delta\big(\langle 1, f\rangle\big) + \sum_{i\in[1,p]} [\delta, \lambda_i](g_i) + \sum_{i\in[1,p]} (-1)^{|\lambda_i||\delta|}\lambda_i\delta(g_i)\\ &= \sum_{i\in[1,p]} \lambda_i\delta(g_i).\end{aligned}$$

Il en résulte : $\delta(f)_{|k} = 0$ et $\delta(f) \in \mathfrak{a}\,\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$.

De même, on peut écrire $g_i = \sum_j \lambda_j g_{i,j}$. On en déduit que l'on a

$$\delta(g_i) = \sum_j \lambda_j(-1)^{|\lambda_i||\delta|}\delta(g_{i,j})$$

et donc

$$\delta(f) = \sum_{i,j} \lambda_i\lambda_j\delta(g_{i,j})(-1)^{|\lambda_i||\delta|}.$$

Par conséquent, on a $\delta(f)_{|k\oplus\mathfrak{p}} = 0$ et $\delta(f) \in \mathfrak{a}^2\,\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$.

En recommençant cette opération autant de fois que nécessaire, on voit que $\delta(f)_{|U_n(\mathfrak{p})}$ est nul pour tout n. Donc $\delta(f)$ est nul. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.3.4.

3.4. *Grandes lignes de la démonstration du théorème 3.1.1.*

On va munir $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ d'une structure de $\mathcal{D}_\pi$-module à droite pour laquelle on ait la relation

$$(**)\qquad \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall \lambda \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\big(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)\big),\quad -(-1)^{|X||\lambda|}X\cdot\lambda = \lambda\cdot D_\pi(X).$$

Ceci permet d'achever la démonstration car (**) implique l'inclusion $I_\pi \subset \check{I}_{\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)}$. En appliquant ce résultat à la représentation $\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$, on obtient l'inclusion inverse. D'où le théorème.

3.5. *Formes volumes.*

Reprenons les mêmes notations et désignons par L le A-module libre de type fini $\mathrm{Der}(A)$. Le A-module $\mathrm{Ber}(L^*)$ est appelé *superespace des formes volumes* et sera noté $\mathrm{Vol}(A)$. Il est muni d'une structure naturelle de A-L-module. L'action d'un élément D de L sur le A-module des formes

volumes est appelée *dérivée de Lie* suivant le champ de vecteurs D et est notée L_D. Explicitons cette action. Soit $[X] = (X_1, \dots, X_p)$ une base homogène de $\mathfrak{p}$ telle que les d_0 vecteurs pairs figurent en premier. Posons $\partial_{X_i} = \partial_i$ et notons $\Delta_{[X]}$ la classe de l'élément $\pi\partial_1^* \cdots \pi\partial_{d_0}^* \partial_{d_0+1} \cdots \partial_p$ dans $H^{d_0}(K(L^*))$. Si $D = \sum_i f_i \partial_i$, un calcul rapide montre que l'on a :

$$(***) \quad \forall f \in A, \quad L_D\big(f\Delta_{[X]}\big) = D(f)\Delta_{[X]} + \sum_i (-1)^{|f_i||X_i|} \partial_i(f_i) f \Delta_{[X]}.$$

Propriétés de la dérivée de Lie.

Soient (D, D') deux champs de vecteurs homogènes et g un élément de A. On a :

(a) $L_{[D,D']} = L_D \circ L_{D'} - (-1)^{|D||D'|} L_{D'} \circ L_D$;

(b) $L_D \circ \mu_g = \mu_{D(g)} + (-1)^{|D||g|} \mu_g \circ L_D$;

(c) $L_{gD} = (-1)^{|D||g|} \mu_{D(g)} + \mu_g \circ L_D$.

Démonstration. — Les propriétés (a) et (b) découlent de la définition de la dérivée de Lie. La propriété (c) se démontre aisément à l'aide de l'expression explicite (***) de L_D. □

Si X est un élément de $\mathfrak{g}$, on notera ξ_X la dérivation $D_0(X)$. Remarquons que si H est dans $\mathfrak{h}$, ξ_H est un élément de $\mathfrak{a}\,\mathrm{Der}(A)$. On définit une action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{Vol}(A)$ en posant, pour un élément ω de $\mathrm{Vol}(A)$,

$$X \cdot \omega = L_{\xi_X}(\omega).$$

D'après la propriété (b) des dérivées de Lie, on munit ainsi $\mathrm{Vol}(A)$ d'une structure de $\mathcal{V}$-module.

PROPOSITION 3.5.1. — *Les $\mathfrak{h}$-modules $\mathrm{Vol}(A)/\mathfrak{a}\,\mathrm{Vol}(A)$ et $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ sont isomorphes. Notons ρ la projection de $\mathrm{Vol}(A)$ sur $\mathrm{Vol}(A)/\mathfrak{a}\,\mathrm{Vol}(A)$. L'application Υ de $\mathrm{Vol}(A)$ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ définie par*

$$\forall \omega \in \mathrm{Vol}(A),\ \forall (Y_1 \dots Y_n) \in \mathfrak{g}, \quad \big\langle Y_1 \cdots Y_n, \Upsilon(\omega) \big\rangle = \rho\big(L_{\xi_{Y_1}} \dots L_{\xi_{Y_n}}(\omega)\big)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{V}$-modules.

Démonstration de la proposition 3.5.1.

Les $\mathfrak{h}$-modules $\mathrm{Vol}(A)/\mathfrak{a}\,\mathrm{Vol}(A)$ et $\mathrm{Ber}(\mathrm{Der}(A)^*/\mathfrak{a}\,\mathrm{Der}(A)^*)$ sont isomorphes. Les $\mathfrak{h}$-modules $\mathrm{Der}(A)^*/\mathfrak{a}\,\mathrm{Der}(A)^*$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*$ sont aussi isomorphes. La proposition 3.5.1 découle alors de l'application du théorème de Blattner (théorème 2.3.3). □

En utilisant Υ on peut définir la dérivée de Lie d'un élément D de L sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ par $\Upsilon \circ L_D \circ \Upsilon^{-1}$. On la notera encore L_D. Sur le superespace $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$, on a donc la relation :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*),\ \forall X \in \mathfrak{g}, \quad X \cdot \lambda = L_{\xi_X}(\lambda).$$

Posons

$$\Upsilon(\Delta_{[X]}) = \omega_{[X]}.$$

On dira que $\omega_{[X]}$ est la *base* du A-module $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ associée à $[X]$. Notons θ la base $\left[\pi X^1 \cdots \pi X^{d_0} X_{d_0+1} \cdots X_p\right]$ de $\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$. Alors $\omega_{[X]}$ est l'élément de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ qui vérifie :

$$\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}_{d_0+\epsilon d_1}, \quad \left\langle X_1^{\alpha_1} \cdots X_p^{\alpha_p}, \omega_{[X]} \right\rangle = \delta_{\alpha_0,0} \cdots \delta_{\alpha_n,0} \theta.$$

3.6. *Démonstration du théorème 3.1.1.*

3.6.1. Structure de $\mathcal{D}_\pi$-module à droite sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^* \otimes \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$.

On définit l'application $(\ ,\ )$ de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*) \times \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ dans A comme suit. Soient ν dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*)$, λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ et u dans $U(\mathfrak{g})$. Posons :

$$\Delta(u) = \sum_{j=1}^{n} u'_j \otimes u''_j.$$

On a alors :

$$\left\langle u, (\nu, \lambda) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \langle u'_j, \nu \rangle, \langle u''_j, \lambda \rangle \right\rangle (-1)^{|u''_j||\nu|}.$$

L'application $(\ ,\ )$ fournit une dualité non dégénérée entre $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*)$ et $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. Soit U dans $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$. On définit l'élément ${}^tU$ de $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*))$ par :

$$\forall \nu \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*),\ \forall \lambda \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi), \quad ({}^tU\nu, \lambda) = (-1)^{|U||\nu|}(\nu, U\lambda).$$

L'application

$$\Xi : \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*) \otimes_A \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)\big) \longrightarrow \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\big(\pi^* \otimes_k \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)\big)$$

définie par

$$\forall \lambda \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*),\ \forall \omega \in \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\big(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)\big), \quad \Xi(\lambda \otimes_A \omega) = \lambda\, \omega$$

est un isomorphisme de A-$\mathfrak{g}$-modules. On identifiera donc $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*) \otimes_A \mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ et $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^* \otimes_k \mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$. On définit les opérations

suivantes. Pour tout A dans $\mathrm{End}_A(\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$, λ dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*)$, ω dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$, et ξ dans $\mathrm{Der}(A)$ supposés homogènes, on pose :

$$(\lambda\otimes\omega)\cdot A=({}^tA\cdot\lambda)\otimes\omega(-1)^{(|\lambda|+|\omega|)|A|},$$

$$(\lambda\otimes\omega)\cdot\widetilde{\nabla}_\xi=-(-1)^{|\xi||\omega|}\lambda\otimes L_\xi(\omega)-(-1)^{|\xi|(|\lambda|+|\omega|)}\widetilde{\nabla}_\xi(\lambda)\otimes\omega.$$

D'après la définition de $\mathcal{D}_\pi^{\widetilde{\nabla}}$ par générateurs et relations, on définit ainsi une structure de $\mathcal{D}_\pi$-module à droite sur $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$.

3.6.2. Fin de la démonstration.

Nous définissons une nouvelle structure de A-$\mathfrak{g}$-module sur l'ensemble $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ notée « $*$ » comme suit :

$$\forall\lambda\in\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)),\ \forall X\in\mathfrak{g},\forall f\in A,$$
$$X*\lambda=-(-1)^{|\lambda||X|}\lambda\cdot D_\pi(X),$$
$$f*\lambda=f\lambda.$$

Nous noterons W le module $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)))$ muni de cette nouvelle structure de A-$\mathfrak{g}$-module. Appliquons-lui le théorème de Blattner.

Soient $[X]$ une base d'un supplémentaire gradué de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\omega_{[X]}$ la base du A-module $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ qu'elle définit. Associée à $[X]$, on a aussi une injection de V (resp. V^*) dans $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ (resp. $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*)$). Dans le calcul qui suit, nous identifierons les éléments de V et V^* avec leur image. Montrons que l'application ϕ de $W/\mathfrak{a}W$ dans $V^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ définie par : pour tout élément λ de $\mathrm{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*)$,

$$\phi(\lambda\omega_{[X]}+\mathfrak{a}W)=\langle 1,\lambda\rangle\otimes\langle 1,\omega_{[X]}\rangle=\langle 1,\lambda\rangle\otimes\theta$$

est un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules de $W/\mathfrak{a}W$ dans $\pi^*\otimes\mathrm{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$. Soient H un élément de $\mathfrak{h}$ et v^* un élément de V^*. Calculons :

$$\phi\big(H*(v^*\otimes\omega_{[X]}+W/\mathfrak{a}W)\big).$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\phi\big(H*(v^*\otimes\omega_{[X]}+W/\mathfrak{a}W)\big)\\
&\quad=-\phi\big((v^*\otimes\omega_{[X]})\cdot D_\pi(H)+W/\mathfrak{a}W\big)(-1)^{|H|(|v^*|+|\omega_{[X]}|)}\\
&\quad=\phi\big({}^t(-F_\pi^0(H))v^*\otimes\omega_{[X]}+v^*\otimes(L_{\xi_H}\omega_{[X]})(-1)^{|H||v^*|}+W/\mathfrak{a}W\big)\\
&\quad=-\big\langle 1,{}^t(F_\pi^0(H))v^*\big\rangle\otimes\theta-(-1)^{|H||v^*|}\,\mathrm{str}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(H)\,v^*\otimes\theta.
\end{aligned}$$

Or, pour tout élément v de V, on a

$$\begin{aligned}\big\langle 1, ({}^t(F_\pi^0(H))v^*, v)\big\rangle &= (-1)^{|H||v^*|}\big\langle 1, (v^*, H\cdot v)\big\rangle \\ &= (-1)^{|H||v^*|}\big\langle \langle 1, v^*\rangle, \langle H, v\rangle\big\rangle \\ &= (-1)^{|H||v^*|}\big\langle v^*, \pi(H)(v)\big\rangle \\ &= -\big\langle \pi^*(H)v^*, v\big\rangle.\end{aligned}$$

D'où $\langle\langle 1, {}^t(F_\pi^0(H))v^*\rangle, v\rangle = -\langle \pi^*(H)v^*, v\rangle$ et donc

$$\big\langle 1, {}^t(F_\pi^0(H))v^*\big\rangle = -\pi^*(H)v^*.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}&\phi\big(H * (v^*\otimes \omega_{[X]} + \mathfrak{a}W)\big) \\ &\qquad = (\pi^*(H)\, v^*)\otimes\theta - (-1)^{|H||v^*|}\operatorname{str}\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(H)\, v^*\otimes\theta.\end{aligned}$$

Ceci prouve que ϕ est un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules de $W/\mathfrak{a}W$ dans $V^*\otimes \operatorname{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$. Il existe donc un isomorphisme de A-$\mathfrak{g}$-modules Ψ de W dans $\operatorname{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes \operatorname{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ donné par le théorème de Blattner (2.3.3). Sur $\operatorname{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi^*\otimes\operatorname{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$, on peut définir une nouvelle structure de $\mathcal{D}_\pi$-module à droite en posant :

$$\forall\delta\in D_\pi,\ \forall\lambda\in \operatorname{Coind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\big(\pi^*\otimes \operatorname{Ber}((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)\big),\quad \lambda\cdot\delta = \Psi\big[\Psi^{-1}(\lambda)\cdot\delta\big].$$

Cette nouvelle structure vérifie la relation (**). Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.1.

BIBLIOGRAPHIE

[Bla] R.J. BLATTNER, Induced and produced representations of Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 144 (1969), 457–474.

[BB] W. BORHO, J.L. BRYLINSKI, Differential operators on homogeneous spaces I, Invent. Math., 69 (1982), 437–476.

[C] S. CHEMLA, Cohomologie locale de Grothendieck et représentations induites de superalgèbres de Lie, Mathematische Annalen, 297 (1993), 371–382.

[Du] M. DUFLO, Sur les idéaux induits dans les algèbres enveloppantes, Invent. Math., 67 (1982), 385–393.

[Fe] G.L. FEL'DMAN, Global dimension of rings of differential operators, Trans. Moscow. Math. Soc., 1 (1982), 123–147.

[K] B. KOSTANT, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, Lecture Notes in Math. n° 570, Springer-Verlag, 1975.

[L] D.A. LEITES, Introduction to the theory of supermanifolds, Uspeki Mat. Nauk, 35, 1 (1980).

[Le] T. LEVASSEUR, Critères d'induction et de coinduction pour certains anneaux d'opérateurs différentiels, J. Algebra, 110, n° 2 (1987), 530–562.

[Ma] Y.I. MANIN, Gauge field theory and complex geometry. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.

[Ri] G.S RINEHART, Differential forms on general commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 195–222.

[Sch] M. SCHEUNERT, The theory of Lie superalgebras, Lecture Notes in Math., n° 716, Springer-Verlag, 1979.

Manuscrit reçu le 12 novembre 1993.

Sophie CHEMLA,
Université Paris 6
Analyse complexe et géométrie
Aile 45–46, Boîte 172, 5^{e} étage
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 (France).